

Le Produit Scalaire dans un repère orthonormé et calculs d'angles dans des solides

1. Définition

Dans l'espace, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} , $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont les normes des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

2. Cas particuliers

- **Vecteurs orthogonaux :**

Si $\theta = 90^\circ$, alors $\cos(90^\circ) = 0$, donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- **Vecteurs de même sens :**

Si $\theta = 0^\circ$, alors $\cos(0^\circ) = 1$, donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

- **Vecteurs de sens opposés :**

Si $\theta = 180^\circ$, alors $\cos(180^\circ) = -1$, donc :

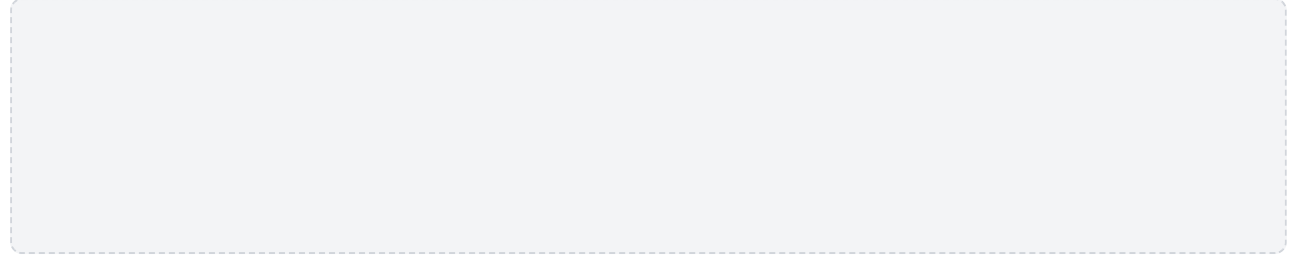
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

3. Formule dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Justification : Il suffit d'en revenir à l'interprétation de l'écriture en composantes des vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans un repère orthonormé :



4. Exemple d'application

Soit $\vec{u} = (2, 1, 3)$ et $\vec{v} = (4, -1, 2)$. Calculons le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 8 - 1 + 6 = 13$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

La norme de \vec{v} est :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

L'angle θ entre \vec{u} et \vec{v} est donné par :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}}$$

6. Traduction des termes importants

- **Produit scalaire** : Dot product
- **Vecteur** : Vector
- **Norme** : Magnitude
- **Angle** : Angle
- **Repère orthonormé** : Orthogonal coordinate system
- **Composante** : Component
- **Orthogonaux** : Perpendicular

- **De même sens** : In the same direction
- **De sens opposés** : In opposite directions

5. Exercices

Calculer les angles demandés en se basant sur la figure ci-dessous et à l'aide de la formule du produit scalaire.

