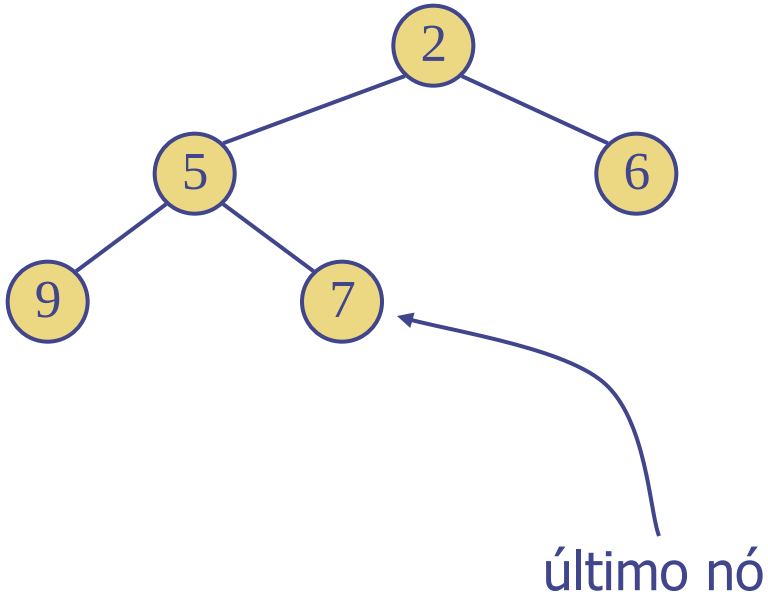
Heap

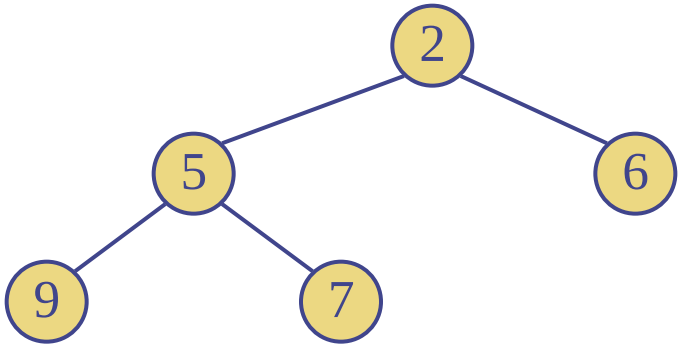
- Um *heap* é uma árvore binária armazenando chaves nos nós e satisfazendo as seguintes propriedades
  - Heap-Order: Para todo nó interno v, que não a raiz, $key(v) \geq key(parent(v))$
  - Árvore binária completa: Seja h a altura de um heap
    - para $i = 0, \ldots, h-1$, existem 2^i nós na profundiade i
    - Na altura h, Os nós internos estão a esquerda dos nós externos

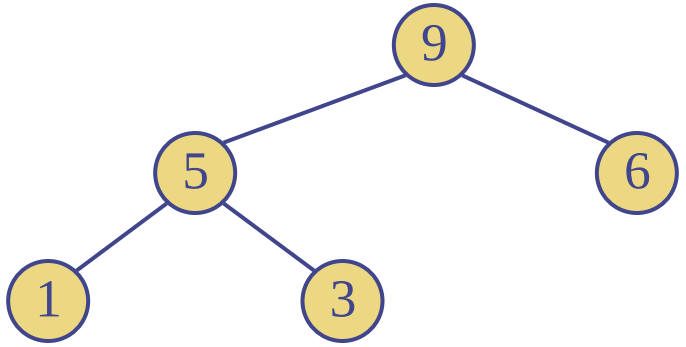
- O último nó de um heap é o mais a direita da altura h



Heaps Mínimos e Máximos

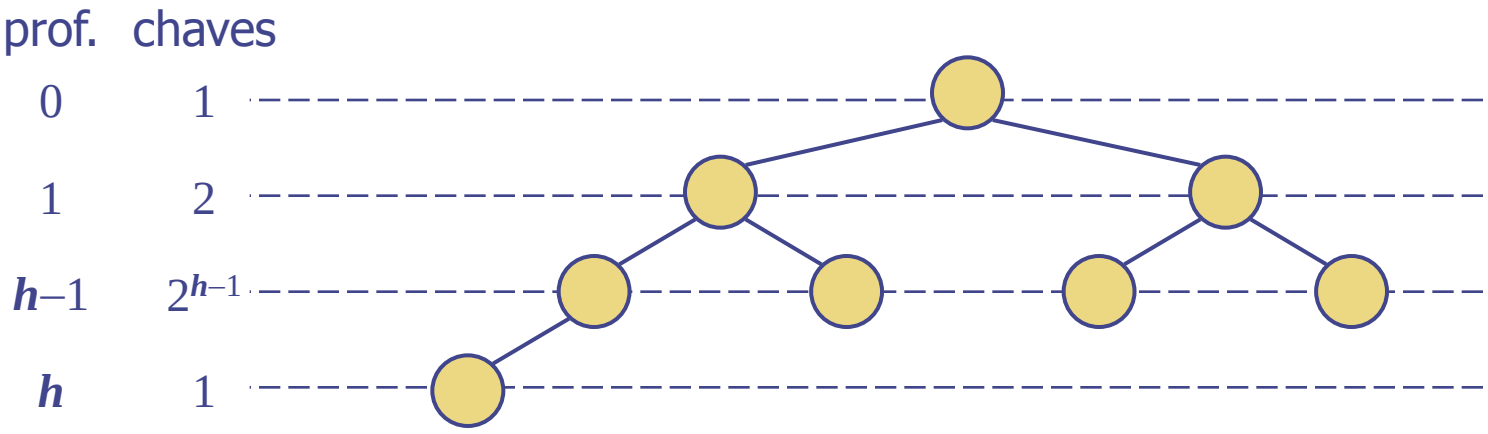
- Min-heap: as chaves dos filhos são maior ou igual que a chave do pai;
- Max-heap: as chaves dos filhos são menor ou igual que a chave do pai.





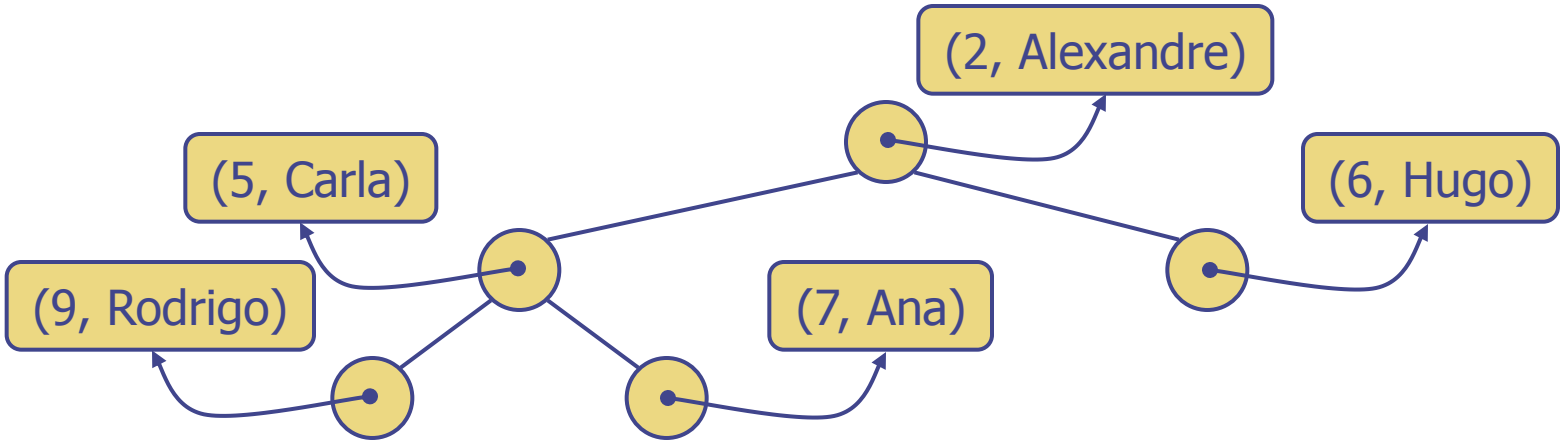
Altura de um heap

- Teorema: Um heap armazenando n chaves tem altura $O(\log n)$
  Prova: (Aplicamos a propriedade da árvore binária completa)
  - Seja h a altura de um heap com n chaves
  - Como existem 2^i chaves na profundiadde i=0,..., h-1 e pelo menos uma chave na profundidade h, temos que $n \geq 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{h-1} + 1$
  - Dessa forma, $n \geq 2^h$, i.e., $h \leq \log n$



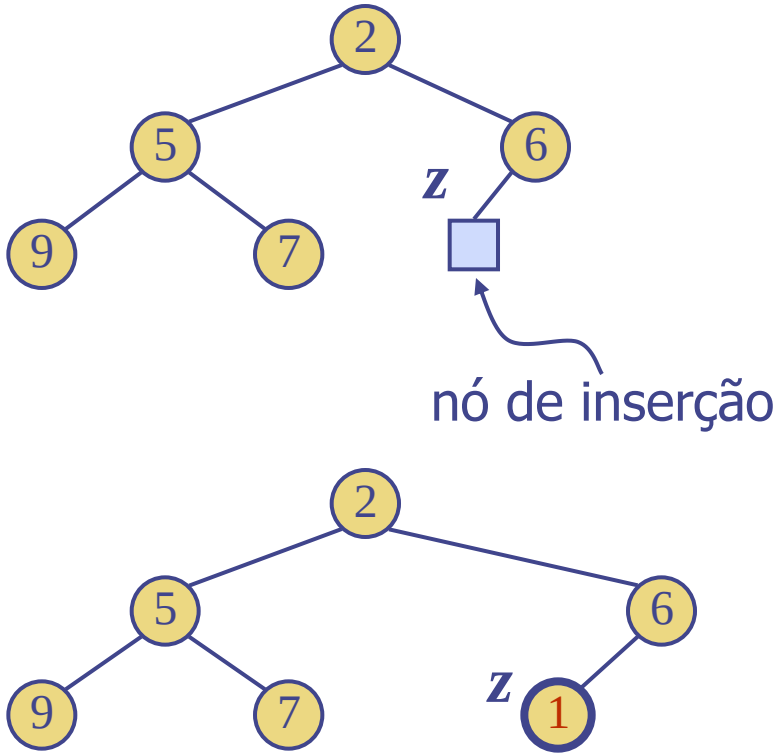
Heaps e filas de prioridade

- Podemos usar um heap para implementar uma fila de prioridade
- Armazenamos um item (chave, elemento) em cada nó
- Sabemos qual o último nó
- Por simplificação, mostraremos apenas as chaves nos nós



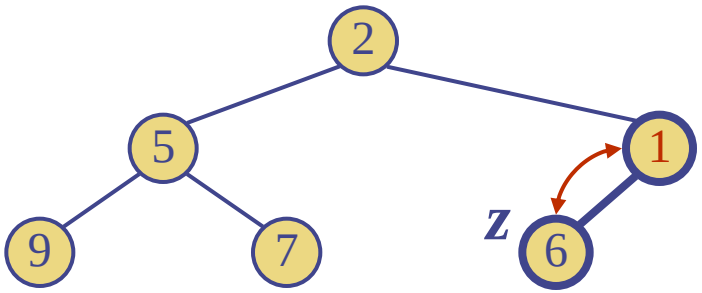
Inserção em uma heap

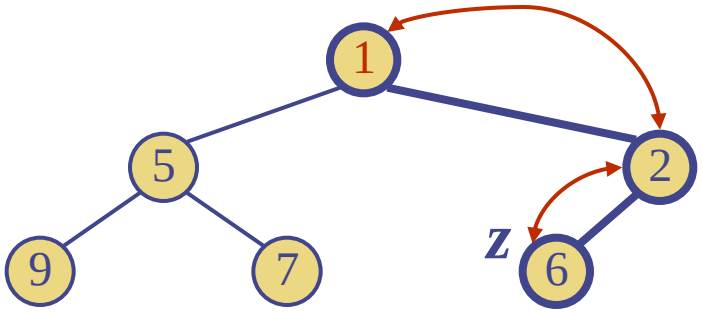
- O método insert do TAD FilaDePrioridade corresponde a inserção de uma chave k no heap
- O algoritmo de inserção consiste de 3 passos
  - Encontrar o nó de inserção z (último nó)
  - Armazenar k em z
  - Restaurar a heap-order



Upheap

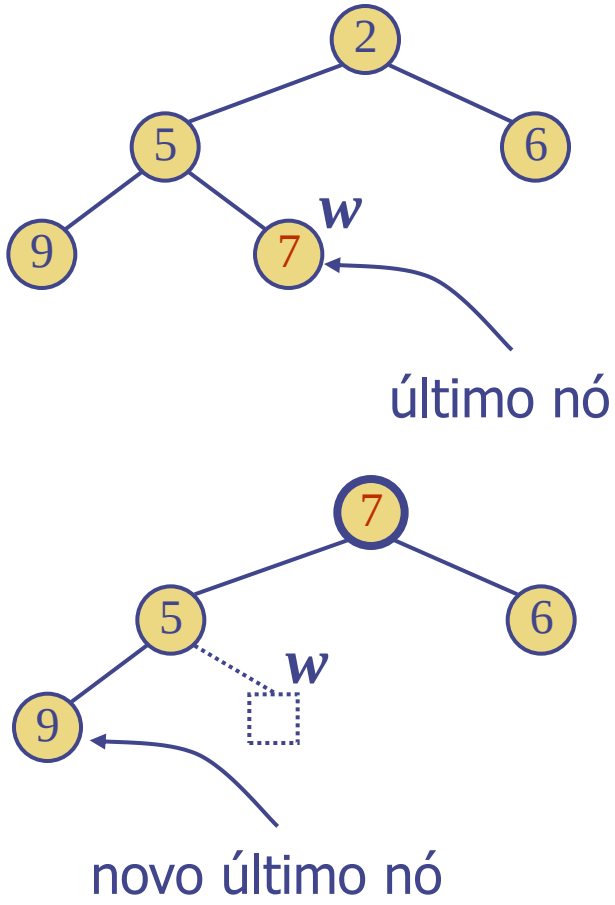
- Após a inserção de uma nova chave k, a propriedade heap-order pode estar violada
- O algoritmo upheap restaura a propriedade heap-order trocando k sobre o "caminho acima" a partir do nó de inserção
- Upheap termina quando a chave k encontra o nó raiz ou um nó cujo pai possua uma chave menor ou igual a k
- Como um heap tem altura $O(\log n)$, upheap roda em tempo $O(\log n)$





Remoção de um heap

- O Método removeMin de uma fila de prioridade corresponde a remoção de uma raiz de um heap
- Esta remoção consiste de 3 passos
  - Substituir a chave da raiz com a chave no último nó *w*
  - Eliminar *w*
  - Restaurar a heap-order

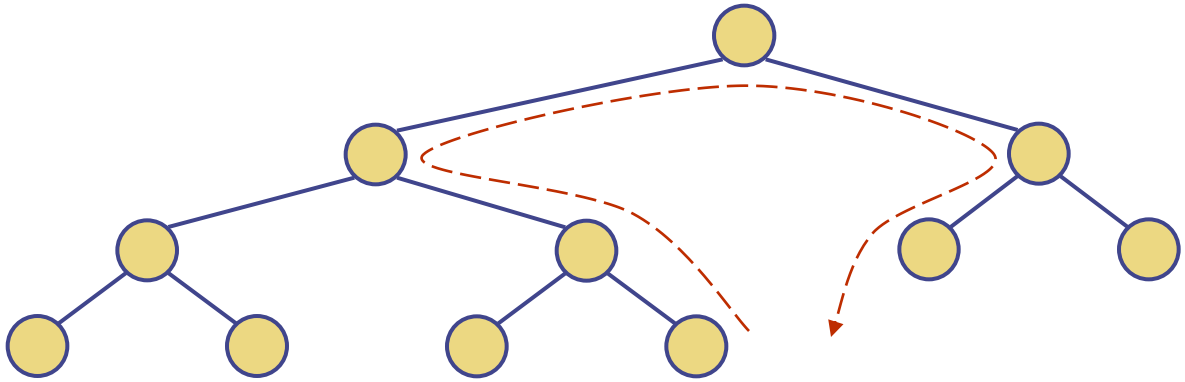


Downheap

- Depois de substituir a chave da raiz com a chave do último nó, a propriedade heap-order pode estar violada
- O algoritmo downheap restaura esta propriedade trocando a chave k sobre o "caminho abaixo" da raiz
- Downheap termina quando a chave k encontra uma folha ou um nó cuja chave é maior do que k
- Como um heap tem altura $O(\log n)$, downheap roda em tempo $O(\log n)$

Atualizando o último nó

- O nó de inserção pode ser encontrado atravesesando um caminho de $O(\log n)$ nós
  - Vá acima até um filho da esquerda ou a raiz for encontrada
  - Se um filho da esquerda é encontrado, vá para o filho da direita
  - Vá para baixo pela esquerda até encontrar uma folha
- Algoritmo similar ao de atualizar o último nó após uma remoção

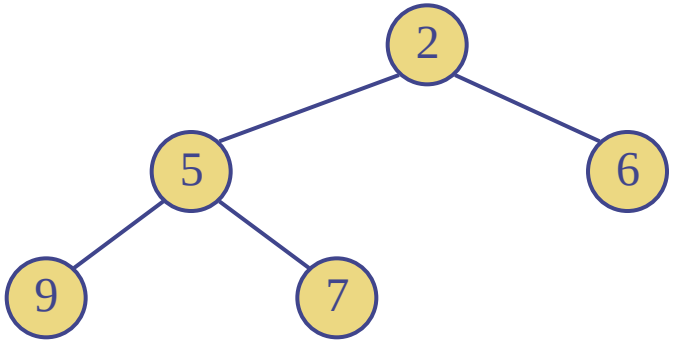


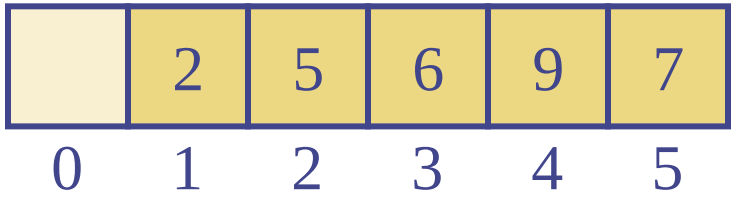
Heap-Sort

- Considere uma fila de prioridade com n itens implementado com um heap
  - O espaço usado é $O(n)$
  - métodos insert e removeMin rodam em tempo $O(\log n)$
  - métodos size, isEmpty, e min rodam em tempo $O(1)$
- Usando uma fila de prioridade baseada em heap, podemos ordenar uma sequência de n elementos em tempo $O(n \log n)$
- O algoritmo é chamado de *heap-sort*
- *heap-sort* é muito mais rápido do que algoritmos quadrádicos, como inserção e seleção

Implementação com Vetor

- Podemos representar um heap com n chaves usando um vetor de tamanho $n + 1$
- Para o nó na colocação i
  - o filho esquerdo está em $2i$
  - o filho direito está em $2i + 1$
- "Ligações" entre os nós não são explicitamente armazenadas
- A colocação 0 não é usada
- A operação inserI corresponde a inserir na colocação $n + 1$
- Operação removeMin corresponde a remover da colocação n
- Pode ser usado para heap-sort "in-place"





Juntando dois heaps

- Temos dois heaps e uma chave k
- Criamos um novo heap com a raiz armazenando k e com os dois heaps com subárvores
- Aplicamos downheap para restaurar a heap-order