Formules trigonométriques essentielles

Dans ce cours, nous allons rappeler les formules trigonométriques importantes qui seront utiles pour les opérations sur les nombres complexes en forme trigonométrique, telles que la multiplication et la division.

1. Somme des angles pour le sinus et le cosinus

Ces formules sont cruciales pour comprendre comment les arguments s’additionnent lors de la multiplication des nombres complexes.

Formule pour le cosinus de la somme :

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

Formule pour le sinus de la somme :

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

---

2. Sinus et cosinus d’un angle négatif

Ces formules sont utiles lorsque vous travaillez avec le conjugué d’un nombre complexe, car elles montrent comment les signes du sinus et du cosinus changent lorsque l'argument est négatif.

Formule pour le sinus d'un angle négatif :

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Formule pour le cosinus d'un angle négatif :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

---

3. Angles de même tangente et arc tangente

Les propriétés des angles ayant la même tangente sont importantes pour comprendre les relations entre les arguments dans le plan complexe.

Angles ayant la même tangente :

$$\tan(\theta_1) = \tan(\theta_2) \quad \text{si et seulement si} \quad \theta_1 = \theta_2 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Arc tangente et angles équivalents :

L'arc tangente est une fonction qui renvoie l'angle dont la tangente est donnée. Elle est utile pour trouver les angles équivalents dans le plan complexe et pour convertir des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires.

Recherche : que sont les coordonnées polaires ?

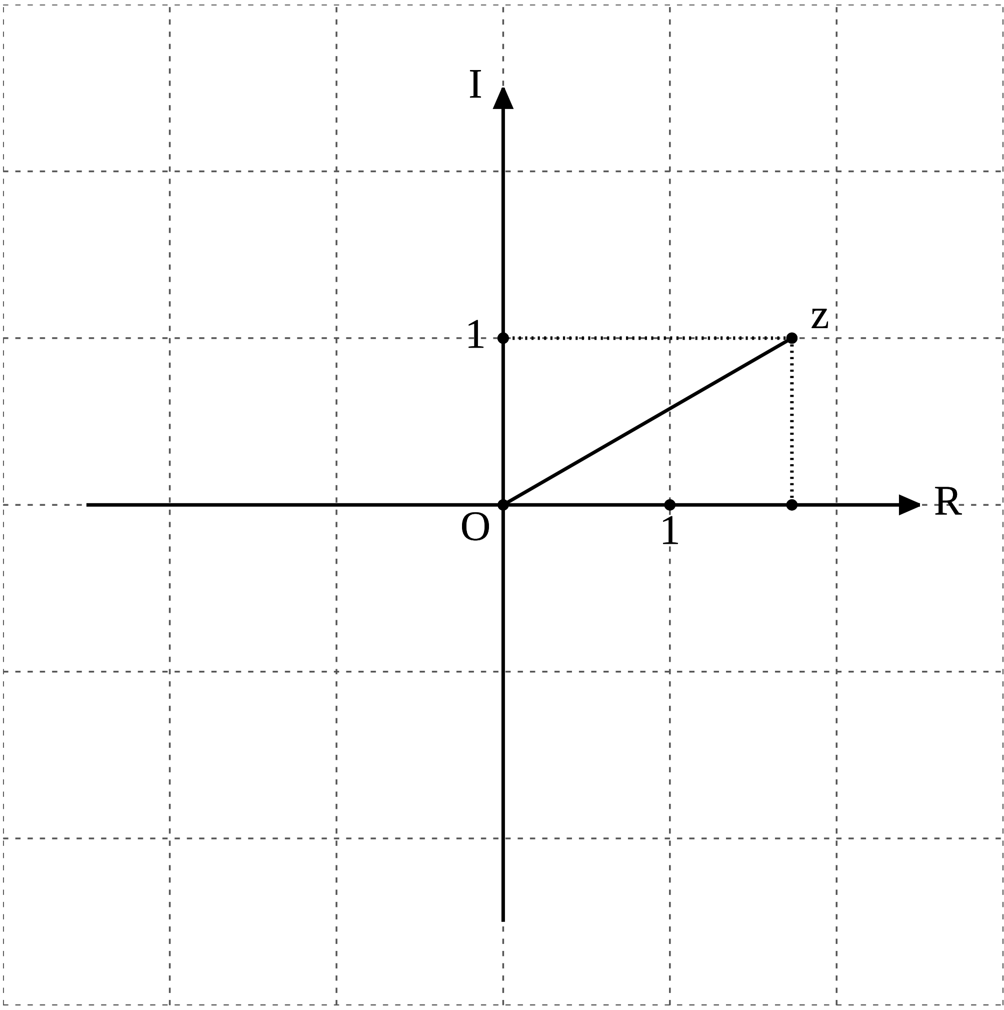
Attention, l'arc tangente, notée $\arctan$, renvoie toujours un angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (ou entre -90° et 90°). Cela signifie que l'arc tangente renvoie uniquement les angles du premier et du quatrième quadrants.

Synthèse

Ces formules trigonométriques jouent un rôle clé dans les opérations avec les nombres complexes sous forme trigonométrique, que ce soit pour la multiplication, la division ou la conjugaison. Elles permettent de manipuler les arguments de manière précise et de mieux comprendre les propriétés géométriques du plan complexe.

Transition entre la notation algébrique et trigonométrique

Nous allons transformer le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ de sa forme algébrique à sa forme trigonométrique. Ce processus implique le calcul du **module** $|z|$ et de l'**argument** θ.



Représentation de $z = \sqrt{3} + i$ dans le plan complexe

Étape 1 : Calcul du module $|z|$

Le **module** d'un nombre complexe $z = a + bi$ est donné par la formule :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pour notre nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$, nous avons :

- Partie réelle $a = \sqrt{3}$
- Partie imaginaire $b = 1$

Nous calculons donc le module :

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Étape 2 : Calcul de l'argument θ

L'**argument** θ d'un nombre complexe est l'angle que forme le vecteur représentant z avec l'axe des réels. Il est donné par :

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pour $z = \sqrt{3} + i$, cela donne :

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Nous savons que :

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

Étape 3 : Représentation trigonométrique

Maintenant que nous avons le module $|z|$ et l'argument θ, nous pouvons écrire le nombre complexe z sous forme trigonométrique :

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

En remplaçant les valeurs de $|z|$ et θ, nous obtenons :

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Ou, en degrés :

$$z = 2\left(\cos(30^\circ) + i\sin(30^\circ)\right)$$

Conclusion

Nous avons transformé le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ de sa forme algébrique à sa forme trigonométrique. Ce processus passe par le calcul du **module** et de l'**argument**, qui nous permettent ensuite d'exprimer z sous la forme :

$$z = |z| \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right)$$

L'argument θ étant exprimé avec sa valeur principale c'est à dire $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Calcul pour un nombre complexe dans le deuxième quadrant

Prenons un exemple de nombre complexe $z = -1 + 2i$ dans le deuxième quadrant.

Étape 1 : Calcul du module

Le **module** est donné par la formule :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pour $z = -1 + 2i$, nous avons :

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

Étape 2 : Calcul de l'argument θ

On calcule d'abord :

$$\theta' = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pour $z = -1 + 2i$, cela donne :

$$\theta' = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) = \arctan(-2) \approx -63.43^\circ \text{ ou } -1.107 \, \text{radians.}$$

Comme nous sommes dans le deuxième quadrant, nous devons ajouter π radians à cet angle pour obtenir l'angle correct :

$$\theta = \pi - 1.107 \approx 2.034 \,\text{radians} \quad \text{ou} \quad 116.57^\circ$$

Calcul pour un nombre complexe dans le troisième quadrant

Prenons un exemple de nombre complexe $z = -1 - 2i$ dans le troisième quadrant.

Étape 1 : Calcul du module

Le **module** est donné par la formule :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pour $z = -1 - 2i$, nous avons :

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

Étape 2 : Calcul de l'argument θ

On calcule d'abord :

$$\theta' = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pour $z = -1 - 2i$, cela donne :

$$\theta' = \arctan\left(\frac{-2}{-1}\right) = \arctan(2) \approx 63.43^\circ \quad (1.107 \,\text{radians}).$$

Comme nous sommes dans le troisième quadrant, nous devons ajouter π radians à cet angle pour obtenir l'angle correct :

$$\theta = \pi + 1.107 \approx 4.248 \,\text{radians} \quad \text{ou} \quad 243.43^\circ$$

Batterie d'exercices : Conversion et manipulations des nombres complexes

Série 1

Exercice 1 : Conversion trigonométrique → algébrique

Écrire $z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ sous forme algébrique.

Exercice 2 : Conversion algébrique → trigonométrique

Écrire $z = 1 + i$ sous forme trigonométrique.

Exercice 3 : Conjugaison

Trouver le conjugué de $z = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Série 2

Exercice 1 : Conversion trigonométrique → algébrique

Écrire $z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ sous forme algébrique.

Exercice 2 : Conversion algébrique → trigonométrique

Écrire $z = -1 + 2i$ sous forme trigonométrique.

Exercice 3 : Trouver l'opposé

Trouver l'opposé de $z = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Série 3

Exercice 1 : Conversion trigonométrique → algébrique

Écrire $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ sous forme algébrique.

Exercice 2 : Conversion algébrique → trigonométrique

Écrire $z = -2 - 2i$ sous forme trigonométrique.

Exercice 3 : Symétrie par rapport à l'axe des imaginaires

Trouver la symétrie par rapport à l'axe des imaginaires de $z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.