Vorlesungsmitschrift

Reduzierte Basis Methoden

Universität Stuttgart, SS15
Prof. Dr. Bernard Haasdonk

Autoren:
Stefan Simeonov
Frank Schneider

Stand:
14. Mai 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Parameterabhängige Probleme

Beispiel 1.1 (Parameterabhängige PDE)
Sie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ polygonales Gebiet. Zu Parametervektor $\mu \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ aus einer Menge $\mathcal{P}$ von „erlaubten“ Parametern ist eine Funktion (z. B. „Temperatur“) $u(\mu) : \Omega \to \mathbb{R}$, s. d.:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\kappa(\mu)\nabla u) &= q(\mu) && \text{in } \Omega \\ u(\mu) &= 0 && \text{auf } \delta\Omega \end{aligned}$$

mit $\kappa(\mu) : \Omega \to \mathbb{R}$ (z. B. „Wärmeleitungskoeffizient“)
und $q(\mu) : \Omega \to \mathbb{R}$ (z. B. „Wärmequelle/-senke“)

$$\text{z. B. } q(x;\mu) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Omega_q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter kann Ausgabe erwünscht, z. B. mittlere Temperatur

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|} \int u(x;\mu)\, dx$$

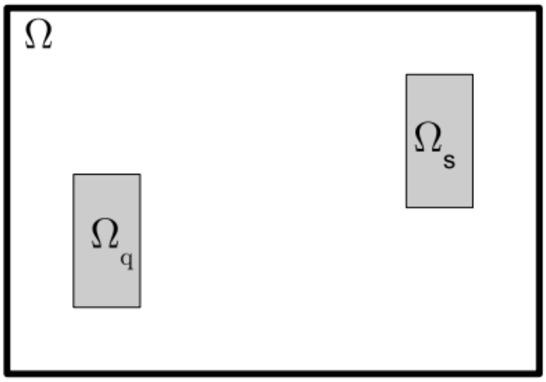

Abbildung 1: Beispiel Wärmeleitung mit Quelle Ω_q und Messbereich Ω_s
(aus B. Haasdonk, Reduzierte-Basis-Methoden, Skript zur Vorlesung SS 2011, Universität Stuttgart, IANS-Report 4/11, 2011.)

Beispiel 1.2 (Parametrisches stationäres System)
Zu Parameter $\mu \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p$ ist Zustandsvektor $u(\mu) \in \mathbb{R}^n$ und Ausgabe $s(\mu) \in \mathbb{R}^k$ gesucht, s. d.:

$$\begin{aligned} 0 &= A(\mu) \cdot u(\mu) + B(\mu)w(\mu) \\ s(\mu) &= l(\mu) \cdot u(\mu) \end{aligned}$$

mit parameterabhängigen Matrizen $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n\times n}, B(\mu) \in \mathbb{R}^{n\times m}, C(\mu) \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mit Eingabevektor $w \in \mathbb{R}^m$.

Schwache Formulierung in Hilberträumen

Sie X reeller Hilbertraum (reel, seperabel). Zu $\mu \in \mathcal{P}$ ist gesucht ein $u(\mu) \in X$ und $s(\mu) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a(u(\mu),v;\mu) &= f(v;\mu) \\ s(\mu) &= l(u(\mu);\mu) \qquad\qquad \forall v \in X \end{aligned}$$

Mit Bilinearform $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ und Linearform $f(\,\cdot\,;\mu)$, $l(\,\cdot\,;\mu)$. Beide Beispiele lassen sich so formulieren.

z. B. 1.1:

$$X = H_0^1(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) | \frac{\partial}{\partial x_i} f \in L^2(\Omega), f_{|\delta\Omega} = 0\}$$

$$\underbrace{\int_\Omega \kappa(x;\mu)\nabla u(x;\mu)\cdot\nabla v(x)dx}_{a(u(\mu),v;\mu)} = \underbrace{\int_\Omega q(x;\mu)\cdot v(x)dx}_{f(v;\mu)} \qquad \forall v \in X$$

$$s(\mu) = \frac{1}{|\Omega_s|}\int_{\Omega_s} u(x;\mu) =: l(u(\mu);\mu)$$

Zu Bsp. 1.2 ($k = 1$, „single output“) $\qquad X = \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{v^T A(\mu)u(\mu)}_{a(u(\mu),v;\mu)} = \underbrace{-v^T Bw}_{f(v;\mu)}$$

$$s(\mu) := \underbrace{C(\mu)u(\mu)}_{l(u(\mu);\mu)}$$

In der Vorlesung werden weitere Verallgemeinerungen zu $a : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ mit $X_1 \neq X_2$, nichtlinear und instationäre Probleme behandelt.

1.1 Modellreduktion

Grundidee/Motivation

- $\mathcal{M} := \{u(\mu)|\mu \in \mathcal{P}\} \subset X$ für $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^p$ ist die durch μ parametrisierte Lösungsmannigfaltigkeit.
- X ist im allgemeinen ∞-dimensional Sobolev-Raum) oder endlich- aber sehr hochdimensional (FEM, FV, FD-Raum). $\mathcal{M}$ ist aber höchstens p-dimensional.
  $\Rightarrow$ Motivation für Suche nach einem niedrigdimensionalen Teilraum $X_n \subseteq X$ zur Approximation von $\mathcal{M}$ und einer Approximation $u_N(\mu) \approx u(\mu), u_N(\mu) \in X_N$
- Insbesondere bei Reduzierten-Basis-Methoden (RB-Methoden):
  X_N durch Beispiellösungen erzeugt, sog. „Snapshots“
  $X_N \subseteq \mathrm{span}\{u(\mu_1),...,u(\mu_n)\}$ für geeignete Parameterwerte $\mu_i \in \mathcal{P}$.
  Ziel ist außerdem Fehlerkontrolle durch Schranken $\Delta_N(\mu)$:

$$||u(\mu) - u_N(\mu)|| \leq \Delta_N(\mu)$$

Illustration

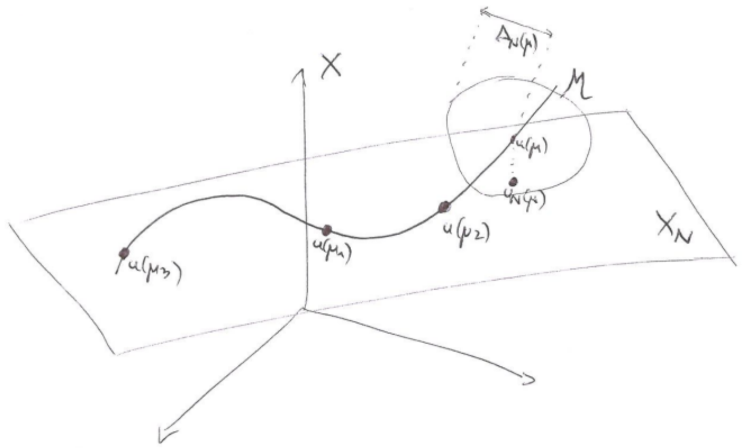

Abbildung 2: Parametrisierte niedrigdimensionale Lösungsmenge
(aus dem Online-Skript von Prof. Dr. Haasdonk zu Reduzierte Basen 2015)

Beispiel 1.3
Gesucht ist $u(\mu) \in C^2([0,1])$ mit

$$\begin{aligned} (1+\mu)u'' &= 1 \qquad\qquad \text{auf}(0,1) \\ u(0) = u(1) &= 1 \end{aligned}$$

Für $\mu \in [0,1] =: \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$. Spezielle Lösungen („Snapshots")

$$\begin{aligned} \mu = 0 \Rightarrow u_0(x) = u(x;\mu=0) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + 1 \\ \mu = 1 \Rightarrow u_1(x) = u(x;\mu=1) &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x + 1 \end{aligned}$$

RB-Raum: $X_N := \text{span}(u_0,u_1)$ Reduzierte Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} u_N(\mu) &:= \alpha_0(\mu)u_0 + \alpha_1(\mu)u_1 \\ \alpha_0(\mu) &= \frac{2}{\mu+1} - 1; \qquad \alpha_1(\mu) = 2 - \frac{2}{\mu+1} \end{aligned}$$

Diese erfüllt

$$||u_N(\mu) - u(\mu)||_\infty = \sup_\mu ||u(\mu) - u_N(\mu)|| = 0$$

ist somit exakt. $\mathcal{M}$ ist enthalten in 2-dimensionalem Unterraum X_N: Genauer $\alpha_0 + \alpha_1 = 1, 0 \leq \alpha_0, \alpha_1 \leq 1$, also ist $\mathcal{M}$ Menge der Konvexkombinationen von u_0, u_1.

Begriffe

- Eine PDE ist ein *analytisches* Modell, welches die *exakte Lösung* $u(\mu) \in X$ in einem typischerweise ∞-dimensionalen Funktionenraum X charakterisiert.
- Ein *detailliertes Modell* (auch *hochdimensionales Modell*) ist ein Berechnungsverfahren oder charakterisiert eine Approximation $u(\mu) \in X$ in hochdimensionalen Raum mit sehr allgemeinen Approximationseigenschaften. (z. B. FEM/FV/FD, dim $X = 10^3 - 10^8$). In dieser Vorlesung kann $u(\mu)$ sowohl eine analytische als auch eine detaillierte Lösung darstellen.
- Ein *reduziertes* Modell ist ein Berechnungsverfahren bzw. eine Charakterisierung einer reduzierten Lösung $u_N(\ u)$ in einem sehr problemangepassten Raum X_N (dim $X_N = 1 - 10^3$).
- *Modellreduktion* beschäftigt sich mit Methoden der Erzeugung reduzierter Modelle und Untersuchung ihrer Eigenschaften
- Modellreduktion ist ein modernes Gebiet der angewandten Mathematik und Ingenieurwissenschaften (Schwerpunkt in SimTech PN3, MOR-Seminar)

Anwendungen für parametrische reduzierte Modelle

„Kleinere“ Modelle stellen geringere Anforderungen an Rechenzeit und Speicher, daher Einsatz in:

- „multi-query“-Kontext, d. h. Vielfachanfragen unter Parametervariation: Parameterstudien, Design, Parameteridentifikation, Inverse Probleme, Optimierung, statistische Analyse
- Multi-skalen-Modelle (reduzierte Mikrolöser)
- „real-time“-Kontext, d. h. Anwendungen mit schneller Simulationsantwort: Interaktive Benutzeroberfläche, Web-Formulare, Echtzeitsteuerung von Prozessen
- „cool-computing“-Kontext, d. h. Simulation auf „einfacher“ Hardware: elektronische Regler, Smartphones, Ubiquitious Computing

Demonstration

demo_thermalblock.m aus RBmatlab, Smartphone App JaRMoS

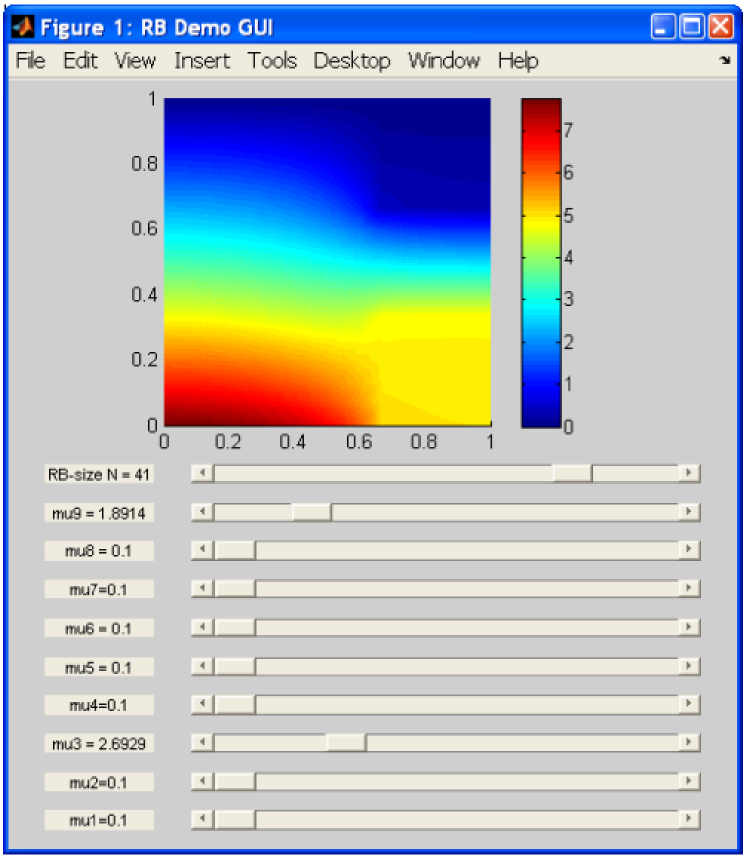

Abbildung 3: Beispiel des Thermischen Blocks aus demo_thermalblock.m
(aus B. Haasdonk, Reduzierte-Basis-Methoden, Skript zur Vorlesung SS 2011, Universität Stuttgart, IANS-Report 4/11, 2011.)

Offline/Online Zerlegung

Typischerweise wird eine Verechnungsintensive Generierung des reduzierten Modells akzeptiert, sog. *Offline-Phase*. Dies ermöglicht schnelle Anwendbarkeit des reduzierten Modells in der *Online-Phase*. Offline-Kosten werden gerechtfertigt durch Amortisierung im multi-query-Kontext, d. h. Laufzeitgewinn bei genügend großer Anzahl an Online-Simulationen

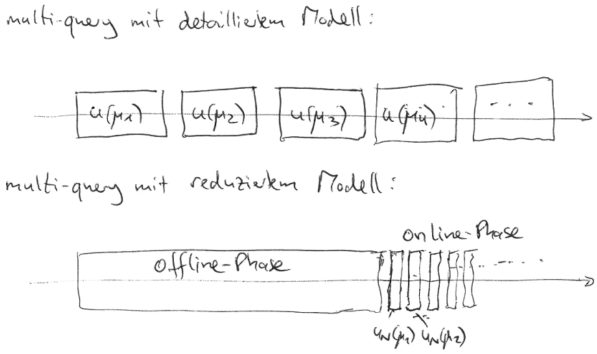

Abbildung 4: Laufzeitvergleich eines detaillierten mit einem reduzierten Modell
(aus dem Online-Skript von Prof. Dr. Haasdonk zu Reduzierte Basen 2015)

Zentrale Fragen

- Reduzierte Basis: Wie kann ein möglichst kompakter Teilraum konstruiert werden? Können solche Verfahren *beweisbar* gut sein?
- Reduziertes Modell: Wie kann eine Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ bestimmt werden
- Berechnungs-Effizienz: Wie kann $u_N(\mu)$ *schnell* berechnet wreden?
- Stabilität: Wie kann Stabilität des reduzierten Modells garantiert werden bei wachsendem $N := \dim X_N$?
- Fehlerschätzer: Kann der Fehler des reduzierten zum detaillierten oder analytischen modells beschränkt werden? Sind die Fehlerschätzer schnell berechenbar?
- Effektivität der Fehlerschätzer: Kann garantiert werden, dass der Schätzer den Fehler nicht zu pessimistisch überschätzt?
- Für welche Problemklassen kann ein RB-Ansatz funktionieren, für welche nicht?

Vorläufige Gliederung

1 Einleitung

2 Grundlagen

3 RB Verfahren für lineare koerzive Probleme

4 Allgemeinere lineare Probleme

5 Nichtlineare Probleme

6 Instationäre Probleme

7 Weiterführende Aspekte

2 Grundlagen

Im Folgenden sei X (oder X_1, X_2) stets reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_X$, Norm $\|\cdot\|_X$ und Dualraum X'. Subskript wird weggelassen falls keine Verwechslungsgefahr besteht.

Definition 2.1 (Parametrische Formen)
Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ beschränkte Parametermenge. Dann nennen wir

i) $l : X \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *parametrische stetige Linearform* falls $\forall \mu \in \mathcal{P}$:

$$l(\,\cdot\,;\mu) \in X'$$

ii) $a : X_1 \times X_2 \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ eine *parametrische stetige* (symmetrische) *Bilinearform*, falls für alle $\mu \in \mathcal{P}$

$$a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu) : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R} \quad \text{ist bilinear und stetig (symmetrisch)}$$

Wir bezeichnen die Stetigkeitskonstante mit

$$\gamma(\mu) := \sup_{u \in X_1} \sup_{v \in X_2} \frac{a(u,v;\mu)}{\|u\|_{X_1} \|v\|_{X_2}}$$

Falls $X_1 = X_2 =: X$ und $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ ist koerziv für alle $\mu \in \mathcal{P}$, so ist $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\,\cdot\,)$ *parametrisch koerziv* und wir bezeichnen die Koerzivitätskonstante mit

$$\alpha(\mu) := \inf_{u \in X} \frac{a(u,u;\mu)}{\|u\|^2}$$

Bemerkung. Eine parametrische stetige Bi-/Linearform ist nicht unbedingt stetig bzgl. μ. Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P} = [0,1]$, $l : X \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$l(x;\mu) := \begin{cases} x & \text{falls } \mu < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 2.2 (Parametrische Beschränktheit / Lipschitz-Stetigkeit / Koerzivität)
Wir nennen

i) eine parametrische stetige Linearform l bzw. Bilinearform a *gleichmäßig beschränkt bzgl.* μ falls ex. $\bar{\gamma}_l, \bar{\gamma} < \infty$ mit

$$\sup_{\mu \in \mathcal{P}} \|l(\,\cdot\,;\mu)\|_{X'} \leq \bar{\gamma}_l \quad \text{bzw.} \quad \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \gamma(\mu) \leq \bar{\gamma}$$

ii) *a gleichmäßig koerziv bzgl.* μ falls ex. $\bar{\alpha} > 0$ mit

$$\inf_{\mu \in \mathcal{P}} \alpha(\mu) \geq \bar{\alpha}$$

iii) l bzw. a *Lipschitz-stetig bzgl.* μ falls ex. L_l bzw. $L_a \in \mathbb{R}^+$, sodass $\forall \mu_1,\mu_2 \in \mathcal{P}$ gilt

$$|l(u;\mu_1) - l(u;\mu_2)| \leq L_l \|u\| \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \forall u \in X$$

bzw.

$$|a(u,v;\mu_1) - a(u,v;\mu_2)| \leq L_a \|u\| \|v\| \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \forall u \in X_1, v \in X_2$$

Definition 2.3 (Sensitivitätsableitung)
Sei $\mu_0 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{P}$ in Umgebung $\mathcal{U}$ von μ_0. Wir nennen $f : \mathcal{U} \to X$ (Frechet)-differenzierbar in μ_0, falls ex. ein $\mathrm{D}f(\mu_0) \in L(\mathbb{R}^p, X)$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(\mu_0 + h) - f(\mu_0) - \mathrm{D}f(\mu_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

Falls f in jedem $\mu \in \mathcal{U}$ diffbar, dann existieren insbesondere partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} f(\,\cdot\,) := \mathrm{D}f(\,\cdot\,)e_i : \mathcal{U} \to X$$

für $e_i \in \mathbb{R}^p$ Einheitsvektor $i = 1,\dots,p$. Falls diese wiederrum diffbar in $\mathcal{U}$ bezeichnet allgemein

$$\partial_\sigma f(\,\cdot\,) := \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial_{\mu_1}^{\sigma_1} \cdots \partial_{\mu_p}^{\sigma_p}} f(\,\cdot\,) : \mathcal{U} \to X$$

die Sensitivitätsableitung der Ordnung $|\sigma| := \sum_{i=1}^p \sigma_i$ für Multiindex $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^p \in \mathbb{N}_0^p$.

Bemerkung. Diese Ableitungen werden später insbesondere bei parameterabhängigen Lösungen $u(x;\mu)$ verwendet:

$u : \Omega \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ mit $u(\,\cdot\,;\mu) \in X$ kann auch als

$u : \mathcal{P} \to X$ aufgefasst werden mit Sensitivitätsableitungen

$\partial_\sigma u : \mathcal{P} \to X$, d.h. $\partial_\sigma u(\,\cdot\,;\mu) \in X$ $\forall \mu \in \mathcal{P}$ und insbesondere

$\partial_\sigma u : \Omega \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, d.h. ∂_σ sind wieder Funktionen auf Ω

Definition 2.4 (Separierbare Parameterabhängigkeit)

i) Eine Funktion $v : \mathcal{P} \to X$ nennen wir *separierbar parametrisch*, falls existieren *Komponenten* $v^q \in X$ und *Koeffizientenfunktionen* $\Theta_v^q : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ für $q = 1,\dots,Q_v$ mit

$$v(\mu) = \sum_{q=1}^{Q_v} \Theta_v^q(\mu)\, v^q$$

ii) Eine parametrische stetige Linearform $l : X \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ bzw. Bilinearform $a : X_1 \times X_2 \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ ist separierbar parametrisch, falls existieren $l^q \in X'$ und $\Theta_l^q : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ für $q = 1,\ldots,Q_l$ bzw. $a^q : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ stetig, bilinear und $\Theta_a^q : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ für $q = 1,\ldots,Q_a$ mit

$$l(v;\mu) = \sum_{q=1}^{Q_l} \Theta_l^q(\mu)\, l^q(v) \qquad \forall v \in X, \mu \in \mathcal{P}$$

$$a(u,v;\mu) = \sum_{q=1}^{Q_a} \Theta_a^q(\mu)\, a^q(u,v) \qquad \forall u \in X_1, v \in X_2, \mu \in \mathcal{P}$$

Bemerkung.

i) In Literatur auch “affine Annahme” oder “affin parametrisch” verwendet. Wir verwenden jedoch “separierbar”, da Θ_l^q auch nichtlinear sein können.

ii) Q_a, Q_l sollten möglichst klein sein, weil diese in die Online-Komplexität eingehen, siehe *Abschnitt* 3.

Satz 2.5 (Energienorm)
Sei $a : X \times X \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ parametrische stetige, koerzive Bilinearform, und $a_s(u,v;\mu) = \frac{1}{2}(a(u,v;\mu) + a(v,u;\mu))$ der symmetrische Anteil. Dann ist für $\mu \in \mathcal{P}$

$$\langle u, v\rangle_\mu := a_s(u,v;\mu) \quad \text{bzw.} \quad \|u\|_\mu := \sqrt{\langle u, u\rangle_\mu}$$

das *Energie-Skalarprodukt* bzw. die *Energienorm* bzgl. μ. Diese ist äquivalent zu $\|\cdot\|_X$:

$$\sqrt{\alpha(\mu)}\|u\| \leq \|u\|_\mu \leq \sqrt{\gamma(\mu)}\|u\|$$

Beweis. Skalarprodukt: klar wegen Bilinearität, Stetigkeit und Koerzivität. Normäquivalenz folgt aus Stetigkeit und Koerzivität von a_s.

$$\alpha(\mu)\|u\|^2 \leq \underbrace{a(u,u;\mu)}_{\leq \|u\|^2\gamma(\mu)} = a_s(u,u;\mu) = \|u\|_\mu^2$$

□

Satz 2.6 (Übertragung von Koeffizienten-Eigenschaften)
Seien f bzw. a separierbar parametrische stetige Linear- bzw. Bilinearform.

i) Falls $\Theta_f^q(\mu)$ bzw. $\Theta_a^q(\mu)$ beschränkt sind, dann sind f bzw. a gleichmäßig beschränkt bzgl. μ.

ii) Falls $\Theta_a^q(\mu)$ strikt positiv, d.h. ex. $\bar{\Theta}$ mit $\Theta_a^q(\mu) \geq \bar{\Theta} > 0\ \forall \mu \in \mathcal{P}$ alle Komponenten positiv semidefinit, d.h. $a^q(v,v) \geq 0\ \forall v,q$ und $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\bar{\mu})$ ist koerziv für mindestens ein $\bar{\mu} \in \mathcal{P}$, dann ist a gleichmäßig koerziv bzgl. μ.

iii) Falls Θ_f^q, Θ_a^q Lipschitz-stetig, so ist f, a Lipschitz-stetig bzgl. μ.

Beweis.

i) Sei $\bar{\Theta}_f^q \in \mathbb{R}^+$ mit $|\Theta_f^q(\mu)| \leq \bar{\Theta}_f^q \; \forall \mu$. Dann gilt

$$\|f(\,\cdot\,;\mu)\| = \|\sum_q \Theta_f^q(\mu)\, f^q\| \leq \sum_q |\Theta_f^q(\mu)| \|f^q\| \leq \sum_q \bar{\Theta}_f^q \, \|f^q\| =: \bar{\gamma}_f < \infty$$

analog für $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$.

ii) Für $u \in X$, $\mu \in \mathcal{P}$ gilt

$$a(u,u;\mu) = \sum_q \Theta_a^q(\mu)\, a^q(u,u) = \sum_q \underbrace{\frac{\Theta_a^q(\mu)}{\Theta_a^q(\bar{\mu})}}_{>0} \underbrace{\Theta_a^q(\bar{\mu})\, a^q(u,u)}_{\sum(\,\cdot\,)=a(u,u;\bar{\mu})} \geq \underbrace{\sum_q \frac{\bar{\Theta}}{\max_{q'} \Theta_a^{q'}(\bar{\mu})} \alpha(\bar{\mu})}_{=:\bar{\alpha}>0} \|u\|^2$$

iii) Sei $|\Theta_f^q(\mu_1) - \Theta_f^q(\mu_2)| \leq L_f^q |\mu_1 - \mu_2| \; \forall \mu_1,\mu_2 \in \mathcal{P}$ mit geeignetem $L_f^q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(v;\mu_1) - f(v;\mu_2)| &= |\sum_q \Theta_f^q(\mu_1)\, f^q(v) - \sum_q \Theta_f^q(\mu_2)\, f^q(v)| \\ &\leq \sum_q |\Theta_f^q(\mu_1) - \Theta_f^q(\mu_2)| \|f^q\| \|v\| \\ &\leq \underbrace{\sum_q L_f^q \|f^q\|}_{=:L_f} \|\mu_1 - \mu_2\| \|v\| \end{aligned}$$

analog für $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$.

□

Definition 2.7 (Volles Problem $\big(P(\mu)\big)$)
Seien a bzw. f, l parametrische Bilinearform bzw. Linearform und gleichmäßig stetig bzgl. μ, sei a gleichmäßig koerziv bzgl. μ. Dann ist für $\mu \in \mathcal{P}$ gesucht $u(\mu) \in X$ und $s(\mu) \in \mathbb{R}$ als Lösung von

$$\begin{aligned} a(u(\mu),v;\mu) &= f(v;\mu) \qquad\qquad \forall v \in X \\ s(\mu) &:= l(u(\mu);\mu) \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Das volle Problem kann also ein analytisches Modell (PDE) oder ein detailliertes Modell (PDE-Diskretisierung) darstellen.
- Symmetrie von a wird nicht vorausgesetzt.

- In **??**, **??** werden Verallgemeinerungen von $\big(P(\mu)\big)$ betrachtet.

Satz 2.8 (Wohlgestelltheit und Stabilität)
Das Problem $\big(P(\mu)\big)$ besitzt eine eindeutige Lösung mit

$$\|u(\mu)\| \leq \frac{\|f(\mu)\|_{X'}}{\alpha(\mu)} \leq \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}, \quad |s(\mu)| \leq \|l(\mu)\|_{X'}\|u(\mu)\| \leq \frac{\bar{\gamma}_l\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}$$

Beweis. Existenz, Eindeutigkeit und Schranke für $u(\mu)$ folgen mit Lax-Milgram (siehe z.B. Satz 2.5 in Braess'03). Gleichmäßige Stetigkeit und Koerzivität ergeben μ-unabhängige Schranke für $u(\mu)$. Definition von $s(\mu)$ ergibt Eindeutigkeit und entsprechende Schranken. □

Definition 2.9 (Lösungsmannigfaltigkeit)
Wir definieren

$$\mathcal{M} := \{u(\mu) \in X : \mu \in \mathcal{P} \text{ und } u(\mu) \text{ löst } \big(P(\mu)\big)\}$$

Bemerkung. Wir verwenden den Begriff "Mannigfaltigkeit" nicht im strengen differentialgeometrischen Sinn, weil keine Stetigkeit / Diffbarkeit von $\mathcal{M}$ gefordert wird.

Beispiel 2.10 (Thermischer Block)
TODO

Beispiel 2.11 (Matrixgleichung)

- Zu $\mu \in \mathcal{P}$ suche $u(\mu) \in \mathbb{R}^H$ als Lösung von

  $$A(\mu)u(\mu) = b(\mu)$$

  für $A(\mu) \in \mathbb{R}^{H\times H}$ und $b(\mu) \in \mathbb{R}^H$.

- Dies ist Beispiel für $\big(P(\mu)\big)$ via

  $$X := \mathbb{R}^H, \quad a(u,v;\mu) := v^\top A(\mu)u, \quad f(v;\mu) := v^\top b(\mu)$$

  und beliebiger linearer Ausgabe $l(v;\mu) := \underline{l}^\top v$ für $\underline{l} \in \mathbb{R}^H$.

Beispiel 2.12 ($Q_a = 1$)
Falls $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$, $f(\,\cdot\,;\mu)$ separierbar parametrisch mit $Q_a = 1$ und Q_f beliebig, so ist $\mathcal{M}$ enthalten in einem Q_f-dimensionalen linearen Teilraum von X:

$$\big(P(\mu)\big) \quad \Rightarrow \quad \Theta_a^1(\mu)a^1(u,v) = \sum_q \Theta_f^q(\mu)f^q(v) \quad \forall v \in X$$

$\Theta_a^1(\mu) \neq 0$ wegen a gleichmäßig koerziv

$$a^1(u,v) = \sum_q \frac{\Theta_f^q(\mu)}{\Theta_a^1(\mu)} f^q(v) \quad \forall v \in X \tag{$*$}$$

$a^1(\,\cdot\,,\cdot\,)$ ist koerziv, f^q linear und stetig

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Lax-Milgram}}{\Rightarrow} \text{ex. } u^q, q = 1,\dots,Q_f \text{ mit } a^1(u^q,v) = f^q(v), \quad v \in X \\
&\Rightarrow u := \sum_q \frac{\Theta_f^q(\mu)}{\Theta_a^1(\mu)} u^q \text{ löst } (*) \text{ wegen Linearität} \\
&\Rightarrow u \in \operatorname{span}\{u^q\}_{q=1}^{Q_f}
\end{aligned}$$

Beispiel 2.13 ($\big(P(\mu)\big)$ mit vorgegebener Lösung)
Sei $u : \mathcal{P} \to X$ beliebig komplizierte Abbildung. Dann existiert ein $\big(P(\mu)\big)$ mit $u(\mu)$ als Lösung via Skalarprodukten:

$$a(v,w;\mu) := \langle w, v\rangle_X, \quad f(v;\mu) := \langle u(\mu), v\rangle_X$$

d.h. Klasse der Probleme $\big(P(\mu)\big)$ können beliebig komplizierte, nichtglatte oder sogar unstetige Lösungsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ besitzen.

Bemerkung (Parameter-Anzahl und Lösungskomplexität)**.** Es gibt (sogar in der Literatur) ein Missverständnis zwischen Parameteranzahl $p \in \mathbb{N}$ und Komplexität der Lösungsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, denn es kann Redundanz in Parametern vorliegen (siehe Thermischer Block). Extremfall: $p \in \mathbb{N}$ beliebig, für geeignetes $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$, $f(\mu)$ hat $\big(P(\mu)\big)$ ein $\mathcal{M}$, welches in einem 1D-Raum enthalten ist. (Übung) Beispiel 2.13 zeigt andererseits einen anderen Extremfall: Sogar für $p = 1$ kann bei geeignetem $\big(P(\mu)\big)$ das $\mathcal{M}$ beliebig kompliziert sein (z.B. "Raumfüllende Kurve"). Unter geeigneter Annahmen an $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ und $f(\,\cdot\,;\mu)$ können einfache Regularitätseigenschaften von $u(\mu)$ bzw. $\mathcal{M}$ geschlossen werden.

Korollar 2.14 (Beschränktheit von $\mathcal{M}$)
Weil $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ gleichmäßig koerziv und $f(\,\cdot\,;\mu)$ gleichmäßig beschränkt, so ist $\mathcal{M}$ beschränkt

$$\mathcal{M} \subseteq B_{\frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}}(0)$$

Beweis. Klar weil $\|u(\mu)\| \leq \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}}$ nach Satz 2.8. □

Satz 2.15 (Lipschitz-Stetigkeit)
Falls $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$, $f(\,\cdot\,;\mu)$, $l(\,\cdot\,;\mu)$ Lipschitz-stetig bzgl. μ, so sind $u(\mu)$ und $s(\mu)$ Lipschitz-stetig bzgl. μ mit Lipschitz-Konstanten

$$L_u = \frac{L_f}{\bar{\alpha}} + \bar{\gamma}_f \frac{L_a}{\bar{\alpha}^2} \quad \text{und} \quad L_s = L_l \frac{\bar{\gamma}_f}{\bar{\alpha}} + \bar{\gamma}_l L_u$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.16 (Diffbarkeit)
Sei $a(u,\cdot\,;\mu) \in X'$ Frechet-diffbar in Umgebung von $(u_0,\mu_0) \subset X \times \mathcal{P}$ und $f(\,\cdot\,;\mu) \in X'$

Frechet-diffbar in Umgebung von $\mu_0 \in \mathcal{P}$. Dann ist Lösung $u(\mu)$ von $\big(P(\mu)\big)$ Frechet-diffbar in Umgebung von $\mu_0 \in \mathcal{P}$ mit

$$\mathrm{D}_\mu u(\mu) := -\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u,\mu)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu}F(u,\mu)$$

wobei $F(u,\mu) := a(u,\cdot\,;\mu) - f(\,\cdot\,;\mu) \in X'$.

Beweis. Aus Frechet-Diffbarkeit von $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\,\cdot\,)$ und $f(\,\cdot\,;\,\cdot\,)$ folgt Frechet-Diffbarkeit von $F : X \times \mathcal{P} \to X'$ in Umgebung von (u_0,μ_0) mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \mu}F(u_0,\mu_0) := \frac{\partial}{\partial \mu}a(u_0,\cdot\,;\mu_0) - \frac{\partial}{\partial \mu}f(\,\cdot\,;\mu_0) \in L(\mathbb{R}^p,X')$$

und $\frac{\partial}{\partial u}F(u_0,\mu_0) \in L(X,X')$ durch

$$\frac{\partial}{\partial u}F(u_0,\mu_0)h_u := a(h_u,\cdot\,;\mu_0) \in X' \quad \forall h_u \in X$$

Dann erfüllt $u(\mu)$ als Lösung von $\big(P(\mu)\big)$ gerade

$$F(u(\mu),\mu) = 0$$

in Umgebung von μ_0. Dann ist (z.B. mit Folgerung 2.15 in Ruzicka: Nichtlineare Funktionalanalysis, Springer 2004) auch $u(\mu)$ Frechet-diffbar in Umgebung von μ_0 mit Ableitung

$$\mathrm{D}_\mu u(\mu) := -\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u,\mu)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu}F(u,\mu)$$

□

Bemerkung.

- Plausibilität der Ableitungsformel folgt aus formellem Ableiten:

$$\begin{aligned}
&& \mathrm{D}_\mu\left(F(u(\mu),\mu)\right) &= 0 \\
\Rightarrow && \frac{\partial}{\partial u}F(u(\mu),\mu)\mathrm{D}_\mu u(\mu) + \frac{\partial}{\partial \mu}F(u,\mu) &= 0 \\
\Rightarrow && \frac{\partial}{\partial u}F(u(\mu),\mu)\mathrm{D}_\mu u(\mu) &= -\frac{\partial}{\partial \mu}F(u,\mu) \\
\Rightarrow && \mathrm{D}_\mu u(\mu) &= -\left(\frac{\partial}{\partial u}F(u(\mu),\mu)\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu}F(u,\mu)
\end{aligned}$$

- Man kann zeigen, dass die Sensitivitäts-Ableitungen $\partial_{\mu_i}u(\mu) \in X$ für $i = 1,\dots,p$ erfüllen das sogenannte *Sensitivitätsproblem*

$$a(\partial_{\mu_i}u(\mu),v;\mu) = \tilde{f}_i(v;u(\mu),\mu)$$

mit rechter Seite $\tilde{f}_i(\,\cdot\,; u(\mu),\mu) \in X'$ gegeben durch

$$\tilde{f}_i(\,\cdot\,; w,\mu) := \partial_{\mu_i} f(\,\cdot\,; \mu) - \partial_{\mu_i} a(w, \cdot\,; \mu)$$

d.h. das Problem $\big(P(\mu)\big)$ mit modifizierter rechter Seite, in welcher insbesondere $u(\mu)$ eingeht. (Übung)

- Hinreichend für die Diffbarkeit von a, f in Satz 2.16 sind z.B. im Fall von separierbarer Parameterabhängigkeit die Diffbarkeit der Koeffizienten $\Theta_a^q(\mu)$, $\Theta_f^q(\mu)$, $q = 1, \ldots$ (Übung)
- Ähnliche Aussagen / Sensitivitätsprobleme gelten für Ableitungen höherer Ordnung. Also überträgt sich Glattheit der Koeffizientenfunktionen auf Glattheit der Lösung / Mannigfaltigkeit.

3 RB-Methoden für lineare koerzive Probleme

3.1 Primales RB-Problem

Definition 3.1 (Reduzierte Basis, RB-Räume)
Sei $S_N = \{\mu_1, \cdots, \mu_N\} \subset \mathcal{P}$ Menge von Parametern mit (o.B.d.A.) linear unabhängigen Lösungen $\{u(\mu_i)\}_{i=1}^N$ von $\big(P(\mu_i)\big)$. Dann ist $X_N := \operatorname{span}\{u(\mu_i)\}_{i=1}^N$ ein sog. *Lagrange-RB-Raum.*
Sei $\mu^0 \in \mathcal{P}$ und $u(\mu)$ Lösung von $\big(P(\mu^0)\big)$ k-mal diffbar in Umgebung von μ^0. Dann ist

$$X_{k,\mu^0} := \operatorname{span}\left\{\partial_\sigma u(\mu^0) : \sigma \in \mathbb{N}_0^p, |\sigma| \leq k\right\}$$

ein *Taylor-RB-Raum.* Eine Basis $\Phi_N = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\} \subseteq X$ eines RB-Raums ist eine *reduzierte Basis.*

Bemerkung.

- Φ_N kann direkt aus Snapshots $u(\mu^i)$ oder, für numerische Stabilität (siehe **??**), auch orthonormiert sein.
- Wahl der Parameter $\{\mu^i\}$ ist entscheidend für Güte des RB-Modells:
  Hier: zufällige oder äquidistante Menge ausreichend
  Später: intelligente Wahl durch a-priori Analysis oder Greedy-Verfahren
- Es ex. auch andere Arten von RB-Räumen (Hermite, POD). Gemeinsam ist diesen die Konstruktion aus Snapshots von u bzw. $\partial_\sigma u$.
- Andere MOR-Techniken: Φ_N kann auch komplett unabhängig von Snapshots auf andere Weise konstruiert werden: Balanced Truncation, Krylov-Räume, etc. (siehe z.B. Antoulas: Approximation of large scale dynamical systems, SIAM 2004)

Definition 3.2 (Reduziertes Problem $\big(P_N(\mu)\big)$)
Sei eine Instanz von $\big(P(\mu)\big)$ gegeben und $X_N \subseteq X$ ein RB-Raum. Zu $\mu \in \mathcal{P}$ ist die RB-Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ und Ausgabe $s_N(\mu) \in \mathbb{R}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} a(u_N(\mu), v; \mu) &= f(v; \mu) & \forall v \in X_N \\ s_N(\mu) &= l(u_N; \mu) \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Wir nennen obiges "primal" weil im Fall $f \neq l$ oder a asymmetrisch, kann mit Hilfe eines geeigneten dualen Problems bessere Schätzung für s erreicht werden.
- Obiges ist "Ritz-Galerkin"-Projektion im Gegensatz zu "Petrov-Galerkin"-Projektion, welches für nicht-koerzive Probleme notwendig ist. $\rightsquigarrow$ **??**

Satz 3.3 (Galerkin-Projektion, Galerkin-Orthogonalität)
Sei $P_\mu : X \to X_N$ die orthogonale Projektion bzgl. Energieskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$, *sei a symmetrisch* und $u(\mu)$, $u_N(\mu)$ Lösung von $\big(P(\mu)\big)$ bzw. $\big(P_N(\mu)\big)$. Dann:

i) $u_N(\mu) = P_\mu u(\mu)$ "Galerkin-Projektion"

ii) $\langle e(\mu), v\rangle_\mu = 0 \ \forall v \in X_N$, wobei $e(\mu) := u(\mu) - u_N(\mu)$

Beweis. Nach Aufgabe 1/Blatt 1 ist P_μ wohldefiniert, denn $(X,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_\mu)$ ist Hilbertraum und $X_N \subseteq X$ abgeschlossen weil endlichdimensional. Orthogonale Projektion des Fehlers ergibt

$$\begin{aligned}
&\langle P_\mu u(\mu) - u(\mu), \varphi_i\rangle_\mu = 0 && \forall i = 1,\cdots,N\\
\Leftrightarrow\quad & a(P_\mu u(\mu) - u(\mu), \varphi_i; \mu) = 0 && \forall i = 1,\cdots,N\\
\Leftrightarrow\quad & a(P_\mu u(\mu), \varphi_i; \mu) = a(u(\mu),\varphi_i;\mu) = f(\varphi_i;\mu) && \forall i = 1,\cdots,N
\end{aligned}$$

i) also ist $P_\mu u(\mu)$ Lösung von $\big(P_N(\mu)\big)$

ii) $e(\mu)$ ist also Projektions-Fehler, orthogonal nach Aufgabe 1/Blatt 1

□

Bemerkung. Für a nichtsymmetrisch gilt immer noch folgende "Galerkin-Orthogonalität"

$$a(u - u_N,v;\mu) = 0 \quad \forall v \in X_N$$

(auch wenn a kein Skalarprodukt)

Satz 3.4 (Existenz und Eideutigkeit für $\big(P_N(\mu)\big)$)
Zu $\mu \in \mathcal{P}$ ex. eindeutige Lösung $u_N(\mu) \in X_N$ und RB-Ausgabe $s_n(\mu) \in \mathbb{R}$ von $\big(P_N(\mu)\big)$. Diese sind beschränkt

$$\begin{aligned}
\|u_N(\mu)\| &\le \frac{\|f(\,\cdot\,;\mu)\|_{X'}}{\alpha(\mu)} \le \frac{\bar\gamma_f}{\bar\alpha}\\
\|s_N(\mu)\| &\le \|l(\,\cdot\,;\mu)\|\|u_N(\mu)\| \le \frac{\bar\gamma_l\bar\gamma_f}{\bar\alpha}
\end{aligned}$$

Beweis. Weil $X_N \subset X$ ist $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ stetig und koerziv auf X_N.

$$\begin{aligned}
\alpha_N(\mu) &:= \inf_{v\in X_N} \frac{a(v,v;\mu)}{\|v\|^2} \ge \inf_{v\in X} \frac{a(v,v;\mu)}{\|v\|^2} = \alpha(\mu) > 0\\
\gamma_N(\mu) &:= \sup_{u,v\in X_N} \frac{a(u,v;\mu)}{\|u\|\|v\|} \le \sup_{u,v\in X} \frac{a(u,v;\mu)}{\|u\|\|v\|} = \gamma(\mu) < \infty
\end{aligned}$$

analog f, l stetig auf X_N. Existenz, Eindeutigkeit und Schranken folgen also mit Lax-Milgram analog zu 2.8. □

Korollar 3.5 (Lipschitz-Stetigkeit)
Seien f, l gleichmäßig beschränkt und a, f, l Lipschitz-stetig bzgl. μ, dann sind auch $u_N(\mu)$, $s_N(\mu)$ Lipschitz-stetig bzgl. μ mit L_u, L_s wie in 2.15.

Beweis. Analog zu 2.15 / Übung. □

Satz 3.6 (Diskrete RB-Probleme)
Sei $\Phi_N = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$ eine reduzierte Basis für X_N. Für $\mu \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} A_N(\mu) &:= (a(\varphi_j,\varphi_i;\mu))_{i,j=1}^N && \in \mathbb{R}^{N\times N} \\ \underline{l}_N(\mu) &:= (l(\varphi_i;\mu))_{i=1}^N && \in \mathbb{R}^N \\ \underline{f}_N(\mu) &:= (f(\varphi_i;\mu))_{i=1}^N && \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

und $\underline{u}_N = (u_{N,i})_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ als Lösung von

$$A_N(\mu)\underline{u}_N = \underline{f}_N(\mu) \tag{3.1}$$

Dann ist $u_N(\mu) := \sum_{i=1}^N u_{N,i}\,\varphi_i$ und $s_N(\mu) := \underline{l}_N^\top(\mu)\underline{u}_N$.

Beweis. Einsetzen und Linearität zeigt, dass

$$a\left(\sum u_{N,j}\,\varphi_j, \varphi_i;\mu\right) = (A_N(\mu)\underline{u}_N)_i = \left(\underline{f}_N\right)_i = f(\varphi_i;\mu)$$

□

Satz 3.7 (Kondition bei ONB und Symmetrie)
Falls $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ symmetrisch und Φ_N ist ONB, so ist Kondition von (3.1) unabhängig von N beschränkt

$$\operatorname{cond}_2(A_N) := \|A_N\|_2\|A_N^{-1}\|_2 \le \frac{\gamma(\mu)}{\alpha(\mu)}$$

Beweis. Wegen Symmetrie gilt

$$\operatorname{cond}_2(A_N) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \tag{3.2}$$

mit betragsmäßig größtem/kleinstem Eigenwert $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ von $A_N(\mu)$. Sei $\underline{u}_{\max} = (u_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ Eigenvektor zu $\lambda_{\max}$ und

$$u_{\max} := \sum_{i=1}^N u_i\,\varphi_i \quad \in X_N$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}\|\underline{u}_{\max}\|^2 &= \lambda_{\max}\underline{u}_{\max}^\top\underline{u}_{\max} = \underline{u}_{\max}^\top A_N\underline{u}_{\max} \\ &= \sum_{i,j=1}^N u_i u_j\, a(\varphi_j,\varphi_i;\mu) = a\left(\sum_j u_j\varphi_j, \sum_i u_i\varphi_i;\mu\right) \\ &= a(u_{\max},u_{\max};\mu) \le \gamma(\mu)\|u_{\max}\|^2 \end{aligned}$$

Wegen

$$\|u_{\max}\|^2 = \langle \sum u_i\varphi_i, \sum u_j\varphi_j\rangle = \sum u_i u_j\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle = \sum u_i^2 = \|\underline{u}_{\max}\|^2$$

folgt $|\lambda_{\max}| \le \gamma(\mu)$. Analog zeigt man $|\lambda_{\min}| \ge \alpha(\mu)$ also folgt mit (3.2) die Behauptung.
□

Bemerkung (Unterschied FEM zu RB)**.** Es bezeichne $A_h(\mu) \in \mathbb{R}^{H\times H}$ die FEM Matrix (oder FV/FD).

i) Die RB-Matrix $A_N(\mu) \in \mathbb{R}^{H\times H}$ ist klein aber typischerweise vollbesetzt im Gegensatz zur großen aber dünnbesetzten Matrix A_h.

ii) Die Kondition von A_N verschlechtert sich nicht mit wachsendem N (falls eine ONB verwendet wird), während die Konditionszahl von A_h typischerweise polynomiell in H wächst, also schlechter wird.

Satz 3.8 (Reproduktion von Lösungen)
Seien $u(\mu)$, $u_N(\mu)$ Lösungen von $\big(P(\mu)\big)$ bzw. $\big(P_N(\mu)\big)$, $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ i-ter Einheitsvektor

i) Falls $u(\mu) \in X_N \quad \Rightarrow \quad u_N(\mu) = u(\mu)$

ii) Falls $u(\mu) = \varphi_i \in \Phi_N \quad \Rightarrow \quad \underline{u}_N(\mu) = \underline{e}_i \in \mathbb{R}^N$

Beweis.

i) Mit $u(\mu), u_N(\mu) \in X_N \Rightarrow e := u(\mu) - u_N(\mu) \in X_N$. Wegen Galerkin-Orthogonalität $(a(e,v;\mu) = 0\ \forall v \in X_N)$ und Koerzivität folgt:

$$0 = a(e,e;\mu) \geq \underbrace{\alpha(\mu)}_{>0}\underbrace{\|e\|^2}_{\geq 0} \quad \Rightarrow \quad \|e\| = 0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow u = u_N$$

ii) $u_N(\mu) = \varphi_i$, nach i). Mit Eindeutigkeit der Basisexpansion folgt die Behauptung.

□

Bemerkung.

- Reproduktion von Lösungen ist grundlegende Konsistenzeigenschaft. Es gilt trivialerweise falls/sobald Fehlerschranken vorliegen, aber für komplexe RB-Probleme ohne Fehlerschranken ist obiges ein guter Test.
- Validierung für Programmcode: Wähle Basis aus Snapshots $\varphi_i = u(\mu^i)$, $i = 1, \ldots, N$, ohne Orthonormierung, dann muss $\underline{u}_N(\mu^i) = \underline{e}_i \in \mathbb{R}^N$ ein Einheitsvektor sein.

3.2 Fehleranalyse

Satz 3.9 (Céa, Beziehung zur Bestapproximation)
Für alle $\mu \in \mathcal{P}$ gilt

$$\|u(\mu) - u_N(\mu)\| \leq \frac{\gamma(\mu)}{\alpha(\mu)} \inf_{v\in X} \|u - v\|$$

Beweis. $\forall v \in X_N$ mit Stetigkeit und Koerzivität

$$\begin{aligned} \alpha\|u - u_N\|^2 &\leq a(u - u_N, u - u_N) = a(u - u_N, u - v) + \underbrace{a(u - u_N, v - u_N)}_{=0 \text{ (Galerkin-Orth.)}} \\ &\leq \gamma(\mu)\|u - u_N\|\|u - v\| \end{aligned}$$

Division durch α, $\|u - u_N\|$ liefert

$$\|u - u_N\| \leq \frac{\gamma}{\alpha}\|u - v\|$$

also Behauptung durch Infimum-Bildung. □

Bemerkung.

i) Ähnliche Bestapproximationsaussagen gelten auch für andere Interpolationstechniken, aber die zugehörige Lebesgue-Konstante divergiert meist mit wachsender Dimension N. Obiges ist konzeptioneller Vorteil von Galerkin-Projektion über anderen Interpolationstechniken, da $\frac{\gamma}{\alpha}$ unabhängig von N beschränkt bleibt. "Quasi-Optimalität" der Galerkin-Projektion/des RB-Ansatzes.

ii) Falls $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ zusätzlich symmetrisch ist, kann um eine "Wurzel" verbessert werden mittels Normäquivalenz 2.5 und Bestapproximation der orthogonalen Projektion (Aufg. 1/Blatt 1)

$$\sqrt{\alpha}\|u - u_N\| \overset{2.5}{\leq} \|u - u_N\|_\mu = \|u - P_\mu u\|_\mu = \inf_{v\in X_N} \|u - v\|_\mu \overset{2.5}{\leq} \sqrt{\gamma} \inf_{v\in X_N} \|u - v\|$$

$$\Rightarrow \|u - u_N\| \leq \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \inf_{v\in X_N} \|u - v\|$$

iii) Implikation von 3.9: Wähle guten Approximationsraum X_N, so wird Galerkin-Projektion/RB-Approximation auch garantiert gut sein.

Satz 3.10 (Ausgabe und Bestapproximation)

i) Für alle $\mu \in \mathcal{P}$ gilt

$$|s(\mu) - s_N(\mu)| \leq \|l(\,\cdot\,;\mu)\|_{X'} \frac{\gamma(\mu)}{\alpha(\mu)} \inf_{v\in X_N} \|u - v\|$$

ii) Für den sog. "compliant" Fall (d.h. $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ symmetrisch und $l = f$) gilt sogar

$$\begin{aligned} 0 \leq s(\mu) - s_N(\mu) &= \|u - u_N\|_\mu^2 \\ &= \inf_{v\in X_N} \|u - v\|_\mu^2 \\ &\leq \gamma(\mu) \inf_{v\in X_N} \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

Beweis.

i) Klar mit Céa, Bestapproximation und Linearität

$$|s(\mu) - s_N(\mu)| = |l(u) - l(u_N)| = |l(u - u_N)| \leq \|l\|\|u - u_N\| \leq \|l\|\frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v\in X_N} \|u - v\|$$

ii) Wegen $a(\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ symmetrisch gilt wie in voriger Bemerkung

$$\|u - u_N\|_\mu = \|u - P_\mu u\|_\mu = \inf_{v \in X_N} \|u - v\| \tag{3.3}$$

Damit

$$\begin{aligned} s(\mu) - s_N(\mu) &= l(u) - l(u_N) \overset{f=l}{=} f(u) - f(u_N) = f(u - u_N) \\ &= a(u,u - u_N) - \underbrace{a(u_N,u - u_N)}_{=0 \text{ (Gal.-Orth./Symm.)}} = \|u - u_N\|_\mu^2 \\ &\overset{3.3}{=} \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_\mu^2 \\ &\overset{2.5}{\leq} \gamma \inf_{v \in X_N} \|u - v\|^2 \end{aligned}$$

Also insbesondere $s - s_N = \|u - u_N\|_\mu^2 \geq 0$.

□

Bemerkung.

- Im “compliant” Fall ist der Ausgabefehler i.A. sehr klein, da das Quadrat des RB-Fehlers eingeht.
- Im “nicht-compliant” Fall geht der RB-Fehler nur linear in die Schranke ein, das wird später durch primal-duale Technik verbessert.
- Aus ii) folgt nicht nur Fehlerschranke, sondern sogar Vorzeichen-Information, $s_N(\mu)$ ist untere Schranke für s.

Korollar 3.11 (Monotoner Fehlerabfall in Energienorm)
Falls $a(\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ symmetrisch, $(X_N)_{N=1}^{N_{\max}}$ Folge von RB-Räumen, mit $X_N \subseteq X_{N'}$, $\forall N \leq N'$ (“hierarchische Räume”) und für $\mu \in \mathcal{P}$ setze $e_{u,N} := u(\mu) - u_N(\mu)$, $e_{s,N} := s(\mu) - s_N(\mu)$.

i) Dann ist $(\|e_{u,N}\|_\mu)_{N=1}^{N_{\max}}$ monoton fallend.

ii) Falls $l = f$ (also “compliant” Fall) ist $e_{s,N}$ monoton fallend.

Beweis.

i) Mit (3.3) gilt für $N \leq N'$

$$\|e_{u,N}\|_\mu = \|u - u_N\|_\mu \overset{(3.3)}{=} \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_\mu \geq \inf_{v \in X_{N'}} \|u - v\|_\mu \overset{(3.3)}{=} \|e_{u,N'}\|_\mu$$

ii) Mit Satz 3.10 ii) gilt

$$e_{s,N} = \|e_{u,N}\|_\mu^2, \text{ also Behauptung folgt mit i)}$$

$\square$

Bemerkung.

- "Worst-case" ist Stagnation des Fehlers (unrealistisch, jeder neue Basisvektor müsste orthogonal zum Fehler $e_N(\mu)$ sein). In Praxis ist bei geschickter Basiswahl und "glatten" Problemen exponentielle Konvergenz zu erwarten, siehe Basisgenerierung, §**??**.

- Monotonie gilt nicht notwendigerweise bezüglich anderen Normen trotz Normäquivalenz

$$c\|e_{u,N}\|_\mu \leq \|e_{u,N}\| \leq C\|e_{u,N}\|_\mu, \text{ mit } c,\, C \text{ unabhängig von } N$$

  Fehlernorm $\|e_{u,N}\|$ kann gelegentlich anwachsen, bleibt aber in einem "Korridor", welcher monoton fällt.

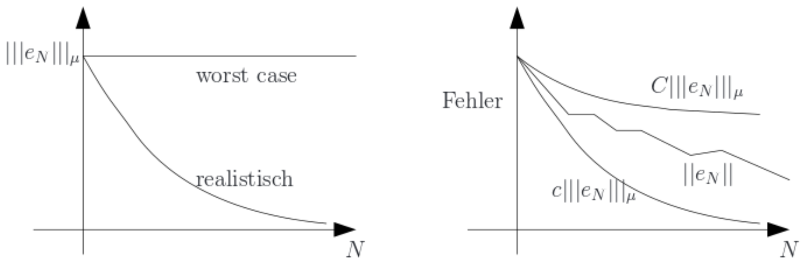

Abbildung 5: Fehlerabfall mit wachsender reduzierter Dimension.
(aus B. Haasdonk, Reduzierte-Basis-Methoden, Skript zur Vorlesung SS 2011, Universität Stuttgart, IANS-Report 4/11, 2011.)

Bemerkung (Gleichmäßige Konvergenz von Lagrange RB-Ansatz)**.**

- Sei $\mathcal{P}$ kompakt und $S_N := \left\{\mu^1, \dots, \mu^N\right\} \subset \mathcal{P}$, $N \in \mathbb{N}$, sodass die sog. Füll-Distanz (fill-distance) h_N gegen 0 geht:

$$h_N := \sup_{\mu\in\mathcal{P}} \operatorname{dist}(\mu, S_N), \quad \operatorname{dist}(\mu,S_N) := \min_{\mu'\in S_N} \|\mu - \mu'\|$$
$$\lim_{N\to\infty} h_N = 0$$

- Falls $u(\mu)$, $u_N(\mu)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L_u unabhängig von N, so folgt für alle N, μ und "nächstes" $\mu^* := \arg\min_{\mu'\in S_N} \|\mu - \mu'\|$:

$$\begin{aligned}\|u(\mu) - u_N(\mu)\| &\leq \|u(\mu) - u(\mu^*)\| + \|u(\mu^*) - u_N(\mu^*)\| + \|u_N(\mu^*) - u_N(\mu)\| \\ &\leq L_u \underbrace{\|\mu - \mu^*\|}_{\leq h_N} + 0 + L_u \underbrace{\|\mu - \mu^*\|}_{\leq h_N} \leq 2L_u h_N\end{aligned}$$

- Also folgt uniforme Konvergenz

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{P}} \|u(\mu) - u_N(\mu)\| = 0$$

- Jedoch Konvergenzrate linear in h_N ist nicht praktisch bedeutsam, weil h_N sehr langsam mit N abfällt, also muss N sehr groß sein, um kleinen Fehler zu garantieren.

- Wir werden sehen, dass bei gleichmäßig koerziven Problemen und geschickter Wahl der μ^i sogar exponentielle Konvergenz erreicht wird.

Lemma 3.12 (Fehler-Residuums-Beziehung)
Für $\mu \in \mathcal{P}$ definieren wir mittels der RB-Lösung u_N das Residuum $r(\,\cdot\,;\mu) \in X'$ bzw. seinen Riesz-Repräsentanten $v_r(\mu) \in X$

$$\langle v_r(\mu), v\rangle_X := r(v;\mu) := f(v;\mu) - a(u_N(\mu),v;\mu) \quad \forall v \in X$$

Dann erfüllt der Fehler $e(\mu) := u(\mu) - u_N(\mu)$

$$a(e(\mu),v;\mu) = r(v;\mu) \quad \forall v \in X$$

Beweis. $a(e(\mu),v;\mu) = \underbrace{a(u,v)}_{f(v)} - a(u_N,v) = r(v)$ □

Bemerkung.

- Fehler erfüllt "$\big(P(\mu)\big)$ mit Residuum als rechte Seite"

- Insbesondere ist $r(v;\mu) = 0 \ \forall v \in X_N$ (wegen Galerkin-Orthogonalität)

- $r(\,\cdot\,;\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$

Satz 3.13 (A-posteriori Fehlerschätzer, absoluter Fehler)
Sei $\mu \in \mathcal{P}$, $u(\mu)$ bzw. $u_N(\mu)$ Lösung von $\big(P(\mu)\big)$, $\big(P_N(\mu)\big)$ und $e = u - u_N$. Sei $\alpha_{LB}(\mu)$ eine untere Schranke für $\alpha(\mu)$ und $v_r \in X$ Riesz-Repräsentant von $r(\,\cdot\,;\mu)$ aus Lemma 3.12. Dann gelten folgende Schranken

i) Fehler in Energienorm

$$\|e(\mu)\|_\mu \leq \Delta_N^{en}(\mu) := \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}}$$

ii) Fehler in X-Norm $\|\cdot\|$

$$\|e(\mu)\| \leq \Delta_N(\mu) := \frac{\|v_r\|}{\alpha_{LB}(\mu)}$$

iii) Ausgabefehler
$$|s(\mu) - s_N(\mu)| \leq \Delta_{N,s}(\mu) := \|l(\,\cdot\,;\mu)\|\Delta_N(\mu)$$

Beweis.

i) Normäquivalenz 2.5 impliziert
$$\|e\| \leq \frac{\|e\|_\mu}{\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}}$$
Damit folgt
$$\|e\|_\mu^2 = a_s(e,e) = a(e,e) = r(v) = \langle v_r, e\rangle \leq \|v_r\|\|e\| \leq \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}}$$
Division durch $\|e\|_\mu$ liefert die Behauptung i).

ii) Koerzivität liefert
$$\alpha_{LB}(\mu)\|e\|^2 \leq a(e,e) = r(e) = \langle v_r, e\rangle \leq \|v_r\|\|e\|$$
Division durch α_{LB} und $\|e\|$ liefert ii).

iii) Stetigkeit von l liefert
$$|s(\mu) - s_N(\mu)| = |l(u - u_N;\mu)| \leq \|l\|\|u - u_N\| \overset{ii)}{\leq} \|l\|\Delta_N$$
□

Bemerkung.

- $\alpha_{LB}(\mu)$ soll eine *schnell berechenbare* untere Schranke an $\alpha(\mu)$ sein, z.B. $\alpha_{LB}(\mu) := \bar{\alpha}$ falls $\bar{\alpha}$ bekannt, andere Möglichkeiten folgen später (“min Θ”, “SCM”).
- Δ_N ist also immer um Faktor $\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}$ schlechter.
- Beschränkung des Fehlers durch Residuums-Norm ist bekannte Technik aus FEM, um FEM-Lösung u_h gegen Sobolev-Raum Lösung u abzuschätzen. In diesem Fall ist X ∞-dimensional und Residuums-Norm algorithmisch nicht berechenbar. In RB-Methoden wird $\|v_r\|$ eine *berechenbare* Größe sobald X endlich-dimensional, z.B. FEM-Raum, ist. Für Residuum ist $u_N(\mu)$ erforderlich, daher sind Schranken “*a posteriori*”.
- Allgemeines Vorgehen (und alternative Begründung für ii)) zur Herleitung von Fehlerschranken: Zeige, dass Fehler e erfüllt $\big(P(\mu)\big)$ mit rechter Seite, genannt r (Residuum), wende a-priori Stabilitätsaussage an:
$$\|e\| \leq \frac{\|r\|}{\alpha(\mu)} \quad \text{z.B. Lax-Milgram}$$
und erhalte berechenbare Größe durch Wahl $X = X_{FEM}$ und untere Schranke $\alpha_{LB}(\mu) \leq \alpha(\mu)$.

- Weil die Schranken beweisbare obere Schranken an Fehler darstellen, nennt man sie “rigorose” Fehlerschranken (vgl. “zuverlässige” Schätzer in FEM, bei denen jedoch die Konstante unbekannt ist).
- Fehlerschranken liefern eine Absicherung für RB-Methoden, “certified” RB-Methode, im Gegensatz zu vielen anderen Reduktionsmethoden (z.B. Krylov-Raum-Methoden).
- Ausgabefehler ist grob, indem Δ_N nur linear eingeht. Verbesserungen können für den “compliant” Fall oder mit primal-dual Techniken erreicht werden. ($\rightsquigarrow$ §??)

Korollar 3.14 (Verschwindende Fehlerschranke)
Falls $u(\mu) = u_N(\mu)$ dann ist $\Delta_N(\mu) = \Delta_N^{en}(\mu) = \Delta_{N,s}(\mu) = 0$

Beweis.

$$0 = a(0,v;\mu) = a(e,v;\mu) = r(v;\mu)$$

$$\Rightarrow r \equiv 0 \Rightarrow \|v_r\| = 0 \Rightarrow \Delta_N = \Delta_N^{en} = \Delta_{N,s} = 0$$

□

Bemerkung.

- Dies ist initialer Wunsch an eine Fehlerschranke: diese soll verschwinden falls exakte Approximation vorliegt. Dies ist Grundlage dafür, dass der Faktor der Überschätzung endlich ist.
- Aussage ist trivial für *effektive* Fehlerschätzer (sehen wir bald), aber in komplexen Problemen kann 3.14 schon das maximal erreichbare sein.
- 3.14 ist wieder sinnvoll um Programmcode zu validieren.

Satz 3.15 (A-posteriori Fehlerschranken, relative Fehler)
Mit Bezeichnungen/Voraussetzungen aus 3.13 und unter Annahme, dass alle Brüche im Folgenden wohldefiniert sind, gilt:

i) Für den relativen Fehler gilt in Energienorm:

$$\frac{\|e(\mu)\|_\mu}{\|u(\mu)\|_\mu} \leq \Delta_N^{en,rel}(\mu) := 2\frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}} \cdot \frac{1}{\|u_N(\mu)\|_\mu} \quad \text{falls} \quad \Delta_N^{en,rel} \leq 1$$

ii) Für den relativen Fehler gilt in X-Norm:

$$\frac{\|e(\mu)\|}{\|u(\mu)\|} \leq \Delta_N^{rel}(\mu) := 2\frac{\|v_r\|}{\alpha_{LB}(\mu)} \cdot \frac{1}{\|u_N(\mu)\|} \quad \text{falls} \quad \Delta_N^{rel} \leq 1$$

Beweis.

i) Falls $\Delta_N^{en,rel}(\mu) \leq 1$, so ist

$$\left| \frac{\|u\|_\mu - \|u_N\|_\mu}{\|u_N\|_\mu} \right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{\|u - u_N\|_\mu}{\|u_N\|_\mu} = \frac{\|e\|_\mu}{\|u_N\|_\mu} \overset{3.13\text{ i)}}{\leq} \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}(\mu)}\|u_N\|_\mu}$$
$$= \frac{1}{2}\Delta_N^{en,rel}(\mu) \leq \frac{1}{2}$$

Falls $\|u_N\|_\mu > \|u\|_\mu$ gilt $\|u_N\|_\mu - \|u\|_\mu \leq \frac{1}{2}\|u_N\|_\mu$ also

$$\frac{1}{2}\|u_N\|_\mu \leq \|u\|_\mu \tag{$*$}$$

Falls $\|u\|_\mu \geq \|u_N\|_\mu$, so ist $(*)$ klar. Damit folgt

$$\frac{\|e\|_\mu}{\|u\|_\mu} \overset{3.13\text{ i)}}{\leq} \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}}} \cdot \frac{1}{\|u\|_\mu} \overset{(*)}{\leq} \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}}} \cdot \frac{1}{\|u_N\|_\mu} \cdot 2 = \Delta_N^{en,rel}(\mu)$$

ii) analog zu i).

□

Bemerkung.

- Analog folgt auch relativer Ausgabefehlerschätzer

$$\frac{|s(\mu) - s_N(\mu)|}{|s(\mu)|} \leq \Delta_{N,s}^{rel}(\mu) := \frac{\|l(\,\cdot\,;\mu)\| \cdot \Delta_N}{|s_N(\mu)|} \cdot 2 \quad \text{falls} \quad \Delta_{N,s}^{rel}(\mu) \leq 1$$

- Relative Fehlerschranken sind nur mit Zusatzbedingung ($\Delta_*^{rel} \leq 1$) gültig. Diese Bedingung ist jedoch konkret überprüfbar. Falls $\Delta_N^{rel}(\mu) > 1$, sollte der RB-Raum verbessert werden.

Satz 3.16 (Effektivität der Fehlerschranken)
Mit Bezeichnungen aus 3.13 sei $u(\mu) \neq u_N(\mu)$ und $\gamma_{UB}(\mu) < \infty$ eine obere Schranke an $\gamma(\mu)$. Dann sind die *Effektivitäten* $\eta_N^{en}(\mu)$ und $\eta_N(\mu)$ definiert und beschränkt durch

i)
$$\eta_N^{en}(\mu) := \frac{\Delta_N^{en}(\mu)}{\|e\|_\mu} \leq \frac{\gamma_{UB}(\mu)}{\alpha_{LB}(\mu)}$$

Falls $a(\,\cdot\,,\cdot\,;\mu)$ symmetrisch, gilt sogar $\eta_N^{en}(\mu) \leq \sqrt{\frac{\gamma_{UB}(\mu)}{\alpha_{LB}(\mu)}}$

ii)
$$\eta_N(\mu) := \frac{\Delta_N(\mu)}{\|e\|_\mu} \leq \frac{\gamma_{UB}(\mu)}{\alpha_{LB}(\mu)}$$

Beweis.

ii) $\|v_r\|^2 = \langle v_r, v_r\rangle = r(v_r) = a(e,v_r) \le \gamma_{UP}(\mu)\|e\|\|v_r\|$

$$\|v_r\| \le \gamma_{UB}(\mu)\|e\| \tag{3.4}$$

Damit

$$\frac{\Delta_N(\mu)}{\|e\|} = \frac{\|v_r\|}{\alpha_{LB}} \cdot \frac{1}{\|e\|} \overset{(3.4)}{\le} \frac{\gamma_{UB}}{\alpha_{LB}} \cdot \frac{\|e\|}{\|e\|}$$

i)

$$\frac{\Delta_N^{en}(\mu)}{\|e\|_\mu} = \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\|e\|_\mu}_{\ge\sqrt{\alpha_{LB}}\cdot\|e\|}} \le \frac{\|v_r\|}{\alpha_{LB}} \cdot \frac{1}{\|e\|} \overset{\text{ii)}}{\le} \frac{\gamma_{UB}}{\alpha_{LB}}$$

Falls $a(\,\cdot\,,\cdot\,)$ symmetrisch, gilt wegen Normäquivalenz

$$\|v_r\|_\mu \le \sqrt{\gamma_{UB}}\|v_r\|$$

und

$$\|v_r\|^2 = a(e,v_r) \overset{\text{CS}}{\le} \|e\|_\mu\|v_r\|_\mu \quad \Rightarrow \quad \|v_r\| \le \|e\|_\mu \cdot \sqrt{\gamma_{UB}}$$

Damit

$$\frac{\Delta_N^{en}(\mu)}{\|e\|_\mu} = \frac{\|v_r\|}{\sqrt{\alpha_{LB}}} \cdot \frac{1}{\|e\|_\mu} \le \frac{\|e\|_\mu \cdot \sqrt{\gamma_{UB}}}{\sqrt{\alpha_{LB}} \cdot \|e\|_\mu}$$

□

Bemerkung.

- Wir nennen Δ_N, Δ_N^{en} daher "effektive" Fehlerschranken weil Faktor der Überschätzung höchstens $\frac{\gamma_{UB}}{\alpha_{LB}}$ beträgt.
- "Rigorosität" also äquivalent mit $\eta_N(\mu) \ge 1$.
- Für den Ausgabefehler $\Delta_{N,s}(\mu)$ ohne weitere Annahmen keine Effektivität beweisbar. Tatsächlich kann $\frac{\Delta_{N,s}}{|s-s_N|}$ beliebig groß oder nicht definiert sein, falls $\Delta_{N,s} \ne 0$, aber $s(\mu) = s_N(\mu)$:

  Wähle X_N und μ so dass $u(\mu) \ne u_N(\mu)$, wird erreicht durch $u(\mu) \notin X_N$

  $$\Rightarrow e(\mu) \ne 0 \Rightarrow \Delta_N \ne 0, \Delta_{N,s} \ne 0 \quad \text{falls} \quad l \ne 0$$

  Wähle $l(\,\cdot\,;\mu) \ne 0$, so dass $l(u - u_N;\mu) = 0$

  $$\Rightarrow s(\mu) - s_N(\mu) = l(u - u_N;\mu) = 0$$

- Wir nennen die Fehlerschranken auch *Fehlerschätzer* weil sie äquivalent zum Fehler sind.

  $$\|e\| \le \Delta_N \le \eta_N\|e\|$$

Satz 3.17 (Effektivität, relative Fehlerschätzer)
Für $\Delta_N^{rel}(\mu)$ aus 3.15 ist Effektivität definiert und beschränkt durch

$$\eta_N^{rel}(\mu) := \frac{\Delta_N^{rel}(\mu)}{\frac{\|e\|}{\|u\|}} \leq 3\frac{\gamma_{UB}(\mu)}{\alpha_{LB}(\mu)} \quad \text{falls} \quad \Delta_N^{rel}(\mu) \leq 1$$

Beweis. Wie in Beweis zu 3.15 impliziert $\Delta_N^{rel} \leq 1$:

$$\left| \frac{\|u\| - \|u_N\|}{\|u\|} \right| \leq \frac{1}{2}$$

Falls $\|u_N\| \leq \|u\|$ so gilt $\|u\| - \|u_N\| \leq \frac{1}{2}\|u_N\|$ also

$$\|u\| \leq \frac{3}{2}\|u_N\|$$

Falls $\|u_N\| > \|u\|$, so ist $(*)$ klar. Dann gilt

$$\eta_N^{rel}(\mu) = \underbrace{\frac{2\|v_r\|}{\alpha_{LB}(\mu)\|u_N\|}}_{\Delta_N^{rel}} \cdot \frac{1}{\frac{\|e\|}{\|u\|}} \overset{(3.4)}{\leq} 2\frac{\gamma_{UB}\|e\|}{\alpha_{LB}\|e\|} \cdot \frac{\|u\|}{\|u_N\|} \overset{(*)}{\leq} 3\frac{\gamma_{UB}}{\alpha_{LB}}$$

□

Bemerkung.

- Ähnlich für $\Delta_N^{en,rel}$
- Verbesserung von Schranken und Effektivität durch Normwechsel.
  Wähle $\bar{\mu} \in \mathcal{P}$ und $\|u\| := \|u\|_{\bar{\mu}}$ als neue Norm auf X. Dann gilt für symmetrisches a: $\alpha(\bar{\mu}) = 1 = \gamma(\bar{\mu})$ also Effektivitäten η_N, $\eta_N^{en} = 1$, Schätzer sind genau der echte Fehler. Dies lässt u_N unberührt, liefert aber bessere Fehlerschätzung. Im Fall von Stetigkeit bzgl. μ kann auch in Umgebung von $\bar{\mu}$ gute Effektivität erwartet werden.

Korollar 3.18 (Offline-/Online- Zerlegung für $(P_N(\mu))$)
(Offline:) Nach Konstruktion einer Basis $\Phi_N = \{\varphi_1,...,\varphi_N\}$ berechne parameter-unabhängige Komponenten-Matrizen & Vektoren

$$A_N^q := (a^q(\varphi_j,\varphi_i))_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N\times N}, \qquad q = 1,...,Q_n$$

$$\underline{f}_N^q := (f^q(\varphi_i))_{i=1}^N, \qquad \underline{l}_N^q := (l^q(\varphi_i))_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N, \qquad q = 1,...,Q_f/Q_l$$

(Online:) Zu $\mu \in \mathcal{P}$ berechne Koeffizienten $\Theta_a^q(\mu), \Theta_f^q(\mu), \Theta_l^q(\mu)$ und

$$A_N(\mu) := \sum_q \Theta_a^q(\mu) A_N^q$$

$$\underline{f}_N(\mu) := \sum_q \Theta_f^q(\mu)\underline{f}_N^q, \qquad \underline{l}_N(\mu) := \sum_q \Theta_l^q(\mu)\underline{l}_N^q$$

Dies liefert genau das diskrete System $A_N(\mu)\underline{u}_N = f_N(\mu)$ aus 3.6 welches nach $\underline{u}_N$ gelöst wird und $u_N(\mu), s_N(\mu)$ ergibt

Beweis. klar wg. Separierbarkeit □

Bemerkung (Einfache Berechnung von $A_N^q, \underline{\mathrm{f}}_N^q, \underline{\mathrm{l}}_N^q$)**.** Die reduzierten Komponenten benötigen keinerlei Integration über Ω oder Gitterdurchlauf, falls hochdim. A^q vorliegen. Sei Basis Φ_N gegeben durch Koeffizientenmatrix

$$\Phi_N := (\varphi_{ji})_{i=1,\ j=1}^{H\quad N} \in \mathbb{R}^{N \times N} \qquad \text{mit } \varphi_j = \sum_{i=1}^{H} \varphi_{ji}\psi_i$$

Dann erhalte reduzierten Komponenten durch Matrix-Multi

$$A_N^q := \underline{\Phi}_N^T A^q \,;\, \underline{\mathrm{f}}_N^q := \underline{\Phi}_N^T \underline{\mathrm{f}}^q \,;\, \underline{\mathrm{l}}_N^q := \underline{\Phi}_N^T l^q$$

Bemerkung.

- Offline-Phase benötigt $\mathcal{O}(NH^2 + NH(Q_f + Q_l) + N^2 H Q_a)$ für die Berechnung von $\Phi_N, f_N^q, l_N^q, A_N^q$ dominiert von der Basisgenerierung.
- Online-Phase skaliert mit $\mathcal{O}(N^2 Qa + N(Q_f + Q_l) + N^3)$ für Berechnung von $A_N(\mu), f_N(\mu), l_N(\mu)$ und $\underline{\mathrm{u}}_N(\mu)$ dominiert durch LGS lösen falls Q_a, Q_f, Q_l klein sind. Insbesondere komplett unabhängig von H, wie gewünscht.
- Laufzeitdiagramm Seien $t_{detail}, t_{offline}, t_{online}$, die Laufzeiten für einzelne Lösungen von $(P(\mu))$, Offline-Phase bzw. Online-Phase von $(P_N(\mu))$. Unter Annahme, dass diese konstant unter Parametervariation, erhalte affin-lineare Beziehung der Gesamtlaufzeit für k parameterische Lösungen

  $$t(k) := k \cdot t_{detail}\,, \qquad t_N(k) = t_{offline} + k \cdot t_{online}$$

  Das reduzierte Modell zahlt sich aus, sobald mehr als $k* := \frac{t_{offline}}{t_{detail} - t_{online}}$ Lösungen berechnet werden sollen.

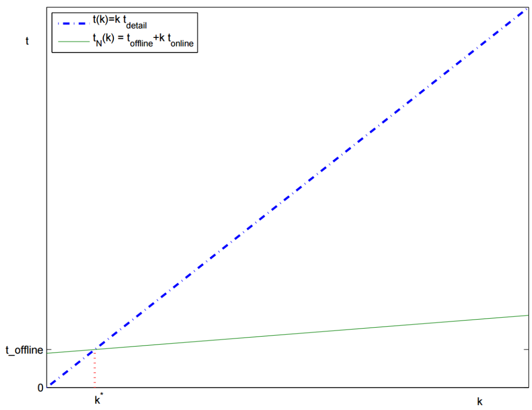

Abbildung 6: Laufzeiten mit wachsender Anzahl an Simulationen.
(aus B. Haasdonk, Reduzierte-Basis-Methoden, Skript zur Vorlesung SS 2011, Universität Stuttgart, IANS-Report 4/11, 2011.)

Bemerkung (Keine Unterscheidung zwischen u und u_h)**.** Erinnerung: Wir unterscheiden (meistens) nicht in Notation zwischen u_h (FEM-Lösung) und u (Sobolev-Raum Lösung). Dies kann nun begründet werden:

i) Die Online-Phase ist unabhängig von $H = \dim(X)$, daher kann H beliebig groß und damit u_h beliebig präzise gemacht werden durch geeignete Diskretisierung mit genügend feinem Gitter, so dass u und u_h praktisch ununterscheidbar sind ($||u - u_h||$ beliebig klein aber $(P_N(\mu))$ schnell lösbar).

ii) In der Praxis wird Reduktionsfehler den Gesamtfehler dominieren, der (FEM-)Diskretisierungsfehler spielt untergeordnete Rolle.

$$\epsilon := ||u - u_h|| \ll ||u_h - u_N||$$

$$\Rightarrow ||u_h - u_N|| - \epsilon \leq \underbrace{||u - u_N||}_{\text{theoretisch das Ideal}} \leq \overbrace{||u_h - u_N||}^{\text{berechenbar}} + \epsilon$$

also kontrollieren wir durch Fehlerschranken für $||u_h - u_N||$ bis auf ϵ auch den eigentlich interessanten Fehler $||u - u_N||$.

3.3 Offline-/Online- Zerlegung für Fehlerschranken/Effektivitätsschranken

Für schnelle Berechnung der Fehlerschranken & Effektivitätsschranken benötigen wir Zerlegung für

- Duale Norm des Residuums $||r(\cdot\,;\mu)||_{X'} = ||v_r||$ für alle Fehlerschranken
- Duale Norm des Ausgabefunktionals $||l(\cdot\,;\mu)||_{X'}$ für $\Delta_{N,s}(\mu)$
- Norm $||u_N(\mu)||_X$ der RB-Lösung für relativen Energienormfehlerschätzer $\Delta_N^{en,rel}$.
- Untere/obere Schranke $\alpha_{LB}(\mu)$ bzw. $\gamma_{UB}(\mu)$ für Koerzivitäts- bzw. Stetigkeitskonstante für Fehlerschätzer bzw. Effektivitätsschranken.

Separierbarkeit von $(P(\mu))$ überträgt sich auf Residuum

Satz 3.19 (Separierbare Parameter-Abhängigkeit für $r(\cdot\,;\mu)$)
Seien a, f sep. parametrisch. Nach Riesz existieren $v_f^q \in X$ mit $< v_f^q, v >= f^q(v) \;\; \forall v \in X$, $q = 1,...,Q_f$ und $v_a^{q,n} \in X$ mit $< v_a^{q,n}, v >= a^q(\varphi_n,v)$, $v \in X$, $q = 1,...,Q_a, n = 1,...,N$
Setze $Q_r := NQ_a + Q_f$ und Aufzählung von $\{v_a^{q,n},v_f\}$ durch

$$(v_r^1,...,v_r^{Q_r}) := (v_f^1,...,v_f^{Q_f},v_a^{1,1},...,v_a^{Q_a,1},v_a^{1,2},...,v_a^{Q_a,2},...,v_a^{Q_a,N})$$

Für $\mu \in \mathcal{P}$ sei $u_N = \sum_{n=1}^N u_{Nn}\varphi_n$ Lösung von $(P_N(\mu))$ und hiermit definiere

$$\begin{aligned}(\Theta_r^1(\mu),...,\Theta_r^{Q_r}(\mu)) := (\Theta_f^1(\mu),...,\Theta_f^{Q_f}(\mu), -\Theta_a^1(\mu),..., -\Theta_a^{Q_a}(\mu)u_{N1}, -\Theta_a^1(\mu)u_{N2},...\\ ..., -\Theta_a^{Q_a}(\mu)u_{N2},..., -\Theta_a^{Q_a}(\mu)u_{NN})\end{aligned}$$

Mit $r^q(\,\cdot\,) :=< v_r^q, \cdot >\in X'$, $q = 1,...,Q_r$ sind $r(\,\cdot\,;\mu)$ und $v_r(\mu)$ separierbar parametrisch via

$$r(\,\cdot\,;\mu) = \sum_{q=1}^{Q_r} \Theta_r^q(\mu) \cdot r^q(\,\cdot\,), \qquad v_r(\mu) = \sum_{q=1}^{Q_r} \Theta_r^q(\mu) \cdot v_r^q \qquad \forall \mu \in \mathcal{P}$$

Beweis. Definition und Linearität ergibt:

$$\begin{aligned}
< v_r(\mu),v >= r(v;\mu) &= f(v;\mu) - a(u_N(\mu),v;\mu)\\
&= \sum_q \Theta_f^q(\mu) f^q(v) - \sum_q \sum_n \Theta_a^q(\mu) u_{Nn} a^q(\varphi_n,v)\\
&= \underbrace{< \sum_q \Theta_f^q(\mu) v_f^q - \sum_q \sum_n \Theta_a^q(\mu) u_{Nn} v_a^q, v >}_{\sum \Theta_r^q(\mu) v_r^q}\\
&= \sum_{q=1}^{Q_r} \Theta_r^q(\mu) r^q(v) \qquad \forall v \in X
\end{aligned}$$

□

Offensichtlich Berechnung von Riesz-Repräsentant notwendig, dies geschieht durch Ausnutzen der Endlichdim. von $X = \operatorname{span}\{\psi_i\}_{i=1}$ und $K := (< \psi_i,\psi_j >)_{i,j=1}^H$

Satz 3.20 (Berechnung von Riesz-Repr.)
Für $g \in X'$ erhält man Koeffizientenvektor $\underline{v} = (v_i)_{i=1}^H \in \mathbb{R}^H$ seines Riesz-Repräsentanten $v_g = \sum_{i=1}^H v_i \, \psi_i \in X$ durch lösen von

$$K\underline{v} = \underline{g} \tag{3.5}$$

mit Vektor $\underline{g} := (g(\psi_i))_{i=1}^H \in \mathbb{R}^H$

Beweis. Für jedes $u = \sum_{i=1}^H u_i \, \psi_i \in X$ mit Koeffizientenvektor $\underline{u} = (u_i)_{i=1}^H$ erhalten wir

$$g(u) = g(\sum u_i \, \psi_i) = \sum u_i \, g(\psi_i) = \underline{u}^T \underline{g} \stackrel{3.5}{=} \underline{u}^T K \underline{v} =< u,v_g >$$

□

Bemerkung. 3.5 ist typischerweise dünn besetzt, also mit iterativen LGS-Lösern berechenbar.

Korollar 3.21 (Offline-/Online- für Residuen-Norm)
(Offline:) Nach Offline von $(P_N(\mu))$ gemäß 3.18 def. $G_r :=< r^q(v_r^{q'}) >_{q,q'=1}^{Q_r} \in \mathbb{R}^{Q_r \times Q_r}$ mittels Residuen-Komponenten r^q und Riesz-Repr. v_r^q aus 3.19 (Online:) Für $\mu \in \mathcal{P}$ und RB-Lösung $\underline{u}_N \in \mathbb{R}^N$ berechne Residuen-Koeff-Vektor $\underline{\Theta}_r(\mu) = (\Theta_r^1(\mu),...,\Theta_r^{Q_r}(\mu))^T \in \mathbb{R}^{Q_r}$. Dann gilt:

$$||v_r(\mu)||_X = ||r(\,\cdot\,;\mu)||_X = \sqrt{\underline{\Theta}_r(\mu)^T \cdot G_r \underline{\Theta}_r(\mu)} \tag{3.6}$$

Beweis. Zunächst sehen wir $G_r = (< v_r^q, v_r^{q'} >)_{q,q'=1}^{Q_r}$. Isometrie der Riesz-Abbildung & Separierbarkeit ergeben

$$||r(\mu)||_X^2 = ||v_r(\mu)||_X^2 =< \sum_{q=1}^{Q_r} \Theta_r^q(\mu)\, v_r^q, \sum_{q'=1}^{Q_r} \Theta_r^{q'}(\mu)\, v_r^{q'} >= \underline{\Theta}_r^T \cdot G_r \cdot \underline{\Theta}_r(\mu)$$

□

Bemerkung (Stabilisierung durch Orthonormierung von $\{v_r^q\}$)**.** Wie in demos_chapter3(3) gesehen, existiert eine Genauigkeitsgrenze für Fehlerschätzer, diese liegt in numerischen Auslöschungseffekten in 3.6 begründet, denn G_r ist potentiell schlecht konditioniert. Gemäß einer Idee von Behr & Rave 2014 lässt sich die Genauigkeit steigern, indem die $\{v_r^q\}$ orthonormiert werden und 3.6 mit entsprechender Transformationsmatrix modifiziert werden.

Korollar 3.22 (Offline-/Online- Zerlegung für $||l(\,\cdot\,;\mu)||_{X'}$)
(Offline:) Berechne Riesz-Repr. $v_l^q \in X$ der Ausgabekommponenten, d. h.

$$< v_l^q, v >= l^q(v) \qquad \forall v \in X,\ q = 1,\dots,Q_l$$

und def. $G_l := (l^q(v_l^{q'})_{q,q'=1}^{Q_l}$ (Online:) Zu $\mu \in \mathcal{P}$ berechne $\underline{\Theta}_l(\mu) := (\Theta_l^1(\mu),\dots,\Theta_l^{Q_l}(\mu))$ und $||l(\,\cdot\,;\mu)||_{X'} = \sqrt{\underline{\Theta}_l^T G_l \underline{\Theta}_l}$

Beweis. analog zu 3.21 □

Korollar 3.23 (Offline-/Online für $||u_N(\mu)||_X, ||u_N(\mu)||_\mu$)
(Offline:) Nach der Offline-Phase von $(P_N(\mu))$ def.

$$K_N := (< (\varphi_i, \varphi_j >)_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

(Online:) Zu $\mu \in \mathcal{P}$ berechne $A_N(\mu)$ und $\underline{u}_N(\mu)$ durch Online-Phase von $(P_N(\mu)$

$$||u_N(\mu)||_X = \sqrt{\underline{u}_N^T\, K_N\, \underline{u}_N}$$

$$||u_N(\mu)||_\mu = \sqrt{\underline{u}_N^T\, (\frac{1}{2}(A_N(\mu) + A_N(\mu)^T))\, \underline{u}_N}$$

Beweis.

$$||u_N||^2 =< \sum_n u_{Nn}\varphi_n\,, \sum u_{Nn'}\varphi_{n'} >= \sum_{n,n'} u_{Nn} u_{Nn'} < \varphi_n, \varphi_{n'} >= \underline{u}_N^T \cdot K_N \cdot \underline{u}_N$$

analog für Energienorm mit $A_{N,s} := \frac{1}{2}(A_N(\mu) + A_N(\mu)^T)$ □

Bemerkung. K_N wieder einfach aus K berechenbar (Übung).