Sobre el autor.

Adolfo Chapuz Benítez

Lic. En Matemáticas en la Universidad Juárez Autónoma De Tabasco

Profesor desde el año 1999 de matemáticas en el Instituto Tecnológico Superior De Comalcalco en Tabasco, México

Creador del proyecto "Como Aprendo Matemáticas" (CAM).

Director del Instituto de Matemáticas de Comalcalco (IMCO).

Dedico este trabajo primeramente a Cristo Jesús, a Él sea toda lo gloria, toda la honra y toda la alabanza. Él es el camino, y la verdad, y la vida Juan 14:6

A mi esposa Alejandra, a mis hijas Dulce, Regina y Alejandra por quienes me esfuerzo para que tengan una vida llena de bendiciones.

A mis padres Felipe y Valentina. Los mejores.

A mis hermanos: Nena, Mini, Sandra, Richard, Marbe e Ingrid. Inigualables.

A todos mis alumnos. De todo corazón.
Esto es para todos.

https://www.facebook.com/ComoAprendoMatematicas/

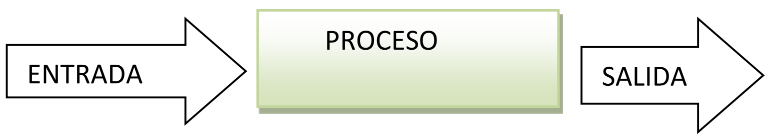
Índice:

1. La Anti derivada, Primitiva o Integral Indefinida

¿Haz escuchado hablar de las Integrales o Antiderivadas?

En este artículo quiero darte la IDEA que está detrás de las Integrales desde el punto de vista operacional, es decir, visto el concepto como un PROCESO.

En general, un proceso (cualquiera) tiene una ENTRADA y una SALIDA. La entrada nosotros la proponemos y el proceso la transforma (de alguna manera) en una salida.



Cuando calculamos la derivada de una función, en realidad lo que estamos haciendo es transformar esa función en otra, que es obtenida a través de las derivadas elementales y de las reglas de derivación usuales:

Por ejemplo la derivada de la función $\cos(x)$ es la función $-sen(x)$. Así $\cos(x)$ es transformada en $-sen(x)$ vía la derivada que, como sabemos, implica un proceso de límite.

En símbolo esta transformación queda expresada como:

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -sen(x)$$

Lo mismo podemos imaginar lo que el proceso de derivación hace con la "carita triste", la transforma, digamos en una "carita feliz".

$$\frac{d}{dx}(☹) = ☺$$

Es decir, empezamos con una función y obtenemos la derivada. Este es el proceso de DERIVACIÓN. Observemos la siguiente tabla, en donde pasamos de la primera a la segunda columna:

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
4	0
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
x^5	$5x^4$
$\cos(x)$	$-sen(x)$
$sen(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$

El proceso de INTEGRACIÓN (en matemáticas) es el proceso inverso.
Ahora, dada la derivada nosotros debemos encontrar la función original.

A esta función original le llamamos ANTIDERIVADA, PRIMITIVA O INTEGRAL INDEFINIDA de la función que hemos nosotros propuesto.

Ejercicio Express.
Completa la siguiente tabla, encontrando las funciones de la columna izquierda (antiderivadas), es decir, las funciones cuyas derivadas son las expresiones de la columna derecha.

ANTIDERIVADA $f(x)$	Derivada $f'(x)$
?	0
?	1
?	$-9x^{-10}$
?	$5x^4$
?	$sen(x)$

https://www.facebook.com/ComoAprendoMatematicas/

?	$\sec(x)\tan(x)$
?	$-\csc^2(x)$
??	x^{2011}
?	$\ln(x)$
?	$\sqrt{\tan(x)}$

Podemos observar que las fórmulas de derivación nos van a proporcionar expresiones equivalentes para lasprimeras INTEGRALES (ANTIDERIVADAS).

El problema surge cuando: dada una función $f(x)$ se desea encontrar su antiderivada $F(x)$ sin contar previamente una expresión de derivación que las relacione.

El problema de **encontrar una integral** lo podemos plantear como sigue:

Dada $f(x)$, ENCONTRAR otra función $F(x)$ talque $F'(x) = f(x)$

NOTACIÓN: A esta $F(x)$ se le representa por un símbolo especial (que a veces parece un poco complicado),

$$\boxed{F(x) = \int f(x)dx}$$

Donde:

$\int$: Símbolo de Integral

$f(x)$: Integrando

dx: Diferencial de x. Diferencial de la variable o simplemente "dx"
IMPORTANTE!!!

$\int f(x)dx = F(x)$ si y sólo si $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

Las fórmulas conocidas de derivadas nos van proporcionar sus equivalentes en notación de integrales, de modo tal que, las fórmulas de la izquierda generan las correspondientes de la derecha:

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$
4. $\frac{d}{dx}e^{-x} = -e^{-x}$
5. $\frac{d}{dx}sen(x) = \cos(x)$
6. $\frac{d}{dx}\cos(x) = -sen(x)$
7. $\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^{2}(x)$
8. $\frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^{2}(x)$
9. $\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x)$
10. $\frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x)$
11. $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx}x^{n} = nx^{n-1}$

1. $\int 0dx = c$
2. $\int dx = x + c$
3. $\int e^{x}dx = e^{x} + c$
4. $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + c$
5. $\int \cos(x)dx = sen(x) + c$
6. $\int sen(x)dx = -\cos(x) + c$
7. $\int \sec^{2}(x)dx = \tan(x) + c$
8. $\int \csc^{2}(x)dx = -\cot(x) + c$
9. $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + c$
10. $\int \csc(x)\cot(x)dx = -\csc(x) + c$
11. $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + c$
12. $\int x^{n}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

NOTA: Hay muchas fórmulas de integración que son directar, pero no quiero saturarte de ellas en éste momento. Más adelante te las presento con mucho gusto ☺

EJERCICIOS DE ANTIDERIVADAS:

Compruebe, derivando la expresión de la derecha, si las siguientes integrales son correctas.

1. $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$
2. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$
3. $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$
4. $\int (x+5)^{2011} dx = \frac{(x+5)^{2012}}{2012} + c$
5. $\int 3^x dx = \frac{1}{\ln(3)}3^x + c$

Para resolver estos ejercicios vamos utilizar el siguiente resultado que nos dice simplemente que para comprobar si una fórmula de integración es válida sólo es suficiente comprobar que la derivada del lado derecho es igual al integrando (lo que está adentro de la integral).

En símbolos:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x)}$$

Respuesta a los ejercicios anteriores.

1.- $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$

Prueba:

Debemos demostrar que $\frac{d}{dx}[x\ln(x) - x + c] = \ln(x)$

$$\frac{d}{dx}[x\ln(x) - x + c] = \frac{d}{dx}x\ln(x) - \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}c$$

1.- Separamos en 3 derivadas.

2.- Derivamos $\frac{d}{dx}[x\ln(x)]$ como un producto $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$= \overbrace{x(\frac{1}{x}) + \ln(x)(1)} - 1 + 0$$

$$= \cancel{1} + \ln(x) - \cancel{1}$$

$$= \ln(x)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c}$$

2.- $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$

Prueba:

Debemos demostrar que $\frac{d}{dx}[xe^x - e^x] = xe^x$

1.- Separamos en 3 derivadas.

$$\frac{d}{dx}[xe^x - e^x + c] = \frac{d}{dx}[xe^x] - \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(c)$$

2.- Derivamos $\frac{d}{dx}(xe^x)$ como un producto.

$\frac{d}{dx}(xe^x) = x(e^x) + e^x(1) = xe^x + e^x$

$$= \overbrace{xe^x + e^x} - e^x + 0$$

$$= xe^x$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int xe^x dx = xe^x - e^x + c}$$

3.- $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + c$

Prueba:

Debemos demostrar que $\frac{d}{dx}[\frac{1}{3} e^{x^3} + c] = x^2 e^{x^3}$

1.- Separamos en 2 derivadas.

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{3} e^{x^3} + c] = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}[e^{x^3}] + \frac{d}{dx} c$$

2.- Derivamos $\frac{d}{dx}(e^{x^3})$ usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3} \frac{d}{dx}(x^3) + 0$$

3.- Eliminamos 1/3 con el 3

$$= \frac{1}{\cancel{3}} e^{x^3} (\cancel{3} x^2)$$

$$= e^{x^3}(x^2)$$

4.- Acomodamos los factores (el orden de los factores no altera el producto)

$$= x^2 e^{x^3}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + c}$$

.

4. $\int (x+5)^{2011}dx = \frac{(x+5)^{2012}}{2012} + c$

Prueba:

Por demostrar que: $\frac{d}{dx}\left[\frac{(x+5)^{2012}}{2012} + c\right] = (x+5)^{2011}$

1.- Separamos en 2 derivadas y sacamos la constante 1/2012

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x+5)^{2012}}{2012} + c\right] = \frac{1}{2012}\frac{d}{dx}[(x+5)^{2012}] + \frac{d}{dx}[c]$$

2.- Derivamos $\frac{d}{dx}(x+5)^{2012}$ usando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2012}}\cdot \cancel{2012}(x+5)^{2011}\frac{d}{dx}(x+5)$$

$$= (x+5)^{2011}(1)$$

$$= (x+5)^{2011}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int (x+5)^{2011}dx = \frac{(x+5)^{2012}}{2012} + c}$$

5.- $\int 3^x dx = \frac{1}{\ln(3)} 3^x + c$

Prueba:

Por demostrar que $\frac{d}{dx}[\frac{1}{\ln(3)} 3^x + c] = 3^x$.

Primero una identidad:

como las funciones exponencial y logaritmo natural son inversas se cumple la relación

$$e^{\ln(A)} = A$$

Asi tenemos que …

$$3^x = e^{\ln(3^x)}$$

$$= e^{x\ln(3)}$$

Bajamos el exponente usando la propiedad del logarítmo

$$\ln A^m = m\ln(A)$$

Entonces, separamos en 2 derivadas…

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{\ln(3)} 3^x + c] = \frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(3)} 3^x + \frac{d}{dx}(c)$$

…sacamos la constante 1/ln(3), y la derivada de una constante es cero…

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{\ln(3)} 3^x + c] = \frac{1}{\ln(3)}\frac{d}{dx}(3^x)$$

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{\ln(3)}3^x + c] = \frac{1}{\ln(3)}\frac{d}{dx}(e^{x\ln(3)})$$

1.-sustituímos $3^x = e^{x\ln(3)}$

2.- Derivamos $\frac{d}{dx}(e^{x\ln(3)})$ usando la regla de la cadena $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$

$$= \frac{1}{\ln(3)}e^{x\ln(3)}\frac{d}{dx}(x\ln(3))$$

$$= \frac{1}{\ln(3)}e^{x\ln(3)} \cdot \ln(3)\frac{d}{dx}(x)$$

$$= \frac{\ln(3)}{\ln(3)}e^{x\ln(3)}(1)$$

$$= e^{x\ln(3)}$$

$$= 3^x$$

Regresamos a $3^x = e^{x\ln(3)}$

Por tanto:

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{\ln(3)}3^x + c] = 3^x$$

y

$$\int 3^x\,dx = \frac{1}{\ln(3)}3^x + c$$

EJERCICIOS DE ANTIDERIVADAS:

Compruebe, derivando la expresión de la derecha, si las siguientes integrales son correctas.

$1.\int x^{-7}dx = -\frac{1}{6x^6} + c$

$2.\int t^{2018}dt = \frac{t^{2019}}{2019} + c$

$3.\int 6x^5(x^6-6)^{13}dx = \frac{(x^6-6)^{14}}{14} + c$

$4.\int \cos(5x)dx = \frac{1}{5}sen(5x) + c$

$5.\int sen(6t)dt = -\frac{1}{7}\cos(7t) + c$

$6.\int \tan(10\theta)d\theta = -\frac{1}{10}\ln(\cos 10\theta) + c$

$7.\int 4x^3e^{x^4}dx = e^{x^4} + c$

$8.\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}dt = e^{\sqrt{t}} + c$

$9.\int \frac{\ln z}{z}dz = \frac{\ln^2 z}{2} + c$

$10.\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \ln(\ln x) + c$

$11.\int \sec\theta d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$

$12.\int (4t^6 + t^5)dt = \frac{4}{7}t^6 + \frac{t^6}{6} + c$

Recomendación: Si necesitas derivar adquiere Como Aprendo Derivadas(CAD).

(Clic en la imagen.)

https://www.facebook.com/ComoAprendoMatematicas/