

Моделирование траектории движения Земли вокруг Солнца

Тихомирова Анастасия Андреевна

Иванов Дмитрий Александрович

Основная задача заключается в моделировании движения планеты вокруг звезды под действием силы всемирного тяготения F_g . Мы будем вычислять в любой момент времени положение и скорость планеты. Входными данными будут лишь время, в течение которого мы хотим видеть перемещение планеты.

I. Теория.

1. Основные формулы:

- 1) Распишем закон всемирного тяготения, который будет являться основным для нашей работы:

$$F = -G \frac{M_c m}{r^3} \mathbf{r}$$

- M_c – Масса Солнца, m – масса Земли, G – гравитационная постоянная ($6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$), \mathbf{r} – радиус-вектор, соединяющий Солнце и Землю, r – длина этого вектора. Знак минус говорит о том, что тела притягиваются друг к другу.
- Будем использовать декартову систему координат и для удобства расположим Солнце в начало координат. Массу Земли и Солнца возьмем из справочников.

- 2) Запишем второй закон Ньютона, с учетом того, что ускорение — это вторая производная по времени от положения этого тела:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = F, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$$

- 3) Будем считать, что $M_c \gg m$, и что движение Земли никак не влияет на Солнце. Поэтому его можно считать неподвижным. Соотношения уже написанных формул вместе с определением скорости и начальными условиями дают математическую модель:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M_c}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$$

- 4) Пусть $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Тогда из трех векторных уравнений следует двенадцать скалярных уравнений:

$$\dot{v}_x = -G \frac{M_c x}{r^3}, \quad \dot{v}_y = -G \frac{M_c y}{r^3}, \quad \dot{v}_z = -G \frac{M_c z}{r^3}$$

$$\dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{z} = v_z$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0$$

$$v_x(0) = v_x^0, \quad v_y(0) = v_y^0, \quad v_z(0) = v_z^0$$

- 5) Чтобы упростить дальнейший анализ, выберем эту систему так, чтобы выполнялись условия: $z(0) = 0, v_z(0) = 0$. Но тогда из третьего уравнения следует, что $\frac{dv_z}{dt} = 0$, поэтому движение будет происходить в плоскости (x, y) . Это движение будет описываться четырьмя уравнениями первого порядка, которые можно привести к виду:

$$\ddot{x} = -G \frac{M_c x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -G \frac{M_c y}{r^3}$$

- 6) Формула для расчета крайних точек эллипса:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

, где:

- e – эксцентриситет орбиты
- a – наибольшая точка по оси x (большая полуось орбиты)
- b – наибольшая точка по оси y .

- 7) Средняя орбитальная скорость выводится из равенства сил тяготения и центробежной:

$$\frac{m v^2}{r} = G \frac{M_c m}{r^2}$$

$$v = \sqrt{G \frac{M_c}{r}}$$

2. Используемые табличные значения:

- гравитационная постоянная ($6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$)
- масса Земли ($6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$)
- масса солнца ($1,9 \cdot 10^{30} \text{ кг}$)
- радиус Земли (6378 км)
- радиус солнца (695000 км)
- большая полуось орбиты Земли (149598261 км)
- эксцентриситет орбиты (0,01671123)

3. Расчет:

1) Посчитаем среднюю скорость:

$$v = \sqrt{G \frac{M_c}{r}} = \sqrt{6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{1,9 \cdot 10^{30}}{149,6 \cdot 10^6}} = 29782(7) \frac{\text{м}}{\text{с}} = 107218 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

2) Рассчитаем крайнюю точку по игреку, с учетом эксцентриситета, и известного значения по иксу (большая полуось):

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$ea = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$(ea)^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = a^2 - (ea)^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - (ea)^2} = \sqrt{149598261^2 - (0,01671123 \cdot 149598261)^2} \\ = 149577370 \text{ км}$$

Напишем уравнение эллипса орбиты Земли, по получившимся данным:

$$\begin{cases} x = 149598261 \cos t \\ y = 149577370 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

II. Инструкция пользования кодом.

1. Скопировать проект с гитхаба или с гугл диска;
2. Открыть проект в PyCharm или любой другой IDE для Python;
3. Запустив проект, указать:
 - 1) путь, куда нужно будет сохранить файл с результатом работы консольного приложения.
 - 2) время (в секундах), за которое вы хотите увидеть траекторию Земли (*этот параметр можно не указывать, тогда дефолтным будет выставлен 1 год*)
 - 3) скорость воспроизведение видео (количество кадров в секунду) (*этот параметр также можно не указывать, дефолтным значением является 120 кадров в секунду*)
4. Перейти по указанному пути и открыть видеофайл, в котором будет показана траектория движения Земли. Центр Солнца и Земли соединен пунктирной линией, в легенде изображена средняя скорость движения Земли, а также вычислено изменяющиеся расстояние от центра Земли до Солнца.

III. Пример пользования:

1. Пример запуска кода:

```
Run  main x
Welcome to Earth-Sun moving model 🌍
Firstly, enter the params (or just press enter to use defaults)
Enter the directory to save file: /Users/d/Documents/Test
Enter time (in seconds): 31536000
Enter FPS (frames per second) for the final video: 120
Creating the video...
100.00%
Video is saved at /Users/d/Documents/Test/video.mp4. See you next time!

Process finished with exit code 0
```

2. Последний кадр из получившегося видео:

