# Fonctions réciproques

## 1. Introduction avec un exemple concret

Pour comprendre les fonctions réciproques, commençons par un exemple concret.

### Exemple : Étudiants et numéros d'identification

Dans une classe, chaque élève a un numéro d'identification unique. On définit une fonction $f$ qui associe à chaque élève son numéro d'identification.

- **Domaine** : Les élèves de la classe.
- **Codomaine** : Les numéros d'identification.
- **Image** : Les numéros d'identification utilisés.

### Questions pour la classe

1. **Qu'est-ce que $f^{-1}$ ?**

2. **Quel est le codomaine de $f^{-1}$ ?**

3. **Pourquoi $f$ a-t-elle une fonction réciproque ?**

## 2. Définition formelle

Une fonction $f : A \to B$ a une fonction réciproque $f^{-1} : B \to A$ si et seulement si $f$ est bijective. La fonction réciproque est définie par :

$$f^{-1}(y) = x \text{ si et seulement si } f(x) = y.$$

Cela signifie que :

- $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in B$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in A$

## 3. Méthode pour trouver la fonction réciproque

Pour trouver la fonction réciproque $f^{-1}$ d'une fonction $f$, suivez ces étapes :

1. Écrire l'équation de la fonction : $y = f(x)$
2. Échanger $x$ et $y$ : $x = f(y)$
3. Résoudre pour $y$ en fonction de $x$. Le résultat est $y = f^{-1}(x)$.

Exemple

Soit $f(x) = 2x + 3$. Trouver $f^{-1}(x)$.

Étape 1 : $y = 2x + 3$

Étape 2 : $x = 2y + 3$

Étape 3 : Résoudre pour $y$ :

$$x = 2y + 3 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x - 3}{2}$$

Donc, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

## 4. Propriétés des fonctions réciproques

Les fonctions réciproques ont plusieurs propriétés importantes :

- **Composition** : $f(f^{-1}(x)) = x$ et $f^{-1}(f(x)) = x$
- **Graphique** : Le graphique de $f^{-1}$ est la réflexion du graphique de $f$ par rapport à la droite $y = x$
- **Involutions** : Certaines fonctions sont leurs propres réciproques, c'est-à-dire $f(f(x)) = x$. Par exemple, $f(x) = \frac{1}{x}$

## 5. Exercices guidés

Appliquons ces concepts à des exercices concrets.

### Exercice 1

Soit $f(x) = 3x - 5$. Trouver $f^{-1}(x)$.

Solution :
Étape 1 : $y = 3x - 5$
Étape 2 : $x = 3y - 5$
Étape 3 : $x + 5 = 3y \Rightarrow y = \frac{x+5}{3}$
Donc, $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

### Exercice 2

Soit $f(x) = x^3 + 2$. Trouver $f^{-1}(x)$.

Solution :
Étape 1 : $y = x^3 + 2$
Étape 2 : $x = y^3 + 2$
Étape 3 : $y^3 = x - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x - 2}$
Donc, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

## 6. Synthèse et transition

En résumé, les fonctions réciproques sont essentielles pour résoudre des équations et comprendre les relations réciproques en mathématiques. Dans les leçons futures, nous explorerons des applications pratiques, telles que les logarithmes et les exponentielles, qui sont des exemples de paires de fonctions réciproques.

## 7. Batterie d'exercices

Appliquez les concepts des fonctions réciproques à ces exercices.

### Exercice 1

Trouver la fonction réciproque de $f(x) = x^3 - 4$.

### Exercice 2

Déterminer si $f(x) = |x|$ a une fonction réciproque. Justifiez votre réponse.

### Exercice 3

Soit $f(x) = 2x + 1$. Montrer que $f$ est bijective et trouver $f^{-1}(x)$.

## 9. Restriction de domaine et représentation graphique

Certaines fonctions ne sont pas bijectives sur tout leur domaine, mais peuvent devenir bijectives si l'on restreint leur définition à une partie adaptée. Dans ce cas, on peut définir une fonction réciproque.

### Exemple : $f(x) = x^2$

La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$, car elle n'est pas injective : deux antécédents peuvent donner la même image (ex. : $f(2) = f(-2) = 4$).

Cependant, si on restreint le domaine à $[0, +\infty[$, alors $f$ devient bijective sur cet intervalle, et on peut définir sa réciproque :

$$f : x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{pour } x \geq 0$$

On peut alors représenter sur le même graphique la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0, +\infty[$ et sa réciproque $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, qui se reflètent par rapport à la droite $y = x$.

## 10. Dérivée de la fonction réciproque et tangentes symétriques

Dans un repère orthonormé, les graphes de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la première bissectrice, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Si deux points $A(x, f(x))$ et $B(f(x), x)$ sont symétriques par rapport à cette droite, alors leurs tangentes le sont aussi. Cela signifie que les pentes des tangentes en ces deux points sont inverses l'une de l'autre.

### Relation entre les dérivées

Si $f$ est une fonction dérivable, strictement monotone et bijective sur un intervalle $I$, alors sa fonction réciproque $f^{-1}$ est aussi dérivable sur $f(I)$, et on a la formule suivante :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{où } x = f^{-1}(y)$$

Autrement dit, la dérivée de la fonction réciproque en un point est l'inverse de la dérivée de la fonction d'origine en son antécédent.

# 11. Exercices d'application : restriction de domaine et dérivée de la réciproque

## 🟦 Exercices sur les restrictions de domaine

Dans les exercices suivants, vous devez identifier une restriction de domaine adaptée pour rendre la fonction bijective, puis déterminer sa fonction réciproque, en indiquant le domaine de cette dernière.

**Exercice 1**

Soit $f(x) = x^2 + 4$. Déterminez une restriction du domaine de $f$ pour qu'elle devienne bijective, puis trouvez sa fonction réciproque.

**Exercice 2**

Soit $f(x) = \cos(x)$. Sur quel intervalle restreindre cette fonction pour qu'elle admette une fonction réciproque ? Donnez ensuite l'expression de cette réciproque.

**Exercice 3**

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Peut-on restreindre cette fonction de manière à obtenir une bijection ? Justifiez et, si possible, déterminez la réciproque.

## 🟩 Exercices sur la dérivée de la fonction réciproque

Appliquez la formule :

*Si* $y = f(x)$*, alors* $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ *avec* $x = f^{-1}(y)$

**Exercice 4**

Soit $f(x) = e^x$. Calculez $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

**Exercice 5**

Soit $f(x) = \tan(x)$ avec $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Trouvez la dérivée de $f^{-1}$ en $x = 1$.

**Exercice 6**

Soit $f(x) = x^3 + x$. Observons que $f(1) = 2$. Calculez $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

--------------------------------