Dinámica de satélites

Teorema

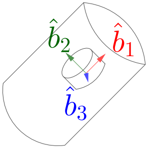
Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica de la attitude de un satélite son:

$$[I]\dot{\omega} = -[\tilde{\omega}][I]\omega + L_c$$

Esto suponiendo que se han escogido los ejes principales del satélite.

Ejemplo de aplicación Encontrar el modelo matemático de attitude del siguiente satélite con una rueda de reacción:

Satélite



Modelo matemático de attitude:

$$[I]\dot{\omega} = -[\tilde{\omega}][I]\omega - \dot{h}\hat{b}_2 + h\omega_3\hat{b}_1 - h\omega_1\hat{b}_3$$

Con $h = I_W\Omega$, I_W inercia de la rueda de reacción, Ω velocidad angular de la rueda de reacción.

Modelo con múltiples ruedas de reacción

Definiciones:

- Matriz de inercia $[J]$:

$$[J] = [I_G] + [I_W] = \begin{bmatrix} J_s & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_g \end{bmatrix}$$

- Matriz de inercia $[I_{RW}]$:

$$[I_{RW}] = [I_s] + \sum_{i=1}^{N} (J_{t_i} \hat{g}_{t_i} \hat{g}_{t_i}^T + J_{g_i} \hat{g}_{g_i} \hat{g}_{g_i}^T)$$

- Vector de momento h_s:

$$h_s = \begin{bmatrix} \vdots \\ J_{s_i}(\omega_{s_i} + \Omega_i) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Modelo con múltiples ruedas de reacción

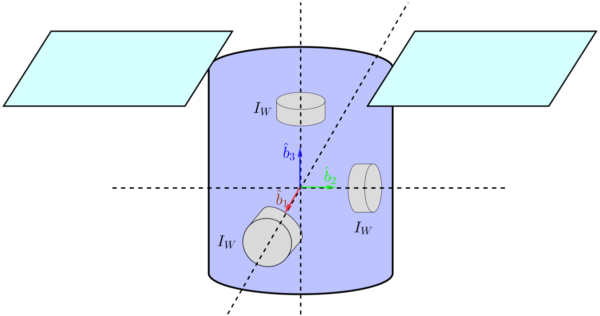
Teorema

El modelo matemático de attitude de un satélite con n ruedas de reacción es:

$$[I_{RW}]\dot{\omega} = -\omega \times [I_{RW}]\omega - \omega \times h_s - u_s + L$$

Nanosatélite con 3 ruedas de reacción

Encontrar el modelo matemático del siguiente nanosatélite:



Notar que en este caso $\hat{g}_{s_i} = \hat{b}_i$

Modelado matemático

Momento angular respecto al centro de masa:

$$H_c = [I]\omega + I_W \sum_{i=1}^{3} \Omega_i \hat{g}_{s_i}$$

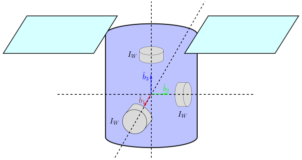
Debe aplicarse $\dot{H}_c = L_c$ y transport theorem, obtenemos que:

$$[I]\dot{\omega} + [\tilde{\omega}][I]\omega + I_W \sum_{i=1}^{3} \dot{\Omega}_i \hat{g}_{s_i} + I_W \sum_{i=1}^{3} \Omega_i [\tilde{\omega}] \hat{g}_{s_i} = Lc$$

Empleamos la condición asociada al problema $\hat{g}_{s_i} = \hat{b}_i$ y hacemos simplificaciones matriciales, finalmente obtenemos que:

$$[I]\dot{\omega} + [\tilde{\omega}][I]\omega + I_W \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_3 \end{bmatrix} + I_W [\tilde{\omega}] \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = L_c$$

Modelo matemático



Modelo matemático del nanosatélite:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_1)\omega_2\omega_3 + I_W(\omega_3\Omega_2 - \omega_2\Omega_3) - I_W\dot{\Omega}_1 + L_{c_1}$$

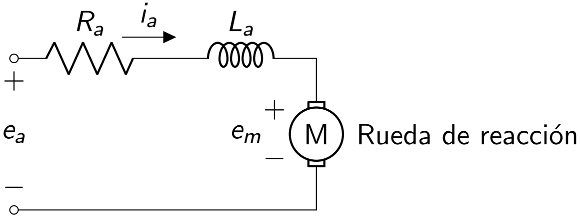
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 + I_W(\omega_1\Omega_3 - \omega_3\Omega_1) - I_W\dot{\Omega}_2 + L_{c_2}$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + I_W(\omega_2\Omega_1 - \omega_1\Omega_2) - I_W\dot{\Omega}_3 + L_{c_3}$$

¿Qué falta?, Nos falta encontrar la dinámica de cada rueda de reacción.

Modelado matemático del motor

La dinámica de $h = I_W \Omega$ puede obtenerse mediante el modelo matemático del siguiente motor:



Los componentes eléctricos son modelados por las leyes de Kirchhoff, ley de Ohm, ley de Faraday y modelos matemáticos específicos para componentes electrónicos, por ejemplo el modelo de caída de tensión para un inductor viene dado por:

$$v_L = L\frac{di(t)}{dt}$$

Señal de control

Debido a que e_a es una señal PWM (alta frecuencia), este se aproxima mediante su valor RMS, de este modo:

$$e_a = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e_a^2(t)dt}$$

Integrado obtenemos que:

$$e_a = \sqrt{D}V$$

Donde $D \in [0,1]$ es el duty cycle de la señal PWM (entrada de control) y V es el voltaje suministrado al puente H.