

Vorlesungsmitschrift

REDUZIERTE BASIS METHODEN

UNIVERSITÄT STUTTGART, SS15
Prof. Dr. Bernard Haasdonk

AUTOREN:
Stefan Simeonov
Frank Schneider

STAND:
6. Mai 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Modellreduktion	3
2	Grundlagen	8
3	RB-Methoden für lineare koerzive Probleme	16
3.1	Primales RB-Problem	16
3.2	Fehleranalyse	19

1 Einleitung

Parameterabhängige Probleme

Beispiel 1.1 (Parameterabhängige PDE)

Sie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ polygonales Gebiet. Zu Parametervektor $\mu \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ aus einer Menge \mathcal{P} von „erlaubten“ Parametern ist eine Funktion (z. B. „Temperatur“) $u(\mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, s. d.:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\kappa(\mu) \nabla u) &= q(\mu) && \text{in } \Omega \\ u(\mu) &= 0 && \text{auf } \delta\Omega \end{aligned}$$

mit $\kappa(\mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (z. B. „Wärmeleitungskoeffizient“)

und $q(\mu) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (z. B. „Wärmequelle/-senke“)

$$\text{z. B. } q(x; \mu) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Omega_q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter kann Ausgabe erwünscht, z. B. mittlere Temperatur

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int u(x; \mu) dx$$

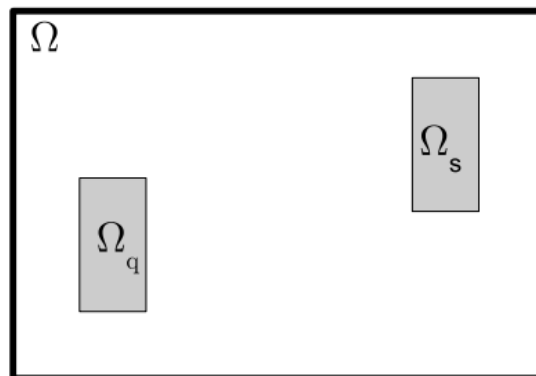


Abbildung 1: Beispiel Wärmeleitung mit Quelle Ω_q und Messbereich Ω_s
(aus B. Haasdonk, Reduzierte-Basis-Methoden, Skript zur Vorlesung SS 2011, Universität Stuttgart, IANS-Report 4/11, 2011.)

Beispiel 1.2 (Parametrisches stationäres System)

Zu Parameter $\mu \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p$ ist Zustandsvektor $u(\mu) \in \mathbb{R}^n$ und Ausgabe $s(\mu) \in \mathbb{R}^k$ gesucht, s. d.:

$$\begin{aligned} 0 &= A(\mu) \cdot u(\mu) + B(\mu)w(\mu) \\ s(\mu) &= l(\mu) \cdot u(\mu) \end{aligned}$$

mit parameterabhängigen Matrizen $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\mu) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mit Eingabevektor $w \in \mathbb{R}^m$.

Schwache Formulierung in Hilberträumen

Sie X reeller Hilbertraum (reel, seperabel). Zu $\mu \in \mathcal{P}$ ist gesucht ein $u(\mu) \in X$ und $s(\mu) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a(u(\mu), v; \mu) &= f(v; \mu) \\ s(\mu) &= l(u(\mu); \mu) \end{aligned} \quad \forall v \in X$$

Mit Bilinearform $a(\cdot, \cdot; \mu)$ und Linearform $f(\cdot; \mu)$, $l(\cdot; \mu)$. Beide Beispiele lassen sich so formulieren.

z. B. 1.1:

$$\begin{aligned} X &= H_0^1(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial}{\partial x_i} f \in L^2(\Omega), f|_{\partial\Omega} = 0\} \\ \underbrace{\int_{\Omega} \kappa(x; \mu) \nabla u(x; \mu) \cdot \nabla v(x) dx}_{a(u(\mu), v; \mu)} &= \underbrace{\int_{\Omega} q(x; \mu) \cdot v(x) dx}_{f(v; \mu)} \quad \forall v \in X \\ s(\mu) &= \frac{1}{|\Omega_s|} \int_{\Omega_s} u(x; \mu) =: l(u(\mu); \mu) \end{aligned}$$

Zu Bsp. 1.2 ($k = 1$, „single output“) $X = \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \underbrace{v^T A(\mu) u(\mu)}_{a(u(\mu), v; \mu)} &= \underbrace{-v^T B w}_{f(v; \mu)} \\ s(\mu) &:= \underbrace{C(\mu) u(\mu)}_{l(u(\mu); \mu)} \end{aligned}$$

In der Vorlesung werden weitere Verallgemeinerungen zu $a : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X_1 \neq X_2$, nichtlinear und instationäre Probleme behandelt.

1.1 Modellreduktion

Grundidee/Motivation

- $\mathcal{M} := \{u(\mu) \mid \mu \in \mathcal{P}\} \subset X$ für $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p$ ist die durch μ parametrisierte Lösungsmanigfaltigkeit.
- X ist im allgemeinen ∞ -dimensional Sobolev-Raum) oder endlich- aber sehr hoch-dimensional (FEM, FV, FD-Raum). \mathcal{M} ist aber höchstens p -dimensional.
 \Rightarrow Motivation für Suche nach einem niedrigdimensionalen Teilraum $X_n \subseteq X$ zur Approximation von \mathcal{M} und einer Approximation $u_N(\mu) \approx u(\mu)$, $u_N(\mu) \in X_N$
- Insbesondere bei Reduzierten-Basis-Methoden (RB-Methoden):
 X_N durch Beispiellösungen erzeugt, sog. „Snapshots“
 $X_N \subseteq \text{span}\{u(\mu_1), \dots, u(\mu_n)\}$ für geeignete Parameterwerte $\mu_i \in \mathcal{P}$.
Ziel ist außerdem Fehlerkontrolle durch Schranken $\Delta_N(\mu)$:

$$\|u(\mu) - u_N(\mu)\| \leq \Delta_N(\mu)$$

Illustration

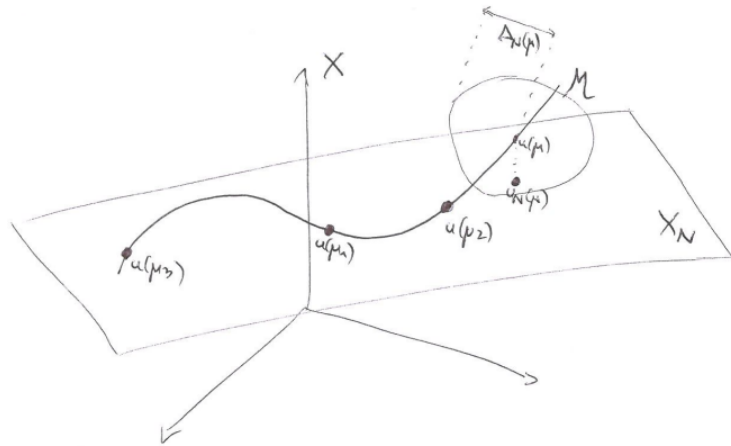


Abbildung 2: Parametrisierte niedrigdimensionale Lösungsmenge
(aus dem Online-Skript von Prof. Dr. Haasdonk zu Reduzierte Basen 2015)

Beispiel 1.3

Gesucht ist $u(\mu) \in C^2([0,1])$ mit

$$\begin{aligned} (1 + \mu)u'' &= 1 & \text{auf } (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 1 \end{aligned}$$

Für $\mu \in [0,1] =: \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$. Spezielle Lösungen („Snapshots“)

$$\begin{aligned} \mu = 0 &\Rightarrow u_0(x) = u(x; \mu = 0) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + 1 \\ \mu = 1 &\Rightarrow u_1(x) = u(x; \mu = 1) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x + 1 \end{aligned}$$

RB-Raum: $X_N := \text{span}(u_0, u_1)$ Reduzierte Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} u_N(\mu) &:= \alpha_0(\mu)u_0 + \alpha_1(\mu)u_1 \\ \alpha_0(\mu) &= \frac{2}{\mu + 1} - 1; \quad \alpha_1(\mu) = 2 - \frac{2}{\mu + 1} \end{aligned}$$

Diese erfüllt

$$\|u_N(\mu) - u(\mu)\|_\infty = \sup_\mu \|u(\mu) - u_N(\mu)\| = 0$$

ist somit exakt. \mathcal{M} ist enthalten in 2-dimensionalem Unterraum X_N : Genauer $\alpha_0 + \alpha_1 = 1, 0 \leq \alpha_0, \alpha_1 \leq 1$, also ist \mathcal{M} Menge der Konvexkombinationen von u_0, u_1 .

Begriffe

- Eine PDE ist ein *analytisches* Modell, welches die *exakte Lösung* $u(\mu) \in X$ in einem typischerweise ∞ -dimensionalen Funktionenraum X charakterisiert.
- Ein *detailliertes Modell* (auch *hochdimensionales Modell*) ist ein Berechnungsverfahren oder charakterisiert eine Approximation $u(\mu) \in X$ in hochdimensionalen Raum mit sehr allgemeinen Approximationseigenschaften. (z.B. FEM/FV/FD, $\dim X = 10^3 - 10^8$). In dieser Vorlesung kann $u(\mu)$ sowohl eine analytische als auch eine detaillierte Lösung darstellen.
- Ein *reduziertes* Modell ist ein Berechnungsverfahren bzw. eine Charakterisierung einer reduzierten Lösung $u_N(u)$ in einem sehr problemangepassten Raum X_N ($\dim X_N = 1 - 10^3$).
- *Modellreduktion* beschäftigt sich mit Methoden der Erzeugung reduzierter Modelle und Untersuchung ihrer Eigenschaften
- Modellreduktion ist ein modernes Gebiet der angewandten Mathematik und Ingenieurwissenschaften (Schwerpunkt in SimTech PN3, MOR-Seminar)

Anwendungen für parametrische reduzierte Modelle

„Kleinere“ Modelle stellen geringere Anforderungen an Rechenzeit und Speicher, daher Einsatz in:

- „multi-query“-Kontext, d. h. Vielfachanfragen unter Parametervariation: Parameterstudien, Design, Parameteridentifikation, Inverse Probleme, Optimierung, statistische Analyse
- Multi-skalen-Modelle (reduzierte Mikrolöser)
- „real-time“-Kontext, d. h. Anwendungen mit schneller Simulationsantwort: Interaktive Benutzeroberfläche, Web-Formulare, Echtzeitsteuerung von Prozessen
- „cool-computing“-Kontext, d. h. Simulation auf „einfacher“ Hardware: elektronische Regler, Smartphones, Ubiquitous Computing

Demonstration

demo_thermalblock.m aus RBmatlab, Smartphone App JaRMoS

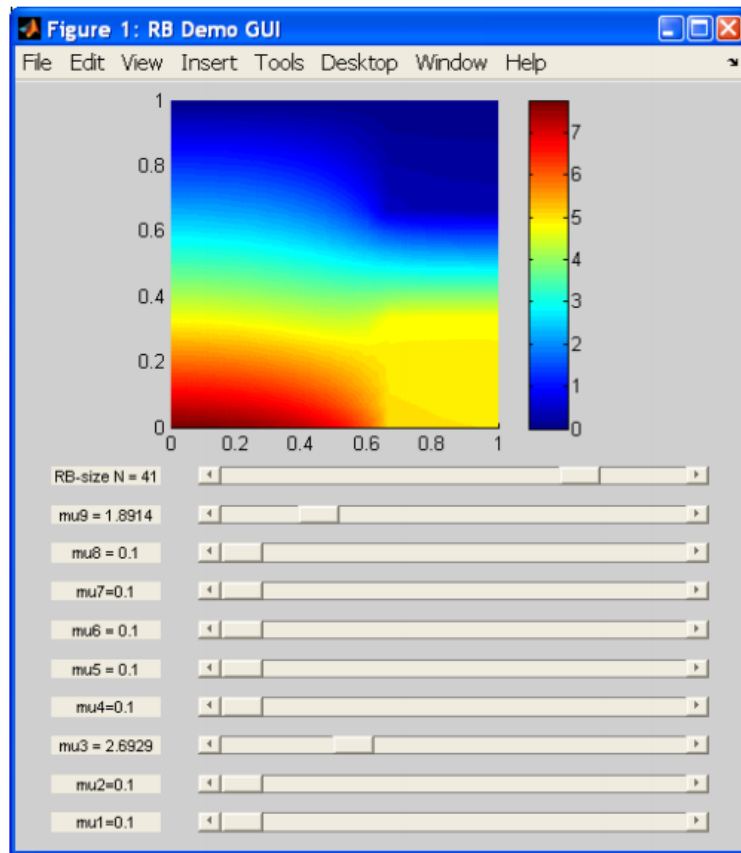


Abbildung 3: Beispiel des Thermischen Blocks aus `demo_thermalblock.m`
 (aus B. Haasdonk, Reduzierte-Basis-Methoden, Skript zur Vorlesung SS 2011, Universität
 Stuttgart, IANS-Report 4/11, 2011.)

Offline/Online Zerlegung

Typischerweise wird eine Verechnungsintensive Generierung des reduzierten Modells akzeptiert, sog. *Offline-Phase*. Dies ermöglicht schnelle Anwendbarkeit des reduzierten Modells in der *Online-Phase*. Offline-Kosten werden gerechtfertigt durch Amortisierung im multi-query-Kontext, d. h. Laufzeitgewinn bei genügend großer Anzahl an Online-Simulationen

multi-query mit detailliertem Modell:



multi-query mit reduziertem Modell:

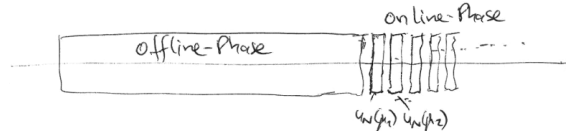


Abbildung 4: Laufzeitvergleich eines detaillierten mit einem reduzierten Modell
(aus dem Online-Skript von Prof. Dr. Haasdonk zu Reduzierte Basen 2015)

Zentrale Fragen

- Reduzierte Basis: Wie kann ein möglichst kompakter Teilraum konstruiert werden? Können solche Verfahren *beweisbar* gut sein?
- Reduziertes Modell: Wie kann eine Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ bestimmt werden
- Berechnungs-Effizienz: Wie kann $u_N(\mu)$ *schnell* berechnet werden?
- Stabilität: Wie kann Stabilität des reduzierten Modells garantiert werden bei wachsendem $N := \dim X_N$?
- Fehlerschätzer: Kann der Fehler des reduzierten zum detaillierten oder analytischen Modells beschränkt werden? Sind die Fehlerschätzer schnell berechenbar?
- Effektivität der Fehlerschätzer: Kann garantiert werden, dass der Schätzer den Fehler nicht zu pessimistisch überschätzt?
- Für welche Problemklassen kann ein RB-Ansatz funktionieren, für welche nicht?

Vorläufige Gliederung

- 1 Einleitung
- 2 Grundlagen
- 3 RB Verfahren für lineare koerzive Probleme
- 4 Allgemeinere lineare Probleme
- 5 Nichtlineare Probleme
- 6 Instationäre Probleme
- 7 Weiterführende Aspekte

2 Grundlagen

Im Folgenden sei X (oder X_1, X_2) stets reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, Norm $\| \cdot \|_X$ und Dualraum X' . Subskript wird weggelassen falls keine Verwechslungsgefahr besteht.

Definition 2.1 (Parametrische Formen)

Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ beschränkte Parametermenge. Dann nennen wir

i) $l : X \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ *parametrische stetige Linearform* falls $\forall \mu \in \mathcal{P}$:

$$l(\cdot; \mu) \in X'$$

ii) $a : X_1 \times X_2 \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *parametrische stetige* (symmetrische) *Bilinearform*, falls für alle $\mu \in \mathcal{P}$

$$a(\cdot, \cdot; \mu) : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist bilinear und stetig (symmetrisch)}$$

Wir bezeichnen die Stetigkeitskonstante mit

$$\gamma(\mu) := \sup_{u \in X_1} \sup_{v \in X_2} \frac{a(u, v; \mu)}{\|u\|_{X_1} \|v\|_{X_2}}$$

Falls $X_1 = X_2 =: X$ und $a(\cdot, \cdot; \mu)$ ist koerziv für alle $\mu \in \mathcal{P}$, so ist $a(\cdot, \cdot; \cdot)$ *parametrisch koerziv* und wir bezeichnen die Koerzitivitätskonstante mit

$$\alpha(\mu) := \inf_{u \in X} \frac{a(u, u; \mu)}{\|u\|^2}$$

Bemerkung. Eine parametrische stetige Bi-/Linearform ist nicht unbedingt stetig bzgl. μ . Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = [0, 1]$, $l : X \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$l(x; \mu) := \begin{cases} x & \text{falls } \mu < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 2.2 (Parametrische Beschränktheit / Lipschitz-Stetigkeit / Koerzitivität)

Wir nennen

i) eine parametrische stetige Linearform l bzw. Bilinearform a *gleichmäßig beschränkt* bzgl. μ falls ex. $\bar{\gamma}_l, \bar{\gamma} < \infty$ mit

$$\sup_{\mu \in \mathcal{P}} \|l(\cdot; \mu)\|_{X'} \leq \bar{\gamma}_l \quad \text{bzw.} \quad \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \gamma(\mu) \leq \bar{\gamma}$$

ii) a *gleichmäßig koerziv* bzgl. μ falls ex. $\bar{\alpha} > 0$ mit

$$\inf_{\mu \in \mathcal{P}} \alpha(\mu) \geq \bar{\alpha}$$

iii) l bzw. a *Lipschitz-stetig* bzgl. μ falls ex. L_l bzw. $L_a \in \mathbb{R}^+$, sodass $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}$ gilt

$$|l(u; \mu_1) - l(u; \mu_2)| \leq L_l \|u\| \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \forall u \in X$$

bzw.

$$|a(u, v; \mu_1) - a(u, v; \mu_2)| \leq L_a \|u\| \|v\| \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \forall u \in X_1, v \in X_2$$

Definition 2.3 (Sensitivitätsableitung)

Sei $\mu_0 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{P}$ in Umgebung \mathcal{U} von μ_0 . Wir nennen $f : \mathcal{U} \rightarrow X$ (Frechet)-differenzierbar in μ_0 , falls ex. ein $Df(\mu_0) \in L(\mathbb{R}^p, X)$ mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(\mu_0 + h) - f(\mu_0) - Df(\mu_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

Falls f in jedem $\mu \in \mathcal{U}$ diffbar, dann existieren insbesondere partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} f(\cdot) := Df(\cdot) e_i : \mathcal{U} \rightarrow X$$

für $e_i \in \mathbb{R}^p$ Einheitsvektor $i = 1, \dots, p$. Falls diese wiederum diffbar in \mathcal{U} bezeichnet allgemein

$$\partial_\sigma f(\cdot) := \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \mu_1^{\sigma_1} \dots \partial \mu_p^{\sigma_p}} f(\cdot) : \mathcal{U} \rightarrow X$$

die Sensitivitätsableitung der Ordnung $|\sigma| := \sum_{i=1}^p \sigma_i$ für Multiindex $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^p \in \mathbb{N}_0^p$.

Bemerkung. Diese Ableitungen werden später insbesondere bei parameterabhängigen Lösungen $u(x; \mu)$ verwendet:

$u : \Omega \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(\cdot; \mu) \in X$ kann auch als

$u : \mathcal{P} \rightarrow X$ aufgefasst werden mit Sensitivitätsableitungen

$\partial_\sigma u : \mathcal{P} \rightarrow X$, d.h. $\partial_\sigma u(\cdot; \mu) \in X \quad \forall \mu \in \mathcal{P}$ und insbesondere

$\partial_\sigma u : \Omega \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. ∂_σ sind wieder Funktionen auf Ω

Definition 2.4 (Separierbare Parameterabhängigkeit)

- i) Eine Funktion $v : \mathcal{P} \rightarrow X$ nennen wir *separierbar parametrisch*, falls existieren Komponenten $v^q \in X$ und Koeffizientenfunktionen $\Theta_v^q : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ für $q = 1, \dots, Q_v$ mit

$$v(\mu) = \sum_{q=1}^{Q_v} \Theta_v^q(\mu) v^q$$

- ii) Eine parametrische stetige Linearform $l : X \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. Bilinearform $a : X_1 \times X_2 \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ist separierbar parametrisch, falls existieren $l^q \in X'$ und $\Theta_l^q : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ für $q = 1, \dots, Q_l$ bzw. $a^q : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, bilinear und $\Theta_a^q : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ für $q = 1, \dots, Q_a$ mit

$$l(v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_l} \Theta_l^q(\mu) l^q(v) \quad \forall v \in X, \mu \in \mathcal{P}$$

$$a(u, v; \mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} \Theta_a^q(\mu) a^q(u, v) \quad \forall u \in X_1, v \in X_2, \mu \in \mathcal{P}$$

Bemerkung.

- i) In Literatur auch “affine Annahme” oder “affin parametrisch” verwendet. Wir verwenden jedoch “separierbar”, da Θ_l^q auch nichtlinear sein können.
- ii) Q_a, Q_l sollten möglichst klein sein, weil diese in die Online-Komplexität eingehen, siehe *Abschnitt 3*.

Satz 2.5 (Energienorm)

Sei $a : X \times X \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ parametrische stetige, koerzive Bilinearform, und $a_s(u, v; \mu) = \frac{1}{2}(a(u, v; \mu) + a(v, u; \mu))$ der symmetrische Anteil. Dann ist für $\mu \in \mathcal{P}$

$$\langle u, v \rangle_\mu := a_s(u, v; \mu) \quad \text{bzw.} \quad \|u\|_\mu := \sqrt{\langle u, u \rangle_\mu}$$

das *Energie-Skalarprodukt* bzw. die *Energienorm* bzgl. μ . Diese ist äquivalent zu $\|\cdot\|_X$:

$$\sqrt{\alpha(\mu)}\|u\| \leq \|u\|_\mu \leq \sqrt{\gamma(\mu)}\|u\|$$

Beweis. Skalarprodukt: klar wegen Bilinearität, Stetigkeit und Koerzivität. Normäquivalenz folgt aus Stetigkeit und Koerzivität von a_s .

$$\alpha(\mu)\|u\|^2 \leq \underbrace{a(u, u; \mu)}_{\leq \|u\|^2 \gamma(\mu)} = a_s(u, u; \mu) = \|u\|_\mu^2$$

□

Satz 2.6 (Übertragung von Koeffizienten-Eigenschaften)

Seien f bzw. a separierbar parametrische stetige Linear- bzw. Bilinearform.

- i) Falls $\Theta_f^q(\mu)$ bzw. $\Theta_a^q(\mu)$ beschränkt sind, dann sind f bzw. a gleichmäßig beschränkt bzgl. μ .
- ii) Falls $\Theta_a^q(\mu)$ strikt positiv, d.h. ex. $\bar{\Theta}$ mit $\Theta_a^q(\mu) \geq \bar{\Theta} > 0 \forall \mu \in \mathcal{P}$ alle Komponenten positiv semidefinit, d.h. $a^q(v, v) \geq 0 \forall v, q$ und $a(\cdot, \cdot; \bar{\mu})$ ist koerziv für mindestens ein $\bar{\mu} \in \mathcal{P}$, dann ist a gleichmäßig koerziv bzgl. μ .

iii) Falls Θ_f^q, Θ_a^q Lipschitz-stetig, so ist f, a Lipschitz-stetig bzgl. μ .

Beweis.

i) Sei $\bar{\Theta}_f^q \in \mathbb{R}^+$ mit $|\Theta_f^q(\mu)| \leq \bar{\Theta}_f^q \forall \mu$. Dann gilt

$$\|f(\cdot; \mu)\| = \left\| \sum_q \Theta_f^q(\mu) f^q \right\| \leq \sum_q |\Theta_f^q(\mu)| \|f^q\| \leq \sum_q \bar{\Theta}_f^q \|f^q\| =: \bar{\gamma}_f < \infty$$

analog für $a(\cdot, \cdot; \mu)$.

ii) Für $u \in X, \mu \in \mathcal{P}$ gilt

$$a(u, u; \mu) = \sum_q \Theta_a^q(\mu) a^q(u, u) = \sum_q \underbrace{\frac{\Theta_a^q(\mu)}{\Theta_a^q(\bar{\mu})}}_{>0} \underbrace{\Theta_a^q(\bar{\mu}) a^q(u, u)}_{\sum(\cdot) = a(u, u; \bar{\mu})} \geq \underbrace{\sum_q \frac{\bar{\Theta}}{\max_{q'} \Theta_a^{q'}(\bar{\mu})} \alpha(\bar{\mu})}_{=: \bar{\alpha} > 0} \|u\|^2$$

iii) Sei $|\Theta_f^q(\mu_1) - \Theta_f^q(\mu_2)| \leq L_f^q |\mu_1 - \mu_2| \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}$ mit geeignetem $L_f^q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(v; \mu_1) - f(v; \mu_2)| &= \left| \sum_q \Theta_f^q(\mu_1) f^q(v) - \sum_q \Theta_f^q(\mu_2) f^q(v) \right| \\ &\leq \sum_q |\Theta_f^q(\mu_1) - \Theta_f^q(\mu_2)| \|f^q\| \|v\| \\ &\leq \underbrace{\sum_q L_f^q \|f^q\|}_{=: L_f} \|\mu_1 - \mu_2\| \|v\| \end{aligned}$$

analog für $a(\cdot, \cdot; \mu)$.

□

Definition 2.7 (Volles Problem $(P(\mu))$)

Seien a bzw. f, l parametrische Bilinearform bzw. Linearform und gleichmäßig stetig bzgl. μ , sei a gleichmäßig koerziv bzgl. μ . Dann ist für $\mu \in \mathcal{P}$ gesucht $u(\mu) \in X$ und $s(\mu) \in \mathbb{R}$ als Lösung von

$$\begin{aligned} a(u(\mu), v; \mu) &= f(v; \mu) & \forall v \in X \\ s(\mu) &:= l(u(\mu); \mu) \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Das volle Problem kann also ein analytisches Modell (PDE) oder ein detailliertes Modell (PDE-Diskretisierung) darstellen.
- Symmetrie von a wird nicht vorausgesetzt.

- In ??, ?? werden Verallgemeinerungen von $(P(\mu))$ betrachtet.

Satz 2.8 (Wohlgestelltheit und Stabilität)

Das Problem $(P(\mu))$ besitzt eine eindeutige Lösung mit

$$\|u(\mu)\| \leq \frac{\|f(\mu)\|_{X'}}{\alpha(\mu)} \leq \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}, \quad |s(\mu)| \leq \|l(\mu)\|_{X'} \|u(\mu)\| \leq \frac{\bar{\gamma}_l \bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}$$

Beweis. Existenz, Eindeutigkeit und Schranke für $u(\mu)$ folgen mit Lax-Milgram (siehe z.B. Satz 2.5 in Braess'03). Gleichmäßige Stetigkeit und Koerzivität ergeben μ -unabhängige Schranke für $u(\mu)$. Definition von $s(\mu)$ ergibt Eindeutigkeit und entsprechende Schranken. \square

Definition 2.9 (Lösungsmannigfaltigkeit)

Wir definieren

$$\mathcal{M} := \{u(\mu) \in X : \mu \in \mathcal{P} \text{ und } u(\mu) \text{ löst } (P(\mu))\}$$

Bemerkung. Wir verwenden den Begriff “Mannigfaltigkeit” nicht im strengen differentialgeometrischen Sinn, weil keine Stetigkeit / Diffbarkeit von \mathcal{M} gefordert wird.

Beispiel 2.10 (Thermischer Block)

TODO

Beispiel 2.11 (Matrixgleichung)

- Zu $\mu \in \mathcal{P}$ suche $u(\mu) \in \mathbb{R}^H$ als Lösung von

$$A(\mu)u(\mu) = b(\mu)$$

für $A(\mu) \in \mathbb{R}^{H \times H}$ und $b(\mu) \in \mathbb{R}^H$.

- Dies ist Beispiel für $(P(\mu))$ via

$$X := \mathbb{R}^H, \quad a(u, v; \mu) := v^\top A(\mu)u, \quad f(v; \mu) := v^\top b(\mu)$$

und beliebiger linearer Ausgabe $l(v; \mu) := \underline{l}^\top v$ für $\underline{l} \in \mathbb{R}^H$.

Beispiel 2.12 ($Q_a = 1$)

Falls $a(\cdot, \cdot; \mu)$, $f(\cdot; \mu)$ separierbar parametrisch mit $Q_a = 1$ und Q_f beliebig, so ist \mathcal{M} enthalten in einem Q_f -dimensionalen linearen Teilraum von X :

$$(P(\mu)) \Rightarrow \Theta_a^1(\mu) a^1(u, v) = \sum_q \Theta_f^q(\mu) f^q(v) \quad \forall v \in X$$

$\Theta_a^1(\mu) \neq 0$ wegen a gleichmäßig koerziv

$$a^1(u, v) = \sum_q \frac{\Theta_f^q(\mu)}{\Theta_a^1(\mu)} f^q(v) \quad \forall v \in X \quad (*)$$

$a^1(\cdot, \cdot)$ ist koerziv, f^q linear und stetig

$$\begin{aligned} & \xRightarrow{\text{Lax-Milgram}} \text{ex. } u^q, q = 1, \dots, Q_f \text{ mit } a^1(u^q, v) = f^q(v), \quad v \in X \\ & \Rightarrow u := \sum_q \frac{\Theta_f^q(\mu)}{\Theta_a^1(\mu)} u^q \text{ löst } (*) \text{ wegen Linearität} \\ & \Rightarrow u \in \text{span}\{u^q\}_{q=1}^{Q_f} \end{aligned}$$

Beispiel 2.13 ($(P(\mu))$ mit vorgegebener Lösung)

Sei $u : \mathcal{P} \rightarrow X$ beliebig komplizierte Abbildung. Dann existiert ein $(P(\mu))$ mit $u(\mu)$ als Lösung via Skalarprodukten:

$$a(v, w; \mu) := \langle w, v \rangle_X, \quad f(v; \mu) := \langle u(\mu), v \rangle_X$$

d.h. Klasse der Probleme $(P(\mu))$ können beliebig komplizierte, nichtglatte oder sogar unstetige Lösungsmannigfaltigkeit \mathcal{M} besitzen.

Bemerkung (Parameter-Anzahl und Lösungskomplexität). Es gibt (sogar in der Literatur) ein Missverständnis zwischen Parameteranzahl $p \in \mathbb{N}$ und Komplexität der Lösungsmannigfaltigkeit \mathcal{M} , denn es kann Redundanz in Parametern vorliegen (siehe Thermischer Block). Extremfall: $p \in \mathbb{N}$ beliebig, für geeignetes $a(\cdot, \cdot; \mu)$, $f(\mu)$ hat $(P(\mu))$ ein \mathcal{M} , welches in einem 1D-Raum enthalten ist. (Übung) Beispiel 2.13 zeigt andererseits einen anderen Extremfall: Sogar für $p = 1$ kann bei geeignetem $(P(\mu))$ das \mathcal{M} beliebig kompliziert sein (z.B. "Raumfüllende Kurve"). Unter geeigneter Annahmen an $a(\cdot, \cdot; \mu)$ und $f(\cdot; \mu)$ können einfache Regularitätseigenschaften von $u(\mu)$ bzw. \mathcal{M} geschlossen werden.

Korollar 2.14 (Beschränktheit von \mathcal{M})

Weil $a(\cdot, \cdot; \mu)$ gleichmäßig koerziv und $f(\cdot; \mu)$ gleichmäßig beschränkt, so ist \mathcal{M} beschränkt

$$\mathcal{M} \subseteq B_{\frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}}(0)$$

Beweis. Klar weil $\|u(\mu)\| \leq \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}$ nach Satz 2.8. □

Satz 2.15 (Lipschitz-Stetigkeit)

Falls $a(\cdot, \cdot; \mu)$, $f(\cdot; \mu)$, $l(\cdot; \mu)$ Lipschitz-stetig bzgl. μ , so sind $u(\mu)$ und $s(\mu)$ Lipschitz-stetig bzgl. μ mit Lipschitz-Konstanten

$$L_u = \frac{L_f}{\bar{\alpha}} + \bar{\gamma}_f \frac{L_a}{\bar{\alpha}^2} \quad \text{und} \quad L_s = L_l \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}} + \bar{\gamma}_l L_u$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.16 (Diffbarkeit)

Sei $a(u, \cdot; \mu) \in X'$ Frechet-diffbar in Umgebung von $(u_0, \mu_0) \subset X \times \mathcal{P}$ und $f(\cdot; \mu) \in X'$

Frechet-diffbar in Umgebung von $\mu_0 \in \mathcal{P}$. Dann ist Lösung $u(\mu)$ von $(P(\mu))$ Frechet-diffbar in Umgebung von $\mu_0 \in \mathcal{P}$ mit

$$D_\mu u(\mu) := - \left(\frac{\partial}{\partial u} F(u, \mu) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu} F(u, \mu)$$

wobei $F(u, \mu) := a(u, \cdot; \mu) - f(\cdot; \mu) \in X'$.

Beweis. Aus Frechet-Diffbarkeit von $a(\cdot, \cdot; \cdot)$ und $f(\cdot; \cdot)$ folgt Frechet-Diffbarkeit von $F : X \times \mathcal{P} \rightarrow X'$ in Umgebung von (u_0, μ_0) mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \mu} F(u_0, \mu_0) := \frac{\partial}{\partial \mu} a(u_0, \cdot; \mu_0) - \frac{\partial}{\partial \mu} f(\cdot; \mu_0) \in L(\mathbb{R}^p, X')$$

und $\frac{\partial}{\partial u} F(u_0, \mu_0) \in L(X, X')$ durch

$$\frac{\partial}{\partial u} F(u_0, \mu_0) h_u := a(h_u, \cdot; \mu_0) \in X' \quad \forall h_u \in X$$

Dann erfüllt $u(\mu)$ als Lösung von $(P(\mu))$ gerade

$$F(u(\mu), \mu) = 0$$

in Umgebung von μ_0 . Dann ist (z.B. mit Folgerung 2.15 in Ruzicka: Nichtlineare Funktionalanalysis, Springer 2004) auch $u(\mu)$ Frechet-diffbar in Umgebung von μ_0 mit Ableitung

$$D_\mu u(\mu) := - \left(\frac{\partial}{\partial u} F(u, \mu) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu} F(u, \mu)$$

□

Bemerkung.

- Plausibilität der Ableitungsformel folgt aus formellem Ableiten:

$$\begin{aligned} & D_\mu (F(u(\mu), \mu)) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial u} F(u(\mu), \mu) D_\mu u(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu} F(u, \mu) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial u} F(u(\mu), \mu) D_\mu u(\mu) = - \frac{\partial}{\partial \mu} F(u, \mu) \\ \Rightarrow & D_\mu u(\mu) = - \left(\frac{\partial}{\partial u} F(u(\mu), \mu) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu} F(u, \mu) \end{aligned}$$

- Man kann zeigen, dass die Sensitivitäts-Ableitungen $\partial_{\mu_i} u(\mu) \in X$ für $i = 1, \dots, p$ erfüllen das sogenannte *Sensitivitätsproblem*

$$a(\partial_{\mu_i} u(\mu), v; \mu) = \tilde{f}_i(v; u(\mu), \mu)$$

mit rechter Seite $\tilde{f}_i(\cdot; u(\mu), \mu) \in X'$ gegeben durch

$$\tilde{f}_i(\cdot; w, \mu) := \partial_{\mu_i} f(\cdot; \mu) - \partial_{\mu_i} a(w, \cdot; \mu)$$

d.h. das Problem $(P(\mu))$ mit modifizierter rechter Seite, in welcher insbesondere $u(\mu)$ eingeht. (Übung)

- Hinreichend für die Diffbarkeit von a, f in Satz 2.16 sind z.B. im Fall von separierbarer Parameterabhängigkeit die Diffbarkeit der Koeffizienten $\Theta_a^q(\mu), \Theta_f^q(\mu)$, $q = 1, \dots$ (Übung)
- Ähnliche Aussagen / Sensitivitätsprobleme gelten für Ableitungen höherer Ordnung. Also überträgt sich Glattheit der Koeffizientenfunktionen auf Glattheit der Lösung / Mannigfaltigkeit.

3 RB-Methoden für lineare koerzive Probleme

3.1 Primales RB-Problem

Definition 3.1 (Reduzierte Basis, RB-Räume)

Sei $S_N = \{\mu_1, \dots, \mu_N\} \subset \mathcal{P}$ Menge von Parametern mit (o.B.d.A.) linear unabhängigen Lösungen $\{u(\mu_i)\}_{i=1}^N$ von $(P(\mu_i))$. Dann ist $X_N := \text{span} \{u(\mu_i)\}_{i=1}^N$ ein sog. *Lagrange-RB-Raum*.

Sei $\mu^0 \in \mathcal{P}$ und $u(\mu)$ Lösung von $(P(\mu^0))$ k -mal diffbar in Umgebung von μ^0 . Dann ist

$$X_{k,\mu^0} := \text{span} \{ \partial_\sigma u(\mu^0) : \sigma \in \mathbb{N}_0^p, |\sigma| \leq k \}$$

ein *Taylor-RB-Raum*. Eine Basis $\Phi_N = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subseteq X$ eines RB-Raums ist eine *reduzierte Basis*.

Bemerkung.

- Φ_N kann direkt aus Snapshots $u(\mu^i)$ oder, für numerische Stabilität (siehe ??), auch orthonormiert sein.
- Wahl der Parameter $\{\mu^i\}$ ist entscheidend für Güte des RB-Modells:
Hier: zufällige oder äquidistante Menge ausreichend
Später: intelligente Wahl durch a-priori Analysis oder Greedy-Verfahren
- Es ex. auch andere Arten von RB-Räumen (Hermite, POD). Gemeinsam ist diesen die Konstruktion aus Snapshots von u bzw. $\partial_\sigma u$.
- Andere MOR-Techniken: Φ_N kann auch komplett unabhängig von Snapshots auf andere Weise konstruiert werden: Balanced Truncation, Krylov-Räume, etc. (siehe z.B. Antoulas: Approximation of large scale dynamical systems, SIAM 2004)

Definition 3.2 (Reduziertes Problem $(P_N(\mu))$)

Sei eine Instanz von $(P(\mu))$ gegeben und $X_N \subseteq X$ ein RB-Raum. Zu $\mu \in \mathcal{P}$ ist die RB-Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ und Ausgabe $s_N(\mu) \in \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} a(u_N(\mu), v; \mu) &= f(v; \mu) & \forall v \in X_N \\ s_N(\mu) &= l(u_N; \mu) \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Wir nennen obiges “primal” weil im Fall $f \neq l$ oder a asymmetrisch, kann mit Hilfe eines geeigneten dualen Problems bessere Schätzung für s erreicht werden.
- Obiges ist “Ritz-Galerkin”-Projektion im Gegensatz zu “Petrov-Galerkin”-Projektion, welches für nicht-koerzive Probleme notwendig ist. \rightsquigarrow ??

Satz 3.3 (Galerkin-Projektion, Galerkin-Orthogonalität)

Sei $P_\mu : X \rightarrow X_N$ die orthogonale Projektion bzgl. Energieskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$, sei a symmetrisch und $u(\mu)$, $u_N(\mu)$ Lösung von $(P(\mu))$ bzw. $(P_N(\mu))$. Dann:

- i) $u_N(\mu) = P_\mu u(\mu)$ “Galerkin-Projektion”
 ii) $\langle e(\mu), v \rangle_\mu = 0 \quad \forall v \in X_N$, wobei $e(\mu) := u(\mu) - u_N(\mu)$

Beweis. Nach Aufgabe 1/Blatt 1 ist P_μ wohldefiniert, denn $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu)$ ist Hilbertraum und $X_N \subseteq X$ abgeschlossen weil endlichdimensional. Orthogonale Projektion des Fehlers ergibt

$$\begin{aligned} & \langle P_\mu u(\mu) - u(\mu), \varphi_i \rangle_\mu = 0 & \forall i = 1, \dots, N \\ \Leftrightarrow & a(P_\mu u(\mu) - u(\mu), \varphi_i; \mu) = 0 & \forall i = 1, \dots, N \\ \Leftrightarrow & a(P_\mu u(\mu), \varphi_i; \mu) = a(u(\mu), \varphi_i; \mu) = f(\varphi_i; \mu) & \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

- i) also ist $P_\mu u(\mu)$ Lösung von $(P_N(\mu))$
 ii) $e(\mu)$ ist also Projektions-Fehler, orthogonal nach Aufgabe 1/Blatt 1

□

Bemerkung. Für a nichtsymmetrisch gilt immer noch folgende “Galerkin-Orthogonalität”

$$a(u - u_N, v; \mu) = 0 \quad \forall v \in X_N$$

(auch wenn a kein Skalarprodukt)

Satz 3.4 (Existenz und Eideutigkeit für $(P_N(\mu))$)

Zu $\mu \in \mathcal{P}$ ex. eindeutige Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ und RB-Ausgabe $s_n(\mu) \in \mathbb{R}$ von $(P_N(\mu))$. Diese sind beschränkt

$$\begin{aligned} \|u_N(\mu)\| &\leq \frac{\|f(\cdot; \mu)\|_{X'}}{\alpha(\mu)} \leq \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}} \\ \|s_N(\mu)\| &\leq \|l(\cdot; \mu)\| \|u_N(\mu)\| \leq \frac{\bar{\gamma}_l \bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

Beweis. Weil $X_N \subset X$ ist $a(\cdot, \cdot; \mu)$ stetig und koerziv auf X_N .

$$\begin{aligned} \alpha_N(\mu) &:= \inf_{v \in X_N} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|^2} \geq \inf_{v \in X} \frac{a(v, v; \mu)}{\|v\|^2} = \alpha(\mu) > 0 \\ \gamma_N(\mu) &:= \sup_{u, v \in X_N} \frac{a(u, v; \mu)}{\|u\| \|v\|} \leq \sup_{u, v \in X} \frac{a(u, v; \mu)}{\|u\| \|v\|} = \gamma(\mu) < \infty \end{aligned}$$

analog f, l stetig auf X_N . Existenz, Eindeutigkeit und Schranken folgen also mit Lax-Milgram analog zu 2.8. □

Korollar 3.5 (Lipschitz-Stetigkeit)

Seien f, l gleichmäßig beschränkt und a, f, l Lipschitz-stetig bzgl. μ , dann sind auch $u_N(\mu), s_N(\mu)$ Lipschitz-stetig bzgl. μ mit L_u, L_s wie in 2.15.

Beweis. Analog zu 2.15 / Übung. □

Satz 3.6 (Diskrete RB-Probleme)

Sei $\Phi_N = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ eine reduzierte Basis für X_N . Für $\mu \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} A_N(\mu) &:= (a(\varphi_j, \varphi_i; \mu))_{i,j=1}^N && \in \mathbb{R}^{N \times N} \\ \underline{l}_N(\mu) &:= (l(\varphi_i; \mu))_{i=1}^N && \in \mathbb{R}^N \\ \underline{f}_N(\mu) &:= (f(\varphi_i; \mu))_{i=1}^N && \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

und $\underline{u}_N = (u_{N,i})_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ als Lösung von

$$A_N(\mu) \underline{u}_N = \underline{f}_N(\mu) \quad (3.1)$$

Dann ist $u_N(\mu) := \sum_{i=1}^N u_{N,i} \varphi_i$ und $s_N(\mu) := \underline{l}_N^\top(\mu) \underline{u}_N$.

Beweis. Einsetzen und Linearität zeigt, dass

$$a\left(\sum u_{N,j} \varphi_j, \varphi_i; \mu\right) = (A_N(\mu) \underline{u}_N)_i = (\underline{f}_N)_i = f(\varphi_i; \mu)$$

□

Satz 3.7 (Kondition bei ONB und Symmetrie)

Falls $a(\cdot, \cdot; \mu)$ symmetrisch und Φ_N ist ONB, so ist Kondition von (3.1) unabhängig von N beschränkt

$$\text{cond}_2(A_N) := \|A_N\|_2 \|A_N^{-1}\|_2 \leq \frac{\gamma(\mu)}{\alpha(\mu)}$$

Beweis. Wegen Symmetrie gilt

$$\text{cond}_2(A_N) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \quad (3.2)$$

mit betragsmäßig größtem/kleinstem Eigenwert $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ von $A_N(\mu)$. Sei $\underline{u}_{\max} = (u_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ Eigenvektor zu λ_{\max} und

$$\underline{u}_{\max} := \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \in X_N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \|\underline{u}_{\max}\|^2 &= \lambda_{\max} \underline{u}_{\max}^\top \underline{u}_{\max} = \underline{u}_{\max}^\top A_N \underline{u}_{\max} \\ &= \sum_{i,j=1}^N u_i u_j a(\varphi_j, \varphi_i; \mu) = a\left(\sum_j u_j \varphi_j, \sum_i u_i \varphi_i; \mu\right) \\ &= a(\underline{u}_{\max}, \underline{u}_{\max}; \mu) \leq \gamma(\mu) \|\underline{u}_{\max}\|^2 \end{aligned}$$

Wegen

$$\|\underline{u}_{\max}\|^2 = \left\langle \sum u_i \varphi_i, \sum u_j \varphi_j \right\rangle = \sum u_i u_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \sum u_i^2 = \|\underline{u}_{\max}\|^2$$

folgt $|\lambda_{\max}| \leq \gamma(\mu)$. Analog zeigt man $|\lambda_{\min}| \geq \alpha(\mu)$ also folgt mit (3.2) die Behauptung. □

Bemerkung (Unterschied FEM zu RB). Es bezeichne $A_h(\mu) \in \mathbb{R}^{H \times H}$ die FEM Matrix (oder FV/FD).

- i) Die RB-Matrix $A_N(\mu) \in \mathbb{R}^{H \times H}$ ist klein aber typischerweise vollbesetzt im Gegensatz zur großen aber dünnbesetzten Matrix A_h .
- ii) Die Kondition von A_N verschlechtert sich nicht mit wachsendem N (falls eine ONB verwendet wird), während die Konditionszahl von A_h typischerweise polynomiell in H wächst, also schlechter wird.

Satz 3.8 (Reproduktion von Lösungen)

Seien $u(\mu)$, $u_N(\mu)$ Lösungen von $(P(\mu))$ bzw. $(P_N(\mu))$, $e_i \in \mathbb{R}$ i -ter Einheitsvektor

- i) Falls $u(\mu) \in X_N \Rightarrow u_N(\mu) = u(\mu)$
- ii) Falls $u(\mu) = \varphi_i \in \Phi_N \Rightarrow u_N(\mu) = e_i \in \mathbb{R}^N$

Beweis.

- i) Mit $u(\mu), u_N(\mu) \in X_N \Rightarrow e := u(\mu) - u_N(\mu) \in X_N$. Wegen Galerkin-Orthogonalität $(a(e, v; \mu) = 0 \forall v \in X_N)$ und Koerzivität folgt:

$$0 = a(e, e; \mu) \geq \underbrace{\alpha(\mu)}_{>0} \underbrace{\|e\|^2}_{\geq 0} \Rightarrow \|e\| = 0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow u = u_N$$

- ii) $u_n(\mu) = \varphi_i$, nach i). Mit Eindeutigkeit der Basisexpansion folgt die Behauptung.

□

Bemerkung.

- Reproduktion von Lösungen ist grundlegende Konsistenzeigenschaft. Es gilt trivialerweise falls/sobald Fehlerschranken vorliegen, aber für komplexe RB-Probleme ohne Fehlerschranken ist obiges ein guter Test.
- Validierung für Programmcode: Wähle Basis aus Snapshots $\varphi_i = u(\mu^i)$, $i = 1, \dots, N$, ohne Orthonormierung, dann muss $u_N(\mu^i) = e_i \in \mathbb{R}^N$ ein Einheitsvektor sein.

3.2 Fehleranalyse

Satz 3.9 (Cea, Beziehung zur Bestapproximation)

Für alle $\mu \in \mathcal{P}$ gilt

$$\|u(\mu) - u_N(\mu)\| \leq \frac{\gamma(\mu)}{\alpha(\mu)} \inf_{v \in X} \|u - v\|$$

Beweis. $\forall v \in X_N$ mit Stetigkeit und Koerzivität

$$\begin{aligned}\alpha \|u - u_N\|^2 &\leq a(u - u_N, u - u_N) = a(u - u_N, u - v) + \underbrace{a(u - u_N, v - u_N)}_{=0 \text{ (Galerkin-Orth.)}} \\ &\leq \gamma(\mu) \|u - u_N\| \|u - v\|\end{aligned}$$

Division durch α , $\|u - u_N\|$ liefert

$$\|u - u_N\| \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|$$

also Behauptung durch Infimum-Bildung. \square

Bemerkung.

- i) hnliche Bestapproximation Aussagen gelten auch für andere Interpolationstechniken, aber die zugehörigen Lebesgue-Konstante divergiert meist mit wachsender Dimension N . Obiges ist konzeptioneller Vorteil von Galerkin Projektion über andere Interpolationstechniken, da $\frac{\gamma}{\alpha}$ unabhängig von N beschränkt bleibt. “Quasi-Optimalität” der Galerkin-Projektion/des RB-Ansatzes.
- ii) Falls $a(\cdot, \cdot; \mu)$ zusätzlich symmetrisch ist, kann um eine “Wurzel” verbessert werden mittels Normäquivalenz 2.5 und Bestapproximation der orthogonalen Projektion (Aufg. 1/Blatt 1)

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha} \|u - u_N\| &\stackrel{2.5}{\leq} \|u - u_N\|_\mu = \|u - P_\mu u\|_\mu = \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_\mu \stackrel{2.5}{\leq} \sqrt{\gamma} \inf_{v \in X_N} \|u - v\| \\ \Rightarrow \|u - u_N\| &\leq \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \inf_{v \in X_N} \|u - v\|\end{aligned}$$

- iii) Implikation von 3.9: Wähle guten Approximationsraum X_N , so wird Galerkin-Projektion/RB-Approximation auch garantiert gut sein.

Satz 3.10 (Ausgabe und Bestapproximation)

- i) Für alle $\mu \in \mathcal{P}$ gilt

$$|s(\mu) - s_N(\mu)| \leq \|l(\cdot; \mu)\|_{X'} \frac{\gamma(\mu)}{\alpha(\mu)} \inf_{v \in X_N} \|u - v\|$$

- ii) Für den sog. “compliant” Fall (d.h. $a(\cdot, \cdot; \mu)$ symmetrisch und $l = f$) gilt sogar

$$\begin{aligned}0 \leq s(\mu) - s_N(\mu) &= \|u - u_N\|_\mu^2 \\ &= \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_\mu^2 \\ &\leq \gamma(\mu) \inf_{v \in X_N} \|u - v\|^2\end{aligned}$$

Beweis.

i) Klar mit Cea, Bestapproximation und Linearität

$$|s(\mu) - s_N(\mu)| = |l(u) - l(u_N)| = |l(u - u_N)| \leq \|l\| \|u - u_N\| \leq \|l\| \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v \in X_N} \|u - v\|$$

ii) Wegen $a(\cdot, \cdot; \mu)$ symmetrisch gilt wie in voriger Bemerkung

$$\|u - u_N\|_\mu = \|u - P_\mu u\|_\mu = \inf_{v \in X_N} \|u - v\| \quad (3.3)$$

Damit

$$\begin{aligned} s(\mu) - s_N(\mu) &= l(u) - l(u_N) \stackrel{f=l}{=} f(u) - f(u_N) = f(u - u_N) \\ &= a(u, u - u_N) - \underbrace{a(u_N, u - u_N)}_{=0 \text{ (Gal.-Orth./Symm.)}} = \|u - u_N\|_\mu^2 \\ &\stackrel{3.3}{=} \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_\mu^2 \\ &\stackrel{2.5}{\leq} \gamma \inf_{v \in X_N} \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

Also insbesondere $s - s_N = \|u - u_N\|_\mu^2 \geq 0$.

□

Bemerkung.

- Im “compliant” Fall ist der Ausgabefehler i.A. sehr klein, da das Quadrat des RB-Fehlers eingeht.
- Im “nicht-compliant” Fall geht der RB-Fehler nur linear in die Schranke ein, das wird später durch primal-duale Technik verbessert.
- Aus ii) folgt nicht nur Fehlerschranke, sondern sogar Vorzeichen-Information, $s_N(\mu)$ ist untere Schranke für s .

Korollar 3.11 (Monotoner Fehlerabfall in Energienorm)

Falls $a(\cdot, \cdot; \mu)$ symmetrisch, $(X_N)_{N=1}^{N_{\max}}$ Folge von RB-Räumen, mit $X_N \subseteq X_{N'}, \forall N \leq N'$ (“hierarchische Räume”) und für $\mu \in \mathcal{P}$ setze $e_{u,N} := u(\mu) - u_N(\mu)$, $e_{s,N} := s(\mu) - s_N(\mu)$.

i) Dann ist $(\|e_{u,N}\|_\mu)_{N=1}^{N_{\max}}$ monoton fallend.

ii) Falls $l = f$ (also “compliant” Fall) ist $e_{s,N}$ monoton fallend.

Beweis.

i) Mit (3.3) gilt für $N \leq N'$

$$\|e_{u,N}\|_\mu = \|u - u_N\|_\mu \stackrel{(3.3)}{=} \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_\mu \geq \inf_{v \in X_{N'}} \|u - v\|_\mu \stackrel{(3.3)}{=} \|e_{u,N'}\|_\mu$$

ii) Mit Satz 3.10 ii) gilt

$$e_{s,N} = \|e_{u,N}\|_\mu^2, \text{ also Behauptung folgt mit i)}$$

□

Bemerkung.

- “Worst-case” ist Stagnation des Fehlers (unrealistisch, jeder neue Basisvektor müsste orthogonal zum Fehler $e_N(\mu)$ sein). In Praxis ist bei geschickter Basiswahl und “glatten” Problemen exponentielle Konvergenz zu erwarten, siehe Basisgenerierung, §??.
- Monotonie gilt nicht notwendigerweise bezüglich anderen Normen trotz Normäquivalenz

$$c\|e_{u,N}\|_\mu \leq \|e_{u,N}\| \leq C\|e_{u,N}\|_\mu, \text{ mit } c, C \text{ unabhängig von } N$$

Fehlernorm $\|e_{u,N}\|$ kann gelegentlich anwachsen, bleibt aber in einem “Korridor”, welcher monoton fällt.

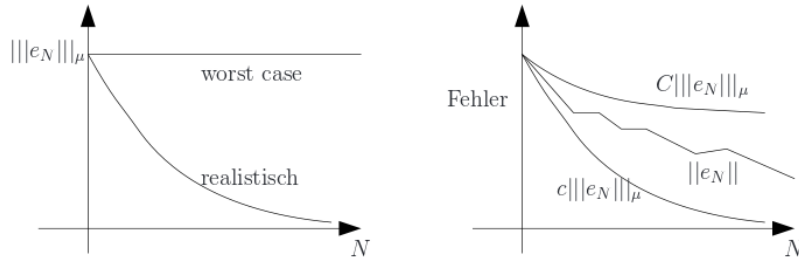


Abbildung 5: Fehlerabfall mit wachsender reduzierter Dimension.
(aus B. Haasdonk, Reduzierte-Basis-Methoden, Skript zur Vorlesung SS 2011, Universität Stuttgart, IANS-Report 4/11, 2011.)

Bemerkung (Gleichmäßige Konvergenz von Lagrange RB-Ansatz).

- Sei \mathcal{P} kompakt und $S_N := \{\mu^1, \dots, \mu^N\} \subset \mathcal{P}$, $N \in \mathbb{N}$, sodass die sog. Füll-Distanz (fill-distance) h_N gegen 0 geht:

$$h_N := \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \text{dist}(\mu, S_N), \quad \text{dist}(\mu, S_N) := \min_{\mu' \in S_N} \|\mu - \mu'\|$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_N = 0$$

- Falls $u(\mu)$, $u_N(\mu)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L_u unabhängig von N , so folgt für alle N , μ und “nächstes” $\mu^* := \arg \min_{\mu' \in S_N} \|\mu - \mu'\|$:

$$\begin{aligned} \|u(\mu) - u_N(\mu)\| &\leq \|u(\mu) - u(\mu^*)\| + \|u(\mu^*) - u_N(\mu^*)\| + \|u_N(\mu^*) - u_N(\mu)\| \\ &\leq L_u \underbrace{\|\mu - \mu^*\|}_{\leq h_N} + 0 + L_u \underbrace{\|\mu - \mu^*\|}_{h_N} \leq 2L_u h_N \end{aligned}$$

- Also folgt uniforme Konvergenz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \|u(\mu) - u_N(\mu)\| = 0$$

- Jedoch Konvergenzrate linear in h_N ist nicht praktisch bedeutsam, weil h_N sehr langsam mit N abfällt, also muss N sehr groß sein, um kleinen Fehler zu garantieren.
- Wir werden sehen, dass bei gleichmäßig koerziven Problemen und geschickter Wahl der μ^i sogar exponentielle Konvergenz erreicht wird.

Lemma 3.12 (Fehler-Residuums-Beziehung)

Für $\mu \in \mathcal{P}$ definieren wir mittels der RB-Lösung u_N das Residuum $r(\cdot; \mu) \in X'$ bzw. seinen Riesz-Repräsentanten $v_r(\mu) \in X$

$$\langle v_r(\mu), v \rangle_X := r(v; \mu) := f(v; \mu) - a(u_N(\mu), v; \mu) \quad \forall v \in X$$

Dann erfüllt der Fehler $e(\mu) := u(\mu) - u_N(\mu)$

$$a(e(\mu), v; \mu) = r(v; \mu) \quad \forall v \in X$$

Beweis. $a(e(\mu), v; \mu) = \underbrace{a(u, v)}_{f(v)} - a(u_N, v) = r(v)$

□

Bemerkung.

- Fehler erfüllt “ $(P(\mu))$ mit Residuum als rechte Seite”
- Insbesondere ist $r(v; \mu) = 0 \quad \forall v \in X_N$ (wegen Galerkin-Orthogonalität)
- $r(\cdot; \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$

Satz 3.13 (A-posteriori Fehlerschätzer, absoluter Fehler)

Sei $\mu \in \mathcal{P}$, $u(\mu)$ bzw. $u_N(\mu)$ Lösung von $(P(\mu))$, $(P_N(\mu))$ und $e = u - u_N$. Sei $\alpha_{LB}(\mu)$ eine untere Schranke für $\alpha(\mu)$ und $v_r \in X$ Riesz-Repräsentant von $r(\cdot; \mu)$ aus Lemma 3.12. Dann gelten folgende Schranken

i) Fehler in Energienorm

$$\|e(\mu)\|_\mu \leq \Delta_N^{en}(\mu) := \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}}$$

ii) Fehler in X -Norm $\|\cdot\|$

$$\|e(\mu)\| \leq \Delta_N(\mu) := \frac{\|v_r\|}{\alpha_{LB}(\mu)}$$

iii) Ausgabefehler

$$|s(\mu) - s_N(\mu)| \leq \Delta_{N,s}(\mu) := \|l(\cdot; \mu)\| \Delta_N(\mu)$$

Beweis.

i) Normäquivalenz 2.5 impliziert

$$\|e\| \leq \frac{\|e\|_\mu}{\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}}$$

Damit folgt

$$\|e\|_\mu^2 = a_s(e, e) = a(e, e) = r(v) = \langle v_r, e \rangle \leq \|v_r\| \|e\| \leq \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}}$$

Division durch $\|e\|_\mu$ liefert die Behauptung i).

ii) Koerzitivität liefert

$$\alpha_{LB}(\mu) \|e\|^2 \leq a(e, e) = r(e) = \langle v_r, e \rangle \leq \|v_r\| \|e\|$$

Division durch α_{LB} und $\|e\|$ liefert ii).

iii) Stetigkeit von l liefert

$$|s(\mu) - s_N(\mu)| = |l(u - u_N; \mu)| \leq \|l\| \|u - u_N\| \stackrel{ii)}{\leq} \|l\| \Delta_N$$

□

Bemerkung.

- $\alpha_{LB}(\mu)$ soll eine *schnell berechenbare* untere Schranke an $\alpha(\mu)$ sein, z.B. $\alpha_{LB}(\mu) := \bar{\alpha}$ falls $\bar{\alpha}$ bekannt, andere Möglichkeiten folgen später (“min Θ ”, “SCM”).
- Δ_N ist also immer um Faktor $\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}$ schlechter.
- Beschränkung des Fehlers durch Residuums-Norm ist bekannte Technik aus FEM, um FEM-Lösung u_h gegen Sobolev-Raum Lösung u abzuschätzen. In diesem Fall ist X ∞ -dimensional und Residuums-Norm algorithmisch nicht berechenbar. In RB-Methoden wird $\|v_r\|$ eine *berechenbare* Größe sobald X endlich-dimensional, z.B. FEM-Raum, ist. Für Residuum ist $u_N(\mu)$ erforderlich, daher sind Schranken “*a posteriori*”.
- Allgemeines Vorgehen (und alternative Begründung für ii)) zur Herleitung von Fehlerschranken: Zeige, dass Fehler e erfüllt $(P(\mu))$ mit rechter Seite, genannt r (Residuum), wende a-priori Stabilitätsaussage an:

$$\|e\| \leq \frac{\|r\|}{\alpha(\mu)} \quad \text{z.B. Lax-Milgram}$$

und erhalte berechenbare Größe durch Wahl $X = X_{FEM}$ und untere Schranke $\alpha_{LB}(\mu) \leq \alpha(\mu)$.

- Weil die Schranken beweisbare obere Schranken an Fehler darstellen, nennt man sie “rigorose” Fehlerschranken (vgl. “zuverlässige” Schätzer in FEM, bei denen jedoch die Konstante unbekannt ist).
- Fehlerschranken liefern eine Absicherung für RB-Methoden, “certified” RB-Methode, im Gegensatz zu vielen anderen Reduktionsmethoden (z.B. Krylov-Raum-Methoden).
- Ausgabefehler ist grob, indem Δ_N nur linear eingeht. Verbesserungen können für den “compliant” Fall oder mit primal-dual Techniken erreicht werden. (\leadsto §??)

Korollar 3.14 (Verschwindende Fehlerschranke)

Falls $u(\mu) = u_N(\mu)$ dann ist $\Delta_N(\mu) = \Delta_N^{en}(\mu) = \Delta_{N,s}(\mu) = 0$

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 &= a(0, v; \mu) = a(e, v; \mu) = r(v; \mu) \\ \Rightarrow r &\equiv 0 \Rightarrow \|v_r\| = 0 \Rightarrow \Delta_N = \Delta_N^{en} = \Delta_{N,s} = 0 \end{aligned}$$

□

Bemerkung.

- Dies ist initialer Wunsch an eine Fehlerschranke: diese soll verschwinden falls exakte Approximation vorliegt. Dies ist Grundlage dafür, dass der Faktor der Überschätzung endlich ist.
- Aussage ist trivial für *effektive* Fehlerschätzer (sehen wir bald), aber in komplexen Problemen kann 3.14 schon das maximal erreichbare sein.
- 3.14 ist wieder sinnvoll um Programmcode zu validieren.