SC-315 Matemáticas Discretas
Departamento de Matemática
Coordinación
IC 2020

Emanuelle Parra Rodríguez
`emanuelle.parra@ufide.ac.cr`
Coordinador de curso

Lic. Hernán Víquez Céspedes
Colaborador

Lineamientos del segundo examen parcial

Contenidos

1. Técnicas de conteo

Las técnicas de conteo son usadas para contar los resultados favorables en eventos difíciles de cuantificar. La base para entender el uso de las técnicas de conteo son el principio multiplicativo y el principio aditivo. A continuación se exponen los mismos.

1.1. Ley de la multiplicación

Principio multiplicativo

Si tenemos $A_1, A_2, ..., A_k$ acciones o procedimientos distintos tal que la i-ésima acción puede ser ejecutada de n_i maneras distintas, $i = 1, 2, ..., k$, entonces el total de maneras que en que puede ejecutarse A_1 seguido por A_2...seguido por A_k está dado por

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$$

De igual forma, si se desea realizar una actividad que consta de k pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede hacerse de n_1 maneras, el segundo paso de n_2 maneras y el k-ésimo paso de n_k maneras, entonces esta actividad puede ser realizada de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$ maneras.

Ejemplo 1.1

1. Suponga que una mujer tiene 15 blusas, 12 faldas y 6 pares de zapatos. ¿De cuántas maneras puede vestirse si desea utilizar una prenda de cada tipo?
2. Un algorítmo computacional tiene 3 procedimientos (A,B y C) y cada procedimiento tiene dos ciclos. ¿Cuántos ciclos tienen el algorítmo?

1.2. Ley de la adición

Principio aditivo

Si tenemos A_1, A_2,...,A_k acciones o procedimientos distintos tal que la i-ésima acción puede ser ejecutada de n_i maneras distintas $i = 1, 2, ..., k$, entonces el total de maneras que en que puede ejecutarse la acción A_1 o la acción A_2 ... o la acción A_k está dado por

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$$

Ejemplo 1.2

1. Suponga desea viajar de Guanacaste a Limón y debe decidir entre viajar en tren, bus, auto o avión. Si hay una ruta de tren, dos de bus, tres de auto y una de avión, determine el número total de rutas distintas disponibles.

2. Una persona desea comprar una lavadora de ropa, para lo cual ha pensado que puede seleccionar de entre las marcas Whirpool, Easy y General Electric, cuando acude a hacer la compra se encuentra que la lavadora de la marca W se presenta en dos tipos de carga (8 u 11 kilogramos), en cuatro colores diferentes y puede ser automática o semiautomática, mientras que la lavadora de la marca E, se presenta en tres tipos de carga (8, 11 o 15 kilogramos), en dos colores diferentes y puede ser automática o semiautomática y la lavadora de la marca GE, se presenta en solo un tipo de carga, que es de 11 kilogramos, dos colores diferentes y solo hay semiautomática. ¿Cuántas maneras tiene esta persona de comprar una lavadora? **Sugerencia:** este ejemplo combina los dos principios mencionados.

1.3. Permutaciones

Definición 1.1: Permutación de un conjunto

Se llama permutación de un conjunto a cada una de las posibles ordenaciones que pueden realizarse con todos los elementos de dicho conjunto.

1.4. Permutaciones con repetición

Teorema 1.1

Sea A un conjunto que tiene n elementos, y $1 \leqslant r < n$, entonces el número de secuencias de longitud r que pueden formarse con los elementos de A permitiendo repeticiones es n^r.

Ejemplo 1.3: Permutaciones con repeticiones

1. ¿Cuántas palabras de tres letras pueden formarse a partir de las letras del conjunto $A = \{a, d, y, z\}$ si se permiten repeticiones?

2. ¿Cuántos números distintos de tres cifras y divisibles por dos pueden formarse a partir de los elementos del conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si cada cifra puede emplearse en la escritura del número varias veces?

Nota: A una secuencia de r elementos distintos de un conjunto finito A se le llama una permutación de A tomando r elementos a la vez. El total de permutaciones de un conjunto A se denota por $n\,P\,r$ y se lee: total de permutaciones de n elementos tomados r a la vez.

1.5. Permutaciones sin repetición

Teorema 1.2

Sea $1 \leqslant r < n$, entonces el total de permutaciones de n objetos tomados r a la vez, sin repetición, es:

$$n\,P\,r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo 1.4: Permutaciones sin repeticiones

1. ¿Cuántos números de tres cifras pueden construirse con los elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tomando la restricción de que el primer dígito sea 5 y que no se repita ninguno?, ¿y si no hay restricciones?
2. Los ingleses suelen dar tres nombres distintos a sus hijos. ¿De cuántas maneras se puede dar un nombre al niño, si el número general de nombres disponibles es 300, y no se repite ningúno?

Teorema 1.3

Si se conviene definir $0! = 1$, entonces el total de permutaciones de n objetos tomados todos a la vez es:

$$n\,P\,n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Ejemplo 1.5: Permutaciones tomando todos los elementos a la vez

1. En un experimento psicológico una persona debe acomodar en hilera un cuadrado, un cubo, un círculo, un triángulo y un pentágono. ¿Cuántos acomodos diferentes son posibles?
2. ¿De cuantas maneras pueden 6 hombres y 6 mujeres sentarse en línea recta si:
   a) cualquier persona puede sentarse seguida de cualquier otra?
   b) los hombres y las mujeres deben ocupar asientos alternados?
3. ¿Cuántos collares diferentes se pueden confeccionar de siete cuentas de distinto tamaño (hay que utilizar las 7)?

1.6. Permutaciones circulares

Teorema 1.4

El número de permutaciones circulares de n objetos distintos es $(n-1)!$.

Ejemplo 1.6: Permutaciones circulares

1. Determine el número de formas diferentes en que pueden sentarse 8 personas al rededor de una mesa redonda.
2. ¿De cuántas maneras se puede sentar al rededor de una mesa redonda a 5 hombres y 5 mujeres, de modo que no queden a la par dos personas de un mismo sexo?

1.7. Permutaciones con repetición en los elementos

Teorema 1.5

El número de permutaciones distinguibles que pueden formarse a partir de una colección de n objetos, en la que el primer objeto aparece k_1 veces, el segundo k_2 veces y así sucesivamente es:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdots k_t!}$$

Ejemplo 1.7: Permutaciones con repetición en los elementos

1. Determinar el número de palabras que pueden formarse con las letras de la palabra *Mississippi*.
2. Obtenga todas las señales posibles que pueden construirse con 6 banderines, dos de los cuales son rojos, tres son verdes y uno morado.
3. ¿Cuántos collares diferentes se puede confeccionar de cinco cuentas iguales y dos de mayor dimensión?

1.8. Combinaciones

En esta sección se estudian las posibles combinaciones que se pueden realizar, tomando r elementos a la vez de un conjunto que tiene n elementos. A diferencia de las permutaciones, en las combinaciones el orden de los elemetos carecen de importancia.

1.9. Combinación de un conjunto sin repetición en los elementos

Teorema 1.6

Sea A un conjunto que tiene n elementos y sea $1 \leqslant r < n$, entonces el número de combinaciones (que se puede entender como el número de subconjuntos de A) de n objetos tomados r a la vez es:

$$n\,C\,r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo 1.8: Combinaciones sin repeticiones en los elementos del conjunto

1. Calcule el número de manos distintas de 5 cartas que se pueden formar tomándolas de una baraja de 52 cartas.
2. En una clase hay 35 alumnos, se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

1.10. Combinación de un conjunto con repetición en los elementos

Teorema 1.7

Supóngase que se van a hacer k selecciones de n elementos sin tomar en consideración el orden y que se permitan repeticiones, suponiendo por lo menos k copias de cada uno de los n elementos. El número de maneras en que se pueden hacer estas selecciones es:

$$[n+(k-1)]\,C\,k$$

Ejemplo 1.9: Combinaciones con repeticiones en los elementos del conjunto

1. ¿De cuántas maneras puede escoger el ganador de un premio tres discos compactos de la lista de los 10 de mayor éxito, si se permite repeticiones?
2. De entre tres ejemplares de un texto de redes, 7 de estructuras de datos y 7 de java hay que seleccionar tres. ¿Cuántos modos existen de efectuarlos?

2. Teoría de probabilidad en variable discreta

Muchos experimentos no dan los mismos resultados cuando son efectuados repetidas veces, en contraste, existen experimentos cuyos resultados siempre son los mismos, tales sucesos se conocen como experimentos probabilísticos o deterministas respectivamente.

2.1. Conceptos Preliminares

Definición 2.1: Espacio Muestral

Se denomina espacio muestral al conjunto A formado por todos los resultados de un experimento. Es decir, cada elemento del espacio muestral es un posible resultado que se puede obtener al efectuar un experimento dado.

Nota: Un experimento puede estar asociado a más de un espacio muestral, todo depende del resultado que se haya fijado en el análisis de los resultados obtenidos.

Ejemplo 2.1: Identificación del espacio muestral

Suponga que se lanza al aire una moneda legal de 25 colones y una de 50 colones.

1. Determine el espacio muestral si el observador decide registrar como resultado el número de coronas observadas.
2. Determine el espacio muestral si el observador decide registrar la secuencia de escudos (E) y coronas (C) que observa, anotando en lista el resultado de la de 25 colones primero y luego la de 50 colones.

Ejemplo 2.2: Cardinalidad del espacio muestral

Determine la cardinalidad del espacio muestral que consiste en lanzar dos veces un dado legal de 6 caras y registrar la secuencia de números que aparezcan en la cara superior del dado después de cada lanzamiento.

Definición 2.2: Evento

Se dice que un enunciado acerca del resultado de un experimento, que podría ser verdadero o falso, describe un evento. El evento descrito por un enunciado se toma como el conjunto de todos los resultados para los cuales el enunciado es verdadero.

Ejemplo 2.3: Identificación de un evento

Se lanza un dado numeral de 6 caras hacia arriba dos veces, y se anota la secuencia de números impresos en las caras superiores. Determine el evento descrito por el enunciado:

La suma de los números que aparecen en las caras superiores son 8.

Nota: Todo evento es considerado como un subconjutno del espacio muestral. Si A es un espacio muestral de un experimento, entonces A mismo es un evento llamado el ***evento seguro*** y al subconjunto vacío de A se le llama ***evento imposible.***

2.2. Asignación de probabilidades a eventos

A cada evento E se le asigna un número $P(E)$, llamado **probabilidad del evento**, encontrar dicho número es el objetivo de la teoría de probabilidad discreta.

Teorema 2.1

Sea E un evento cualquiera de un espacio muestral A, entonces:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(A) = 1 \;\; y \;\; P(\emptyset) = 0$

Teorema 2.2: Principio elemental de la probabilidad

Si todos los resultados de un espacio muestral A son igualmente probables, entonces para cada evento E se tiene:

$$P(E) = \frac{|E|}{|A|} = \frac{\text{Número de casos favorables en E}}{\text{Número de resultados en total}}$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de situaciones en las que se emplea el principio elemental de la probabilidad.

Ejemplo 2.4: Aplicación del principio elemental de probabilidad

1. Escoja 4 cartas al azar de una baraja legal de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que se escojan 4 reyes?

2. Una caja contiene 6 bolas rojas y 4 bolas verdes. De la caja se toman 4 bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de las bolas que se hayan tomado sean rojas y dos sean verdes?

3. Una moneda legal es lanzada 6 veces al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener 4 escudos y 2 coronas?

4. Se sacan 4 bolas al azar de una caja que contiene 6 bolas rojas y 4 bolas verdes.

   a) Si E_1 es el evento en que no más de dos de las bolas sean rojas, calcule la probabilidad de que ocurra E_1.

   b) Si E_2 es el evento de que por lo menos dos de las bolas sean rojas, calcule la probabilidad de que ocurra E_2.

5. Un dado legal es lanzado tres veces seguidas. Encuentre la probabilidad de que en la secuencia obtenida:

   a) Incluya exactamente un tres.

   b) No incluya ningún 4.

3. Práctica complementaria

3.1. Ejercicios propuestos

1. Un estudiante posee una biblioteca en la cual tiene 3 libros de matemática, dos libros de ciencias y 4 libros de estudios sociales. Si desea elegir un libro de cada materia, ¿ de cuántas maneras puede realizar la selección.

2. Si se lanza un dado tres veces, ¿cuál es el número de resultados posibles que se obtendrá?

3. El departamento de tránsito va a hacer placas alfanuméricas para los vehículos de una ciudad, las mismas deben tener seis caracteres distribuidos de la siguiente manera: se debe iniciar con la letra P o con la B, después los siguientes dos caracteres deben ser letras cualesquiera escogidas del alfabeto (sin repetición) y finalmente tres números seguidos que se pueden repetir a excepción del 000. ¿Cuántas placas se podrán hacer?

4. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, así como las letras de las palabras BOOLEANA y BOUGHT, para desarrollar lo que se le solicita en cada caso.

    a) Determine de cuántas maneras diferentes se pueden acomodar las letras de la palabra BOOLEANA.

    b) Calcule cuántos acomodos diferentes pueden formarse con las letras de la palabra BOUGHT si las vocales deben conservarse juntas en todo momento.

    c) Conteste, ¿cuántos números pares diferentes de tres cifras se pueden construir con los elementos del conjunto A, si no se permiten repeticiones?

5. Una tienda de celulares tiene en exhibición una urna circular con las seis generaciones del iphone. Un cliente decide interactuar con los teléfonos, por lo que el vendedor los desmonta de la urna para mostrárselos.

    a) Determine de cuantas maneras puede el cliente escoger dos tel+efonos celulares de la exhibición.

    b) Suponga que el cliente no compra ninguno de los artefactos y determine de cuántas maneras puede el vendor volver a acomodar los celulares en la urna.

    c) Suponga ahora, que el cliente compra el iphone 6 y después de varios días de uso olvida la contraseña de 4 dígitos numerales que había creado. Empieza a adivinar su clave, y pensando que la descubre en su último intento, determine ¿Cuántos minutos deberá esperar en total, si cada 5 intentos fallidos debe esperar un minuto?

6. Una asamblea con 10 hombres y 15 mujeres debe elegir a su presidente y vicepresidente. Si los dos cargos deben ser ocupados por distintas personas, entonces determine:

    a) ¿Cuántas elecciones son posibles si el presidente debe ser un hombre?

    b) ¿Cuántas elecciones son posibles si el presidente debe ser una mujer?

    c) ¿Cuántas elecciones son posibles si debe elegirse a un hombre y una mujer en cualquier orden?

7. Suponga que 7 maestras y 4 maestros cumplen los requisitos para trabajar en una escuela que necesita contratar a 6 docentes. Determine:

   a) ¿De cuantas maneras puede escogerse 6 docentes sin importar su sexo?

   b) ¿De cuantas maneras se pueden escoger los 6 docentes si se desea que hayan 4 maestras y 2 maestros?

8. De un conjunto de 5 computadoras (A, B, C, D, E) se seleccionan 3 para mandarse respectivamente a los departamentos de Ventas, Compras y Mantenimiento. Si la primera que se selecciona es para ventas, la segunda para Compras y la tercera para Mantenimiento, conteste:

   a) ¿De cuántas maneras se pueden formar los paquetes?

   b) ¿De cuántas maneras se pueden ubicar las 5 computadoras, pero en 5 departamentos diferentes Dirección, Personal, Ventas, Compras y Mantenimiento?

9. Considere las letras de las palabras COTORRO y ARAÑA para desarrollar lo que se le solicita en cada caso:

   a) Determine de cuántas maneras distintas se pueden acomodar las letras de la palabra ARAÑA.

   b) Indique el número de permutaciones distintas que se pueden construir con las letras de la palabra COTORRO si las vocales siempre deben permanecer juntas.

10. ¿Cuántos códigos de tres letras pueden formarse con las vocales si ...

    a) ... no se permite repetir letras?

    b) ... se permiten letras repetidas?

11. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse las letras de la palabra ENSEÑANZA?

12. En la sala de espera de un consultorio médico hay un sofá con capacidad para 4 personas, suponga que en un día determinado de la semana hay 10 personas en la sala, conteste ¿de cuántas maneras se pueden acomodar estas personas en el sofá?

13. Suponga que un experimento consiste en sacar, al mismo tiempo, 4 bolas de una urna que contiene 10 bolas rojas y 5 bolas amarillas. Calcule la probabilidad de que se extraigan 3 bolas amarillas y 1 bola roja.

14. Suponga que 7 maestras y 4 maestros cumplen los requisitos para trabajar en una escuela que necesita contratar a 6 docentes. Determine:

    a) ¿De cuantas maneras puede escogerse 6 docentes sin importar su sexo?

    b) ¿De cuantas maneras se pueden escoger los 6 docentes si se desea que hayan 4 maestras y 2 maestros?

    c) Si E es el evento de que por lo menos dos docentes sean hombres. ¿Cúal es la probabilidad de que ocurra E?

15. Hay cuatro candidatos para presidentes A, B, C y D. Supóngase que A tiene el doble de probabilidades de ser elegido que B, B es tres veces más probable que C, además C y D tienen igual probabilidad de ser elegidos. ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada uno de los candidatos de ser electos?

16. Un experimento consta de dos resultados independientes, el primero consiste en sacar cuatro bolas de una urna que contiene 8 bolas rojas y 5 bolas amarillas; el segundo en lanzar una moneda legal cinco veces al aire y anotar las secuencias escudo-corona obtenidas. Conteste:

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer resultado ninguna de las bolas extraídas sea amarilla?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener, en el segundo resultado, una secuencia que contenga exactamente tres escudos y dos coronas?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar, en el primer resultado, a lo sumo tres bolas rojas?

17. En la sala de espera de un consultorio médico hay un sofá con capacidad para 4 personas, suponga que en un día determinado de la semana hay 10 personas en la sala, conteste ¿de cuántas maneras se pueden acomodar estas personas en el sofá?

18. Se tiene una bolsa con 8 confites de menta y 5 confites morenito. El experimento consiste en sacar 4 confites de la bolsa.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los confites extraídos sea de menta?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar a lo sumo 3 confites de menta?

19. Se tienen 10 computadoras y 6 impresoras. Determinar el número de paquetes que es posible formar, si se desea que estos contengan 4 computadores y 3 impresoras.

20. Determine de cuántas maneras se pueden acomodar las letras de la palabra:

    a) COMPUTADORA

    b) TENDERETE

21. Se tiene una gran mesa circular y 10 computadoras diferentes:

    a) ¿cuántas maneras distintas se pueden colocar las 10 computadoras alrededor de la mesa?

    b) Si se desea que 3 de ellas siempre estén juntas, ¿de cuántas maneras se pueden colocar las compuradoras alrededor de la mesa circular?

22. Se tienen seis letras: A, B, C, D, E, F

    a) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden acomodar?

    b) Si se desea que las letras B y F siempre estén juntas, ¿de cuántas maneras se pueden acomodar?

    c) ¿Cuántas permutaciones comienzan con la letra E y no repiten ninguna letra?

23. En un examen de regularización de la materia de Física está integrado por 5 unidades diferentes y cada una de éstas tiene 7 preguntas también diferentes:

    a) Si se desea que se contesten solamente 4 preguntas de cada unidad, sin importar el orden, ¿de cuántas maneras distintas se puede contestar el examen?

    b) Si deben contestar 6 preguntas de la primera unidad, 4 de la segunda y tercera unidades y 3 de las unidades cuatro y cinco, sin importar el orden en que las contesten, ¿ de cuántas maneras distintas es posible contestar el examen?

    c) En total son 35 preguntas, considerando las cinco unidades. Si solamente se deben contestar 20 preguntas sin importar el orden ni la unidad, ¿de cuántas maneras distintas se puede contestar el examen?

24. Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede elegirlas? ¿y si las 4 primeras son obligatorias?

25. Hay cinco tipos de sobres sin estampillas y cuatro tipos de estampillas de un mismo valor. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un sobre con estampilla para enviar una carta? Construya un diagráma de árbol para la situación planteada.

26. Los ingleses suelen dar varios nombres a sus hijos. ¿De cuántas maneras se puede dar un nombre al niño, si el número general de nombres disponibles es igual a 300, y no le dan más de tres nombres a cada niño?

27. De un grupo formado por 7 hombres y 4 mujeres, hay que seleccionar 6 personas de forma tal que entre ellas haya almenos 2 mujeres. ¿De cuantas maneras puede efectuarse la elección?

28. Cuando un número es el mismo leído de izquierda a derecha que de derecha a izquierda (como 26862) se le llama *palíndromo*. Determine el número de palíndromos de cinco dígitos que existen, si el cero inicial no está permitido.

29. Una compañía naviera está formada por 3 oficiales, 6 sargentos y 60 soldados. ¿De cuántos modos se puede seleccionar entre ellos un escuadrón formado por un oficial, dos sargentos y 20 soldados?

30. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden obtener permutando las letras de la palabra otorrinolaringologia (sin acento)?

31. Cuatro libros de matemática, seis de física y dos de química han de ser colocados en una estantería ¿Cuántas colocaciones distintas admiten si:

    a) los libros de cada materia deben estar juntos.

    b) sólo los de matemática que tienen que estar juntos.

32. En un hospital se utilizan cinco caracteres para clasificar las historias clínicas de sus pacientes, de manera que los dos primeros son letras del alfabeto y los tres últimos son dígitos numerales. Suponiendo que hay 26 letras disponibles, ¿cuántas historias clínicas podrían hacerse si:

    a) no hay restricciones sobre las letras y números.

   b) las dos letras no pueden repetirse.

33. Hay cuatro candidatos para presidentes A, B, C y D. Supóngase que A tiene el doble de probabilidades de ser elegido que B, B es tres veces más probable que C, además C y D tienen igual probabilidad de ser elegidos. ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada uno de los candidatos de ser electos?

34. Actualmente, los códigos de área telefónicos son de tres dígitos, pero el dígito intermedio debe ser 0 o 1. Los códigos cuyos últimos dos dígitos son 1 están siendo usados para otros fines, por ejemplo, 911. Con estas condiciones, y sabiendo que ningún código de área inicia con 0, ¿cuántos códigos de área hay disponibles?

35. Se lanzan tres dados legales de seis caras y se anotan los números que aparecen en las caras superiores como lanzamientos triples. ¿Cuántos reportes diferentes son posibles?

36. Encuentre el número de permutaciones diferentes que se pueden formar utilizando las letras de la palabra BOOLEAN.

37. Se va a usar un librero para exhibir seis nuevos libros. Supóngase que hay ocho libros de ciencia de computación y cinco libros franceses de donde escoger. Si se decide exhibir cuatro libros de ciencia de la computación y dos libros franceses, y se pide mantener juntos los libros de cada tema. ¿Cuántos acomodos diferentes es posible hacer?

38. Una clave de admisión de un banco consta de dos letras del alfabeto seguidas por dos dígitos. ¿Cuántas claves diferentes hay?

39. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un comité de tres miembros de facultad y dos estudiantes, tomándolos de siete miembros de facultad y ocho estudiantes?

40. Para manejar en carretera durante sus vacaciones, va a escoger usted 6 de los 35 cd´s de rock de su colección, 3 de los 22 cd´s de música clásica y 1 de los 8 cd´s de música romántica. ¿De cuántas maneras puede hacer usted sus elecciones?

41. ¿De cuántos modos se pueden poner 5 anillos diferentes en los dedos de una mano, omitiendo el pulgar? Generalice la idea para cuando tenemos n anillos diferentes.

42. De 12 palabras de género masculino, 9 de femenino y 10 de neutro, hay que seleccionar una de cada género. ¿De cuántos modos diferentes se puede efectuar esa selección? Generalice el problema para cuando el número de palabras por género son, respectivamente, m, f y g.

43. De entre tres ejemplares de un texto de álgebra, 7 de geometría y 7 de trigonometría, hay que seleccionar un ejemplar de cada texto. ¿Cuántos modos distintos existen de efectuarlo?

44. Juan el alumno más destacado de Matemática Discreta se saca un premio al final del curso, el premio consiste en vacaciones todo pagado a cualquiera de 3 posibles lugares que le gustaría ir, usando cualquiera de los 2 medios de transporte disponibles, y acompañado de uno de los 3 familiares que lo pueden acompañar, ¿cuantas posibilidades diferentes se le presentan a Juan para ir a dicho viaje?

45. Dos viajeros llegan a una ciudad en la que hay 3 hoteles ¿De cuántas maneras pueden hospedarse si cada uno debe estar en un hotel diferente?

46. Hay 10 aviones que vuelan entre las ciudades de México y Monterrey ¿De cuántas maneras puede ir una persona de México a Monterrey y regresar en un avión diferente?

47. Una persona desea construir su casa, para lo cuál considera que puede construir los cimientos de cualquiera de dos maneras (concreto o block de cemento), mientras que las paredes las puede hacer de adobe, adobón o ladrillo, el techo puede ser de concreto o lámina galvanizada y por último los acabados los puede realizar de una sola manera ¿cuántas maneras tiene esta persona de construir su casa?

48. ¿Cuántas placas para automóvil pueden ser diseñadas si deben constar de tres letras seguidas de cuatro números, si las letras deben ser tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9?

    a) Si es posible repetir letras y números.
    b) No es posible repetir letras y números.
    c) Cuántas de las placas diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D y empiezan por el cero.
    d) Cuantas de las placas diseñadas en el inciso b empiezan por la letra D seguida de la G.

49. ¿Cuántos números telefónicos es posible diseñar, los que deben constar de seis dígitos tomados del 0 al 9?

    a) El cero no debe ir en la primera posición y no es posible repetir dígitos.
    b) ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b empiezan por el número siete?

50. Un cierto alfabeto consta de sólo tres símbolos: α, β, γ . Cada palabra está formada por una secuencia arbitraria de no más de cuatro letras. ¿Cuántas palabras se pueden formar en este lenguaje?

51. De un grupo de diez hombres y doce mujeres se van a escoger siete al azar para formar una comisión. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar cinco mujeres y dos hombres?

52. Supóngase que se sacan tres bolas al azar de una urna que contiene siete bolas rojas y cinco bolas negras. Calcule la probabilidad de que:

    a) Por lo menos dos bolas sean negras.
    b) A lo sumo dos bolas sean negras.
    c) Cuando más una bola sea negra.

53. Una moneda legal es lanzada siete veces al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres escudos y cuatro coronas?

54. Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

55. Se lanzan tres monedas al aire.

a) Determine el espacio muestral.

b) Ejemplificar un evento con tres puntos muestrales.

c) Determine la cardinalidad de los siguientes eventos

$$\begin{aligned} A &: \textit{se obtienen al menos 2 caras} \\ B &: \textit{Se obtienen exactamente 3 caras} \end{aligned}$$

d) ¿Cuál suceso es complementario al evento P :*no se obtiene ninguna cara*?. Exprese en notación de conjunto el mismo.

e) Ejemplificar un evento imposible.

f) Ejemplificar un evento seguro.

56. Se lanza un dado y se consideran:

$$\begin{aligned} A &: \textit{El resultado del dado es impar.} \\ B &: \textit{El resultado del dado es mayor que 4} \end{aligned}$$

Encuentre: $P(A)$ y $P(B)$

57. En cierta rifa de un automóvil se venden 5000 boletos. Calcule la probabilidad de ganarse el automóvil:

a) si se compran 20 boletos.

b) si se compran todos los boletos.

c) si no se compran boleto

58. Se tiene un grupo de 7 hombres y 8 mujeres.

a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir 2 hombres y 2 mujeres?

b) ¿Cuál es la probabilidad de elegir 2 hombres o 2 mujeres?

c) ¿Cuál es la probabilidad de elegir 4 del mismo sexo?

d) Si se eligen 4 personas, ¿Cuál es la probabilidad de elegir al menos 2 mujeres?

4. El principio de la inducción matemática

Gauss el príncipe de las matemáticas y el inicio del proceso inductivo

Carl Friedrich tenía siete años cuando ingresó a la escuela primaria St. Catherine. Su profesor fue J. G. Büttner, un maestro tradicional que, en general, consideraba a sus alumnos como incapaces y poco inteligentes. Sin embargo, pronto descubrió que Gauss era diferente. ¿Cómo lo descubrió? Cuando ocurrió el siguiente episodio, una mañana en el salón de clases:

El profesor, ante un grupo de niños de alrededor de 10 años de edad, estaba molesto por algún mal comportamiento del grupo y les puso un problema en el pizarrón que según él les tomaría un buen rato terminar; así, de paso, podría descansar. En esos tiempos los niños llevaban una pequeña pizarra en la cual hacían sus ejercicios.

Y el profesor dijo que mientras fueran acabando pusieran las pizarras en su escritorio para que luego las revisara. El problema consistía en sumar los primeros cien números enteros, es decir, encontrar la suma de todos los números del 1 al 100. A los pocos segundos de haber planteado el problema se levantó un niño y depositó su pizarra sobre el escritorio del maestro. Éste, convencido de que aquel niño no quería trabajar, ni se molestó en ver el resultado; prefirió esperar a que todos terminaran.

Un poco más de media hora después comenzaron a levantarse los demás niños para dejar su pizarra, hasta que finalmente todo el grupo terminó. Para sorpresa del profesor, de todos los resultados el único correcto era el del primer muchacho, mando a llamar al chico y le preguntó si estaba seguro de su resultado y cómo lo había encontrado tan rápido; el niño respondió:

"Mire maestro, antes de empezar a sumar mecánicamente los 100 primeros números me di cuenta que si sumaba el primero y el último obtenía 101; al sumar el segundo y el penúltimo también se obtiene 101, al igual de sumar el tercero con el antepenúltimo, y así sucesivamente hasta llegar a los números centrales que son 50 y 51, que también suman 101. Entonces lo que hice fue multiplicar 101 x 50 para obtener mi resultado de 5.050."

De esta manera aparentemente simple, Gauss había encontrado la propiedad de la simetría de las progresiones aritméticas, derivando la fórmula de la suma para una progresión aritmética arbitraria - fórmula que, probablemente, Gauss descubrió por sí mismo. Este acontecimiento marcó el camino en su vida. Büttner inmediatamente percibió que poco más tenía para enseñar a Gauss y le dio el mejor libro escolar de aritmética, especialmente encomendado de Hamburgo.

Definición 4.1: Sumatoria

En algunos apartados de esta unidad se empleará la notación *sigma* para representar la n-ésima suma parcial de una sucesión a_n, la cual se define por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

donde i es el índice de la suma, 1 es el límite inferior y n el límite superior.

Un caso particular de sumatoria es la siguiente.

$$\sum_{i=1}^{4} (3+2i) = (3+2\cdot 1) + (3+2\cdot 2) + (3+2\cdot 3) + (3+2\cdot 4) = 32$$

Definición 4.2: Divisibilidad

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.
Se dice que b *es divisible por* a, o que a *divide* a b, si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak$

Se sabe que 12 es divisible por 3, ya que 12=$3 \cdot 4$

4.1. Demostraciones por inducción matemática

Método de inducción matemática

Es utilizado para demostrar que proposiciones de la forma $P(n), \forall\, n \geqslant n_0$, donde n_0 es algún entero positivo fijo, son válidas para todos los números naturales o para algún subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Para ello es necesario demostrar dos propiedades:

a) $P(n_o)$ es verdadero (Paso base)

b) Si $P(n)$ es verdadera (Hipótesis inductiva), entonces $P(n+1)$ es verdadero.

Ejemplo 4.1: Pruebas por inducción

Demuestre por inducción matemática que para todos los valores $n \geq 1$ son verdaderas las siguientes proposiciones.

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

c) $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$

d) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (4i-3) = n(2n-1)$

Ejemplo 4.2: Pruebas de divisibilidad por inducción

1. Demuestre que todo número de la forma $3^{2n+1} + 4 \cdot 23^n$ es divisible por 7, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Demuestre que todo número de la forma $n^3 - n$ es divisible por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Pruebe que todo número de la forma $7^n - 1$ es divisible por 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.
4. Pruebe que $4^{n-1} + 15n - 16$ es divisible por 9, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$.

4.2. Propiedades de la sumatoria

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \ldots + c = nc$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} cf(i) = c\sum_{1=1}^{n} f(i) \;\; , \;\; c \in \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$

Sumatorias particulares

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Ejemplo 4.3: Pruebas por inducción a partir de la formulación de sumatorias

Para cada una de las siguientes sumatorias determine una fórmula explícita que las represente, además verifique la veracidad de cada fórmula utilizando el principio de inducción matemática.

a) $3 + 10 + \cdots + (7n - 4)$

b) $4 + 9 + 16 + \cdots + (n+1)^2$

c) $4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + (n+3)$

d) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 11 + \cdots + n(n^2 + 2)$

5. Práctica complementaria

5.1. Ejercicios recomendados

1. Demuestre por inducción matemática que para todos los valores $n \geqslant 1$ son verdaderas las siguientes proposiciones.

   a) $3 + 11 + \cdots + (8n - 5) = 4n^2 - n$

   b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \cdots + \dfrac{2}{3^n} = 1 - \dfrac{1}{3^n}$

   c) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

   d) $\dfrac{3}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \dfrac{4}{2 \cdot 3 \cdot 2^2} + \cdots + \dfrac{n+2}{n(n+1)2^n} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)2^n}$

   e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 5i = \frac{5n(n+1)}{2}$

   g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$

2. Pruebe que $n^3 - 4n + 6$ es divisible por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$.

3. Demuestre que todo número de la forma $2^{3n} - 1$ es divisible por 7, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Para cada una de las siguientes sumatorias determine una fórmula explícita que las represente, además verifique la veracidad de cada fórmula utilizando el principio de inducción matemática.

   a) $8 + 9 + 10 \cdots + (n + 7)$

   b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$

   c) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \cdots + n(n+3)$

   d) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 12 + \cdots + n(n^2 + 3)$

5. Use el método de inducción matemática para probar las siguientes igualdades.

   a) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$.

   b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para $n \geq 0$.

   c) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2}$, para $n \geq 1$

   d) $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, para $n \geq 0$

6. Demostrar para el natural $n \geq 1$ que:

   a) $n\,(n+1)\,(2n+1)$ es divisible por 6.

   b) $4^n + 15n - 1$ es divisible por 3.

   c) $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es divisible por 13.

   d) $7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64.

   e) $5^n - 1$ es divisible por 4.

   f) $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

   g) $n^2\,(n^4 - 1)$ es divisible por 60.