3.

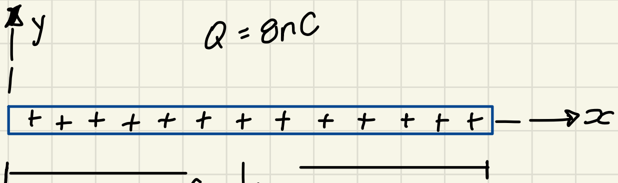
CAMPO eléctrico

distribuciones lineales DE carga

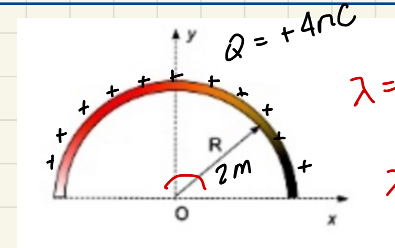
ing. Claudia Contreras

Distribuciones Lineales de carga

$\boxed{\lambda \rightarrow \text{densidad lineal de carga}}$



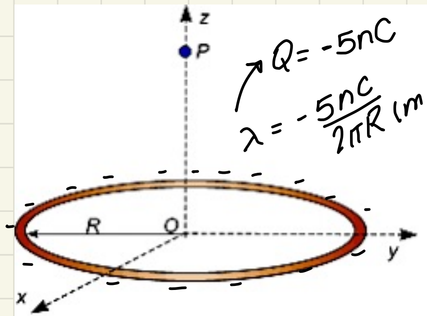
$\lambda = \dfrac{8nC}{2m} = \dfrac{4nC}{m}$



$S = R\theta$

$\lambda = \dfrac{4nC}{(2)\pi m}$

$\lambda = +\dfrac{2nC}{\pi m}$



$\lambda = -\dfrac{5nC}{2\pi R\,(m)}$

→ si la carga se distribuye uniformemente

$\boxed{\lambda = \dfrac{Q}{L}}$ $\left(\dfrac{C}{m}\right)$

→ si la carga no es uniforme

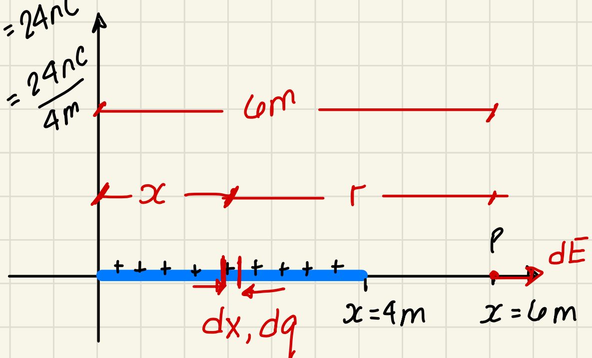
$\lambda = f(x)$ $\lambda = f(y)$ $\lambda = f(\theta)$

$\lambda = 6nC/m$

Calcule el campo eléctrico en el punto P, de la varilla de carga que se muestra en la figura:°

$Q = 24nC$

$\lambda = \dfrac{24nC}{4m}$



$dE = \dfrac{k\,dq}{r^2} = \dfrac{k|\lambda|\,dx}{(6-x)^2}\,\hat{\imath}$

$dq = |\lambda|\,dx$

$r = 6 - x$

$\vec{E}_p = \int_0^4 \dfrac{k|\lambda|\,dx}{(6-x)^2}\,\hat{\imath} = k|\lambda| \int_0^4 \dfrac{dx}{(6-x)^2}\,\hat{\imath}$

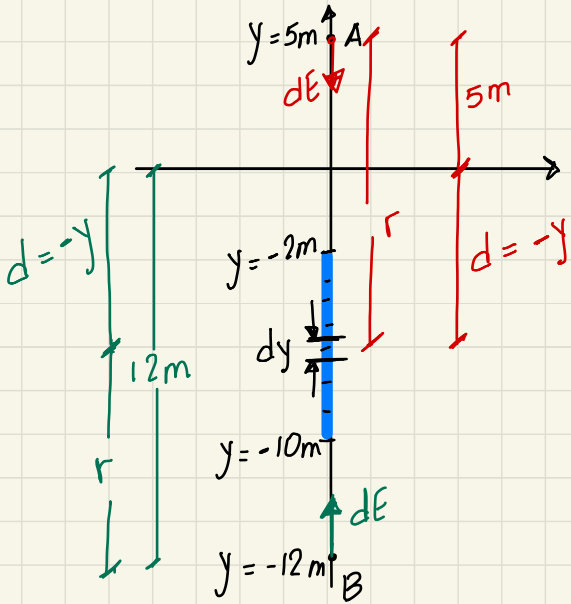
$u = 6 - x$

$du = -dx$

$\vec{E}_p = k|\lambda| * \dfrac{1}{(6-x)}\Big|_0^4 = 54\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\right]\hat{\imath} = 18\,\dfrac{N}{C}\,\hat{\imath}$

$\int \dfrac{-du}{u^2} = \dfrac{1}{u}$

Plantee la integral que me permita calcular el campo eléctrico de la distribución lineal de carga que se muestra en la figura, en lo siguientes puntos, A, B.



pto A

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}$$

$$r = 5 + d$$
$$r = 5 - y$$

$$dE = \frac{k|\lambda|dy}{(5-y)^2}(-\hat{j})$$

$$\vec{E} = \int_{-10}^{-2} \frac{k|\lambda|dy}{(5-y)^2}(-\hat{j})$$

$$Q = -16nC$$

$$\lambda = \frac{-16nC}{8m} = -\frac{2nC}{m}$$

$$dq = |\lambda|dy$$

Punto B

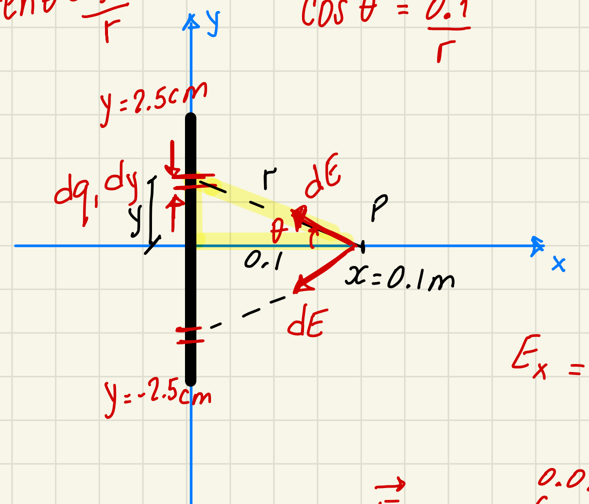
$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}(+\hat{j}) = \frac{k|\lambda|dy}{(12+y)^2}\hat{j}$$

$$r = 12 - d$$
$$r = 12 - (-y) = 12 + y$$

$$\vec{E} = \int_{-10}^{-2} \frac{k|\lambda|dy}{(12+y)^2}\hat{j}$$

Ejemplo 1. Una línea de carga se extiende desde y=-2.5cm hasta y=+2.5cm. La carga está distribuida uniformemente a lo largo de la línea y es de -9nC. Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en un punto ubicado sobre el eje "x" en x=10cm.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{0.1}{r}$$



$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} \qquad dq = |\lambda|\,dy \qquad \lambda = \frac{-9\,nC}{0.05\,m}$$

$$r^2 = 0.1^2 + y^2 \qquad r = \sqrt{0.1^2+y^2} \qquad \lambda = -180\,\frac{nC}{m}$$

$$dE = \frac{k|\lambda|\,dy}{(0.1^2+y^2)}$$

$$dE_x = dE\cos\theta \qquad\qquad dE_y = dE\operatorname{sen}\theta$$

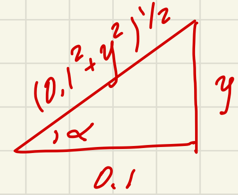
$$E_x = \int_{-0.025}^{0.025} \frac{k|\lambda|\,dy}{(0.1^2+y^2)} * \frac{0.1}{(0.1^2+y^2)^{1/2}}(-\hat{\imath}) \qquad\qquad E_y = \int dE_y = \emptyset$$

por simetría

$$\vec{E}_x = 2\int_0^{0.025} \frac{k|\lambda|(0.1)\,dy}{(0.1^2+y^2)^{3/2}}(-\hat{\imath})$$

$$\vec{E} = 2k|\lambda|(0.1)\int_0^{0.025}\frac{dy}{(0.1^2+y^2)^{3/2}}(-\hat{\imath})$$

$$\vec{E} = 2k|\lambda|(0.1) \int_0^{0.025} \frac{dy}{(0.1^2+y^2)^{3/2}} (-\hat{\imath})$$



$$\tan\alpha = \frac{y}{0.1}$$

$$y = 0.1\tan\alpha$$

$$dy = 0.1\sec^2\alpha\, d\alpha$$

$$\int \frac{0.1\sec^2\alpha\, d\alpha}{[0.1^2 + 0.1^2\tan^2\alpha]^{3/2}}$$

$$\int \frac{0.1\sec^2\alpha\, d\alpha}{[0.1^2(1+\tan^2\alpha)]^{3/2}}$$

$$\int \frac{0.1\sec^2\alpha\, d\alpha}{[0.1^2\sec^2\alpha]^{3/2}}$$

$$\int \frac{\cancel{0.1}\,\cancel{\sec^2\alpha}\, d\alpha}{0.1^{\cancel{3}}\,\sec^{\cancel{3}}\alpha} = \int \frac{d\alpha}{0.1^2\sec\alpha}$$

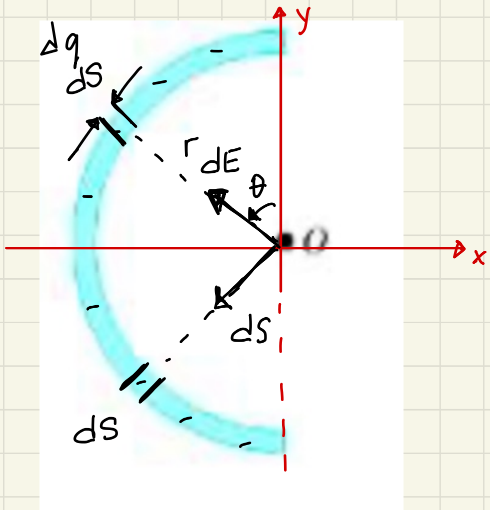
$$\frac{1}{0.1^2}\int \cos\alpha\, d\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{0.1^2}$$

$$\vec{E} = 2k|\lambda|(\cancel{0.1}) * \frac{1}{(0.1)^{\cancel{2}}} \left.\frac{y}{(0.1^2+y^2)^{1/2}}\right|_0^{0.025}$$

$$\vec{E} = \frac{2(9\times10^9)(180\times10^{-9})}{(0.1)} * \frac{0.025}{(0.1^2+0.025^2)^{1/2}} (-\hat{\imath})\ \frac{N}{C}$$

$$\vec{E} = 7.86\ k\frac{N}{C}(-\hat{\imath})$$

Ejemplo 2. Una varilla de 14 cm de longitud cargada uniformemente se dobla en forma de semicírculo, como se muestra en la figura. La varilla tiene una carga de - 7.5 x10^-6 C. Encuentre el campo eléctrico, magnitud y dirección en el centro del semicírculo.



$$\lambda = \frac{-7.5\times10^{-6}}{0.14}\ \frac{C}{m}$$

$$S = R\theta$$

$$ds = R\,d\theta$$

$$S = 0.14$$

$$0.14 = R\pi$$

$$R = \frac{0.14}{\pi}$$

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}$$

$$dq = |\lambda|\,ds$$

$$dq = |\lambda| R\,d\theta$$

$$r = R$$

$$dE = \frac{k|\lambda|\cancel{R}\,d\theta}{R^{\cancel{2}}}$$

$$dE = \frac{k|\lambda|\,d\theta}{R}$$

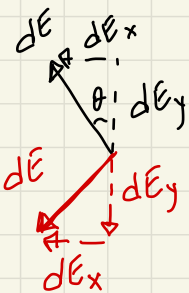
$$dE_x = dE\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$dE_x = \frac{k|\lambda|\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta}{R}$$

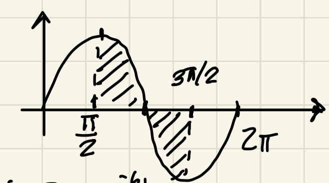
$$dE_y = dE\cos\theta$$

por simetría

$$E_y = \varnothing$$



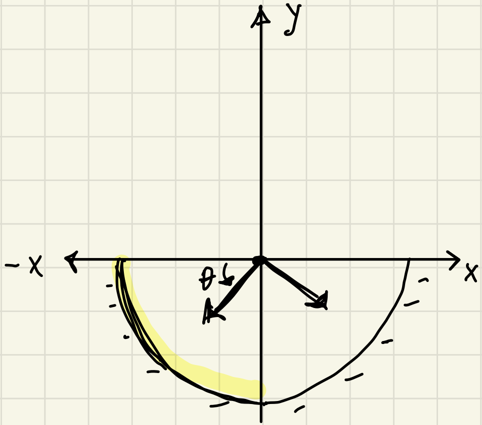
$$\vec{E}_x = \int_0^{\pi} dE_x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{k|\lambda|\,\mathrm{sen}\,\theta}{R}\,d\theta$$



$$\vec{E}_0 = \frac{2k|\lambda|}{R}\left[-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right] = \frac{2k|\lambda|}{R}(-\hat{\imath}) = \frac{2(9\times10^9)\left(\frac{7.5\times10^{-6}}{0.14}\right)}{\frac{0.14}{\pi}} = 21.6\,\frac{MN}{C}(-\hat{\imath})$$

respuestas preguntas

Q' sucede si el semicirculo esta en el III y IV cuadrante

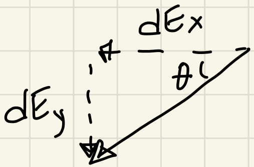


por simetría

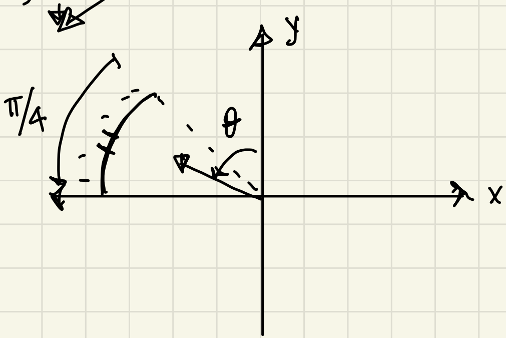
$E_x = 0$

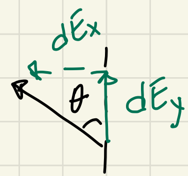
$dE_y = dE \, \text{sen}\, \theta$

$E_y = 2\int_0^{\pi/2} dE_y = \int_0^{\pi} dE_y \; (-\hat{j})$



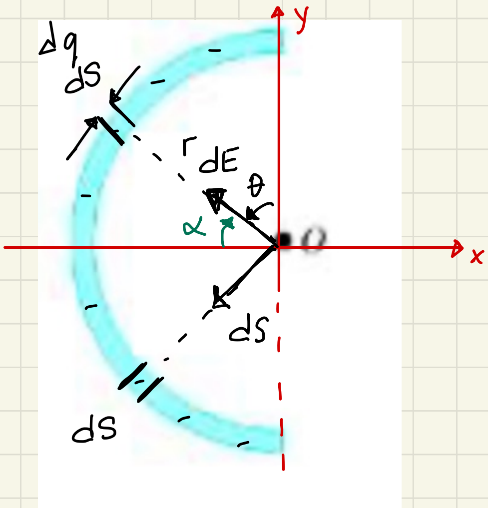
¿ y para un segmento de arco distinto ?





$\int_{\pi/4}^{\pi/2} dE_x = dE \, \text{sen}\, \theta$

$E_y = \int_{\pi/4}^{\pi/2} dE_y = dE \cos \theta$



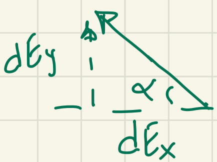
¿Qué sucede si elijo trabajar con α el problema?

$$dS = R\,d\alpha$$

$$dE = \frac{k|\lambda|\,d\alpha}{R}$$

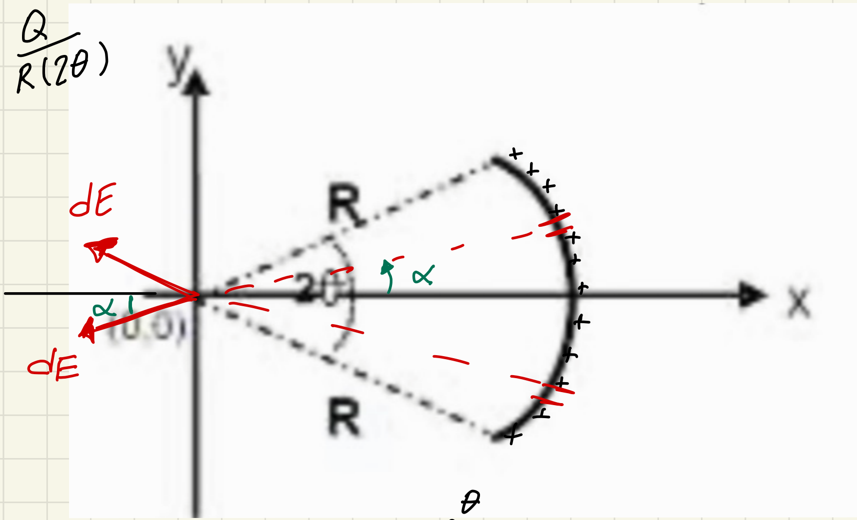
$$dE_x = dE\cos\alpha\,(-\hat{i})$$

$$E_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE_x = 2\int_{0}^{\pi/2} dE_x$$



Ejemplo 3. Una varilla de carga se dobla como se muestra en la figura. La varilla se carga uniformemente y tiene una carta total +Q. El arco sustenta un ángulo de 2 theta, del centro del círculo. Encuentre el campo eléctrico resultante en el origen.

$$\lambda = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{R(2\theta)}$$



$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}$$

por simetría $E_y = 0$

$$r = R \qquad dq = |\lambda|\,ds = |\lambda| R\,d\alpha$$

$$dE_x = dE \cos\alpha$$

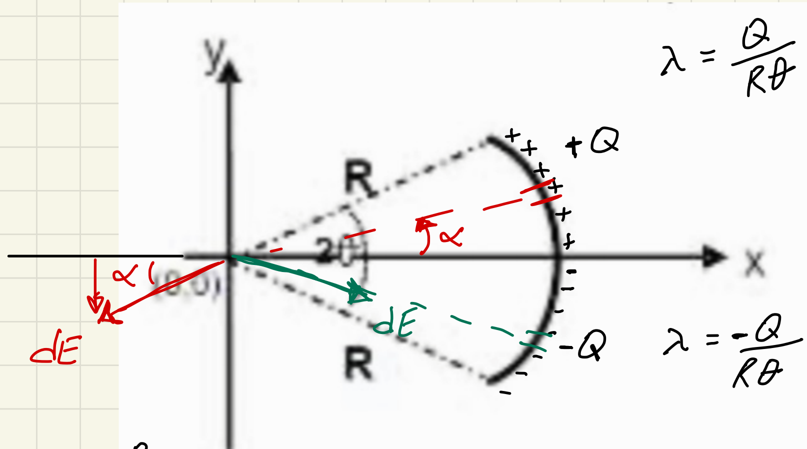
$$dE_x = \frac{k\,|\lambda|\,\cancel{R}\cos\alpha\,d\alpha}{R^{\cancel{2}}}$$

$$dE_x = \frac{k\,|\lambda|\cos\alpha\,d\alpha}{R}$$

$$\vec{E}_0 = 2\int_0^{\theta} \frac{k\,|\lambda|\cos\alpha\,d\alpha}{R} = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{k\,|\lambda|\cos\alpha}{R}\,d\alpha$$

$$E_0 = \frac{\cancel{2}k\left(\frac{Q}{\cancel{2}R\theta}\right)}{R}\int_0^{\theta}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{kQ}{R^2\theta}\left[\operatorname{sen}\alpha\Big|_0^{\theta}\right] = \frac{kQ\,\operatorname{sen}\theta}{R^2\theta}\,(-\hat{\imath})$$

Ejemplo 4. ¿Qué sucedería si el arco del ejemplo 3, tuviera una carga +Q en la mitad superior y una carga total -Q en la mitad inferior? ¿Cuál sería entonces el campo eléctrico en el origen de coordenadas?



por simetría $E_x = \emptyset$

$$dE = \frac{k|\lambda|\cancel{R}\,d\alpha}{R^{\cancel{2}}}$$

$$dE = \frac{k|\lambda|}{R}\,d\alpha$$

$$E_0 = 2\int_0^{\theta} dE_y = 2\int_{-\theta}^{0} dE\,\mathrm{sen}\,\alpha = 2\int_0^{\theta}\frac{k|\lambda|\,\mathrm{sen}\,\alpha\,d\alpha}{R}(-\hat{j}) = \frac{2k|\lambda|}{R}\left(-\cos\alpha\Big|_0^{\theta}\right)(-\hat{j})$$

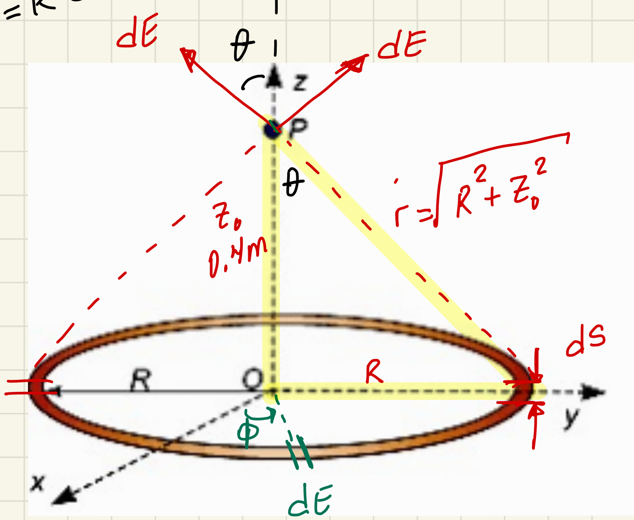
$$\vec{E}_0 = \frac{2k|\lambda|}{R}(-\cos\theta + 1)(-\hat{j}) = \frac{2k\,\frac{Q}{R\theta}}{R}(1-\cos\theta)(-\hat{j})$$

$$\boxed{\vec{E}_0 = \frac{2kQ}{R^2\theta}(1-\cos\theta)(-\hat{j})}$$

Ejemplo 5. (Anillo de carga). Un conductor de forma anular con radio R=2.5cm tiene una carga positiva total Q = +0.125nC. El centro del anillo está en el origen. Calcule el campo eléctrico en el punto P, localizado sobre el eje "z" en z= 40cm

$s = R\phi$

$ds = R\,d\phi$



Por simetría

$E_y = \varnothing \qquad E_x = \varnothing$

$E_z = E_p \quad (+\hat{k})$

$\lambda = \dfrac{Q}{2\pi R}$

$dE = \dfrac{k\,dq}{r^2} \qquad dq = |\lambda|\,ds$

$ds = R\,d\phi$

$dE_z = dE\cos\theta$

$dE = \dfrac{k|\lambda|\cos\theta\,ds}{(R^2+z_0^2)} = \dfrac{k|\lambda|\,z_0}{(R^2+z_0^2)^{3/2}}\,ds$

$\vec{E}_p = \dfrac{k|\lambda|\,z_0}{(z_0^2+R^2)^{3/2}}\displaystyle\int_0^{2\pi R} ds\;(+\hat{k}) = \dfrac{k|\lambda|\,z_0\,2\pi R}{(z_0^2+R^2)^{3/2}}\;(+\hat{k})$

$\cos\theta = \dfrac{z_0}{(R^2+z_0^2)^{1/2}}$

$\vec{E}_p = \dfrac{k|\lambda|z_0}{(z_0^2+R^2)^{3/2}}\displaystyle\int_0^{2\pi} R\,d\phi = \dfrac{k|\lambda|\,z_0\,2\pi R}{(z_0^2+R^2)^{3/2}}\;(+\hat{k})$

$$= \frac{k\,|\lambda|\, z_0\, 2\pi R}{(z_0^2 + R^2)^{3/2}} \,(+\hat{k})$$

$$= \frac{k \left(\frac{Q}{\cancel{2\pi R}}\right) z_0\, \cancel{2\pi R}}{(z_0^2 + R^2)^{3/2}} \,(+\hat{k})$$

$$\vec{E}_p = \frac{k\, Q\, z_0}{(z_0^2 + R^2)^{3/2}} \,(+\hat{k})$$

$$\vec{E}_p = \frac{9\times10^9 (0.125\times10^{-9})(0.4)}{(0.4^2 + 0.025^2)^{3/2}} \,(+\hat{k})$$

$$\vec{E}_p = 6.99 \,\frac{N}{C}\, (\hat{k})$$