Transformations : Synthèse et Exercices

Soit une fonction de référence $f(x)$, par exemple $f(x) = x^2$

On peut obtenir une fonction $f'(x)$ à partir de $f(x)$ en effectuant des transformations sur $f(x)$.

Les transformations vues jusqu'ici sont les suivantes :

- Déformation verticale → $f(x)=x^2$ → dilatation ex: $f'(x) = 4x^2$; contraction ex: $f'(x) = 0{,}5\,x^2$
- Symétrie d'axe x → $f'(x) = -x^2$
- Translation horizontale → $f'(x) = (x-3)^2$
- Translation verticale → $f'(x) = x^2 + 2$
- Combinaison de transformation

Voici les formules de ces transformations et des exemples d'application :

Déformation verticale

La fonction $f'(x)$ obtenue par déformation verticale de $f(x)$ est de la forme $\boxed{f'(x) = a \times f(x)}$ où a est un réel non nul.

Si $a > 1$, la fonction $f'(x)$ est une dilatation verticale de $f(x)$.
Si $0 < a < 1$, la fonction $f'(x)$ est une contraction verticale de $f(x)$.

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$. La fonction $f'(x) = 2 \times x^2$ est une dilatation verticale de $f(x)$ de facteur 2.

Symétrie d'axe x

Soit $f(x)$ une fonction de référence. La fonction $f'(x)$ obtenue par symétrie d'axe x de $f(x)$ est de la forme $\boxed{f'(x) = -f(x)}$.

Exemple :
Soit $f(x) = x^2$. La fonction $f'(x) = -x^2$ est une symétrie d'axe x de $f(x)$.

Translation horizontale

Soit $f(x)$ une fonction de référence. La fonction $f'(x)$ obtenue par translation horizontale de $f(x)$ est de la forme $\boxed{f'(x) = f(x-b)}$ où b est un réel.

Exemple :
Soit $f(x) = x^2$. La fonction $f'(x) = (x-2)^2$ est une translation horizontale de $f(x)$ vers la droite de 2 unités.

Translation verticale

Soit $f(x)$ une fonction de référence. La fonction $f'(x)$ obtenue par translation verticale de $f(x)$ est de la forme $\boxed{f'(x) = f(x) + c}$ où c est un réel.

x^2

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$. La fonction $f'(x) = x^2 + 3$ est une translation verticale de $f(x)$ vers le haut de 3 unités.

Combinaison de transformation

Soit $f(x)$ une fonction de référence. La fonction $f'(x)$ obtenue par combinaison de transformations de $f(x)$ est de la forme

$$\boxed{f'(x) = a \times f(x - b) + c}$$

$f'(x) = a \cdot (x-b)^2 + c$

La fonction $f'(x)$ est obtenue en effectuant successivement les transformations suivantes :

- Déformation verticale de facteur a
- Symétrie d'axe x si $a < 0$
- Translation horizontale de b unités
- Translation verticale de c unités

Exemple :

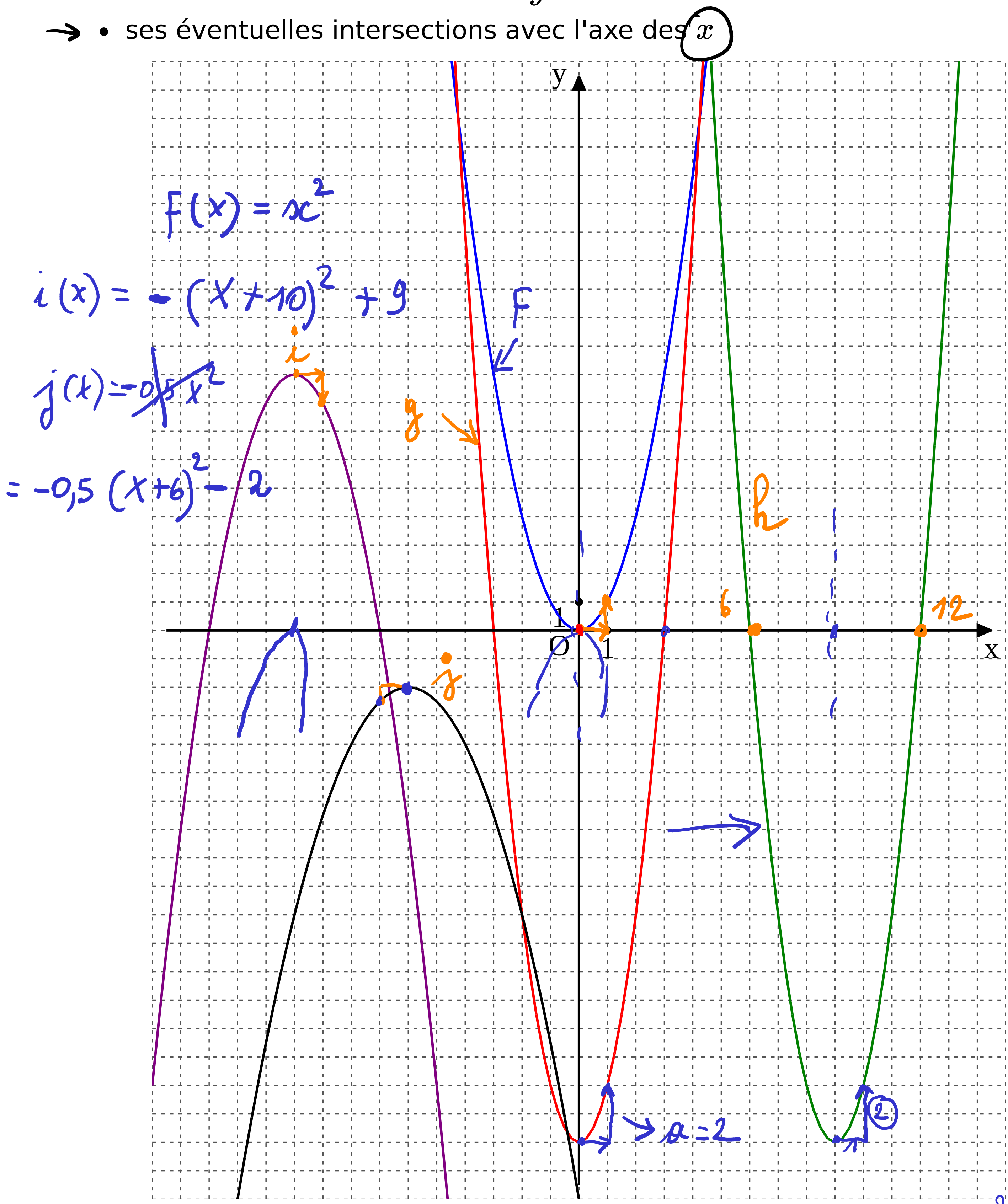
Soit $f(x) = x^2$. La fonction $f'(x) = -2 \times (x-1)^2 + 3$ est obtenue en effectuant successivement les transformations suivantes :

- Une dilatation verticale de facteur 2
- Une symétrie d'axe x
- Une translation horizontale de 1 unité vers la droite
- Une translation verticale de 3 unités vers le haut

Batterie d'exercices

Pour chacune des paraboles ci-dessous, détermine :

- son équation (obtenue grâce aux transformations)
- son intersection avec l'axe des y
- ses éventuelles intersections avec l'axe des x



$f(x) = x^2$ $g(x) = 2 \cdot x^2 - 18$ $h(x) = 2 \cdot (x-9)^2 - 18$

→ intersection des paraboles avec l'axe des x

$(x_1, 0)$ $(x_2, 0)$

↑ racines de la fonction
(zéros)

Comment trouver les racines ?

sur le graphique

<u>ou</u> mieux : par calcul

$f(x) = 0$ c'est une équation à résoudre !

fonction 1 : $f(x) = x^2$

on résout : $x^2 = 0$ racine $= 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ intersection $(0, 0)$

$g(x) = 2x^2 - 18$

on résout : $2x^2 - 18 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 18$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

intersection avec l'axe x $(3, 0)$ $(-3, 0)$ racines de g

$h(x) = 2(x-9)^2 - 18$

équation $2(x-9)^2 - 18 = 0$: sol.

$\Leftrightarrow 2(x-9)^2 = 18$

$\Leftrightarrow (x-9)^2 = 9$

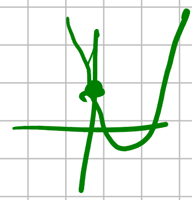
$\Leftrightarrow x - 9 = 3$ <u>ou</u> $x - 9 = -3$ $(12, 0)$

$+9$ $+9$ $+9$ $+9$ $(6, 0)$

$\Leftrightarrow x = 12$ ou $x = 6$

racines

$$i(x) = -(x+10)^2 + 9$$



équation : $-(x+10)^2 + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow -(x+10)^2 = -9$$

$$\Leftrightarrow (x+10)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \underset{-10}{x+10} = \underset{-10}{3} \quad \text{ou} \quad \underset{-10}{x+10} = \underset{-10}{-3}$$

$$\Leftrightarrow x = -7 \quad \text{ou} \quad x = -13$$

$(-7, 0)$ et $(-13, 0)$

intersection avec l'axe des y

$$(0, y) \Rightarrow y = f(0)$$

ordonnée à l'origine

calcul $f(0) = -(0+10)^2 + 9$

$$= -100 + 9 = -91$$

$$(0, -91)$$

$$j(x) = -0,5 \cdot (x+6)^2 - 2$$

intersection avec l'axe des y $\quad (0, j(0))$

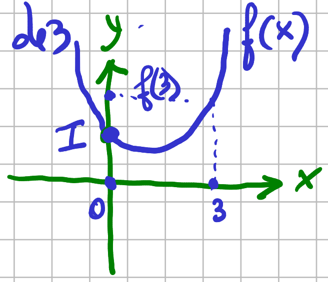
ordonnée à l'origine

$$j(0) = -0,5 \cdot (0+6)^2 - 2$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 36 - 2 = -18 - 2 = -20$$

intersection $(0, -20)$

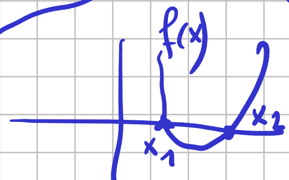
$f(3)$ est l'image de 3



$f(0)$ est l'image de 0

- - - -

$I\,(0\,;\,f(0))$



$f(x)=0 \leftarrow (x_1, 0)$

équation $\quad (x_2, 0)$