Clase 1: Leyes de Newton y dinámica de la órbita

Fundamentos de ingeniería de control de nanosatélites

Ing. Franklin Ticona

Universidad Católica Boliviana San Pablo sede La Paz

Junio 2023

Leyes de Newton

- **Primera ley.-** A menos que una fuerza actúe sobre una partícula, la partícula mantendrá su movimiento con una velocidad inercial constante.
- **Segunda ley.-** Dado el vector $\boldsymbol{F}$ suma de todas las fuerzas actuando sobre una partícula de masa m, con una posición inercial $\boldsymbol{r}$. Si se asume que $\mathcal{N}$ es un sistema de referencia inercial, entonces:

$$\boldsymbol{F} = \frac{{}^{\mathcal{N}}d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}})$$

- **Tercera ley.-** Si la masa m_1 ejerce una fuerza $\boldsymbol{F}_{21}$ en una masa m_2, entonces la fuerza $\boldsymbol{F}_{12}$ experimentada por la fuerza m_1 debido a la interacción con la masa m_2 está dada por:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

Leyes de Newton

Ley de Gravitación universal

Dadas las partículas de masa m_1 y m_2, la fuerza mutua atractiva entre estas está dada por:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} = \frac{Gm_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_{12}|^2} \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{|\boldsymbol{r}|_{12}}$$

Problema 1.- Si $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{r}_{12}$, hallar el modelo matemático que gobierna la cinemática de órbita de un satélite en el planeta tierra, considerando:

$$\boldsymbol{r}(t=0) = {}^{\mathcal{N}}\begin{bmatrix} 7000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [Km], \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t=0) = {}^{\mathcal{N}}\begin{bmatrix} 0 \\ 7.6408 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{Km}{s}\right]$$

Problema 2.- Dado el programa base, simular el modelo matemático en Simulink.

Sistemas de coordenadas

La cinemática de órbita de un satélite sujeto al problema de los dos cuerpos y con órbita elíptica puede ser descrito por los **elementos de órbita**:

$$\{a, e, i, \Omega, \omega, M_0\}$$

Donde:

- a es el semieje mayor de la elipse.
- e excentricidad de la elipse. $\{\Omega, i, \omega\}$ son los ángulos de Euler $3 - 1 - 3$ que definen la rotación del plano de la órbita.
- y M_0 la anomalía media inicial.

Sistemas de coordenadas

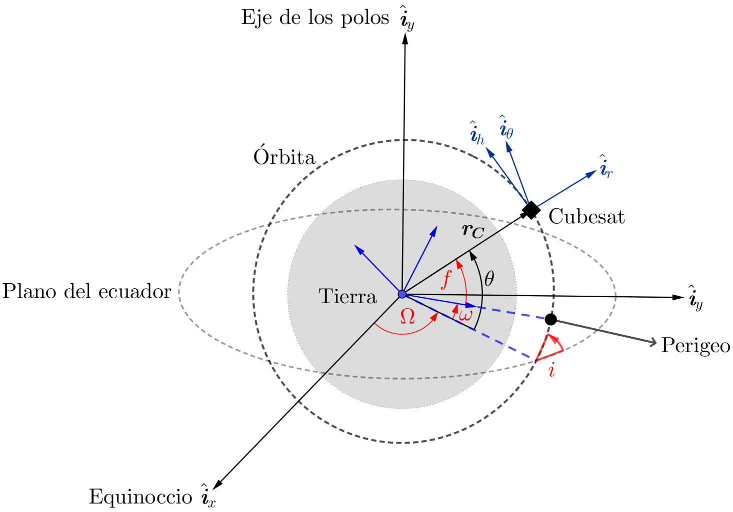


Figura: Sistema de coordenadas 1

Sistemas de coordenadas

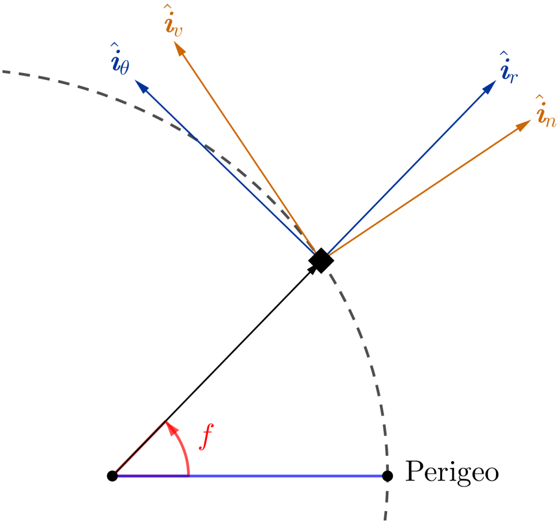


Figura: Sistema de coordenadas 2

Igualdades muy útiles

Ecuación VIS-VIVA

El módulo de la velocidad de una partícula en una órbita elíptica satisface:

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = \mu \left(\frac{2}{|\boldsymbol{r}|} - \frac{1}{a} \right)$$

Con $\mu = GM = 398600 \left[\frac{Km^3}{s^2} \right]$

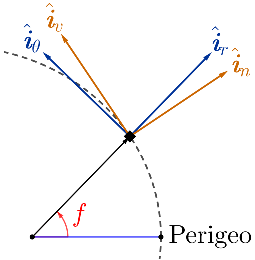
Sea r_a la longitud del apogeo, r_p longitud del perigeo y e eccentricidad de la elipse:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}, \qquad a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

Problema 3.- Simular una órbita con apogeo de $10000[Km]$ y perigeo de $7000[Km]$.

¿Cómo obtenemos una órbita deseada dadas las condiciones iniciales ${}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{r}(0)$, ${}^{\mathcal{N}}\dot{\boldsymbol{r}}(0)$?

Sistemas de referencia



Sistemas de referencia de órbita: $\mathcal{H}_1 = \{\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_\theta, \boldsymbol{i}_h\}$, $\mathcal{H}_2 = \{\boldsymbol{i}_n, \boldsymbol{i}_v, \boldsymbol{i}_h\}$. Así, la ecuación VIS-VISA:

$$^{\mathcal{H}_2}\dot{\boldsymbol{r}} = {}^{\mathcal{H}_2}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\mu\left(\frac{2}{|\boldsymbol{r}|} - \frac{1}{a}\right)} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^{\mathcal{N}}\dot{\boldsymbol{r}} = [NH_1][H_1H_2]\,{}^{\mathcal{H}_2}\dot{\boldsymbol{r}}$$

¿Cómo computar $[NH_1]$ y $[H_1 H_2]$?

$$[H_2 H_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e\cos f}} \begin{bmatrix} 1+e\cos f & e\sin f \\ -e\sin f & 1+e\cos f \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{2\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & 1 \end{bmatrix}$$

Algorithm Cómputo de $H_1 N$

Entrada: $\boldsymbol{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$ (expresados en $\mathcal{N}$)

Salida: $[H_1 N]$

1: $\boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$

2: $\boldsymbol{i}_h = \frac{\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}|}$

3: $\boldsymbol{i}_\theta = \boldsymbol{i}_h \times \boldsymbol{i}_r$

4: $[H_1 N] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_r^T & \boldsymbol{i}_\theta^T & \boldsymbol{i}_h^T \end{bmatrix}$

En el apogeo y perigeo $[H_1 H_2] = [I_{3\times 3}]$.

Problema 4.-

Simular la órbita de un satélite con apogeo de $10000[Km]$, perigeo de $7000[Km]$. $\Omega = 0[deg]$, $i = 30[deg]$ y $\theta(t = 0) = 0[deg]$ (el satélite comienza su movimiento desde el perigeo).

Nota.- El valor inicial de $[NH_1]$ puede computarse con la función:

$$\text{Euler3132C}([\Omega;i;\theta(t = 0)])'$$

No olvides añadir las carpetas y subcarpetas de la carpeta **libraries**.

Perturbaciones de la órbita

Perturbación J2

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la propagación de órbita de un satélite en LEO considerando el efecto de perturbación J2 son:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\mu}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} - \frac{3}{2}J_2\frac{\mu}{|\boldsymbol{r}|^2}\left(\frac{r_{eq}}{|\boldsymbol{r}|}\right)^2$$

Con $r_{eq} = 6378[Km]$ radio medio de la tierra, $J_2 = 1082.63 \cdot 10^{-6}$.

Problema 5 (final).- Simular la órbita de un satélite con cualquier $\Omega, \theta(0)$, inclinación $i = 30[deg]$ cuyo apogeo sea de $6828[Km]$ y perigeo de $6820[Km]$ bajo los efectos de la perturbación J2.