Statistiek

Centrummaten | Boxplot | Frequentiepolygoon

---

1. Centrummaten en spreiding

Statistiek is een tak van de wiskunde die zich bezig houdt met het onderzoeken van verschijnselen (*gebeurtenissen*) in of bij een (grote) groep mensen of objecten.
De te onderzoeken verzameling objecten heet *populatie*.
Het verzamelen van de gegevens voor het onderzoek wordt gedaan via *waarnemingen* (tellingen) of enquêtes. Daarbij wordt vaak slechts een klein gedeelte van de populatie onderzocht. Zo'n deelverzameling heet dan *steekproef*. De resultaten van de onderzochte elementen in de steekproef worden vaak "vertaald" (van toepassing verklaard op) naar de gehele populatie.

Voorbeeld

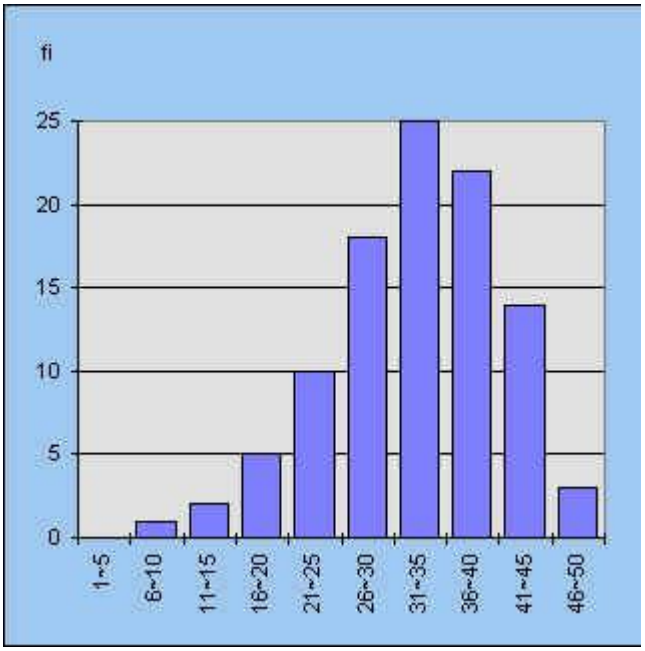
Een groep van 100 leerlingen (de populatie) heeft een meerkeuze-toets (met 4 alternatieven per vraag) in een bepaald vak afgelegd. Daarbij wordt het aantal goede antwoorden (de toets bestond uit 50 vragen) ingedeeld in *klassen* van vijf punten.

In figuur 1 een frequentietabel van de resultaten. In figuur 2 staat een staafdiagram van de frequenties.

figuur 1

klasse	f_i	m_i
1-5	0	3
6-10	1	8
11-15	2	13
16-20	5	18
21-25	10	23
26-30	18	28
31-35	25	33
36-40	22	38
41-45	14	43
46-50	3	48

figuur 2



Opmerking

In figuur 1 staat f_i voor de frequentie van de waarnemingen in de bijbehorende klasse en m_i voor het *klassenmidden* van die klassen. De *i* kan in dit geval het beste worden gelezen als "*individueel*". De index is afkomstig uit de schrijfwijze met het sommatieteken (zie de formule

voor het gemiddelde, hieronder).
[einde opmerking]

Als *maten voor het centrum* kennen we

modus (bij klassen: modale klasse)	de waarneming met de hoogste frequentie; in dit geval is dat klasse 41-45
mediaan	de middelste waarneming; in dit geval ligt deze in de klasse 31-35 en is gelijk aan 33 (het midden van de klasse)
gemiddelde	rekenkundig gemiddelde, op deze pagina aangegeven met $\bar{x}$

Voor het (rekenkundig) gemiddelde geldt (met x_i = waarde van de waarneming; in dit geval de score, en f_i de daarbij behorende frequentie. *n* is het aantal waarnemingen):

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n}$$

Deze formule kan hier niet direct gebruikt worden omdat de waarden van de waarnemingen (de echte scores) niet hier niet bekend zijn.
In dit geval kiezen we daarvoor de klassenmiddens (m_i). Voor bijvoorbeeld de 2e klasse is dat $m_2 = (6 + 10)/2 = 8$.
Volgens bovenstaande formule is dan:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 8 + \cdots + 3 \cdot 48}{100} = 32,7$$

Daarbij zij dus opgemerkt, dat dit niet het werkelijk gemiddelde is van de scores, maar het gemiddelde op basis van de keuze van de klassenmiddens.

Voor de zogenoemde ***spreiding*** wordt vaak gebruikgemaakt van de ***standaarddeviatie*** (ook wel *standaardafwijking)* die aangegeven wordt met de Griekse (kleine) letter *sigma* σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}}$$

De standaardafwijking is dus een "soort" gemiddelde van de absolute afwijkingen tussen de waarnemingsgetallen en het gemiddelde van die waarnemingsgetallen.
Ook hierbij maken we, in geval van klassen, gebruik van de middens van die klassen.
In ons geval geldt (weer op basis van de klassenmiddens): $\sigma = 8,13$

Opmerking
Een formule voor de standaarddeviatie die gemakkelijker te hanteren is bij berekeningen, luidt:

$$\sigma^2 = \overline{(x^2)} - (\bar{x})^2$$

Te lezen als: het kwadraat van de standaarddeviatie (dat kwadraat wordt ook wel *variantie* genoemd) is gelijk aan het gemiddelde van de kwadraten van de waarnemingsgetallen verminderd met het kwadraat van het gemiddelde van die getallen.
[einde opmerking]

Statistische vuistregels

De getallen x^- en σ worden gebruikt bij het vaststellen van de normering van het examen.
Als een verdeling enigszins lijkt op een zogenoemde *normale verdeling* dan gelden de volgende vuistregels:

- $x^- - \sigma$ en $x^- + \sigma$ zijn grenzen waarbinnen 68% van de waarnemingsgetallen liggen;
- $x^- - 2\sigma$ en $x^- + 2\sigma$ zijn grenzen waarbinnen 95% van de waarnemingsgetallen liggen.

Aangezien de gokkans bij een meerkeuze toets met 4 alternatieven gelijk is aan 0,25 per vraag, zal men het cijfer 1 toekennen aan kandidaten, die (in het voorbeeld) 13 of minder goede antwoorden hebben.
In dit geval is $x^- - \sigma = 32{,}7 - 8{,}13 = 24{,}57$ en $x^- + \sigma = 32{,}7 + 8{,}13 = 40{,}83$. De betekenis hiervan is dat 68% van de leerlingen een score hebben van 25, 26, ..., 40 goede antwoorden.
Wil men dat 68% van de kandidaten het cijfer 6 hebben of hoger, dan bepaalt men de grens op $x^- - 0{,}45\sigma \approx 26$ goede antwoorden (de factor 0,45 kan worden berekend met behulp van de normale verdeling).

Handmatige berekening

Hieronder (in figuur 3) zetten we bovenstaande berekeningen samen met nog wat andere waarden die bij dit probleem een rol (kunnen) spelen, in een tabel. Een dergelijke tabel is handig als de berekeningen handmatig moeten worden uitgevoerd.
Hierin is:

- m_i - het klassenmidden van de bedoelde klasse (in de tabel verder aangeduid als x_i).
- rel_f_i - de *relatieve frequentie* van de meetwaarde (dus f_i / n)
- $C(f_i)$ - de *cumulatieve frequentie* van de meetwaarden
- $C(rel\_f_i)$ - de *cumulatieve relatieve frequentie* van de meetwaarden
- x^2 - het kwadraat van het gemiddelde van de meetwaarden (dus $x^- \cdot x^-$); deze waarde wordt gebruikt bij de berekening van de standaarddeviatie.(zie de Opmerking hierboven in paragraaf 1)

figuur 3

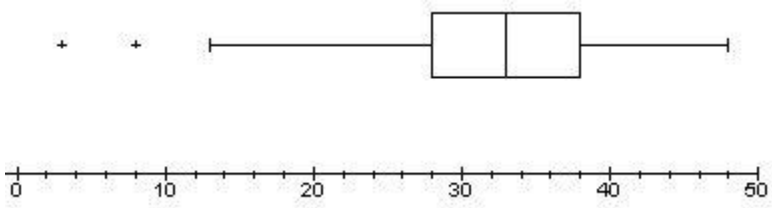
klasse	f_i	$m_i = x_i$	$x_i \cdot f_i$	rel_f_i	$C(f_i)$	$C(rel\_f_i)$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$	x^2
1-5	0	3	0	0	0	0	9	0	
6-10	1	8	8	0,01	1	0,01	64	64	
11-15	2	13	26	0,02	3	0,03	169	338	
16-20	5	18	90	0,05	8	0,08	324	1620	
21-25	10	23	230	0,1	18	0,18	529	5290	
26-30	18	28	504	0,18	36	0,36	784	14112	
31-35	25	33	825	0,25	61	0,61	1089	27225	
36-40	22	38	836	0,22	83	0,83	1444	31768	
41-45	14	43	602	0,14	97	0,97	1849	25886	
46-50	3	48	144	0,03	100	1	2304	6912	

totalen	100		3265					113215	1066,023
gemiddelden			32,65					1132,15	
standaarddeviatie			8,131882						

2. Boxplot

Bij het gebruik van de mediaan worden eveneens spreidingsgetallen gebruikt.
Bij een geordende eindige waardenverzameling met een *oneven* aantal elementen is de mediaan gelijk aan *het middelste getal*.
Is het aantal elementen even, dan is de mediaan het *gemiddelde van de beide "middelste" getallen*.
Links en rechts van de mediaan van zo'n verzameling ligt dus steeds 50% van de waarnemingen.
De mediaan van het linker deel van de waardenverzameling heet *1e kwartiel*; de mediaan van het rechter deel van de verzameling heet *3e kwartiel* (de mediaan zelf wordt soms *2e kwartiel* genoemd.
Het verschil tussen het 3e kwartiel en het 1e kwartiel heet *kwartiele afstand* of *kwartiele variatie*.
Deze vier gegevens kunnen grafisch worden weergegeven in een bijzondere grafiek, de zogenoemde *boxplot* van de gegevens. In figuur 4 is dat gedaan voor de middens van de klassen uit het in paragraaf 1 genoemde voorbeeld.

figuur 4 1e kwartiel = 28
mediaan = 33
3e kwartiel = 38
1,5 maal kwartiele afstand = 1,5 · 10 = 15
33-15=18; 33+15=48



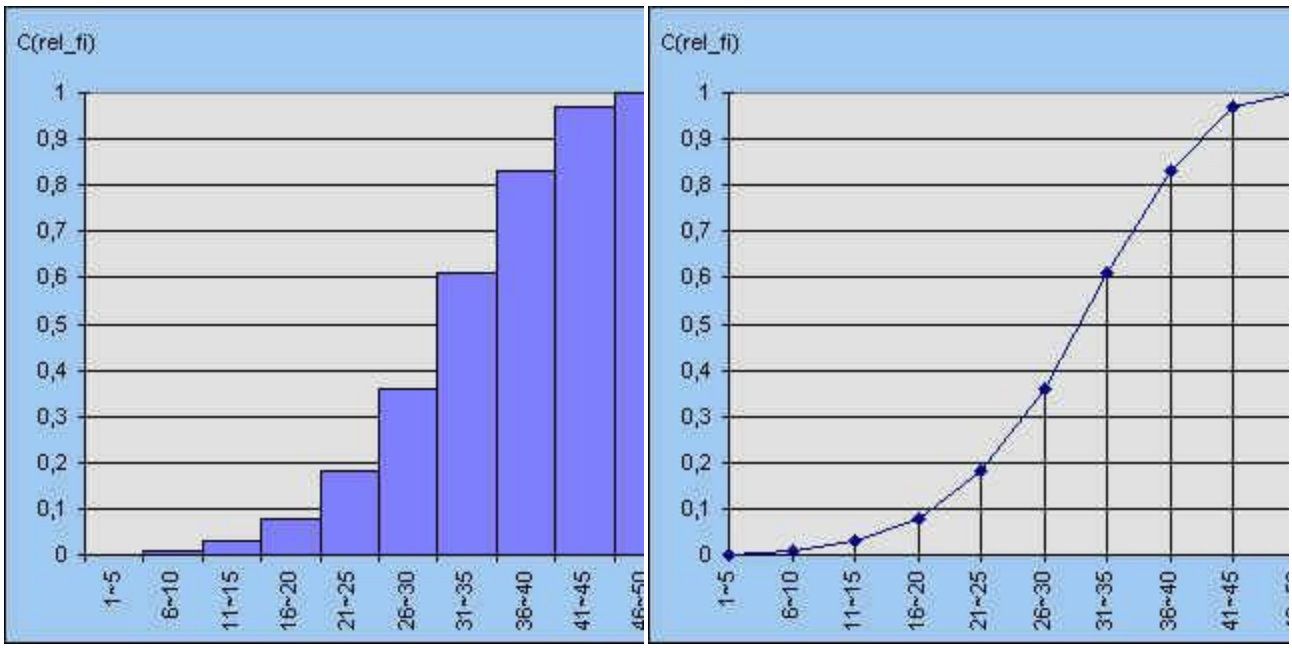
De boxplot bestaat dus (in het algemeen) uit twee gedeelten: een getallenlijn en een figuur (de "plot") waarmee de kwartielen en de mediaan worden aangegeven. De plot zelf bestaat uit

1. een "centraal" lijnstuk dat de mediaan aangeeft;
2. twee lijnstukken die de beide kwartielen aangeven;
3. twee kleine lijnstukken op een afstand van maximaal 1,5 maal de kwartiele afstand (niet verder dan de grootste cq. de kleinste meetwaarde);
4. punten die buiten het bereik van 1, 5 maal de kwartiele afstand liggen.

3. Frequentiepolygoon

Op basis van de in figuur 3 staande berekening kunnen we ook een histogram maken van de *cumulatieve (relatieve) frequenties*. In figuur 5 hebben we de balken van het histogram aan elkaar laten aanluiten. Wanneer we nu de *rechter* eindpunten van de rechthoeken met elkaar verbinden, krijgen we een zogenoemd *frequentiepolygoon*, behorende bij de cumulatieve relatieve frequenties (zie figuur 6).

figuur 5 **figuur 6**



Opmerking
In figuur 6 is van de klasse 1-5 alleen het rechter eindpunt in de figuur opgenomen!
De verticale lijnen geven het eindpunt van de klasse aan.