

STOCHASTIC VOLATILITY: LIKELIHOOD INFERENCE AND COMPARISON WITH ARCH MODELS (1998)

Sangjoon Kim
Neil Shephard
Siddhartha Chib

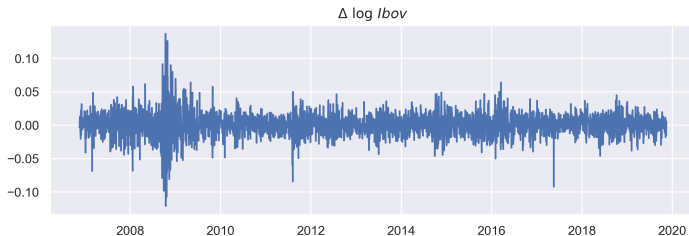
Replicado por: Franklin Oliveira

29 de novembro de 2019

Estatística Computacional - Mestrado em Matemática Aplicada - EMap/FGV

INTRODUÇÃO

- **Motivação:** A variância dos retornos dos ativos tende a mudar com o tempo.



- **Motivação:** A variância dos retornos dos ativos tende a mudar com o tempo.
 - Como modelar esse comportamento?
1. ARCH models¹: a variância condicional é função dos quadrados das observações e variâncias passadas.

$$\begin{aligned}y_t &= \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j y_{t-j} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t Z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2\end{aligned}$$

¹Saiba mais em: <http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/hk/engle.pdf>

- **Motivação:** A variância dos retornos dos ativos tende a mudar com o tempo.
- Como modelar esse comportamento?
 1. ARCH models: a variância condicional é função dos quadrados das observações e variâncias passadas.
 2. **SV models:** a variância é especificada de forma a seguir um processo estocástico latente.

$$y_t = \beta \exp^{h_t/2} \varepsilon_t, \quad t \geq 1 \quad (\text{equação da média})$$

$$h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \sigma\eta_t \quad (\text{mudança de estado})$$

Onde,

$$h_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right)$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2) \quad \text{e} \quad \eta_t \sim \mathcal{N}(\mu_\eta, \sigma_\eta^2)$$

$$y_t = \beta \exp^{h_t/2} \varepsilon_t, \quad t \geq 1 \quad (\text{equação da média})$$

$$h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \sigma\eta_t \quad (\text{mudança de estado})$$

Onde,

$$h_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right)$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2) \quad \text{e} \quad \eta_t \sim \mathcal{N}(\mu_\eta, \sigma_\eta^2)$$

OBS: Antes de prosseguir, vamos fazer uma pequena modificação na equação da média...

$$\begin{aligned}y_t &= \beta \exp^{h_t/2} \varepsilon_t \Rightarrow \\ \Rightarrow y_t^2 &= \beta^2 \exp^{h_t} \varepsilon_t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log y_t^2 &= \log \beta^2 + h_t + \log \varepsilon_t^2\end{aligned}$$

Com isso, o modelo passa a ser totalmente identificado por...

$$\log y_t^2 = \log \beta^2 + h_t + \log \varepsilon_t^2 \quad (\text{equação da média})$$

$$h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \sigma \eta_t \quad (\text{mudança de estado})$$

Onde,

$$h_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right)$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2) \text{ e } \eta_t \sim \mathcal{N}(\mu_\eta, \sigma_\eta^2)$$

Parâmetros de interesse: $\theta = (\phi, \mu, \sigma_\eta^2)$

DEFINIÇÕES E PREMISSAS

- y_t : log-retornos corrigidos pela média.

$$y_t = 100 * \left\{ (\log r_t - \log r_{t-1}) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log r_i - \log r_{i-1}) \right\}$$

- h_t : log-volatilidades de y .
- $\beta = \exp(\mu/2)$ pode ser interpretado como uma volatilidade modal instantânea.
- ϕ : persistência da volatilidade.
- σ_η : volatilidade da log-volatilidade.

Premissas:

- h_t segue um processo estacionário, i.e., $|\phi| < 1$.
- $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- Por razões de identificação, devemos ter $\beta = 1$ ou $\mu = 0$. No artigo, foi mostrado que é preferível tomar $\beta = 1$.

ALGORITMO BASE - GIBBS SAMPLER

1. Inicializa h_t e $\theta = (\phi, \sigma_\eta^2, \mu)$.

valores iniciais: $\phi = 0.95$, $\beta = 1$, $\mu = 0$, $\sigma_\eta^2 = 0.02$ e $h_t = 0$, $\forall t$.

2. Amostra h_t de $h_t \mid h_{\setminus t}, y, \theta$, $t = 1, \dots, n$.

3. Amostra de $\sigma_\eta^2 \mid y, h, \phi, \mu, \beta$.

4. Amostra de $\phi \mid h, \mu, \beta, \sigma_\eta^2$.

5. Amostra de $\mu \mid h, \phi, \sigma_\eta^2$.

6. Repete a partir do passo 2.

PASSO 2. AMOSTRANDO DE $h_t \mid h_{\setminus t}, y, \theta, t = 1, \dots, n$.

$$f(h_t \mid h_{\setminus t}, \theta, y) \propto f(h_t \mid h_{\setminus t}, \theta) f(y_t \mid h_t, \theta), \quad t = 1, \dots, n.$$

Para amostrar dessa densidade, podemos usar um algoritmo de aceitação/rejeição:

1. Amostre $h_t \sim \mathcal{N}(\mu_t, v^2)$, onde $v^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{1+\phi^2}$ e
$$\mu_t = h_t^* + \frac{v^2}{2} (y_t^2 \exp\{-h_t^*\} - 1), \text{ com } h_t^* = \mu + \frac{\phi\{(h_{t-1}-\mu)+(h_{t+1}-\mu)\}}{(1+\phi^2)}.$$
2. Execute até aceitar h_t com probabilidade f^*/g^* , onde

$$\log f^*(y_t, h_t, \theta) = -\frac{1}{2}h_t - \frac{y_t^2}{2} \{\exp(-h_t)\}$$

e

$$\log g^*(y_t, h_t, \theta, h_t^*) = -\frac{1}{2}h_t - \frac{y_t^2}{2} \{\exp(-h_t^*)(1 + h_t^*) - h_t \exp(-h_t^*)\}$$

PASSO 3. AMOSTRANDO DE $\sigma_\eta^2 \mid y, h, \phi, \mu, \beta$

Tomando a **priori conjugada**

$$\sigma_\eta^2 \mid \phi, \mu \sim \mathcal{IG}(\sigma_r/2, S_\sigma/2)$$

σ_η^2 pode ser amostrado diretamente de

$$\sigma_\eta^2 \mid y, h, \phi, \mu \sim \mathcal{IG} \left\{ \frac{n + \sigma_r}{2}, \frac{S_\sigma + (h_1 - \mu)^2 + \sum_{t=1}^{n-1} [(h_{t+1} - \mu) - \phi(h_t - \mu)]^2}{2} \right\}$$

No artigo, são tomados os valores $\sigma_r = 5$ e $S_\sigma = 0.01 \cdot \sigma_r$.

PASSO 4. AMOSTRANDO DE $\phi \mid h, \mu, \beta, \sigma_\eta^2$

- **Priori:**

Tome $\phi^* = \frac{\phi+1}{2}$, onde $\phi^* \sim \text{Beta}(\phi^{(1)}, \phi^{(2)})$. No artigo, temos $\phi^{(1)} = 20$ e $\phi^{(2)} = 1.5$.

- **Condicional:**

$$\pi(\phi)f(h \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2),$$

Onde

$$\log f(h \mid \mu, \phi, \sigma_\eta^2) \propto -\frac{(h_1 - \mu)^2(1 - \phi^2)}{2\sigma_\eta^2} + \frac{1}{2} \log(1 - \phi^2) \\ - \frac{\sum_{t=1}^{n-1} \{(h_{t+1} - \mu) - \phi(h_t - \mu)\}^2}{2\sigma_\eta^2}$$

PASSO 4. AMOSTRANDO DE $\phi \mid h, \mu, \beta, \sigma_\eta^2$

Para amostrar dessa condicional, tome os seguintes passos:

1. Dado o valor atual $\phi^{(i-1)}$, amostre $\phi^* \sim \mathcal{N}(\hat{\phi}, V_\phi)$, onde

$$V_\phi = \sigma_\eta^2 \left\{ \sum_{t=1}^{n-1} (h_t - \mu)^2 \right\}^{-1}$$

e

$$\hat{\phi} = \sum_{t=1}^{n-1} (h_{t+1} - \mu)(h_t - \mu) / \sum_{t=1}^{n-1} (h_t - \mu)^2$$

2. Defina $\phi^{(i)} = \phi^*$ com probabilidade $\exp \{g(\phi^*) - g(\phi^{i-1})\}$, onde

$$g(\phi) = \log \pi(\phi) - \frac{(h_1 - \mu)^2(1 - \phi^2)}{2\sigma_\eta^2} + \frac{1}{2} \log(1 - \phi^2)$$

Caso contrário, tome $\phi^{(i)} = \phi^{(i-1)}$.

PASSO 5. AMOSTRANDO DE $\mu \mid h, \phi, \sigma_\eta^2$

- **Priori** (difusa): $\mathcal{N}(0, 10)$
- μ pode ser amostrado diretamente da **condicional**:

$$\mu \mid h, \phi, \sigma_\eta^2 \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}, \sigma_\mu^2),$$

onde

$$\hat{\mu} = \sigma_\mu^2 \left\{ \frac{(1 - \phi^2)}{\sigma_\eta^2} h_1 + \frac{(1 - \phi)}{\sigma_\eta^2} \sum_{t=1}^{n-1} (h_{t+1} - \phi h_t) \right\}$$

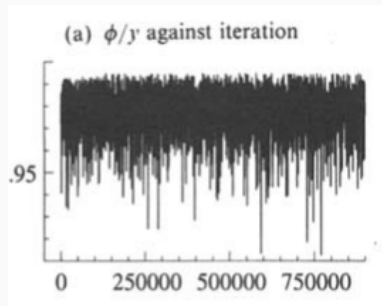
e

$$\sigma_\mu^2 = \sigma_\eta^2 \{ (n - 1)(1 - \phi)^2 + (1 - \phi^2) \}^{-1}$$

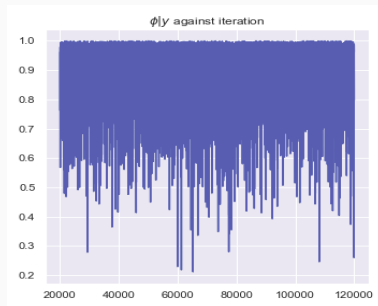
OBS: Também podemos atualizar $\beta = \exp\{\mu/2\}$.

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Cadeia de ϕ :²



Original

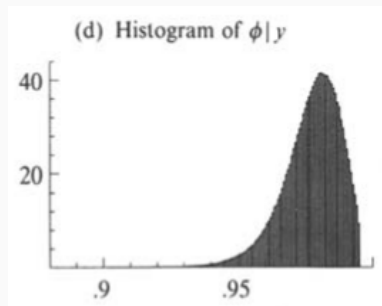


Replicação

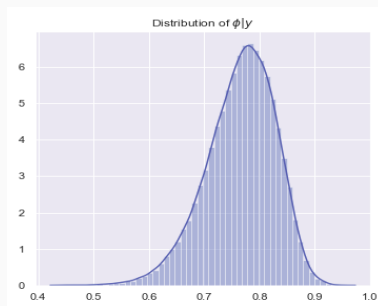
²Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Distribuição de ϕ :³



Original

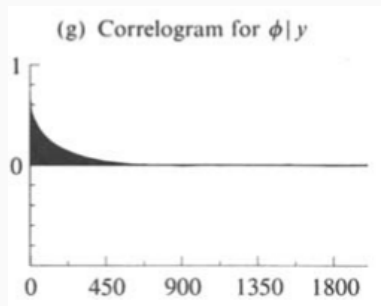


Replicação

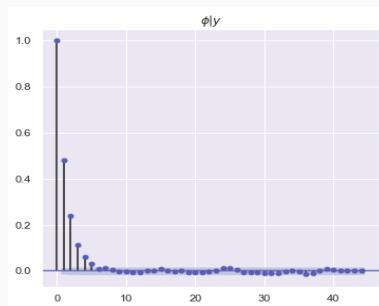
³Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Autocorrelação de ϕ :⁴



Original

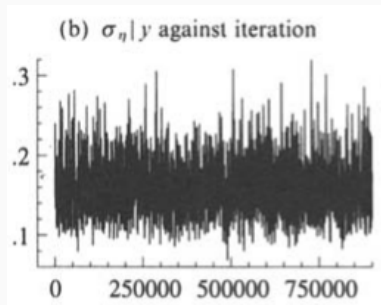


Replicação

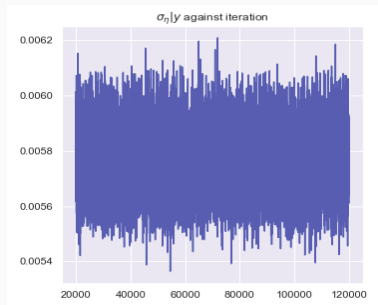
⁴Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Cadeia de σ_η :⁵



Original

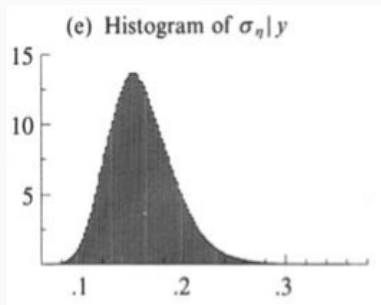


Replicação

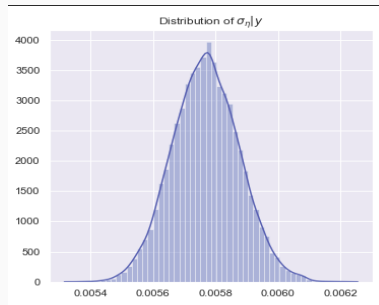
⁵Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Distribuição de σ_η :⁶



Original

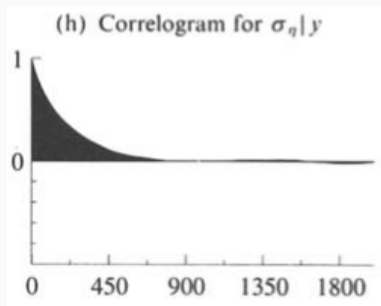


Replicação

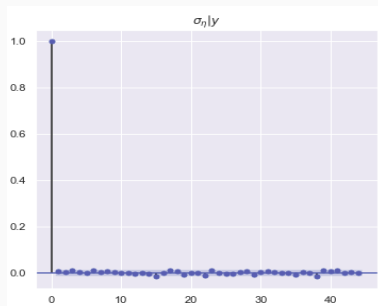
⁶Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Autocorrelação de σ_η :⁷



Original

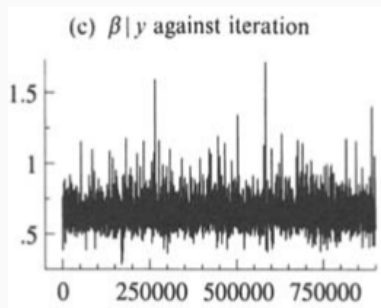


Replicação

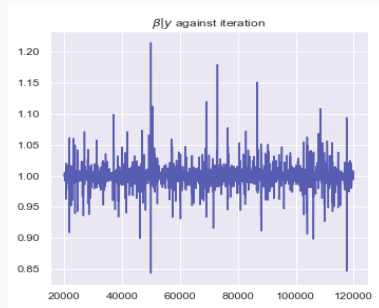
⁷ Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Cadeia de β :⁸



Original

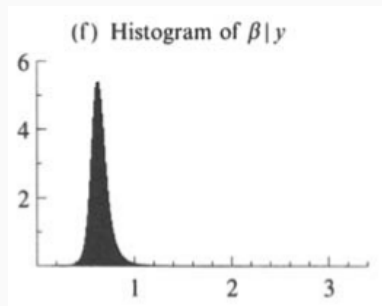


Replicação

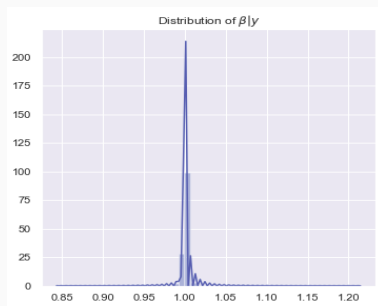
⁸Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Distribuição de β :⁹



Original

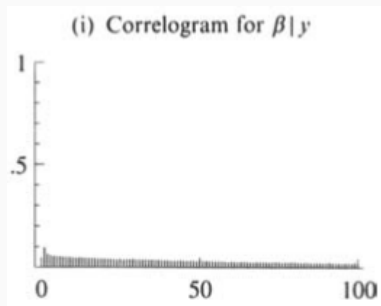


Replicação

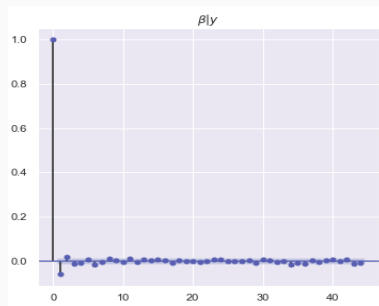
⁹Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

Autocorrelação de β :¹⁰



Original



Replicação

¹⁰Original: 1000 iterações atualizando apenas h , 50 mil iterações atualizando as log-volatilidades e os parâmetros; por fim, mais 1 milhão de iterações. Replicação: 1000 iterações atualizando apenas h ; 5 mil atualizando h e os parâmetros; por fim, mais 120 mil iterações

RESULTADOS - ALGORITMO BASE

	Original ¹¹		
	Mean	MC S.E.	Inefficiency
ϕy	0.97762	0.00013754	163.55
$\sigma_{\eta} y$	0.15820	0.00063273	386.80
βy	0.64884	0.00036464	12.764

	Replicação ¹²		
	Mean	MC S.E.	Inefficiency
ϕy	0.888850	0.000308	299.34
$\sigma_{\eta} y$	0.005892	2.047909	1653.46
βy	1.000008	0.000019595	0.8897

Tabela 1, p. 369

¹¹As métricas foram calculadas para os retornos diários da taxa de câmbio: *Sterling* / U.S. Dolar.

¹²As métricas foram calculadas para os log-retornos do índice Ibovespa.

- A distribuição do termo $\log \varepsilon_t^2$ não é bem aproximada por uma normal. A ideia desse modelo é melhor aproximá-la por uma mistura de $K = 7$ gaussianas.
- **Representação:**

$$y_t^* = h_t + z_t, \text{ onde } y_t^* = \log(y_t^2 + c) \quad 13$$

e

$$f(z_t) = \sum_{i=1}^K q_i f_N(z_t \mid m_i - 1.2704, v_i^2) \equiv$$

$$z_t \mid s_t = i \sim \mathcal{N}(m_i - 1.2704, v_i^2), \quad P(s_t = i) = q_i$$

¹³no artigo, é tomado $c=0.001$

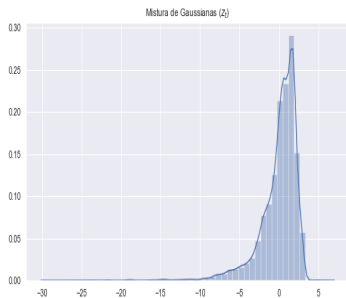
GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

- **Ganho:** é possível amostrar eficientemente de $h \mid y^*, s, \phi, \sigma_\eta, \mu$ (série temporal Gaussiana que pode ser colocada na forma espaço-estado associada ao filtro de Kalman)

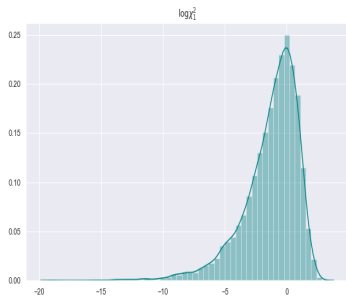
ω	$P(\omega = i)$	m_i	σ_i^2
1	0.00730	-10.12999	5.79596
2	0.10556	-3.97281	2.61369
3	0.00002	-8.56686	5.17950
4	0.04395	2.77786	0.16735
5	0.34001	0.61942	0.64009
6	0.24566	1.79518	0.34023
7	0.25750	-1.08819	1.26261

Mistura de Gaussianas para aproximar $\log \chi_1^2$

GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER



$Z_t \sim \text{Gaussian Mixture}$



$\log \chi_1^2$

GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

1. Inicializa s, ϕ, σ_η^2 e μ .

valores iniciais: $\phi = 0.95, \sigma_\eta^2 = 0.02, \mu = 0$ e
 $s \sim \text{Cat}((1, \dots, 7), \text{prob.} = (q_1, \dots, q_7))$

2. Amostra h de $h \mid y^*, s, \phi, \sigma_\eta^2, \mu$.

Aplicando o *Gaussian Simulation Signal Smoother*.

3. Amostra s de $s \mid y^*, h$.

4. Atualiza ϕ, σ_η^2 e μ da mesma forma do algoritmo base.

5. Executa novamente a partir do passo 2.

PASSO 3. AMOSTRANDO DE $s \mid y^*, h$

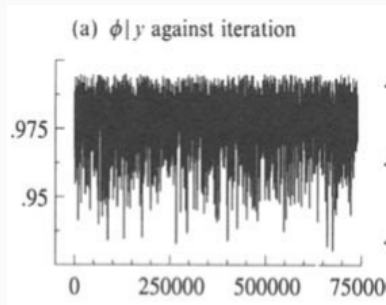
Amostramos cada s_t independentemente usando a função massa de probabilidade

$$P(s_t = i \mid y_t^*, h_t) \propto q_i \cdot f_N(y_t^* \mid h_t + m_i - 1.2704, v_i^2), \quad i \geq K.$$

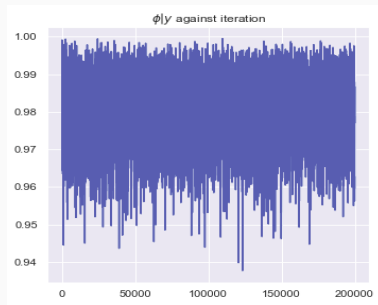
Com isso, temos tudo o que precisamos para executar o algoritmo.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Cadeia de ϕ :¹⁴



Original

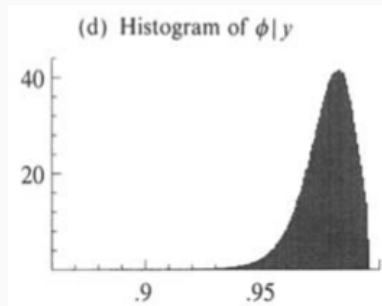


Replicação

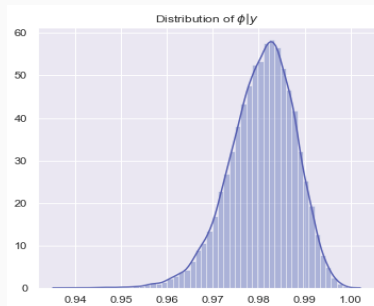
¹⁴Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Distribuição de ϕ :¹⁵



Original

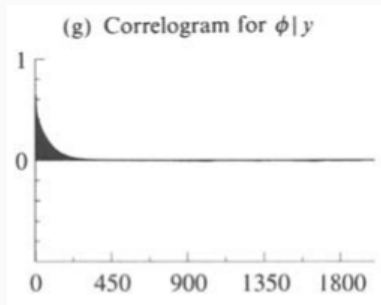


Replicação

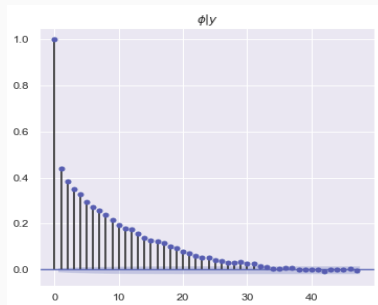
¹⁵Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Autocorrelação ϕ :¹⁶



Original

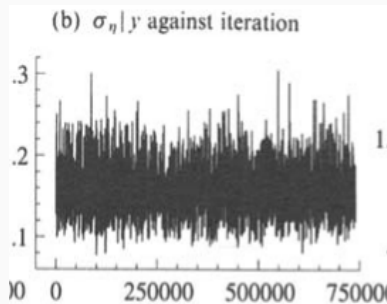


Replicação

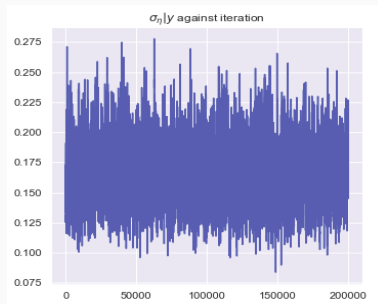
¹⁶Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Cadeia de σ_η :¹⁷



Original

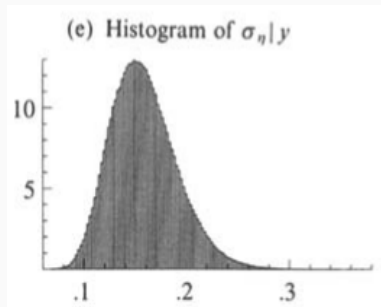


Replicação

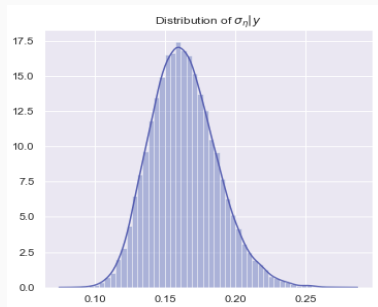
¹⁷ Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Distribuição de σ_η :¹⁸



Original

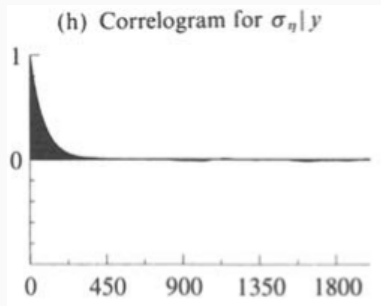


Replicação

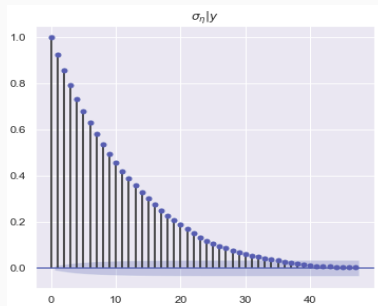
¹⁸Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Autocorrelação σ_η :¹⁹



Original

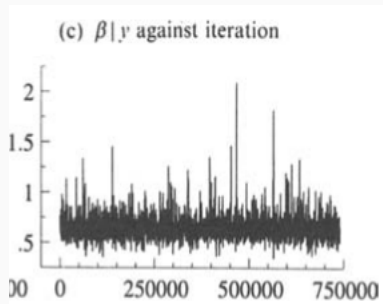


Replicação

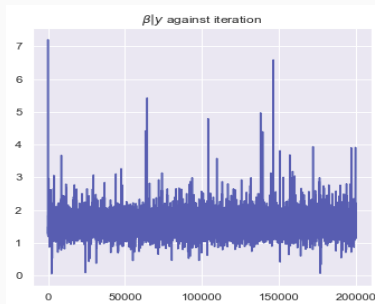
¹⁹ Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Cadeia de β :²⁰



Original

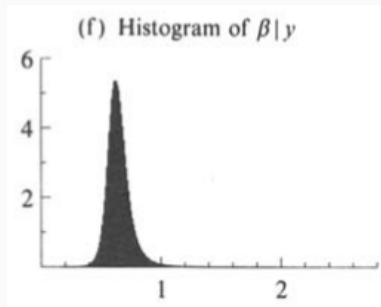


Replicação

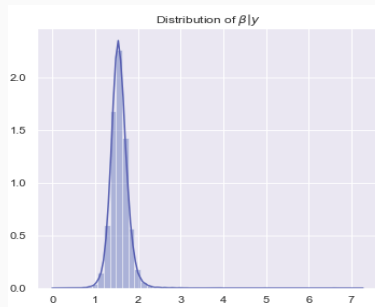
²⁰ Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Distribuição de β : ²¹



Original

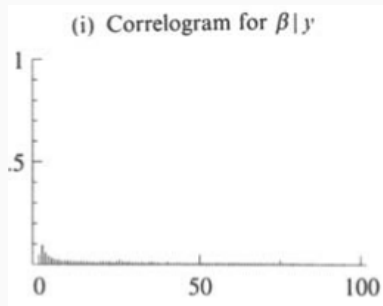


Replicação

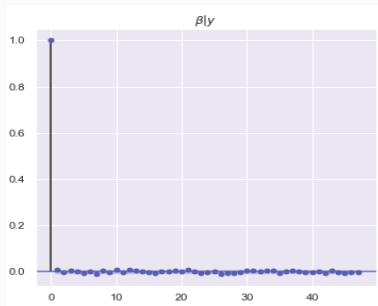
²¹ Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

Autocorrelação de β : ²²



Original



Replicação

²²Original: 750 mil iterações. Replicação: 230 mil iterações, com 30 mil de *burn-in*.

RESULTADOS - GAUSSIAN MIXTURE GIBBS SAMPLER

	Original ²³		
	Mean	MC S.E.	Inefficiency
ϕy	0.977780	6.7031e-5	9.9396
$\sigma_{\eta} y$	0.15832	0.00025965	16.160
βy	0.64767	0.00023753	1.4072

	Replicação ²⁴		
	Mean	MC S.E.	Inefficiency
ϕy	0.9807277	1.485558e-5	51.519
$\sigma_{\eta} y$	0.163103	4.968086e-5	107.33
βy	1.562642	5.248512e-4	1.5417

Tabela 6, p. 375

²³As métricas foram calculadas para os retornos diários da taxa de câmbio: *Sterling / U.S. Dolar*.

²⁴As métricas foram calculadas para os log-retornos do índice Ibovespa.

1. CARTER, C. K. and KOHN, R. (1994). "On Gibbs sampling for state space models", *Biometrika*, 81, 541-553.
2. JACQUIER, E., POLSON, N.G., and ROSSI, P.E. (1994). "Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion)". *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 371-417.
3. SCHOTMAN, P.C. and VAN DIJK, H.K. (1991), "A Bayesian analysis of the unit root in real exchange rates, *Journal of Econometrics*, 8, S135-S152.
4. SHEPHARD, N. (1993), "Fitting non-linear time series models, with applications to stochastic variance models", *Journal of Applied Econometrics*.

OBRIGADO!