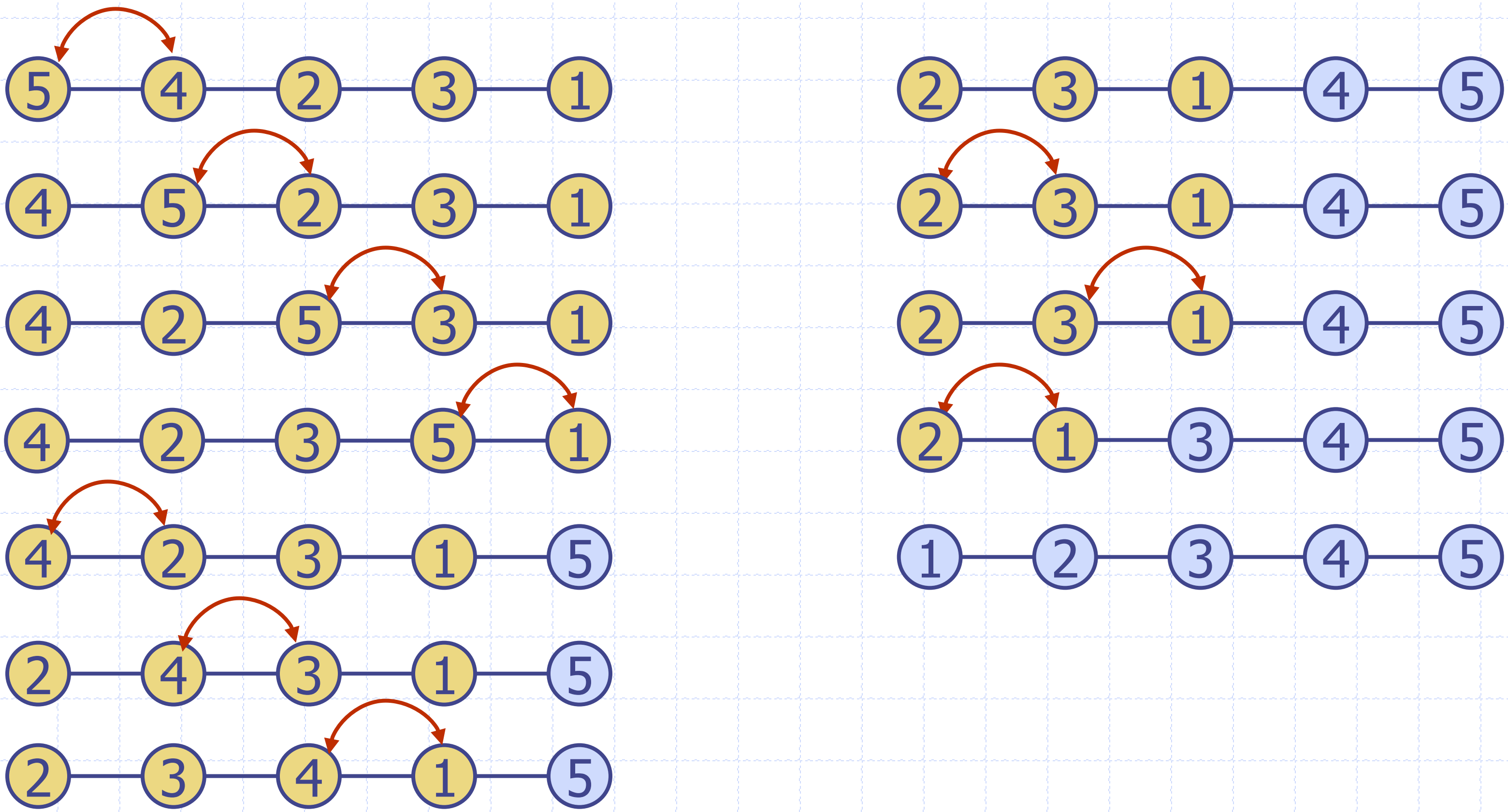
Bubble Sort

- Considere uma seqüência de ***n*** elementos que se deseja ordenar. O método da bolha resolve esse problema através de várias passagens sobre a seqüência
- Não é um algoritmo eficiente, é estudado para fins de desenvolvimento de raciocínio
- funcionamento:
  - Na primeira passagem, uma vez encontrado o maior elemento, este terá sua colocação trocada até atingir a última posição
  - Na segunda passagem, uma vez encontrado o segundo maior elemento, este terá sua colocação trocada até atingir a penúltima posição
  - E assim por diante
- Tempo total $O(n^2)$

Algorithm ***bubbleSort***(***A***)
    Input *array* ***A*** com ***n*** elementos
    Output *array* ***A*** ordenado
    for ***i=0 até n-2***
        for ***j=0 até n-2-i***
            if (A[j] > **A[j+1])**
                aux ← ***A***[j]
                A[j] ← ***A***[j+1]
                A[j+1] ← aux

Bubble Sort

- Exemplo



Select Sort

- O método de ordenação por Seleção Direta é levemente mais eficiente que o método Bubblesort
- Trata-se de um algoritmo apenas para estudo e ordenação de pequenos arranjos
- funcionamento:
  - Varre-se o arranjo comparando todos os seus elementos com o primeiro.
  - Caso o primeiro elemento esteja desordenado em relação ao elemento que está sendo comparado com ele no momento, é feita a troca.
  - Ao se chegar ao final do arranjo, teremos o menor valor (ou o maior, conforme a comparação) na primeira posição do arranjo
- Tempo total $O(n^2)$

Algorithm *selectSort(A)*

    Input *array* ***A*** com ***n*** elementos

    Output *array* ***A*** ordenado

    for ***i=0 até n-2***

        for ***j=i+1 até n-1***

            if (*A*[j] < *A*[i])

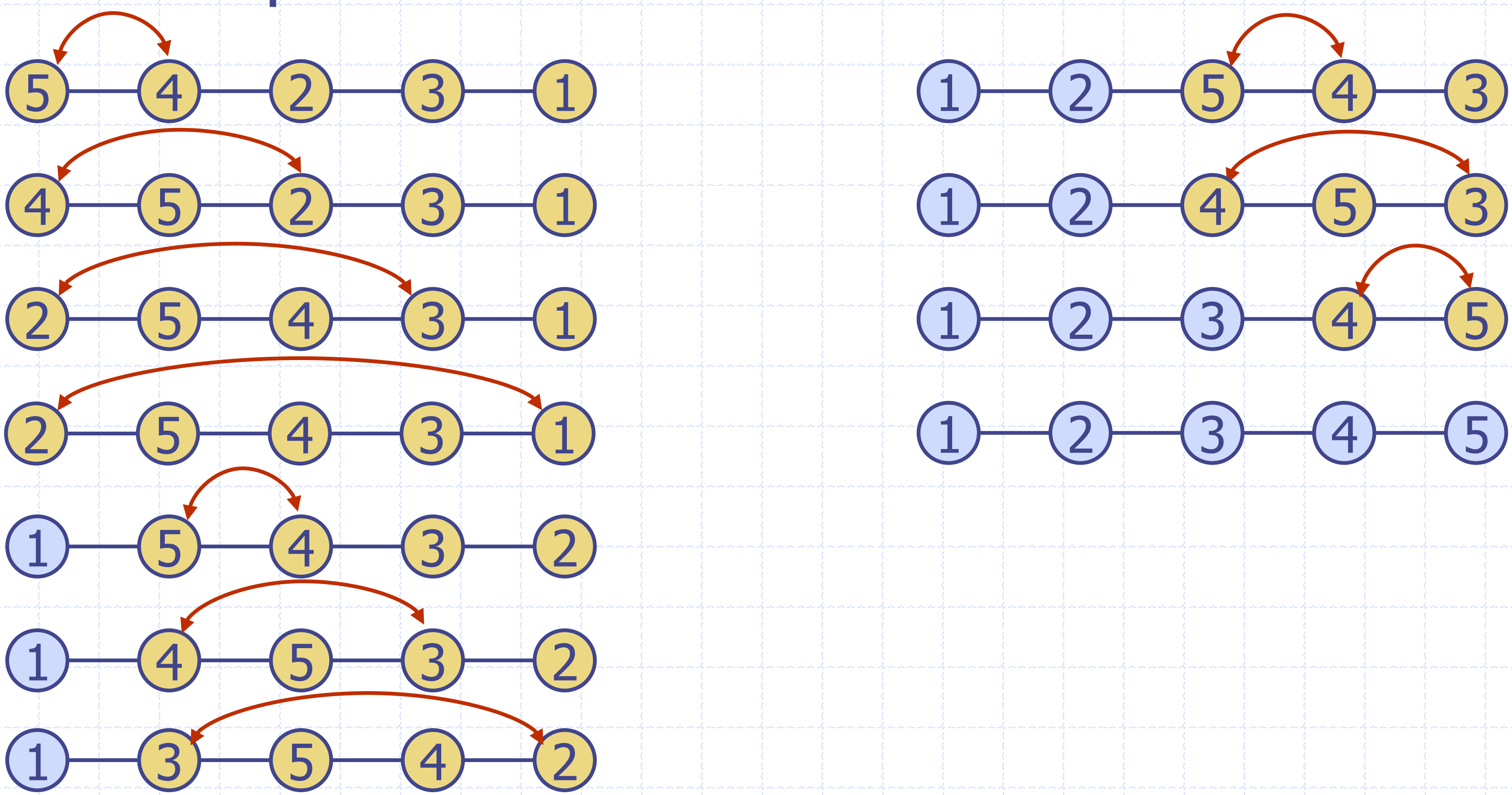
                aux ← ***A***[j]

                A[j] ← ***A***[i]

                A[i] ← aux

Select Sort

- Exemplo



Insert Sort

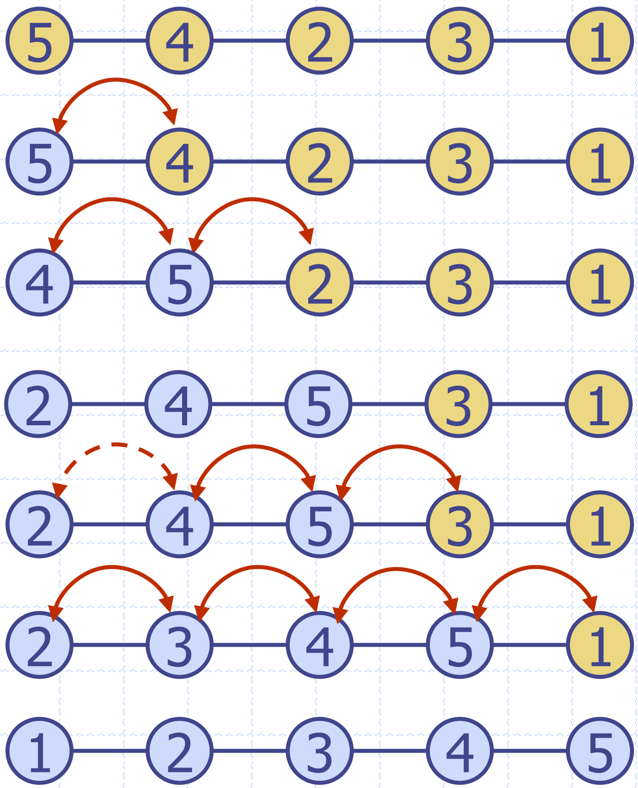
- O método de ordenação por Inserção Direta é o mais rápido entre os outros métodos considerados básicos (Bubblesort e Seleção Direta)
- A principal característica deste método consiste em ordenarmos nosso arranjo utilizando um sub-arranjo ordenado localizado em seu inicio.
- A cada novo passo, acrescentamos a este sub-arranjo mais um elemento, até que atingimos o último elemento do arranjo fazendo assim com que ele se torne ordenado

- Tempo total $O(n^2)$

```
Algorithm insertSort(A)
    Input array A com n elementos
    Output array A ordenado
    for i=1 até n-1
        aux ← A[i]
        j ← i – 1
        while ( j>=0  e  aux < A[j] )
            A[j+1] ← A[j]
            j ← j – 1
        A[j+1] ← aux
```

Insert Sort

- Exemplo



Heap-Sort

- Considere uma fila de prioridade com n itens implementado com um heap
  - O espaço usado é $O(n)$
  - métodos insert e removeMin rodam em tempo $O(\log n)$
  - métodos size, isEmpty, e min rodam em tempo $O(1)$
- Usando uma fila de prioridade baseada em heap, podemos ordenar uma sequência de n elementos em tempo $O(n \log n)$
- O algoritmo é chamado de *heap-sort*
- *heap-sort* é muito mais rápido do que algoritmos quadráticos, como inserção e seleção

Divisão e Conquista

- Divisão e Conquista é um paradigma de desenvolvimento de algoritmo:
  - Divisão: divida a entrada S em dois conjuntos disjuntos S_1 and S_2
  - Recursão: solucione os problemas associados com S_1 e S_2
  - Conquista: Combine as soluções para S_1 e S_2 dentro da solução S
- O caso base para a recursão são problemas de tamanho 0 ou 1
- Merge-sort é um algoritmo baseado no paradigma divisão e conquista
- Como o heap-sort
  - Ele usa um comparador
  - O tempo é $O(n \log n)$
- Diferente heap-sort
  - Não usa uma fila de prioridade auxiliar
  - Ele acessa os dados de forma sequencial

Merge-Sort

- Merge-sort com uma seqüência de entrada S com n elementos consiste de três passos:
  - Divide: dividir S em duas sequencias S_1 and S_2 de aproximadamente $n/2$ elementos cada
  - Recursão: recursivamente ordene S_1 **e** S_2
  - Conquista: junte S_1 *e* S_2 em uma única sequência ordenada

Algorithm ***mergeSort***(S, C)
  Input sequence S with n elements, comparator C
  Output sequence S sorted according to C
  if $S.size() > 1$
    $(S_1, S_2) \leftarrow partition(S, n/2)$
    $mergeSort(S_1, C)$
    $mergeSort(S_2, C)$
    $S \leftarrow merge(S_1, S_2)$

Juntando Duas Sequencias Ordenadas

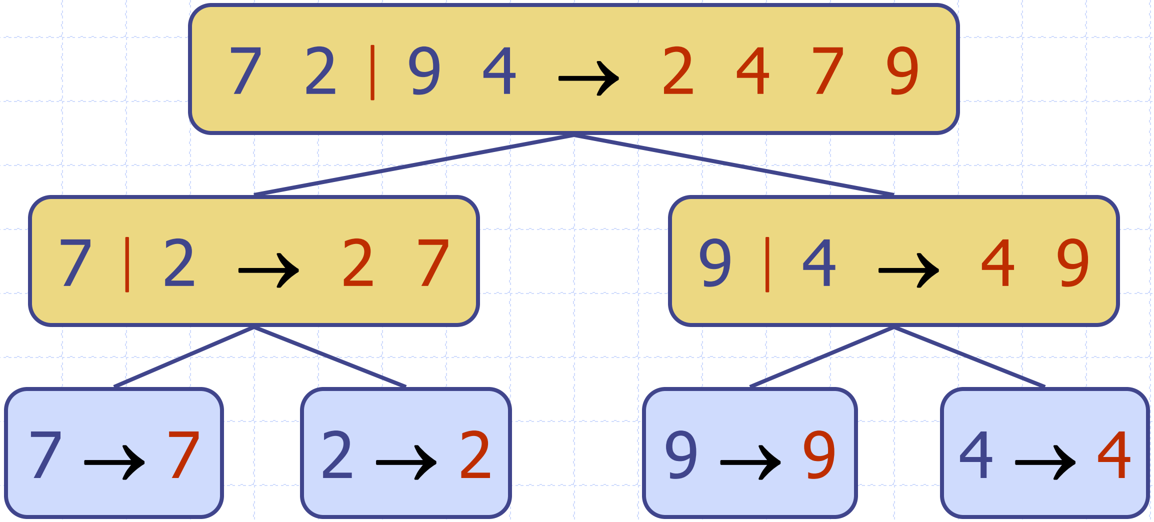
- O passo de conquista do merge-sort consiste de juntar duas sequências ordenadas ***A* e *B*** em uma sequência ***S*** contendo a união dos elementos de ***A* e *B***
- Unindo duas sequências ordenadas, cada uma com $n/2$ elementos e implementado por uma lista duplamente encadeada leva o tempo $O(n)$

Algorithm *merge*(*A*, *B*)
  Input sequences *A* and *B* with
    $n/2$ elements each
  Output sorted sequence of $A \cup B$

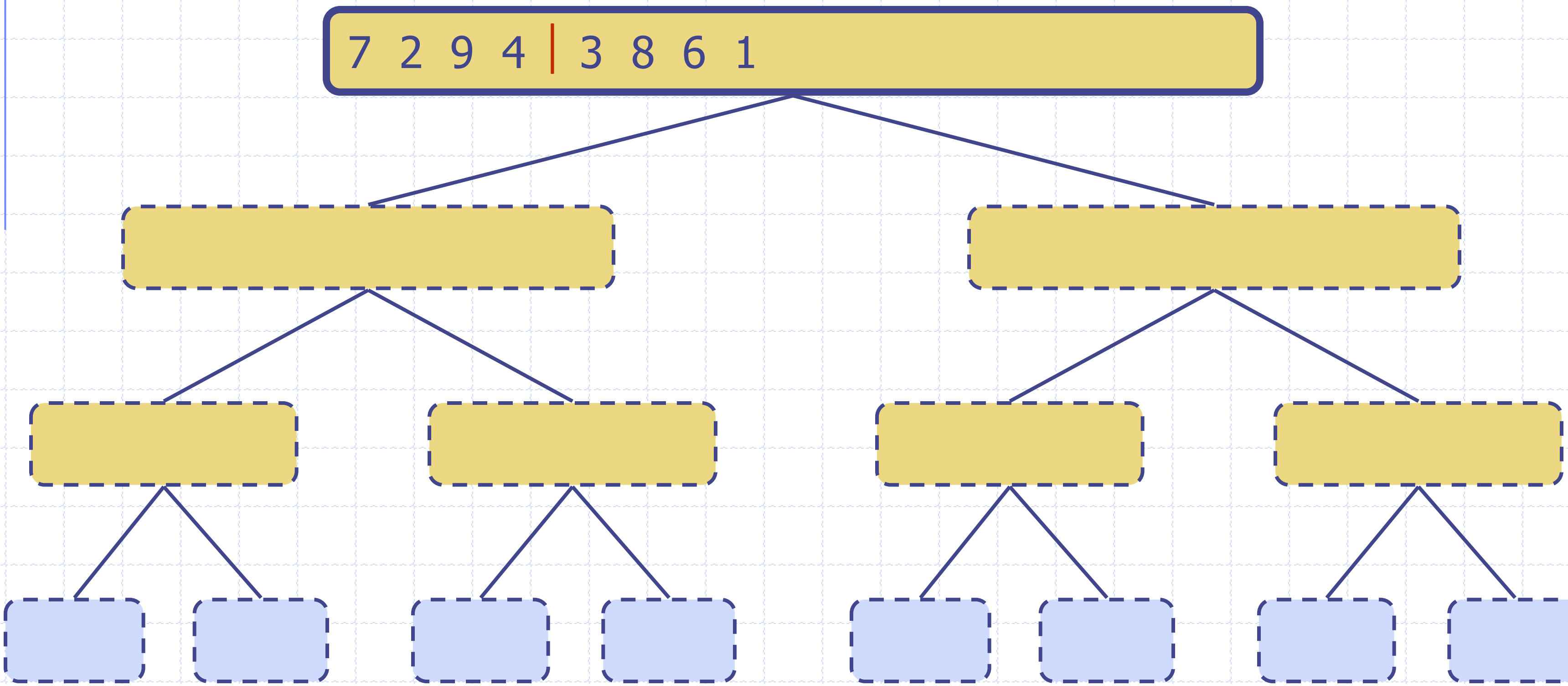
  $S \leftarrow$ empty sequence
  while $\neg$*A.isEmpty*() $\wedge$ $\neg$*B.isEmpty*()
    if *A.first*().*element*() < *B.first*().*element*()
      S.insertLast(*A.remove*(*A.first*()))
    else
      S.insertLast(*B.remove*(*B.first*()))
  while $\neg$*A.isEmpty*()
    S.insertLast(*A.remove*(*A.first*()))
  while $\neg$*B.isEmpty*()
    S.insertLast(*B.remove*(*B.first*()))
  return *S*

Árvore Merge-Sort

- Uma execução do merge-sort pode ser vista como uma árvore binária
  - Cada nó representa uma chamada recursiva do merge-sort e armazena
    - Sequências desordenadas antes da execução e suas partições
    - Sequências ordenadas no fim da execução
  - A raiz é a chamada inicial
  - As folhas são chamadas de subseqüências de tamanho 0 ou 1



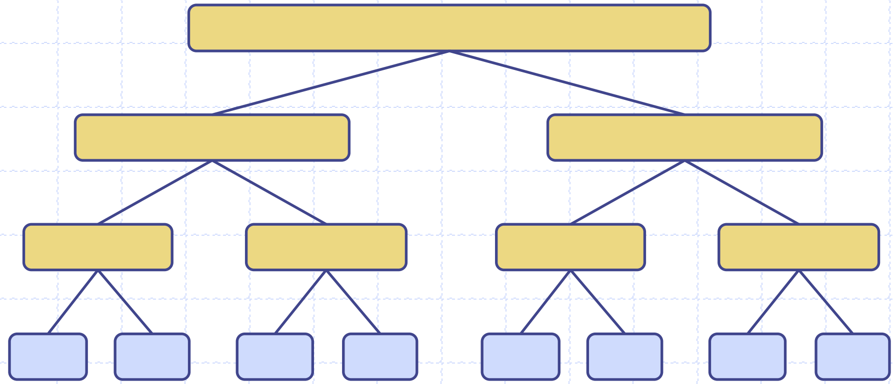
Exemplo



Análise do Merge-Sort

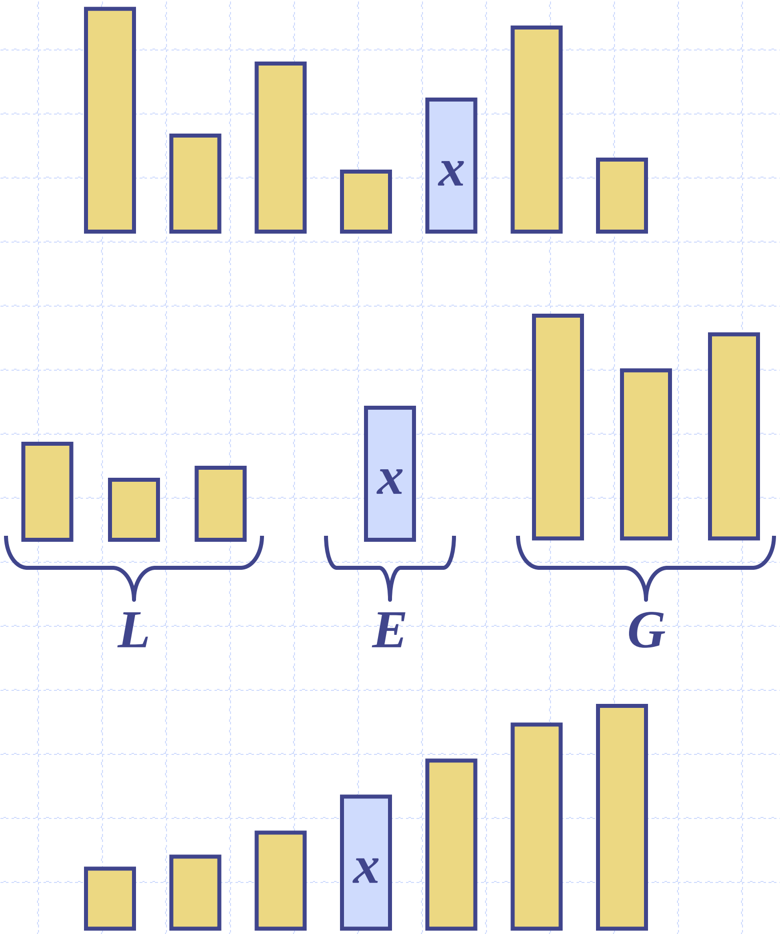
- A altura h da árvore merge-sort é $O(\log n)$
  - Em cada chamada recursiva a sequência é dividida pela metade
- A quantidade de trabalho no nó de profundidade i é $O(n)$
  - Nós particionamos e juntamos 2^i seqüências de tamanho $n/2^i$
  - Nós fazemos 2^{i+1} chamadas recursivas
- Assim, o tempo do merge-sort é $O(n \log n)$

depth	#seqs	size
0	1	n
1	2	$n/2$
i	2^i	$n/2^i$
…	…	…



Quick-Sort

- Quick-sort é um algoritmo aleatório baseado no paradigma de divisão e conquista
- paradigma:
  - Divisão: pegue um elemento x aleatório (chamado pivô) e particione S em
    - L elementos menor que x
    - E elementos igual a x
    - G elementos maiores que x
  - Recursão: ordene L e G
  - Conquista: junte L, E e G



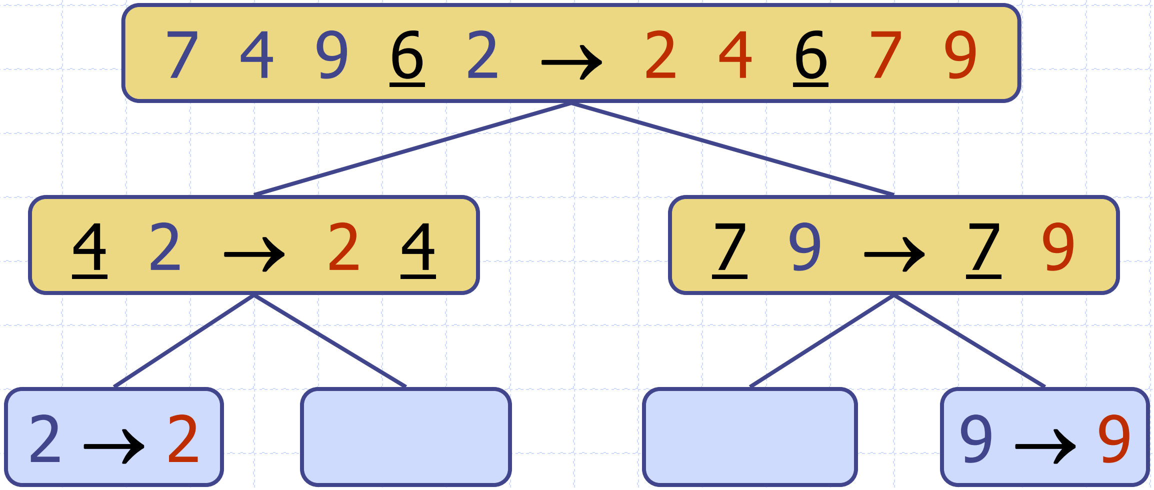
Partição

- Particiona-se a sequência de entrada da seguinte forma:
  - Remover cada elemento y de S e
  - Inserer y em L, E or G, dependendo do resultado da comparação com o pivô x
- Cada inserção e remoção é feita no início ou fim da sequênciais, e leva o tempo $O(1)$
- A partição do quick-sort leva um tempo proporcional a $O(n)$

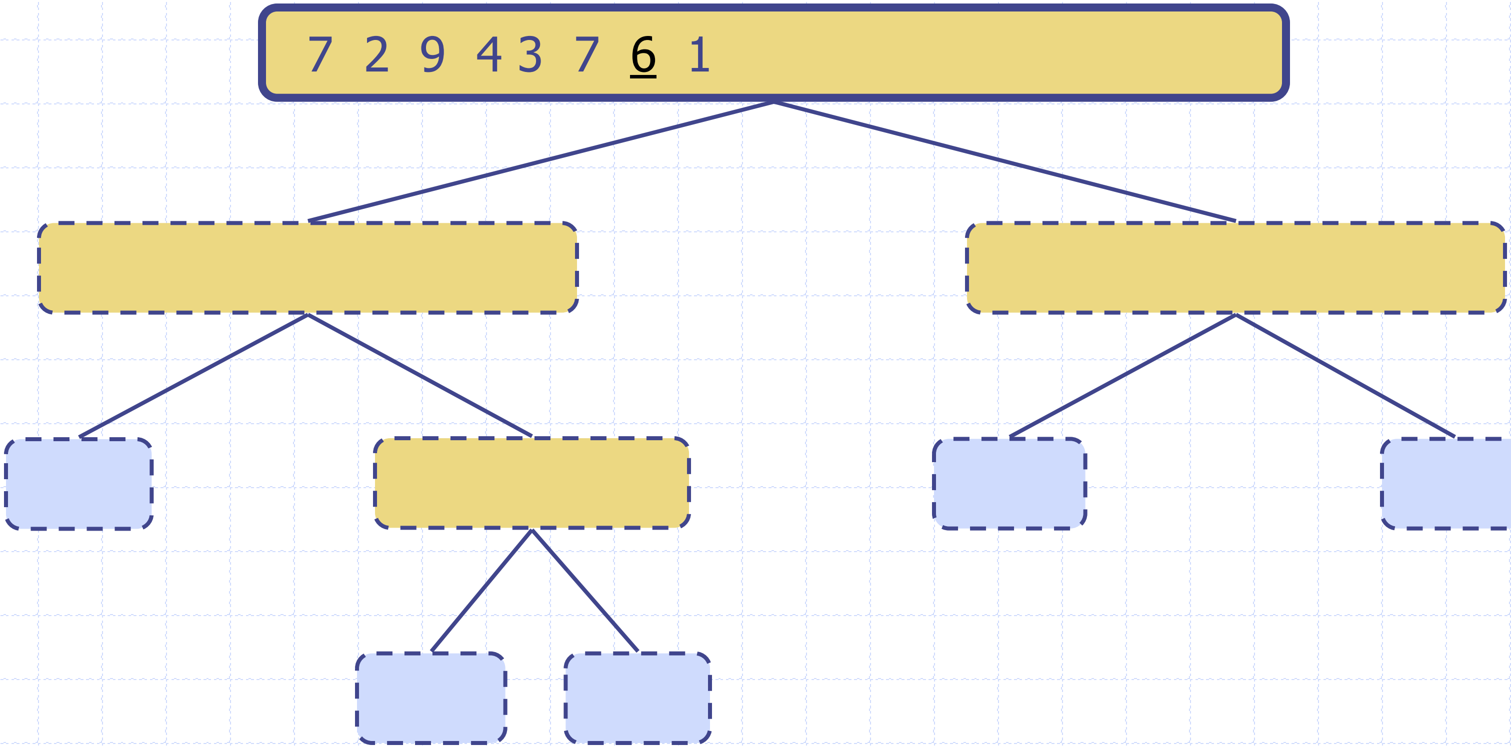
Algorithm *partition*(S, p)
  Input sequence S, position p of pivot
  Output subsequences L, E, G of the
    elements of S less than, equal to,
    or greater than the pivot, resp.
  $L, E, G \leftarrow$ empty sequences
  $x \leftarrow S.remove(p)$
  while $\neg S.isEmpty()$
    $y \leftarrow S.remove(S.first())$
    if $y < x$
      $L.insertLast(y)$
    else if $y = x$
      $E.insertLast(y)$
    else { $y > x$ }
      $G.insertLast(y)$
  return L, E, G

Árvore Quick-Sort

- Uma execução do quick-sort pode ser vista como uma árvore binária
  - Cada nó representa uma chamada recursiva do quick-sort e armazena
    - Sequencia desordenada antes da execução e seu pivô
    - Sequência ordenada no final da execução
  - A raiz é a chamada inicial
  - As folhas são chamadas de subsequências de tamanho 0 ou 1



Exemplo



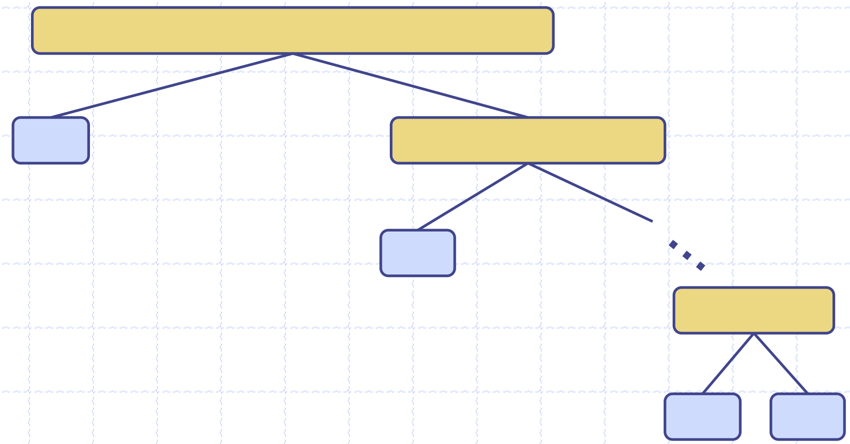
Tempo de Excução no Pior Caso

- O pior caso para o quick-sort ocorre quando o pivô é estritamente o elemento mínimo or máximo
- Um deles L ou G tem tamanho $n - 1$ e o outro tem tamanho 0
- O tempo é proporcional a soma

$$n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1$$

- Assim, o pior caso do quick-sort é $O(n^2)$
- O tempo esperado do quick-sort randomizado é $O(n \log n)$

depth	time
0	n
1	$n - 1$
…	…
$n - 1$	1



Resumo dos Algoritmos de Ordenação

Algoritmo	Tempo	OBS
Bubble-sort	$O(n^2)$	◈ lento (bom para pequenas entradas)
selection-sort	$O(n^2)$	◈ lento (bom para pequenas entradas)
insertion-sort	$O(n^2)$	◈ lento (bom para pequenas entradas)
quick-sort	$O(n \log n)$ esperado	◈ randomizado ◈ muito rápido (bom para grandes entradas)
heap-sort	$O(n \log n)$	◈ rápido (bom para grandes entradas)
merge-sort	$O(n \log n)$	◈ rápido (bom para entradas muito grandes)