Mathématiques discrètes

MAT1

2024 - 2025

R. Absil
L. Beeckmans
J. Beleho
C. Leignel
A. Polaris

Haute École Bruxelles-Brabant

École supérieure d'informatique

License

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

À propos de ce syllabus • Réussir le cours de mathématiques

L'étude des mathématiques est une tâche compliquée, qui requiert de la rigueur, du temps, et de la pratique. Le cours de mathématiques à l'école supérieure d'informatique (ESI) s'adresse à des étudiants sortant tout juste du secondaire, et venant d'horizons divers, certains ayant eu jusqu'à huit heures de mathématiques par semaine, d'autres seulement deux. Le but de ce cours est de mettre tous les étudiants sur un même pied d'égalité afin qu'ils puissent poursuivre leurs études sans difficultés liées à l'enseignement suivi dans le secondaire.

Notez toutefois que le cours de mathématiques ne comporte actuellement que peu d'heures au programme, il est donc impossible de voir l'intégralité des mathématiques utilisées dans le cursus de bachelier dans ce seul syllabus. À ce propos, on considère qu'une bonne partie du programme de mathématiques donné à raison de 4h par semaine dans l'enseignement secondaire général est acquis [2].

À propos de ce syllabus

Ce syllabus est un support pour le cours théorique dispensé en auditoire. L'étudiant y trouvera tous les concepts et informations nécessaires afin de réussir cette activité d'apprentissage. En plus de cela, un syllabus d'exercices non résolus est également disponible, exercices qui seront réalisés soit en cours, soit en séance

2. Des rappels, annexes à ce document, peuvent être consultés pour les concepts moins familiers à l'étudiant.

de remédiation.

Notez également que le syllabus de théorie ne doit pas être utilisé comme un « roman », à lire de la première à la dernière page. Sa taille est trop conséquente pour une telle tâche, surtout étant donné le temps imparti pour le cours de mathématiques. Il doit plutôt être utilisé comme support : une référence à consulter *ponctuellement* quand le besoin s'en fait sentir par l'étudiant. Ce besoin de provenir de plusieurs origines : des notes de cours peu claires ou incomplètes, un dessin explicatif, la nécessité de précision sur une définition, l'envie de consulter des exercices avec solutions, l'envie de plus d'exercices que ceux qui ont été dispensés.

Ainsi, on peut partitionner le syllabus en deux types de contenu.

— La théorie : les définitions, propriétés, théorèmes, etc., à connaître afin de pouvoir résoudre les exercices. Ces éléments sont mis en évidence par un environnement en boite bleue dotée d'une numérotation commune (définition 1.1, théorème 1.2, etc.). Ces concepts sont mis en évidence par un encadré bleu.
— Tout le reste : les nombreux exemples et figures, les exercices résolus, les intuitions, etc., sont tous présents pour aider à comprendre et assimiler la théorie afin que l'étudiant puisse résoudre les exercices sans encombres.

À cet effet, notez que ce document dispose d'une table des matières ainsi que d'un index des notations, définitions et de la terminologie afin de faciliter votre recherche. Dès lors, étant donné cette volonté délibérée d'usage ponctuel, l'étudiant ne doit pas être effrayé par l'épaisseur de cet ouvrage.

Réussir le cours de mathématiques

Malgré sa taille imposante, le syllabus n'est qu'un support, c'est-à-dire un ensemble de pages susceptibles d'aider les étudiants dans leur cursus. Dans la plupart des cas, se contenter de lire ce document ne suffit *pas* pour réussir l'examen. Comme mentionné en début de chapitre, faire des mathématiques requiert de la rigueur, du temps et de la pratique. Ainsi, ce document est fourni pour permettre à l'étudiant de développer sa capacité d'*autonomie* et de *réflexion personnelle* dans la pratique de notions mathématiques de base.

Pour ces raisons, il est vivement recommandé d'assister à chacun des cours dispensés, les étudiants y trouveront souvent des informations complémentaires liées aux concepts enseignés, qui peuvent faciliter leur compréhension. De plus, certains professeurs prévoient du temps pour permettre aux étudiants de travailler sur leurs exercices en classe, et fournissent une correction individuelle pour ces exercices. De telles séances permettent à l'étudiant de s'entraîner, et de se familiariser à la rigueur qui est demandée d'avoir pour l'examen.

Néanmoins, encore une fois, aller au cours et se servir du syllabus judicieusement ne suffit généralement pas non plus pour réussir l'examen. Il sera souvent nécessaire à l'étudiant de s'entraîner lui-même chez lui, en refaisant à la main les exercices vus au cours, sans la solution, ou en prenant l'initiative de résoudre les exercices non résolus au cours. Les professeurs dispensant le cours peuvent corriger de tels exercices, une fois une solution rédigée par l'étudiant.

Une telle pratique offre de l'expérience dans l'utilisation des mathématiques, cette expérience est fondamentale à la maîtrise des concepts. Pour cette raison, se contenter de lire les solutions des exercices résolus est souvent inutile : même si l'étudiant comprend ce qui y est fait, il n'acquiert pas l'expérience qu'il aurait pu acquérir en résolvant l'exercice lui-même.

En conclusion, même si ce syllabus est un support complet, c'est à l'étudiant de former lui-même son expérience dans l'utilisation des mathématiques, via les cours magistraux et le travail fourni à la maison.

CHAPITRE 1

Algèbre booléenne

Propositions et opérateurs logiques • Calcul propositionnel et priorités des opérateurs logiques • Formes normales • Exercices résolus

La logique mathématique est la base de tout raisonnement de déduction mathématique. C'est ce formalisme qui permet de tirer des conclusions de type « si / alors » dans une argumentation complète, telle qu'une preuve, ou même dans une simple affirmation telle que « s'il pleut, alors je prends mon parapluie ».

L'algèbre booléenne, quant à elle, définit les opérateurs de base que l'on rencontre dans de telles affirmations, tels que le « et » et le « ou », ainsi que leurs propriétés. Ce sont également ces règles et propriétés qui permettent de distinguer des arguments mathématiques valides ou non.

Ces deux disciplines ne caractérisent *que* cela : pas de calcul de nombres, pas de fonctions, pas d'ensembles, mais uniquement des affirmations qui sont soit vraies, soit fausses, ainsi que la manière de les manipuler. Pour cette raison, la quasi-totalité des exemples et exercices de ce chapitre sont rédigés « en français ».

Plus particulièrement, la section 1.1 définit brièvement ce qu'est une proposition et les opérateurs logiques que l'on peut réaliser entre propositions. Ensuite, la section 1.2 détaille les mécanismes de calcul propositionnel, ainsi que les priorités entre opérateurs logiques. La section 1.2.2 est consacrée à diverses propriétés élémentaires de propositions logiques, telles que les lois de De Morgan. Ensuite, la section 1.3 définit les *formes normales*, c'est-à-dire les conventions d'écriture pour rendre plus facile la lecture d'une proposition.

Ce chapitre est conclu par une série d'exercices résolus en section 1.4.

1.1 Propositions et opérateurs logiques

Définition 1.1

Une proposition *est une affirmation qui possède une valeur de vérité qui peut être soit vraie, soit fausse.*

A priori, cette définition n'a rien de « mathématique ». On peut l'utiliser dans tout contexte, comme en français dans l'exemple suivant.

Exemple 1.1. Considérez les phrases suivantes :

1. « La carotte est un légume » est une proposition. Le légume est un concept clairement défini, et cette proposition est vraie.
2. « La carotte est un moyen de locomotion » est une proposition. Elle est fausse : personne ne se déplace à dos de carotte.
3. « La carotte a bon goût » n'est pas une proposition. En effet, la valeur de vérité de cette affirmation dépend de qui mange la carotte. Cette affirmation est subjective.
4. « Arrache cette carotte ! » et « Qu'est-ce qu'une carotte ? » ne sont pas des propositions. Ces phrases ne déclarent pas un fait, et n'ont pas de valeur de vérité.
5. « Je mens » n'est pas une proposition. En effet, on ne peut lui associer ni la valeur de vérité vrai, ni la valeur de vérité faux [1].

1. Cette phrase est appelée *le paradoxe du menteur* : si la personne ment véritablement, alors elle a dit vérité en affirmant qu'elle mentait. Similairement, si elle disait la vérité, elle n'aurait pas menti. C'est pour cette raison qu'il est impossible d'assigner la valeur de vérité vrai ou faux à cette affirmation.

6. « Il existe de la vie ailleurs dans l'univers » est une proposition. Elle possède une valeur de vérité : soit vrai, soit faux. Le fait qu'on ne puisse pas décider laquelle de ces valeurs est la bonne est sans importance.

◀

La suite de ce chapitre est dédiée à la complexification de ce modèle. En particulier, on verra comment composer une proposition à partir d'autres propositions, comment introduire des variables dans une proposition, comment restreindre les valeurs de ces variables, etc.

Ce modèle est très utilisé en logique propositionnelle, un formalisme utilisé dans de nombreuses disciplines mathématiques, telles que l'algèbre, l'analyse, l'arithmétique, etc. Dans cette logique, on raisonne la plupart du temps sur des compositions de propositions quelconques que l'on nomme $p, q, r \dots$ Comme on ne connaît pas *a priori* la valeur de vérité de la proposition originale, ni de celles des sous-propositions p, q, r, etc., on doit envisager tous les cas de valeurs possibles. Cette énumération requiert l'utilisation de *tables de vérité*.

Une table de vérité est simplement un tableau qui énumère toutes les possibilités de valeurs de vérité d'une proposition. Si une proposition p est composée de deux sous-propositions q et r, on y note les valeurs de vérité de q et r, et on en déduit la valeur de vérité de p. Ces valeurs sont notées V pour la valeur « vrai », et F pour la valeur « faux »[2].

Exemple 1.2. Considérez une personne disant « Ce poisson a des dents et est rouge[3] ». C'est une proposition, car elle peut être soit vraie, soit fausse. Notons-la p. Elle est composée de deux sous-propositions.

— Le poisson a des dents. Notons cette propriété q.
— Le poisson est rouge. Notons cette propriété r.

On peut illustrer la table de vérité de cette proposition avec la table 1.1.

On peut interpréter cette table de la façon suivante.

2. Notez que, parfois, « vrai » est noté comme le chiffre « 1 » et « faux » comme le chiffre « 0 ». Cette notation est souvent utilisée en électronique, notamment.

3. Les couleurs utilisées dans les exemples de ce cours sont considérées comme définies clairement à l'aide d'un code de 3 octets, comme dans la plupart des systèmes informatiques. En ce sens, elles ne sont pas sujettes à interprétation.

q	r	p
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLE 1.1 – Table de vérité de p

— La première ligne du tableau signifie donc « le poisson a des dents et est bel et bien rouge ». La proposition originale « ce poisson a des dents et est rouge » est donc vraie.
— La deuxième ligne du tableau signifie « le poisson a des dents, mais n'est pas rouge ». La proposition originale « ce poisson a des dents et est rouge » est donc fausse.
— La troisième ligne du tableau signifie « ce poisson n'a pas de dents, mais il est rouge ». Encore une fois, la proposition originale « ce poisson a des dents et est rouge » est donc fausse.
— La quatrième ligne du tableau signifie « ce poisson n'a pas de dents et n'est pas rouge ». Évidemment, dans ce cas final, la proposition originale « ce poisson a des dents et est rouge » est donc fausse.

◀

Les tables de vérité sont très utiles pour décrire les opérateurs logiques de base, tels que le « ou », le « et », etc. On utilisera le même formalisme que dans l'exemple précédent pour les illustrer : un tableau à deux dimensions, avec un V signifiant vrai, et un F signifiant faux.

À ce titre, o définit les concepts de *tautologie* et d'*antilogie*.

Définition 1.2

Une tautologie *(resp.* antilogie *ou une* contradiction*) est une proposition toujours vraie (resp. fausse).*

Intuitivement, la valeur de vérité des tautologies (vrai) et des antilogie (faux) ne dépend pas des valeurs de vérité des propositions qui la composent. Visuellement, la dernière colonne de la table de vérité d'une tautologie ne contient que des V, celle d'une antilogie ne contient que des F.

Le très grand intérêt des tautologies est de fournir des méthodes de raisonnement sûres. Par exemple, lorsque l'on écrit $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$, on définit en réalité une tautologie. Comme cette formule est toujours vraie quelle que soit la valeur de son contenu (en l'occurrence, les valeurs des variable a et b), développer le raisonnement de cette manière répond à la question originale (trouver a et b) de manière sûre.

Dans la suite de cette section, on définit divers opérateurs logiques de base, avec leurs tables de vérité associées pour illustrer ces définitions.

1.1.1 Négation

Intuitivement, la négation d'une proposition échange sa valeur de vérité. En français, cela correspond au contraire.

Définition 1.3

La négation *d'une proposition p est notée $\neg p$, et se lit « non p ». Si p est vrai, $\neg p$ est faux, et inversement.*

La table 1.2 illustre la table de vérité de la négation d'une proposition p.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Table 1.2 – Table de vérité de la négation

Exemple 1.3. Considérez la proposition « il pleut[4] », notée p. On peut écrire en français $\neg p$ comme « *il est faux qu'*il pleut », ou plus simplement comme « il *ne* pleut *pas* ». ◀

Exemple 1.4. Considérez la proposition « mon ordinateur a au moins 8GB de mémoire ». La négation de cette proposition est « *il est faux que* mon ordinateur

4. Ici, on sous-entend « il pleut maintenant, en ce moment, dehors, quand on regarde par la fenêtre ». Le contexte de cette affirmation est donc bien défini.

a au moins 8GB de mémoire », ou mieux construit : « mon ordinateur a *moins* de 8GB de mémoire » [5]. ◀

1.1.2 Conjonction

La conjonction de deux propositions impose à deux propositions d'être vraie pour que le résultat soit vrai. En français, cela correspond au « et ». Dans l'exemple 1.2, pour que le résultat soit vrai, il faut que le poisson ait des dents *et* qu'il soit rouge.

Définition 1.4

La conjonction *de deux propositions p et q est notée $p \wedge q$ et se lit « p et q ». Elle n'est vraie que si à la fois p et q sont vraies, et est fausse dans tous les autres cas.*

La table 1.3 illustre la table de vérité de la conjonction de deux propositions p et q.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table 1.3 – Table de vérité de la conjonction

Exemple 1.5. Soient les propositions p « il pleut » et q « le soleil brille ». La conjonction de ces deux propositions est, « il pleut et le soleil brille », ou encore « il pleut mais le soleil brille », ou même « le soleil brille mais il pleut ». ◀

1.1.3 Disjonction

La disjonction de deux propositions impose à au moins une de ces propositions d'être vraie pour que le résultat soit vrai. En français, cela correspond *généralement* au « ou ».

5. Notez qu'il est ambigu d'affirmer que la négation est « mon ordinateur a au *plus* 8GB de mémoire », dans la mesure où cette proposition inclut l'ordinateur avec exactement 8 GB de mémoire.

Par exemple, quand on affirme « pendant les repas, je bois de l'eau ou du vin », le seul cas dans lequel on mentirait serait celui où on ne boirait ni eau, ni vin. En particulier, boire à la fois de l'eau et du vin n'est pas interdit par la proposition.

Notez néanmoins que, parfois, le contexte en français va parfois rendre cette disjonction comme exclusive. En effet, si une personne affirme qu'elle va à la plage ou à la piscine, on ne s'attend pas à ce qu'elle se rende à ces deux activités. En mathématiques, elle pourrait très bien aller à la fois à la plage et à la piscine.

Définition 1.5

La disjonction *de deux propositions p et q est notée $p \vee q$ et se lit « p ou q ». Elle est vraie si au moins un de ses opérandes est vrai.*

L'opérateur $\vee$ est également appelé le « ou inclusif ». La table 1.4 illustre la table de vérité de la disjonction.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLE 1.4 – Table de vérité de la disjonction

Exemple 1.6. Soit la proposition « seuls les étudiants qui ont réussi algorithmique ou mathématiques peuvent suivre ce cours ». Il est évident que les étudiants ayant réussi à la fois mathématiques et algorithmique peuvent suivre ce cours. Seuls les étudiants n'ayant réussi ni mathématiques ni algorithmique ne peuvent pas participer. ◀

Exemple 1.7. Soit la proposition « dépendant de mon humeur, je me ferai livrer une pizza ou des sushis ». Se faire livrer à la fois une pizza et des sushis ne constitue pas un mensonge en soi. ◀

Exemple 1.8. L'affirmation « il pleut ou l'orage éclate » est fausse s'il n'y a *ni* pluie, *ni* orage. ◀

1.1.4 Disjonction exclusive

La disjonction exclusive de deux propositions correspond en général à l'usage du « ou » en français : elle est vraie si exactement une de ces propositions est vraie. Par analogie avec la section précédente, si une personne affirme qu'elle va à la plage ou à la piscine, elle ne se rend pas à ces deux activités.

Définition 1.6

La disjonction exclusive *de deux propositions p et q est notée $p \veebar q$ et se lit « soit p, soit q ». Elle est vraie si exactement un de ses opérandes est vrai.*

L'opérateur $\veebar$ est également appelé le « ou exclusif ». Parfois, il est noté $\bigoplus$. La table 1.5 illustre la table de vérité de cet opérateur.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLE 1.5 – Table de vérité de la disjonction exclusive

Exemple 1.9. Dans la proposition « pour se rendre à l'école, vous devez tourner soit à droite, soit à gauche », il n'est pas permis de continuer par exemple tout droit, ni de tourner à la fois à droite et à gauche. ◀

1.1.5 Équivalence

L'équivalence de deux propositions mathématiques fonctionne exactement comme en français : deux propositions sont équivalentes si elles ont la même valeur de vérité. La proposition « un gâteau pour quatre personnes nécessite 250g de farine » est donc équivalente à la proposition « un gâteau pour deux personnes nécessite 125g de farine ». En effet, aucune de ces propositions ne peut être vraie (resp. fausse) si l'autre ne l'est pas.

Cet opérateur est excessivement utilisé en mathématiques, notamment dans la résolution d'équations : chaque ligne est équivalente à la précédente.

Définition 1.7

*L'*équivalence *de deux propositions p et q, notée $p \Leftrightarrow q$, se lit « p si et seulement si q ». Elle est vraie uniquement dans les cas où p et q ont la même valeur de vérité.*

La table 1.6 illustre la table de vérité de l'équivalence.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TABLE 1.6 – Table de vérité de l'équivalence

Exemple 1.10. Soit la proposition « je peux m'inscrire en médecine si et seulement si je réussis le concours d'entrée ». Cette proposition est fausse si l'on s'inscrit sans réussir le concours, ou si on réussit le concours et qu'on ne s'inscrit pas. ◀

Exemple 1.11. Soit la proposition « un triangle est rectangle si et seulement si la somme des carrés de la longueur de ses deux plus petits cotés est égale au carré de la longueur de son grand coté ». Cette proposition est vraie quand les deux opérandes sont en même temps vraies (on a un triangle rectangle), ou en même temps fausses (le triangle n'est pas rectangle). Il n'est pas possible d'avoir un triangle rectangle qui ne valide pas la deuxième partie de la proposition, et inversement. ◀

1.1.6 Implication

L'implication mathématique est un opérateur logique permettant d'effectuer des affirmations conditionnelles. On la retrouve en français dans des phrases du type « si (...), alors (...) ».

Similairement à la disjonction, notez que l'implication fonctionne différemment en français qu'en mathématique. En effet, dans une phrase du type « s'il pleut, je prends mon parapluie », on ne s'attend pas à ce que la personne prenne son parapluie s'il ne pleut pas. En mathématique, si la proposition « je prends mon parapluie » est vraie, alors l'implication est vraie peu importe si il pleut.

Définition 1.8

*L'*implication *d'une proposition q par une proposition p est notée $p \Rightarrow q$ et est lue « p implique q » ou « si p, alors q ». Elle est fausse uniquement quand p est vrai et q est faux.*

La table 1.7 illustre la table de vérité de l'implication. Sur cette table, on remarque qu'en particulier, $p \Rightarrow q$ est toujours vrai

— lorsque p est faux, quelle que soit la valeur de vérité de q ;
— lorsque q est vrai, quelle que soit la valeur de vérité de p.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Table 1.7 – Table de vérité de l'implication

Dans l'expression $p \Rightarrow q$, on appelle p l'*antécédent*, la *prémisse* ou *l'hypothèse* tandis que q est le *conséquent* ou la *conclusion*.

L'implication joue un rôle central dans le raisonnement mathématique. Pour cette raison, la terminologie en français de cet opérateur est très variée. Par exemple, si p et q sont des propositions, $p \Rightarrow q$ peut être décrit en français comme

« Si p, alors q »	« p implique q »
« Si p, q »	« p seulement si q »
« p est suffisant pour q »	« p est une condition suffisante pour q »
« q si p »	« une condition nécessaire pour p est q »
« on déduit q de p »	« q à moins que $\neg p$ »
« q quand p »	

Les exemples suivants illustrent une interprétation de la table de vérité de l'implication mathématique. Bien que répétitifs, l'expérience montre que beaucoup d'étudiants se reposent trop sur le sens du « si (...) alors (...) » français au lieu de sa signification mathématique, ce qui est sujet aux erreurs.

Exemple 1.12. Soit la phrase « si je suis élu, je diminuerai les taxes », prononcée dans de nombreux discours politiques engagés. On peut modéliser cette affirmation sous forme propositionnelle de la façon suivante :

— soit p la proposition « je suis élu »,

— soit q la proposition « je diminuerai les taxes ».

La proposition « *si* je suis élu, *alors* je diminuerai les taxes » peut donc être modélisée mathématiquement comme $p \Rightarrow q$.

La table de vérité de l'implication exprime le fait que lorsque l'on affirme

« si je suis élu, alors je diminuerai les taxes »,

le seul cas où le politicien ment est celui où il est élu mais où il *ne* diminue *pas* les taxes, c'est-à-dire quand p est vrai et q est faux. Évidemment, si le politicien est élu et diminue les taxes, il n'a pas menti. Par ailleurs, si le politicien n'est pas élu, qu'il diminue ou non les taxes ne constitue pas non plus un mensonge car

« si je suis élu, alors je diminuerai les taxes »,

ne représente un engagement *que* si le politicien est élu. ◀

Exemple 1.13. Dans la proposition « s'il pleut, je prends mon parapluie », il est évident que l'on dit la vérité s'il pleut et que l'on prend bien son parapluie, ou s'il ne pleut pas et que l'on ne prend pas son parapluie. Par ailleurs, on est tout à fait autorisé à prendre son parapluie en l'absence de pluie. Le seul cas de mensonge avéré dans ce cas est celui où il pleut mais où l'on ne prend pas son parapluie avec soi. ◀

Exemple 1.14. Soient p la proposition « je résous tous les exercices du syllabus » et q la proposition « je vais réussir le cours de mathématiques ». On peut exprimer $p \Rightarrow q$ en français comme

« Si je résous tous les exercices du syllabus, alors je vais réussir le cours de mathématique »,

« Je vais réussir le cours de mathématique quand j'aurai résolu[6] tous les exercices du syllabus »,
« Pour réussir le cours de mathématiques, je dois résoudre tous les exercices du syllabus »,
« Je vais réussir le cours de mathématiques à moins que je ne résolve pas tous les exercices du syllabus ».

◀

Notez que la façon dont on a défini l'implication logique, sous forme d'affirmation conditionnelle, est plus puissante que sa signification en français. En effet, dans les exemples ci-dessus, il y a systématiquement une relation entre l'hypothèse et la conclusion, comme dans la phrase « si j'ai faim, je mange ».

Cette relation peut être décrite facilement en français grâce à la richesse du vocabulaire de la langue. En mathématique, un tel lien apparent de cause à effet n'est pas nécessaire. Ainsi, on peut sans problème décrire des propositions telles que « si le soleil brille, alors $2+3=5$ ». Cette proposition est fausse uniquement si le soleil brille mais $2+3 \neq 5$. Dans ce cas, cette proposition est vraie, car on a toujours $2+3=5$. De la même manière, la proposition « si le soleil brille, alors $2+3=6$ » est fausse uniquement le soleil brille, car on a toujours $2+3 \neq 6$.

Dans la mesure où l'implication est fréquemment utilisée dans l'argumentation en français (comme en mathématique), on lui associe diverses définitions et propriétés. Par exemple, la propriété suivante décrit comment définir une implication à l'aide uniquement d'opérateurs « ou », « et » et « non ».

Définition 1.9 ▸ ***Définition positive et négative de l'implication***

Soient p et q deux proposition, la proposition $p \Rightarrow q$ est équivalente à

$$\neg p \vee q$$

et à

$$\neg(p \wedge \neg q).$$

6. La conjugaison des verbes dans une proposition pour des raisons de syntaxe linguistique est sans importance d'un point de vue logique.

Cette définition permet régulièrement de faciliter les calculs et de réduire l'écriture d'une implication afin de n'utiliser que des opérateurs « ou », « et » et « non ». Comme mentionné en section 1.3, ce type d'écriture a de nombreuses applications en informatique et en électronique.

De la même manière, on peut définir l'implication à l'aide de sa *contraposée*, à ne pas confondre avec sa *réciproque*.

Définition 1.10

Soient p et q deux propositions, la contraposée *de $p \Rightarrow q$ est définie comme $\neg q \Rightarrow \neg p$. L'implication est équivalente à sa contraposée.*

Définition 1.11

Soient p et q deux propositions, la réciproque *de $p \Rightarrow q$ est définie comme $q \Rightarrow p$. L'implication* n'est pas équivalente *à sa réciproque.*

Exemple 1.15. Considérez la proposition « si je saute du pont, je meurs ». Cette proposition est équivalente à « si je ne meurs pas, je ne saute pas du pont » (contraposée). Par contre, elle n'est pas équivalente à « si je meurs, je saute du pont » (réciproque). ◀

1.2 Calcul propositionnel et priorités des opérateurs logiques

Dans les définitions des sections précédentes, toutes les propositions rencontrées étaient simples et composées au maximum de deux sous-propositions. À l'évidence, des propositions plus complexes sont évidemment possibles, simplement en combinant plus de propositions avec divers opérateurs. Dans ce cas, la valeur de vérité de la formule dépend de la valeur de vérité des propositions qui y figurent.

Notons que, dans le cadre de ce cours, on considère systématiquement des propositions parenthésées, afin de ne pas à avoir à tenir compte de la précédence des opérateurs[7]. Ainsi, la première étape dans la construction de la table de vérité

7. En pratique, cela signifie que certains opérateurs logiques ont une priorité plus forte que d'autres, au même titre que le $\times$ a une plus forte priorité que le $+$.

d'une propoition complexe est de la décomposer selon la structure des parenthèses, et d'évaluer ensuite les sous-propositions dans l'ordre. On construit ainsi une « grosse » table de vérité qui détaille le résultat de chacune des évaluation et dont on sait déduire la valeur de vérité de la proposition originale complexe.

Exemple 1.16. Soit la proposition

$$(\neg p) \vee \Big(r \wedge \big(p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)\big)\Big)$$

La structure des parenthèses impose que l'on évalue, dans l'ordre

1. $q \Rightarrow r$,
2. $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$, que l'on notera A,
3. $r \wedge \big(p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)\big)$, que l'on notera B.

La proposition $\neg p$ peut être évaluée n'importe quand avant la proposition originale $(\neg p) \vee \Big(r \wedge \big(p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)\big)\Big)$, équivalente à $\neg p \vee B$.

La table de vérité de cette proposition est illustrée à la table 1.8. ◀

p	q	r	$q \Rightarrow r$	A	B	$\neg p$	$\neg p \vee B$
V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

TABLE 1.8 – Table de vérité de $\neg p \vee r \wedge (p \Leftrightarrow q \Rightarrow r)$

Notons que souvent, on considère que tous les opérateurs logiques n'ont pas la même priorité [8]. Il convient donc au minimum de faire attention lors de la lecture

8. Au milieu du XX^e siècle, les opérateurs logiques étaient considérés comme ayant tous la même priorité. Pour cette raison, il était nécessaire de systématiquement placer des parenthèses pour éviter toute ambiguïté. Afin d'éviter un excès des symboles « (» et «) » dans les formules logiques, le mathématicien Jan Łukasiewicz inventa en 1924 la *notation polonaise*, qui place un opérateur avant ses opérandes dans un calcul. Ainsi, $2 + 3$ était écrit comme $+2\ 3$. Cette notation a l'avantage d'être non ambiguë en l'absence de parenthèses, et d'être facile à interpréter dans un système informatique. Cette notation n'est à l'heure actuelle plus utilisée en logique mathématique, mais a toujours de nombreuses applications en informatique, plus particulièrement dans le domaine de la compilation.

de formules logiques.

En arithmétique, par exemple, $2 + 3 \times 4$ est interprété comme $2 + (3 \times 4)$: le $\times$ a une plus forte priorité que le $+$. De la même façon, en logique, $p \vee q \wedge r$ est interprété comme $p \vee (q \wedge r)$: le « et » a une plus forte priorité que le « ou ».

Ces priorités ont l'avantage de limiter le nombre de parenthèses dans une expression. Par ailleurs, elles sont les mêmes que celles des opérateurs logiques rencontrés dans la plupart des langages de programmation, tels que le `C++` ou le `Java`. Dans certains langages fonctionnels, tels que le `Lisp` ou le `Scheme`, la *notation polonaise* est toujours d'application.

Ces priorités sont appliquées dans l'ordre suivant.

1. Le « non » a la plus forte priorité des opérateurs logiques : $\neg p \vee q$ est donc interprété comme $(\neg p) \vee q$.
2. Le « et » a plus forte priorité que le « ou » : $p \vee q \wedge r$ est donc interprété comme $p \vee (q \wedge r)$.
3. Le « ou » et le « ou exclusif » ont la même priorité, il convient donc dans ce cas d'utiliser systématiquement des parenthèses pour lever les ambiguïtés.
4. L'implication a plus forte priorité que l'équivalence (mais moins que le « ou ») : $p \Leftrightarrow q \Rightarrow r$ est donc interprété comme $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$.
5. L'équivalence a la plus faible des priorités.

Notez que malgré ces priorités rendant la formulation d'expressions logiques non ambiguës, dans le cadre de ce cours, on placera systématiquement des parenthèses pour éviter au lecteur la construction mentale de l'ordre d'évaluation.

Exemple 1.17. Soit la formule $\neg p \vee r \wedge (p \Leftrightarrow q \Rightarrow r)$ sur les propositions p, q et r. On peut parenthéser complètement cette formule comme

$$(\neg p) \vee \underbrace{(r \wedge (\underbrace{p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)}_{A}))}_{B}$$

◀

Ainsi, il faut d'abord calculer la table de vérité de $q \Rightarrow r$, ensuite celle de A, puis celle de B, et enfin celle de la proposition originale, tel qu'illustré à la table 1.8.

1.2.1 Constructions de négations

La conjonction, la disjonction (exclusive ou non) et la négation sont des opérateurs relativement simples. Toutefois, on remarque que calculer la négation d'une conjonction ou d'une disjonction est souvent source d'erreurs auprès des étudiants. Dans ce cadre, les *lois de De Morgan* permettent de les construire correctement et rapidement [9]. Elles ont été établies par Auguste De Morgan, un mathématicien britannique du XIX^{e} siècle.

Illustrons avant tout ces lois par un exemple. Considérons un vendeur d'informatique qui affirme « ce processeur est de la marque Intel et a une fréquence de 2.4Ghz ». À l'évidence, si le processeur n'est *pas* de la marque Intell *ou* s'il n'a *pas* une fréquence de 2.4Ghz, le vendeur a menti. On remarque donc ici que pour nier une conjonction de propositions, il faut construire la disjonction des négations des propositions.

On peut vérifier cette conclusion « mécaniquement » en construisant une table de vérité de la négation de cette proposition. Notons p la proposition « ce processeur est de la marque Intel » et q « ce processeur a une fréquence de 2.4Ghz ». Construisons la table de vérité de $\neg(p \wedge q)$ et de $(\neg p \vee \neg q)$, illustrée à la table 1.9.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Table 1.9 – Table de vérité de la négation d'une conjonction

On constate que les valeurs de vérité de $\neg(p \wedge q)$ et de $(\neg p \vee \neg q)$ sont identiques, ces propositions sont donc équivalentes.

On peut procéder de manière similaire pour construire la négation de disjonctions, et ainsi établir les lois de De Morgan.

9. On peut en effet calculer leur table de vérité de manière classique en décomposant la proposition originale tel que décrit en section 1.2.

Propriété 1.12 ▸ *Lois de De Morgan*

Soient p et q deux propositions, on a

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

et

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Ces lois peuvent être généralisés à des conjonctions et disjonctions d'un nombre arbitraire de propositions de la manière suivante :

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$$

et

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$$

Dans le cas d'une disjonction exclusive, on ne peut pas utiliser les lois de De Morgan. Néanmoins, si l'on affirme « ce soir, je mange soit de la pizza, soit un durum », les cas dans lesquels on mentirait sont soit celui où on mange *à la fois* de la pizza et un durum, soit celui on on ne mange *ni l'un, ni l'autre*.

Sur base de cette observation, on remarque donc qu'il est nécessaire, dans la négation d'une disjonction exclusive, que les deux opérandes aient la même valeur de vérité pour rendre la négation vraie. Ceci correspond exactement à l'équivalence des propositions.

On peut donc énoncer la propriété suivante.

Propriété 1.13

Soient p et q deux propositions, on a

$$(\neg(p \veebar q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q).$$

De la même manière que dans le cas de la négation d'une conjonction ou d'une disjonction, on peut vérifier cette propriété en construisant sa table de vérité.

Par ailleurs, similairement à la négation de conjonction et de disjonctions, on remarque que la négation d'une implication est également source d'erreurs pour les étudiants. Procédons comme précédemment, à l'aide d'un exemple.

Considérons un étudiant affirmant « si je bois douze bières, je serai ivre ». Le seul cas dans lequel cet étudiant se trompe est s'il boit douze bières *et* qu'il n'est *pas* ivre.

En répétant la démarche effectuée pour les lois de De Morgan, on peut également vérifier cette conclusion avec des tables de vérité, comme illustré à la table 1.10 où p dénote « je bois douze bières » et q « je suis ivre ».

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Table 1.10 – Table de vérité de la négation d'une implication

On constate que les valeurs de vérité de $\neg(p \Rightarrow q)$ et de $p \wedge \neg q$ sont identiques, ces propositions sont donc équivalentes. Ceci permet dés lors de construire correctement la négation d'une implication grâce à la propriété suivante.

Propriété 1.14

Soient p et q deux propositions, on a

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

Finalement, on peut remarquer que la disjonction exclusive et l'équivalence sont les négations l'une de l'autre, telle que décrit par la propriété suivante.

Propriété 1.15

Soient p et q deux propositions, on a

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \veebar q).$$

On peut prouver cette propriété en construisant sa table de vérité.

1.2.2 Quelques propriétés des opérateurs logiques

Soient p, p_1, ... , p_n, q et r des propositions quelconques, les équivalences suivantes sont des tautologies, et décrivent donc diverses propriétés des opérateurs logiques.

Commutativité de $\wedge, \vee, \veebar$ et $\Leftrightarrow$:

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

Si on remplace dans cette formule $\wedge$ par $\vee$, $\veebar$ ou $\Leftrightarrow$, on obtient aussi une tautologie. Le seul opérateur logique binaire[10] non commutatif est l'implication.

Associativité de $\wedge$, $\vee$, $\veebar$ et $\Leftrightarrow$:

$$\big(p \wedge (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \wedge r\big)$$

Si on remplace dans cette formule $\wedge$ par $\vee$, $\veebar$ ou $\Leftrightarrow$, on obtient aussi une tautologie. Le seul opérateur logique binaire non associatif est l'implication.

Neutres pour $\wedge$ et $\vee$:

$$(p \wedge V) \Leftrightarrow p \qquad \text{et} \qquad (p \vee F) \Leftrightarrow p$$

V est *absorbant* pour $\vee$:

$$(p \vee V) \Leftrightarrow V$$

F est *absorbant* pour $\wedge$:

$$(p \wedge F) \Leftrightarrow F$$

Distributivité de $\wedge$ et $\vee$:

$$\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$$

et

$$\big(p \vee (q \wedge r)\big) \Leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)$$

Contradiction et tiers-exclu :

$$(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow F$$

et

$$(p \vee \neg p) \Leftrightarrow V$$

10. Un opérateur est binaire s'il s'applique à deux arguments.

Idempotence pour $\wedge$ et $\vee$:

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

et

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

Transitivité de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

et

$$(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$$

Double négation :

$$\big(\neg(\neg p)\big) \Leftrightarrow p$$

Équivalence et équivalence de négations :

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \big(\neg p \Leftrightarrow \neg q\big)$$

Toutes ces tautologies ci-dessus donnent des propriétés qui permettent de simplifier les formules propositionnelles. En informatique, la conception de circuits électroniques, mais aussi la construction de programmes efficaces, exploitent ces lois.

Les équivalences qui suivent sont encore des tautologies, plus particulières à l'implication logique.

Équivalence et *bi-implication* :

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big)$$

Inverse (ou opposée) de l'implication : L'*inverse* de :

$$p \Rightarrow q$$

est l'implication :

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

Notez que la contraposée de l'inverse est la réciproque.

Raisonnement par l'absurde :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big((p \wedge \neg q) \Rightarrow F\big)$$

Ce type de raisonnement est excessivement utilisé en mathématiques comme en informatique pour prouver qu'une proposition est fausse : on suppose une hypothèse absurde (fausse), et on montre que cela conduit à une contradiction.

Règle de déduction (*Modus ponens*[11]) :

$$\big((p \Rightarrow q) \wedge p\big) \Rightarrow q$$

1.3 Formes normales

Les formules logiques peuvent avoir des formes diverses et variées, en longueur comme en structure. Afin de faciliter leur lecture, plusieurs conventions existent quant à leur écriture. Habituellement, on privilégie les formules courtes (en nombre d'opérateurs). De la même manière, on préfère écrire des formules sous *forme normale*, présentant une structure répétitive « facile » à lire.

Les ordinateurs étant composés de microcircuits dont la tâche peut être intuitivement ramenée à calculer des opérations logiques simples, écrire des formules sous forme normale peut impacter les performances du système. Toutefois, de nos jours, la puissance des ordinateurs étant considérable comparée à celle qu'elle était à l'heure des premiers microcircuits, une telle optimisation n'est plus obligatoire.

Par ailleurs, le fait que toute formule peut s'écrire sous forme normale permet de construire des ordinateurs avec un nombre très limité de types de portes logiques réalisant les opérations dans les microcircuits. Plus particulièrement, de nombreux ordinateurs actuels sont uniquement composés de milliards[12] de portes `NAND`, réalisant l'opération « non et ».

11. Ou plus exactement *modus ponendo ponens*.
12. L'ordinateur de guidage du programme Apollo 11 (ACG), était composé d'un peu plus de cinq mille portes `NOR`, réalisant l'opération « non ou », et a permis à l'homme de marcher sur la lune en 1969.

1.3.1 Forme normale disjonctive

Toute formule du calcul propositionnel classique peut s'écrire d'une et une seule façon (à commutativité près) sous *forme normale disjonctive*, c'est-à-dire sous la forme d'une disjonction de termes comprenant chacun uniquement des variables ou leur négation, séparés par une conjonction.

Exemple 1.18. Soit l'expression $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$, on peut réécrire cette formule sous forme normale disjonctive comme

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q).$$

On remarque que dans cette formule, toutes les clauses sont séparées par un « ou », et ces clauses sont elles-mêmes séparées par des « et ». ◀

1.3.2 Forme normale conjonctive

Similairement à la section précédente, toute formule du calcul propositionnel classique peut s'écrire d'une et une seule façon (à commutativité près) sous *forme normale conjonctive*, c'est-à-dire sous la forme d'une conjonction de termes comprenant chacun uniquement des variables ou leur négation, séparés par une disjonction.

Exemple 1.19. Soit l'expression $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$, on peut réécrire cette formule sous forme normale conjonctive comme

$$p \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s).$$

On remarque que dans cette formule, toutes les clauses sont séparées par un « et », et ces clauses sont elles-mêmes séparées par des « ou ». ◀

1.4 Exercices résolus

La plupart des énoncés de ces exercices ci-dessous sont tirés du livre de Rosen [14].

Exercice 1.1. Lesquelles de ces phrases sont-elles des propositions ?
— Bruxelles est la capitale de la Belgique,

— $2 + 2 = 5$,
— il existe de la vie ailleurs dans l'univers,
— répondez à cette question.

Solution. La première phrase est bien une proposition : elle déclare un fait, et a une valeur de vérité, en l'occurrence vraie.

La deuxième « phrase » est également une proposition, qui affirme le fait que deux et deux fassent cinq. Elle a également une valeur de vérité, qui dans ce cas-ci est fausse.

La troisième phrase est également une proposition : elle déclare en effet un fait, et possède aussi une valeur de vérité, soit vraie, soit fausse. Qu'on ne puisse pas déterminer, voire même deviner laquelle des deux est avérée à l'heure actuelle est sans importance : on sait que c'est exactement une de ces possibilités.

La quatrième phrase n'est par contre pas une proposition : elle ne déclare pas de fait, et ne possède pas de valeur de vérité. ◀

Exercice 1.2. Écrivez la négation des phrases suivantes, sans utiliser de formulation telle que « il est faux que » ou équivalents.
— $2 + 2 = 4$.
— J'ai un smartphone.
— Il n'y a pas de pollution en Belgique.
— Si je plonge dans la piscine, je serai mouillé.
— Je vais jouer à l'ordinateur ou réussir l'examen.
— L'été en Écosse n'est ni chaud, ni ensoleillé.

Solution. Les négations de ces phrases sont construites de la façon suivante.
— La négation de « deux plus deux égal quatre » est « deux plus deux n'est pas égal à quatre », ou en écriture mathématique : $2 + 2 \neq 4$.
— Nier le fait que l'on ait un smartphone revient à dire que l'on n'a pas de smartphone.
— Nier « il n'y a pas de pollution en Belgique » revient simplement à dire « il y a de la pollution en Belgique ».
— Cette phrase étant plus difficile, passons par une étape de modélisation. Dans le cas général, cette étape est systématiquement nécessaire, afin ne fusse que de justifier la réponse donnée à l'exercice, ou simplement de pas tomber dans des contre-intuitions inhérentes au langage. Soient p la

proposition « je joue à l'ordinateur » et q « je réussis l'examen[13] ». On doit donc nier $p \vee q$, ce qui donne $\neg p \wedge \neg q$ (par les lois de De Morgan), ou en français : « je ne joue pas à l'ordinateur et je réussis pas l'examen ».

— De la même manière que précédemment, modélisons en mathématiques la phrase à nier. Soient p la proposition « je plonge dans la piscine » et q la proposition « je suis mouillé ». On doit nier $p \Rightarrow q$. Dans la mesure où ce cas-ci est un peu plus difficile, écrivons la table de vérité de cette proposition. Notez qu'en général, cette étape « table de vérité » sera systématiquement nécessaire, les constructions des négations n'étant pas immédiates.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$
F	F	V	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	V	V	F

La dernière colonne de cette table de vérité a la même valeur de vérité que $p \wedge \neg q$, ce qui correspond, en français, à « je plonge dans la piscine et je ne suis pas mouillé ».

— Cette dernière phrase est un peu plus subtile, du fait de la présence de négations déjà au sein de la phrase originale. Soient p la proposition « l'été en Écosse est chaud » et q « l'été en Écosse est ensoleillé ».la proposition à nier est $\neg p \wedge \neg q$, c'est-à-dire décrire la valeur de vérité de $\neg\big(\neg p \wedge \neg q\big)$. Écrivons la table de vérité de cette proposition[14] :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg\big(\neg p \wedge \neg q\big)$
F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V

On remarque que la dernière colonne de cette table correspond à $p \vee q$. La négation de la phrase originale est donc « l'été en Écosse est chaud ou ensoleillé ».

13. Notez que dans cette phrase, les temps de conjugaison des propositions originales ont changé. Ce changement est sans importance pour la modélisation ou pour la valeur de vérité des propositions, et est simplement effectué pour rendre la lecture plus naturelle en français.

14. Remarquez qu'un étudiant « à l'aise » avec la matière pourrait simplement distribuer la négation et trouver directement la solution via les lois de De Morgan, sous réserve qu'il justifie sa réponse correctement.

◀

Exercice 1.3. Soient p et q les propositions suivantes :
— p : j'achète un billet de loterie ce week-end,
— q : je gagne un jackpot d'un million d'euros.

Exprimez chacune des propositions suivantes en français :

1. $\neg p$,
2. $p \vee q$,
3. $p \Rightarrow q$,
4. $q \Rightarrow p$,
5. $p \wedge q$,
6. $p \Leftrightarrow q$,
7. $\neg p \Rightarrow \neg q$,
8. $\neg p \wedge \neg q$,
9. $\neg p \vee (p \wedge q)$.

Solution. On peut écrire ces propositions de la façon suivante :

1. Je n'achète pas de billet de loterie ce week-end.
2. J'achète un billet de loterie ce week-end ou je gagne un jackpot d'un million d'euros.
3. Si j'achète un billet de loterie ce week-end, alors je gagne un jackpot d'un million d'euros.
4. Si je gagne un jackpot d'un million d'euros, alors j'achète un billet de loterie ce week-end.
5. J'achète un billet de loterie ce week-end et je gagne un jackpot d'un millions d'euros.
6. J'achète un billet de loterie ce week-end si et seulement si je gagne un jackpot d'un million d'euros.
7. Si je n'achète pas de billet de loterie ce week-end, alors je ne gagne pas de jackpot d'un million d'euros.
8. Je n'achète pas de billet de loterie ce week-end et je ne gagne pas de jackpot d'un million d'euros.
9. Je n'achète pas de billet de loterie ce week-end, ou j'achète un billet de loterie ce week-end et je gagne un jackpot d'un million d'euros.

◀

Exercice 1.4. Soient p, q et r les propositions suivantes.
p : des grizzlis ont été vus dans les environs.
q : faire de la randonnée sur ce sentier est sans danger.
r : les baies sont mûres sur ce sentier.

Écrivez les propositions suivantes en mathématiques en utilisant des connecteurs logiques :

1. les baies sont mûres sur ce sentier, mais des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs ;
2. des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs et faire de la randonnée sur ce sentier est sans danger, mais les baies sont mûres sur ce sentier ;
3. si les baies sont mûres sur ce sentier, y faire de la randonnée est sans danger si et seulement si des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs ;
4. il est dangereux de faire de la randonnée sur ce sentier, mais des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs et les baies sont mûres sur ce sentier ;
5. pour faire de la randonnée sans danger sur ce sentier, il est nécessaire mais pas suffisant que les baies soient mûres sur ce sentier et que l'on n'ait pas vu de grizzlis dans les environs.
6. faire de la randonnée sur ce sentier est sans danger quand des grizzlis n'ont pas été vus dans les environs et quand les baies sont mûres sur ce sentier.

Solution. Ces propositions peuvent être écrites en mathématiques de la façon suivante.

1. $r \wedge \neg p$. Le « mais » a la même valeur logique que le « et ».
2. $\neg p \wedge q \wedge r$. Même justification.
3. $r \Rightarrow (q \Leftrightarrow \neg p)$. L'implication est claire, et le conséquent est formé de deux parties équivalentes (« si et seulement si »). Notez ici l'importance des parenthèses, à cause des priorités des opérateurs.
4. $\neg q \wedge \neg p \wedge r$. Même justification qu'au premier point. Être dangereux est le contraire d'être sans danger, d'où le $\neg q$.
5. $q \Rightarrow (r \wedge \neg p)$. Cette phrase dénote une implication. De plus, pour rappel, dans une implication $x \Rightarrow y$, y est appelé une condition nécessaire pour p.
6. $(\neg p \wedge r) \Rightarrow q$. Cette phrase dénote également une implication. Le conséquent de cette implication est la randonnée dangereuse.

◀

Exercice 1.5. Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes.

— $1 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2 + 2 = 4$.
— $1 + 1 = 3 \Leftrightarrow 2 + 2 = 4$.
— $1 + 1 = 3$ si et seulement si les vaches peuvent voler.
— Si les vaches peuvent voler, alors $1 + 1 = 3$.

— Si les vaches peuvent voler, alors $1 + 1 = 2$.

Solution. Les valeurs de vérité des propositions sont les suivantes.

— Vrai : les sous-propositions sont équivalentes, toutes les deux ont la même valeur de vérité vrai.

— Faux : les sous-propositions ne sont pas équivalentes. En effet, $1 + 1 = 3$ a la valeur de vérité faux, mais $2 + 2 = 4$ a la valeur de vérité vrai.

— Vrai : les sous-propositions sont équivalentes, toutes les deux ont la même valeur de vérité faux.

— Vrai : toute implication d'une proposition par une autre qui est fausse (les vaches peuvent voler) est vraie.

— Vrai : même justification que ci-dessus.

◀

Exercice 1.6. Construisez les tables de vérité des propositions suivantes.

1. $p \Rightarrow \neg p$,
2. $p \Leftrightarrow \neg p$,
3. $p \veebar (p \vee q)$,
4. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$,
5. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

Solution. Les tables de vérité de ces propositions sont illustrées à la figure 1.1. Notez que le point 2 est une antilogie triviale (car p et $\neg p$ n'ont jamais la même valeur de vérité), et que le point 5 est une tautologie définie dans le cours. Notez également que le point 6 n'est pas équivalent à $p \Leftrightarrow q$. ◀

Exercice 1.7 ([15])**.** Un meurtre a été commis dans la ville de Dualis, séparée en deux par une rivière qui la traverse d'est en ouest. La particularité de cette ville est que seuls les habitants au sud de la rivière disent la vérité. Un inspecteur est dépêché sur place pour résoudre l'affaire, et on lui présente trois témoins, venant des deux parties de la ville : Alex, Virginie et Carl. Il les interroge dans l'espoir de trouver un habitant (du sud de la ville) qui lui dise la vérité sur le meurtre. Voici leurs réponses.

1. Alex : Virginie habite au sud.
2. Virginie : Alex et moi habitons ensemble.
3. Carl : c'est faux, Virginie ment comme elle respire !

Exercice 1

p	$\neg p$	$p \Rightarrow \neg p$
F	V	V
V	F	F

Exercice 2

p	$\neg p$	$p \Leftrightarrow \neg p$
F	V	F
V	F	F

Exercice 3

p	q	$p \vee q$	$p \veebar (p \vee q)$
F	F	F	F
F	V	V	V
V	F	V	F
V	V	V	F

Exercice 4

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
F	F	F	F	V
F	V	V	F	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

Exercice 5

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	F	V	V

Exercice 6

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
F	F	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	V	V	V	V

FIGURE 1.1 – tables de vérité de d'Exercice 1.6

Pouvez-vous indiquer quels citoyens l'inspecteur doit interroger à propos du meurtre ?

Solution. Modélisons avant tout le problème sous forme mathématique, en commençant par les propositions à analyser. En l'occurrence, on veut savoir qui habite au sud de la ville, pour savoir qui l'inspecteur doit interroger. On pose donc

$$\begin{aligned} P_1 &: \quad \text{Alex habite au sud de la ville.} \\ P_2 &: \quad \text{Virginie habite au sud de la ville.} \\ P_3 &: \quad \text{Carl habite au sud de la ville.} \end{aligned}$$

Traduisons à présent leurs affirmations sous forme de propositions logiques. Dans la déposition d'Alex, on déduit les points suivants.

— Si Alex habite au sud de la ville, il dit la vérité. Or, il affirme que P_2 est vrai. Donc, si P_1 est vrai, alors P_2 est vrai.

— Si Alex habite au nord, soit il ment, soit il dit la vérité, et on ne peut rien conclure de la valeur de vérité de P_2.

Ces deux affirmations mises ensemble, on en conclut que $P_1 \Rightarrow P_2$. Ce constat peut être dressé à l'aide de la table de vérité de l'implication. On va procéder de manière similaire pour les dépositions de Virginie et de Carl.

Dans le cas de Virginie, on déduit que si elle habite au sud (si elle dit la vérité, si P_2 est vrai), alors elle vit avec Alex, et donc ils habitent tous les deux au sud, ou tous les deux au sud $(P_1 \wedge P_2)$, ou tous les deux au nord $(\neg P_1 \wedge \neg P_2)$. On en déduit donc que $P_2 \Rightarrow (P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)$.

Enfin, si Carl vit au sud, alors Virginie ment, et donc ce qu'elle affirme est faux, et donc la négation de ce qu'elle affirme est vraie. On a donc $P_3 \Rightarrow \neg\big((P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)\big)$.

Par ailleurs, on sait que les témoins viennent des deux parties de la ville, ce qui signifie que deux habitent au sud et un au nord, ou inversement. On a donc $P_i \wedge P_j \wedge \neg P_k$ ou l'inverse, c'est-à-dire $\neg P_i \wedge \neg P_j \wedge P_k$, pour certains i, j, k différents. Pour cet exercice, il va donc falloir envisager toutes les possibilités de ces valeurs i, j et k.

En conclusion, on obtient donc les propositions suivantes :

$$P_1 \Rightarrow P_2, \tag{1.1}$$

$$P_2 \Rightarrow (P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2), \tag{1.2}$$

$$P_3 \Rightarrow \neg\big((P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)\big), \tag{1.3}$$

$$\begin{split}(\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3)\\ \vee(\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3).\end{split} \tag{1.4}$$

L'affirmation que les propositions (1.1) à (1.2) est vraie restreint les valeurs de vérité de P_1, P_2 et P_3, et c'est de ces restrictions que l'on va pouvoir aider l'inspecteur. La table de vérité de ces propositions est illustrée à la table 1.11. Cette table a été illustrée « horizontalement » plutôt que « verticalement » (comme à l'habitude) pour des raisons de présentation.

La dernière ligne correspondant à la proposition (1.4) peut être obtenue facilement en résonnant de la façon suivante. Toutes les sous-propositions sont séparées par un « ou ». Dès lors, pour rendre cette proposition fausse, il faut que chacune de ces sous-proposition soit fausse. À l'intérieur de ces sous-propositions, toutes les clauses sont séparées par des « et ». Dès lors, pour les rendre fausses, il suffit que l'une des clauses soit fausse. Dans la mesure où on remarque la présence de négations dans chacune de ces sous-propositions, et que tous les cas possibles de une ou deux négations sont envisagés, le seul cas possible est soit quand chacune des clauses P_1, P_2 et P_3 est vraie, soit quand chacune des clauses P_1, P_2 et P_3 est fausse.

P_1	F	F	F	F	V	V	V	V
P_2	F	F	V	V	F	F	V	V
P_3	F	V	F	V	F	V	F	V
$P_1 \wedge P_2$	F	F	F	F	F	F	V	V
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	V	V	F	F	F	F	F	F
$(P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)$	V	V	F	F	F	F	V	V
(1.1)	V	V	V	V	F	F	V	V
(1.2)	V	V	F	F	V	V	V	V
(1.3)	V	F	V	V	V	V	V	F
(1.4)	F	V	V	V	V	V	V	F

TABLE 1.11 – Table de vérité des propositions (1.1) à (1.4)

On remarque sur cette table que la seule possibilité pour que les propositions (1.1) à (1.4) soient vraies en même temps est que P_1 et P_2 soient vraies, et que P_3 soit faux. Ces cas de figure sont entourés en rouge dans la table de vérité.

L'inspecteur doit donc interroger Alex ou Virginie à propos du meurtre, car il est certain qu'ils disent la vérité ! ◀

CHAPITRE 2

Théorie des ensembles

Concepts de base • Définition en compréhension • Opérations ensemblistes • Exercices résolus

De la même manière que pour la logique mathématique, la théorie des ensembles est l'un des aspects les plus basiques des mathématiques. En effet, elle définit formellement l'un de ses concepts les plus élémentaires, à savoir les ensembles, leurs propriétés et les opérations qu'il est possible d'effectuer avec eux.

C'est également sur base de ce domaine qu'est défini le concept de *fonction*, central des mathématiques. Les fonctions sont des relations particulières entre les éléments d'un ensemble.

Toute cette terminologie est introduite ici. Notez que comme la sémantique présentée ici est par certains aspects très proche du français, l'étudiant ne doit pas s'étonner de ne trouver que peu de parties calculatoires ou d'exercices de raisonnement.

Plus particulièrement, la section 2.1 introduit les définitions de base associées aux ensembles. La section 2.2 fournit une manière différente de définir un ensemble que celle décrite en section 2.1, ainsi que ses avantages et inconvénients.

Ensuite, la section 2.3 décrit comment, à l'aide d'opérateurs, construire des ensembles complexes à partir d'ensembles plus simples.

Comme précédemment, ce chapitre se termine par des exercices résolus en section 2.4.

2.1 Concepts de base

L'un des concepts les plus simples en mathématiques est celui de la théorie éponyme, à savoir l'ensemble. Comme vous le constaterez, leur définition est formulée « en français ». Comme dans le cadre de la logique, il est en effet ardu de définir en mathématiques un concept sur lequel une grande partie des mathématiques est bâti.

Définition 2.1

Un ensemble *est une collection d'objets distincts. Chacun de ces objets est appelé* élément.

Notation 2.1. Soient S un ensemble et x un élément de S, on dit que x *appartient* à S, et on note cette relation $x \in S$.

Si x n'est pas un élément de S, on dit que x *n'appartient pas* à S, et on note cette relation $x \notin S$. Réciproquement, si x est un élément de S, on dit que S *comprend* x, noté $S \ni x$. Sinon, on dit que S ne comprend pas x, noté $S \not\ni x$.

Au vu des notations ci-dessus, remarquez que les notations mathématiques utilisant « $\in$ » peuvent se lire dans les deux sens, étant donné la symétrie entre « $\in$ » et « $\ni$ ».

Exemple 2.1. Soit M l'ensemble des mammifères. On a, entre autres, les propriétés suivantes :
— Humain $\in M$,
— $M \ni$ Chat,
— Canard $\notin M$.

◀

Si l'ensemble S comprend un nombre fini d'éléments, on peut le définir en fournissant la liste de ses éléments. Une telle définition de S est dite *en extension.* Habituellement, on note les éléments de S entre accolades, et on les sépare par des virgules. Notez que, dans cette définition, chaque élément de S apparaît une *unique* fois. Remarquez également que dans cette définition, l'ordre dans lequel sont énumérés les éléments est sans importance.

Exemple 2.2. Soit *Saisons* l'ensemble des saisons en climat tempéré. On peut définir cet ensemble en extension comme

$$Saisons = \Big\{ \; Printemps, \acute{E}t\acute{e}, Automne, Hiver \; \Big\} \, .$$

De même, si l'on considère les saisons météorologiques [1] boréales [2], on a :

$$\begin{aligned} Printemps &= \{ \; Mars, Avril, Mai \; \} \, , \\ \acute{E}t\acute{e} &= \{ \; Juin, Juillet, Ao\hat{u}t \; \} \, , \\ Automne &= \{ \; Septembre, Octobre, Novembre \; \} \, , \\ Hiver &= \{ \; D\acute{e}cembre, Janvier, F\acute{e}vrier \; \} \, . \end{aligned}$$

Remarquez que les définitions d'ensemble et d'éléments ne sont pas absolues. *Printemps* est un élément de l'ensemble *Saisons*, mais est également un ensemble constitué des éléments $Mars$, *Avril* et Mai.

De plus, on peut écrire

$$\begin{aligned} Saisons = \Big\{ & \{ \; Mars, Avril, Mai \; \} \, , \{ \; Juin, Juillet, Ao\hat{u}t \; \} \, , \\ & \{ \; Septembre, Octobre, Novembre \; \} \, , \{ \; D\acute{e}cembre, Janvier, F\acute{e}vrier \; \} \Big\} \end{aligned}$$

◀

Remarque 2.3. Notez que dans le chapitre 4 dédié au dénombrement, on considérera des collections d'objets dont les éléments se répètent. De tels ensembles

1. Contrairement aux saisons astronomiques qui commencent aux équinoxes ou aux solstices, les saisons météorologiques commencent toujours un premier du mois

2. Dans l'hémisphère nord, le printemps météorologique va de mars à mai, l'été de juin à août, etc. Dans l'hémisphère sud, les saisons sont inversées. Ainsi, le printemps météorologique austral se déroule pendant l'automne météorologique de l'hémisphère boréal

s'appellent des *multiensembles*. On peut les définir en extension de manière similaire aux ensembles, avec des accolades, comme dans

$$M = \{ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 \} .$$

On n'utilisera toutefois pas ce concept dans ce chapitre.

Remarque 2.4. Notez que parfois, la convention mathématique séparant les éléments d'un ensemble défini en extension par le caractère « , » crée des ambiguïtés en français où la typographie note le séparateur décimal également comme le caractère « , ». Ainsi, dans une écriture telle que $S = \{ 1, 2 \}$, il peut ne pas être clair si S est constitué des deux éléments 1 et 2, ou si $S = \{ \frac{12}{10} \}$. Dans ce document, l'ensemble $\{ 1, 2 \}$ sera systématiquement considéré comme l'ensemble constitué des éléments 1 et 2.

2.1.1 Égalité d'ensembles

Définition 2.2

Deux ensembles S_1 et S_2 sont dits égaux*, noté $S_1 = S_2$, s'ils comprennent les mêmes éléments.*

Inversement, si S_1 et S_2 ne comprennent pas les mêmes éléments, on dit que S_1 et S_2 sont *différents*, noté $S_1 \neq S_2$.

Exemple 2.5. Soient les ensembles suivants, et leurs définitions à l'exemple 2.2 :

$$\begin{aligned} Saisons &= \left\{ Printemps, \acute{E}t\acute{e}, Autonme, Hiver \right\}, \\ S_1 &= \left\{ \acute{E}t\acute{e}, Automne, Hiver, Printemps \right\}, \\ S_2 &= \left\{ Automne, \{ Mars, Avril, Mai \}, \acute{E}t\acute{e}, Hiver \right\}. \end{aligned}$$

On a $Saisons = S_1 = S_2$. Notez que dans S_2, $\{ Mars, Avril, Mai \} = Printemps$.
◀

Remarque 2.6. Notez que le nom des ensembles considérés pour une égalité, ainsi que l'ordre de leur éléments spécifiés dans une définition en extension est sans importance pour le concept d'égalité. Seul le contenu importe.

2.1.2 Sous-ensemble

Définition 2.3

Soient S_1 et S_2 deux ensembles. On dit que S_1 est un sous-ensemble *de S_2, noté $S_1 \subseteq S_2$ si tous les éléments de S_1 appartiennent à S_2.*

Si $S_1 \subseteq S_2$, on dit que S_1 est *inclus* à S_2 ou que S_2 *contient* S_1. On peut aussi noter cette relation $S_2 \supseteq S_1$.

De plus, si $S_1 \neq S_2$ et $S_1 \subseteq S_2$, on dit que S_1 est *strictement inclus* à S_2, noté $S_1 \subset S_2$. Réciproquement, on dit que S_2 contient S_1 strictement (ou au sens strict), noté $S_2 \supset S_1$.

Exemple 2.7. Soit $A = \{ 1, 2, 3 \}$ et $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$. On a $A \subseteq B$: tous les élément de A sont des éléments de B. ◀

Ces concepts sont également illustrés avec un diagramme sur la figure 2.1, avec deux ensembles S_1 et S_2.

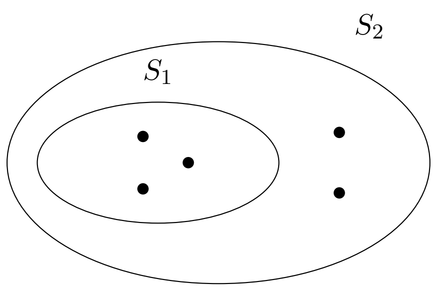


FIGURE 2.1 – Illustration de l'inclusion d'ensemble

La propriété suivante exploite les inclusions et est très utile pour montrer que deux ensembles sont égaux.

Propriété 2.4

Soient S_1 et S_2 deux ensembles. Si $S_1 \subseteq S_2$ et $S_2 \subseteq S_1$, alors $S_1 = S_2$.

Plus particulièrement, dans un contexte de preuve, pour montrer que deux ensembles sont égaux, il faut en général montrer que tous les éléments du premier ensemble sont compris dans le deuxième, et inversement.

Une telle utilisation de cette définition est utilisée à l'exemple 2.14, pour montrer l'égalité de deux ensembles définis abstraitement [3]. En mathématiques, ce genre de preuve et d'utilisation de définition est extrêmement présent. Ce n'est toutefois pas l'objet principal de ce cours, et de telles utilisations sont fournies à titre d'illustration.

Remarque 2.8. Ne confondez pas les concepts d'inclusion et d'appartenance. Un élément *appartient* à un ensemble, un (sous-)ensemble est *inclus* dans un ensemble.

Exemple 2.9. En reprenant les ensembles de l'exemple 2.2, on a donc, entre autres, les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
Mars &\in Printemps,\\
Octobre &\notin \acute{E}t\acute{e},\\
Juin &\notin Saisons,\\
Printemps &\in Saisons,\\
\{\, Printemps \,\} &\subseteq Saisons,\\
\{\, Mars, Avril, Mai \,\} &\in Saisons,\\
\{\, \{\, Mars, Avril, Mai \,\} \,\} &\subseteq Saisons,\\
\{\, Novembre, Mars \,\} &\nsubseteq Printemps,\\
\{\, Hiver, Automne \,\} &\subseteq Saisons,\\
\{\, Hiver, Automne \,\} &\subset Saisons,\\
Saisons &\supset \Big\{ \{\, Septembre, Octobre, Novembre \,\},\\
&\qquad \{\, Mars, Avril, Mai \,\} \Big\}.
\end{aligned}$$

◀

2.1.3 Cardinal

Le cardinal d'un ensemble définit intuitivement sa taille, et permet de caractériser si un ensemble est « plus gros » qu'un autre.

3. Au vu des concepts présentés actuellement, il est rébarbatif, voire impossible, d'illustrer l'utilisation de cette définition d'égalité. On a pour cela besoin du concept de *définition en compréhension*, détaillé en section 2.2

Définition 2.5

Soit S un ensemble, le cardinal *de S, noté $|S|$, est le nombre d'éléments de S.*

Parfois, le cardinal de S est aussi appelé la *cardinalité* de S ou la *taille* de S, et est également parfois [4] noté $\#S$. Ce document utilisera néanmoins systématiquement le terme « cardinal » ainsi que la notation précédente pour des raisons d'uniformisation.

Exemple 2.10. En reprenant les ensembles définis à l'exemple 2.2, on remarque que $|Saisons| = 4$ et $|Printemps| = |Été| = |Automne| = |Hiver| = 3$. ◀

Les cardinaux d'ensembles sont souvent utilisés pour comparer des ensembles. En effet, si deux ensembles n'ont pas le même cardinal, ils ne peuvent pas être égaux.

Remarque 2.11. Comparer le cardinal d'ensembles infinis est plus compliqué que comparer deux nombres entiers, et requiert l'emploi de certaines précautions. De telles finesses seront abordées plus tard dans ce document, au chapitre 4.

On définit un ensemble particulier sur base du cardinal : l'*ensemble vide*, caractérisé formellement comme suit.

Définition 2.6

*L'*ensemble vide*, noté $\varnothing$, est l'unique ensemble qui ne contient aucun élément.*

Cet ensemble est donc le seul ensemble de cardinal nul. En extension, on peut également le noter comme $\{\ \}$.

De plus, quel que soit l'ensemble S considéré, on a toujours $\varnothing \subseteq S$. Si S est non vide, on a $\varnothing \subset S$. L'ensemble vide est donc contenu au sens strict dans n'importe quel ensemble non vide.

4. Il semblerait que cette notation ait été abandonnée dans les ouvrages mathématiques récents, raison pour laquelle la notation $|\cdot|$ est privilégiée dans ce document.

2.2 Définition en compréhension

Le début de la section 2.1 détaille, entre autres, comment définir en extension un ensemble, en énumérant simplement ses éléments. Dans certains cas, une telle définition est peu pratique, par exemple quand l'ensemble est de grande taille, et, *a fortiori*, quand son cardinal est infini.

Par exemple, même si l'on peut noter les naturels comme $\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$, cette définition est peu formelle. Par ailleurs, dans certains cas, une telle « définition par généralisation » est ardue, voire même impossible. Comment écrire succinctement en extension l'ensemble des mammifères ? Comment décrire en extension les réels ?

Pour parer à cette difficulté, on introduit la notion de *définition en compréhension*. Plutôt que de définir un ensemble en énumérant explicitement ses éléments, on fournit une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble. Un ensemble défini comme tel est donc une collection d'objets distincts possédant une caractéristique commune.

Exemple 2.12. On peut définir les mammifères [5] en compréhension comme

$$\left\{ x \;\middle|\; x \text{ est un animal } \wedge x \text{ a des mamelles} \right\},$$

où le symbole « $\mid$ » se lit « tel que ». ◀

Exemple 2.13. Soit $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. On peut définir cet ensemble en compréhension comme $S = \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; n < 7 \right\}$. ◀

Similairement, on peut par exemple [6] définir l'ensemble vide en compréhension comme $\varnothing = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; x \neq x \right\}$ ou $\varnothing = \left\{ x \;\middle|\; x \text{ est une vache } \wedge x \text{ sait voler} \right\}$.

De la même manière, on peut définir l'ensemble P des nombres pairs comme $P = \left\{ 2k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, et l'ensemble I des nombres impairs comme $I = \left\{ 2k + 1 \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Le biologiste averti conviendra que cette définition des mammifères est incomplète. On s'en satisfera néanmoins dans ce document traitant avant tout de mathématiques.

6. Il existe une infinité de manières de définir l'ensemble vide en compréhension.

Comparaison des définitions en extension et en compréhension

Soit S un ensemble défini en extension comme $S = \{ -1, 1 \}$. On remarque que cette définition est unique, car les éléments ont été énumérés. Par contre, S peut être défini en compréhension de multiples manières.

On a, par exemple

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Z}_0 \;\middle|\; 0 \leqslant x + 1 < 3 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; |x| = 1 \right\}, \end{aligned}$$

où $|x|$ dénote la valeur absolue d'un nombre x, à ne pas confondre avec le cardinal d'un ensemble.

Notez également que, tandis qu'il est très facile de déterminer les relations d'inclusion ou d'égalités de deux ensembles donnés en extension (il suffit de comparer les listes d'éléments), cela s'avère en général plus compliqué lorsque l'un ou les deux ensembles en question sont fournis en compréhension. En effet, il faut alors analyser les propriétés, déterminer si un élément validant une propriété d'un ensemble en valide une autre, etc.

Exemple 2.14. Soient $S_1 = \left\{ 4k + 1 \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $S_2 = \left\{ 4k - 3 \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrons que $S_1 = S_2$.

Preuve. Montrons que $S_1 \subseteq S_2$ et $S_2 \subseteq S_1$. Ainsi, grâce à la propriété 2.4, on aura $S_1 = S_2$.

Cas 1 : $S_1 \subseteq S_2$.

Pour prouver cette affirmation, on va montrer que l'on peut écrire n'importe quel élément x de S_1 comme un élément de S_2. Ainsi, tous les éléments de S_1 seront des éléments de S_2, car on a choisi x arbitrairement. Procédons.

Soit $x \in S_1$. Par définition de S_1, on sait que $x = 4n + 1$, pour un certain [7] $n \in \mathbb{Z}$. Pour écrire x comme un élément de S_2, il faut donc trouver une valeur de

7. Le nom de la variable employée ici est sans importance.

$k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 4k - 3$, par définition de S_2. Prenons $k = n + 1$. On a donc

$$\begin{aligned} x &= 4n + 1 \\ &= 4(k-1) + 1 && \text{Par substitution de } n \text{ par sa valeur en fonction de } k \\ &= 4k - 4 + 1 \\ &= 4k - 3. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que $x = 4k - 3$ pour un certain k (ici $n + 1$), et donc que $x \in S_2$, et en conséquence que $S_1 \subseteq S_2$.

Cas 2 : $S_2 \subseteq S_1$.

Procédons similairement à ce qui a été fait précédemment. Soit $x \in S_2$, montrons que x peut être écrit comme un élément de S_1. Par définition de S_2, on a que $x = 4n - 3$, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. On doit trouver une valeur de k telle que $x = 4k + 1$. Prenons $k = n - 1$. On a

$$\begin{aligned} x &= 4n - 3 \\ &= 4(k+1) - 3 && \text{Par substitution de } n \text{ par sa valeur en fonction de } k \\ &= 4k + 4 - 3 \\ &= 4k + 1. \end{aligned}$$

On a donc montré que $x = 4k + 1$ pour un certain k (ici $n - 1$), et donc que $x \in S_1$, et en conséquence que $S_2 \subseteq S_1$. De plus, comme on a montré que $S_1 \subseteq S_2$ et que $S_2 \subseteq S_1$, par la propriété 2.4, on a donc que $S_1 = S_2$. $\square$

Notez que dans l'exemple ci-dessus, il est impossible de définir S_1 et S_2 en extension, leur cardinal étant infini. Dans un tel cas, on n'a donc pas le choix et l'on doit requérir à une preuve mathématique telle que ci-dessus pour montrer que les deux ensembles en question sont égaux.

Remarquez également que cette preuve est donnée ici à titre d'exemple et de comparaison des définitions en extension et en compréhension, et n'est pas l'objet de ce cours. ◀

2.3 Opérations ensemblistes

Les ensembles seraient de pauvres outils s'il n'était pas possible d'effectuer des manipulations entre eux. Ainsi, on définit plusieurs opérations entre les ensembles permettant d'effectuer des calculs, tels que de trouver « ce qui est commun ». De telles opérations sont très importantes en théorie des ensembles car elles permettent de « créer » des ensembles à partir d'autres.

On remarque également que la définition de ces opérateurs est très similaire à celle des connecteurs logiques du chapitre 1. Pour cette raison, chacune de ces définitions est formulée en ce sens, à l'aide desdits connecteurs logiques.

2.3.1 Parties d'un ensemble

Les parties d'un ensemble décrivent en quelque sorte tous les sous-ensembles que peut contenir un ensemble quelconque. Cet opérateur a plusieurs applications, notamment dans la classification des cardinaux d'ensembles infinis.

Plus formellement, on définit les parties d'un ensemble de la façon suivante.

Définition 2.7

Soit S un ensemble, on définit les parties *de S, noté $\mathscr{P}(S)$, comme l'ensemble*

$$\mathscr{P}(S) = \left\{ S' \mid S' \subseteq S \right\}.$$

En particulier, notez que quel que soit l'ensemble S considéré, on a toujours $\varnothing \in \mathscr{P}(S)$ et $S \in \mathscr{P}(S)$. De plus, on a $\mathscr{P}(\varnothing) = \{ \varnothing \}$. Pour rappel, $\varnothing \neq \{ \varnothing \}$ (car $|\varnothing| = 0$ et $|\{ \varnothing \}| = 1$).

Exemple 2.15. Soit $S = \{ a, b, c \}$, on a

$$\mathscr{P}(S) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}.$$

◀

Enfin, notez que dans le cas général, si S est fini, on a $|\mathscr{P}(S)| = 2^{|S|}$.

2.3.2 Complémentaire d'un ensemble

Le complémentaire d'un ensemble S décrit, intuitivement, les éléments qui n'appartiennent pas à S. Plus formellement, on le définit de la façon suivante.

Définition 2.8

Soient S et A deux ensembles, tels que $S \subseteq A$. On définit le complémentaire de S dans A, noté $\complement_A(S)$, comme

$$\complement_A(S) = \left\{ x \in A \;\middle|\; x \notin S \right\}.$$

Quand le contexte est clair, on omettra A et on notera simplement ce complémentaire comme $\complement(S)$ ou $\overline{S}$.

La figure 2.2 illustre cette définition à l'aide d'un *diagramme de Venn*. Sur cette figure, le complémentaire de S est colorié en gris.

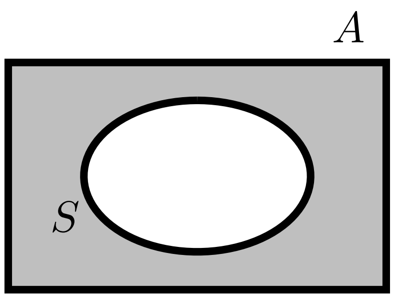


FIGURE 2.2 – Diagramme de Venn du complémentaire

Remarque 2.16. Notez que la notion de complémentaire de S *dans* un ensemble A est importante. En effet, si l'on ne précise pas dans quoi le complémentaire est plongé, on peut trouver *n'importe quoi* dans $\overline{S}$. Ainsi, soit $S \subseteq \mathbb{Z}$, on aurait *vache* $\in \overline{S}$, ce qui n'est probablement pas ce qui nous intéresse, mais plutôt $\frac{1}{2} \in \overline{S}$.

2.3.3 Union de deux ensembles

L'union de deux ensembles décrit, intuitivement, l'ensemble des éléments qui sont dans l'un ou l'autre ensemble. Plus formellement, on la définit de la manière suivante.

Définition 2.9

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, on définit l'union de S_1 et S_2, notée $S_1 \cup S_2$, comme

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2 \right\}.$$

Notez que le « ou » qui apparaît dans l'intuition est le *ou inclusif* (cf. section 1.1.3). Une telle « ambiguïté » n'est pas présente dans la définition formelle. La figure 2.3 illustre l'union de deux ensembles en toute généralité.

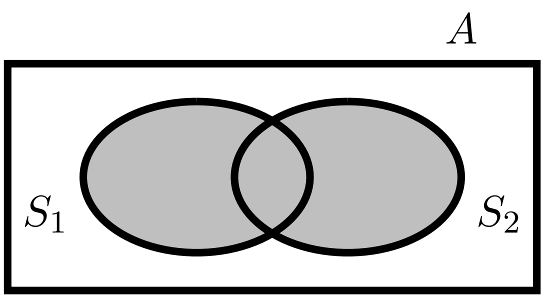


FIGURE 2.3 – Diagramme de Venn de l'union

2.3.4 Intersection de deux ensembles

L'intersection de deux ensembles décrit, intuitivement, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois aux deux ensembles considérés. On la définit formellement de la façon suivante.

Définition 2.10

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, l'intersection de S_1 et S_2, notée $S_1 \cap S_2$, est définie comme

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ x \mid x \in S_1 \wedge x \in S_2 \right\}.$$

La figure 2.4 illustre l'intersection de deux ensembles.

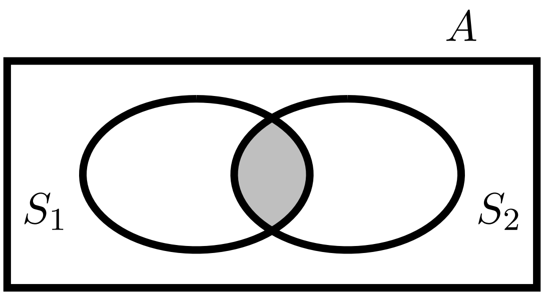


FIGURE 2.4 – Diagramme de Venn de l'intersection

2.3.5 Différence de deux ensembles

Intuitivement, la différence entre deux ensembles décrit l'ensemble des éléments qui sont dans le premier mais pas dans le second. Plus formellement, on la définit de la manière suivante.

Définition 2.11

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, la différence entre S_1 et S_2, notée $S_1 \backslash S_2$, est définie comme

$$S_1 \backslash S_2 = \{\, x \mid x \in S_1 \wedge x \notin S_2 \,\}.$$

Parfois, on note la différence entre S_1 et S_2 comme $S_1 - S_2$. La figure 2.5 illustre la différence entre deux ensembles.

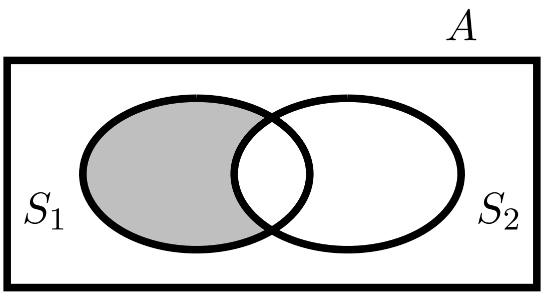


FIGURE 2.5 – Diagramme de Venn de la différence

Remarquez que si $S_1 = S_2$, alors $S_1 \backslash S_2 = S_2 \backslash S_1 = \varnothing$. De plus, si $S_2 \subseteq S_1$, alors $S_1 \backslash S_2 = \complement_{S_1}(S_2)$.

2.3.6 Différence symétrique de deux ensembles

Intuitivement, la différence symétrique entre deux ensembles décrit l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à l'un, soit à l'autre. On la définit formellement de la façon suivante.

Définition 2.12

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, la différence symétrique entre S_1 et S_2, notée $S_1 \triangle S_2$ et lue « S_1 delta S_2 », est définie comme

$$\begin{aligned} S_1 \Delta S_2 &= \left\{ x \;\middle|\; x \in S_1 \veebar x \in S_2 \right\} \\ &= (S_1 \cup S_2) \backslash (S_1 \cap S_2) \\ &= (S_1 \backslash S_2) \cup (S_2 \backslash S_1) \end{aligned}$$

La figure 2.6 illustre la construction de la différence symétrique.

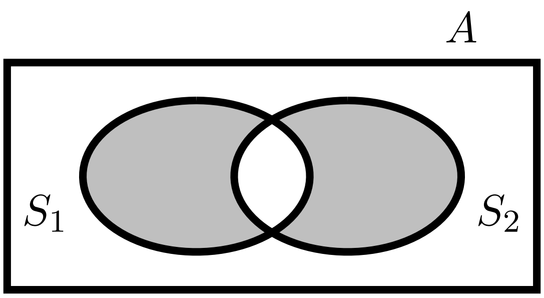
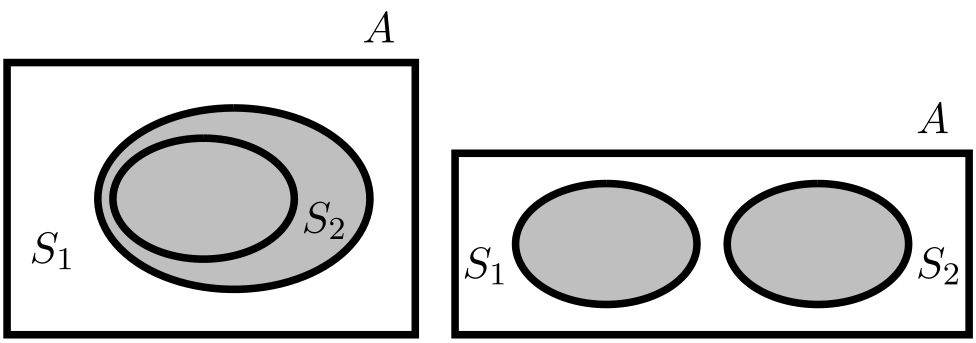


FIGURE 2.6 – Diagramme de Venn de la différence symétrique

2.3.7 Cas particuliers

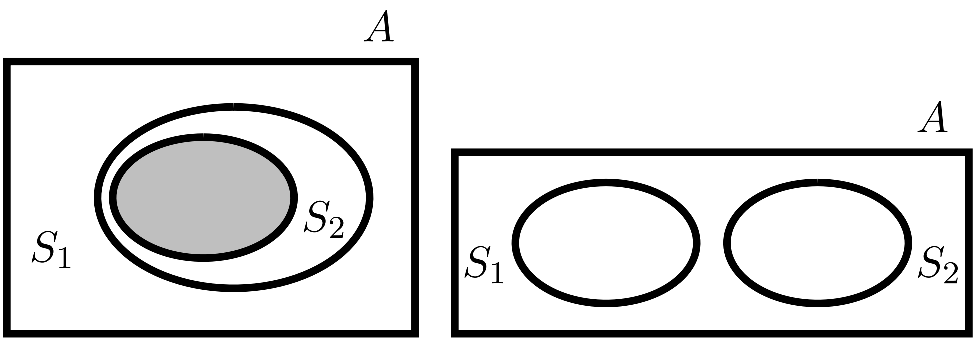
Notons que cette section illustre les opérations ensemblistes en toute généralité. Les diagrammes de Venn sont à raffiner quand l'un des deux ensembles considérés est inclus dans l'autre, ou quand les deux ensembles sont disjoints.

Ces cas particuliers sont illustrés aux figures 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10.



(a) Ensembles inclus : $S_1 \cup S_2$ (b) Ensembles disjoints : $S_1 \cup S_2$

FIGURE 2.7 – Union d'ensembles inclus ou disjoints

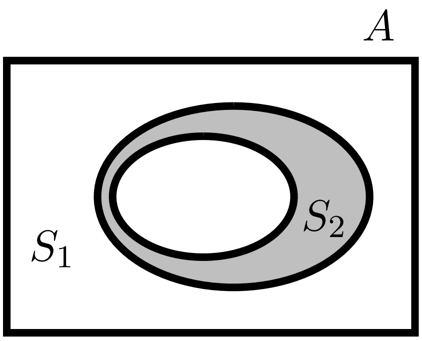


(a) Ensembles inclus : : $S_1 \cap S_2$ (b) Ensembles disjoints : : $S_1 \cap S_2$

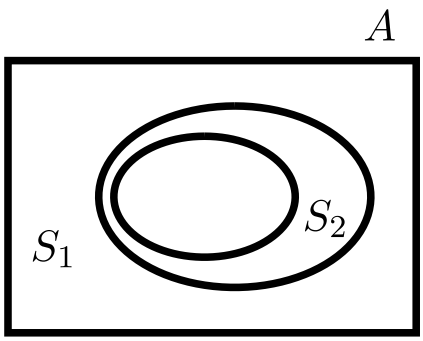
FIGURE 2.8 – Intersection d'ensembles inclus ou disjoints

2.3.8 Produit cartésien

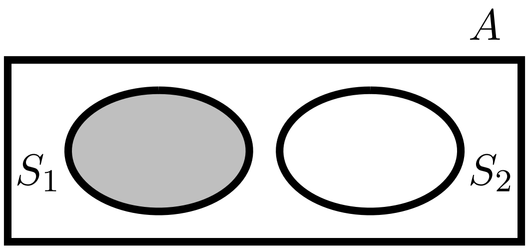
Le produit cartésien est un opérateur particulier, sans le sens où il permet d'augmenter la « dimension » d'un ensemble. Le but de cet opérateur est de définir des éléments d'un ensemble comme deux éléments de deux ensembles différents. Pour cela, on définit d'abord la notion de *couple* et de paire.



(a) Ensembles inclus : $S_1 - S_2$

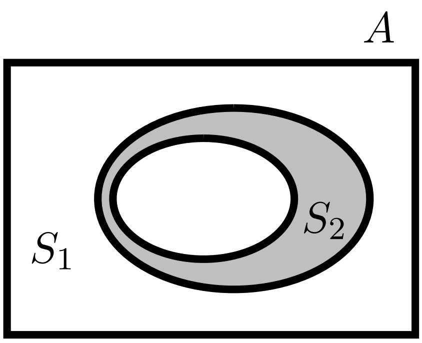


(b) Ensembles inclus : $S_2 - S_1$

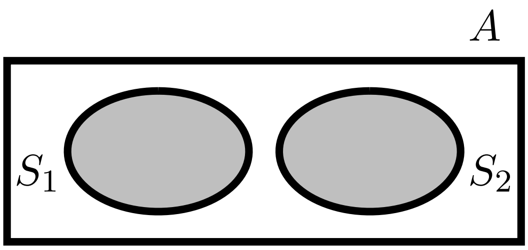


(c) Ensembles disjoints : : $S_1 - S_2$

FIGURE 2.9 – Différence entre ensembles inclus ou disjoints



(a) Ensembles inclus : $S_1 \Delta S_2$



(b) Ensembles disjoints : $S_1 \Delta S_2$

FIGURE 2.10 – Différence symétrique entre ensembles inclus ou disjoints

Définition 2.13

Un couple *est une séquence ordonnée de deux éléments. Une* paire *est un ensemble (non ordonné) de cardinal* 2*.*

Les éléments d'un couple sont appelées *composantes*. Dépendant du contexte, la première composante est parfois appelée l'*origine* et sa deuxième *image*, dans le cadre de fonctions, ou respectivement *abscisse* et *ordonnée* dans le cadre de points du plan.

Notation 2.2. Le couple d'origine a et d'image b est noté (a, b). La paire composée des éléments a et b est notée $\{a, b\}$

Exemple 2.17. Les notations suivantes sont des couples d'éléments de $\mathbb{Z}$: $(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 4)$. Notez que dans cet exemple, $(1, 2) \neq (2, 1)$. En effet, les couples sont définis comme des séquences *ordonnées*. Dans le cas de paire, on aurait $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. ◀

Définition 2.14

Soit un couple (a, b)*, on dit que ce couple*

- *est* identique *si* $a = b$*,*
- *a pour* réciproque *le couple* (b, a)*,*
- *est égal au couple* (c, d) *si* $a = c$ *et* $b = d$*.*

Notez que la définition de couple et de paire peut être généralisée en *triples* (a, b, c), en quadruples (a, b, c, d), en quintuples (a, b, c, d, e), ou, en toute généralité, en n-uples $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Remarque 2.18. Les définitions ci-dessus peuvent être facilement généralisées à la notion de paire. Notez toutefois que comme une paire est non ordonnée, on a toujours $\{a, b\} = \{b, a\}$. La notion de réciproque d'une paire est donc peu pertinente.

Produit cartésien

Grace à la notion de couple, on peut à présent définir facilement le produit cartésien.

Définition 2.15

Soient S_1 *et* S_2 *deux ensembles, on définit le* produit cartésien *de* S_1 *et* S_2*, noté* $S_1 \times S_2$*, comme*

$$S_1 \times S_2 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x \in S_1 \wedge y \in S_2 \right\}.$$

Notez que pour construire le produit cartésien de deux ensembles, il faut donc construire toutes les combinaisons possibles de couples de deux éléments, la première composante appartenant au premier ensemble, la deuxième composante au deuxième ensemble.

Exemple 2.19. Soient $S_1 = \{ a, b, c \}$ et $S_2 = \{ a, b \}$. On a

$$S_1 \times S_2 = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b) \}.$$

◀

Le produit cartésien peut être facilement généralisé entre plusieurs ensembles et ses éléments sont alors des n-uples. Formellement, on définit le produit cartésien à n dimensions entre S_1, S_2, …, S_n comme

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in S_n \right\}.$$

De plus, si $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$, on note un tel produit S^n.

Exemple 2.20. Soient $S_1 = \{ Saucisse, Poulet, Porc \}$, $S_2 = \{ Frites, Purée \}$ et $S_3 = \{ Compote, Carottes \}$. On construit $S_1 \times S_2 \times S_3$ comme

$$\begin{aligned} S_1 \times S_2 \times S_3 = \Big\{ &(Saucisse, Frites, Compote), (Saucisse, Frites, Carottes), \\ &(Saucisse, Purée, Compote), (Saucisse, Purée, Carottes), \\ &(Poulet, Frites, Compote), (Poulet, Frites, Carottes), \\ &(Poulet, Purée, Compote), (Poulet, Purée, Carottes), \\ &(Porc, Frites, Compote), (Porc, Frites, Carottes), \\ &(Porc, Purée, Compote), (Porc, Purée, Carottes) \Big\}. \end{aligned}$$

◀

Remarque 2.21. Remarquez que l'opérateur $\times$ n'est pas *commutatif*, c'est à dire que

$$S_1 \neq S_2 \Rightarrow (S_1 \times S_2 \neq S_2 \times S_1),$$

quels que soient deux ensembles S_1 et S_2. Cela signifie qu'en toute généralité, on ne peut pas permuter les opérandes du produit cartésien.

2.4 Exercices résolus

Certains des exercices ci-dessous exercices sont tirés du livre de Rosen [14].

Exercice 2.1. Soient les intervalles réels $A =]2,4]$ et $B = [3,5]$. Écrivez sous forme d'intervalle les ensembles

— $\complement_{\mathbb{R}}(A)$,
— $A \cap B$,
— $A \cup B$,
— $A \backslash B$,
— $B \backslash A$,
— $A \triangle B$.

Solution. La figure 2.11 illustre la construction des ensembles demandés. Plus formellement, on a

$$\begin{aligned}
\complement_{\mathbb{R}}(A) &=]-\infty,2] \cup]4,+\infty[,\\
A \cap B &= [3,4],\\
A \cup B &=]2,5],\\
A \backslash B &=]2,3[,\\
B \backslash A &=]4,5],\\
A \triangle B &=]2,3[\cup]4,5].
\end{aligned}$$

◀

Exercice 2.2. Soient les ensembles $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $B = \{c,f\}$, $C = \{a,c,d,e,f,h\}$ et $D = \{c,d,h\}$.

1. Illustrez cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Lesquels de ces ensembles sont des sous-ensembles stricts des autres ?
3. Est-il vrai que A et B sont disjoints ?

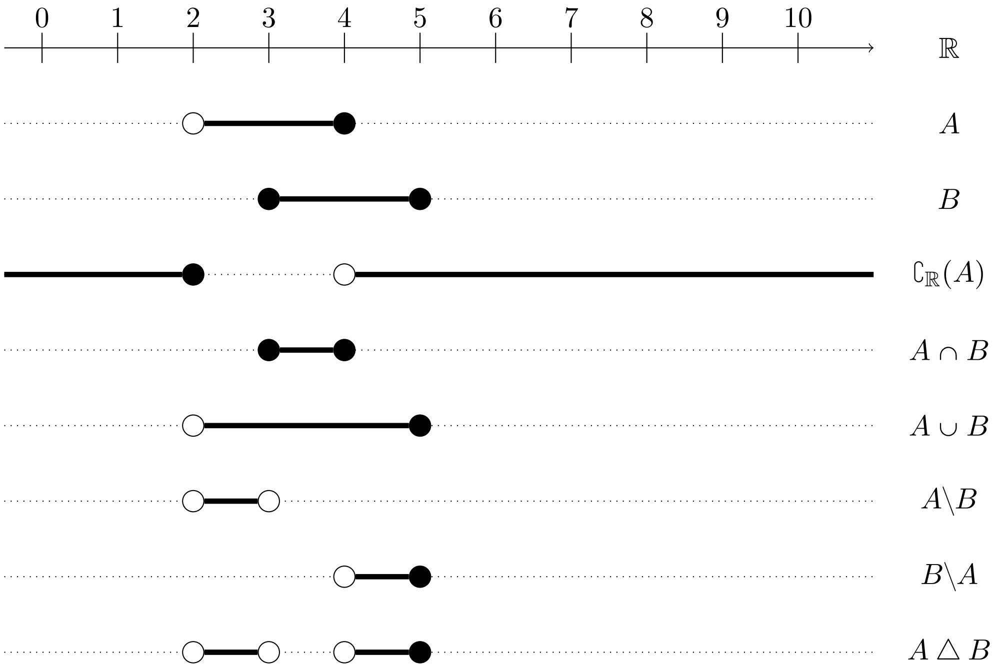


FIGURE 2.11 – Résultats d'opérateurs ensemblistes sur A et B

Solution. Les ensembles sont illustrés par un diagramme de Venn à la figure 2.12. De plus, on remarque que $B \subset C$, $B \subset A$, $D \subset C$, $D \subset A$ et $C \subset A$. Enfin, A et B ne sont pas disjoints, ils ont en effet des éléments en commun (par exemple c).

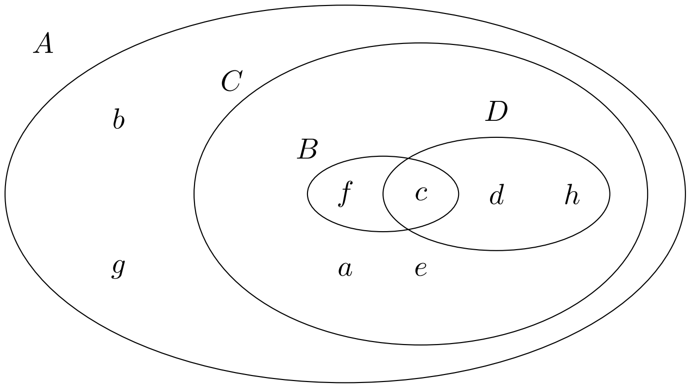


FIGURE 2.12 – Illustration d'ensembles

◀

Exercice 2.3. Que peut-on dire de deux ensembles P et Q si $P \cap Q = \varnothing$ et $P \cup Q = P$?

Solution. Si $P \cap Q = \varnothing$, cela signifie que P et Q sont disjoints : il n'y a aucun élément en commun entre ces deux ensembles. D'autre part, si $P \cup Q = P$, cela signifie que $Q \subseteq P$, car tous les éléments de Q sont des éléments de P, sinon le résultat de l'union n'aurait pas été P. Comme $Q \subset P$ et que ces ensembles n'ont pas d'éléments en commun, on en conclut que $Q = \varnothing$. ◀

Exercice 2.4. Écrire en compréhension l'ensemble

$$S = \{ 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \} \cdot$$

Solution. On remarque que la liste des éléments de S est constituée des carrés d'entiers inférieurs à 11. On peut donc écrire cet ensemble en compréhension comme

$$S = \left\{ x^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{Z} \wedge |x| \leqslant 10 \right\} \cdot$$

Il existe bien entendu d'autres définitions en extensions de cet ensemble. Avec des naturels, par exemple, on aurait

$$S = \left\{ n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \wedge n \leqslant 10 \right\} \cdot$$

◀

Exercice 2.5. Soient $S = \{ (-1)^n n \mid n \in \mathbb{N} \}$ et $T = \{ -2n - 1 \mid n \in \mathbb{N} \}$.

1. Écrivez quelques éléments de S et T.
2. Montrez que $T \subseteq S$.

Solution. Avant toutes choses, remarquons que

— $S = \{ 0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots \}$ et

— $T = \{ -1, -3, -5, -7, \dots \}$.

Au vu de ces définitions informelles en extension, on remarque qu'il semble bien que $T \subseteq S$. Montrons-le.

Pour montrer que $T \subseteq S$, il faut montrer que tous les éléments de T sont des éléments de S. On va procéder en prenant un élément arbitraire de T, et l'écrire sous la forme d'un élément de S.

Soit $t \in T$. On sait que $t = 2m - 1$, pour un certain m. Pour l'écrire sous forme d'un élément de S, il faut l'écrire sous la forme de $(-1)^n n$, c'est-à-dire trouver une valeur de n telle que $t = (-1)^n n$. Prenons $n = 2m + 1$. On remarque ici que n est un nombre impair, et que $m = \frac{n-1}{2}$.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
t &= -2m - 1 \\
&= -2\frac{n-1}{2} - 1 && \text{Par substitution de } n \text{ par sa valeur en fonction de } m \\
&= \frac{-2n}{2} + \frac{2}{2} - 1 \\
&= -n \\
&= (-1)^n n && \text{Car } n \text{ est impair}
\end{aligned}
$$

◀

Exercice 2.6. Soit $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. Écrivez $\mathscr{P}(A)$ en extension.

Solution. Par définition, $\mathscr{P}(A)$ est l'ensemble des sous-ensembles de A. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(A) = \Big\{&\varnothing, \{\,1\,\}, \{\,2\,\}, \{\,3\,\}, \{\,4\,\},\\ &\{\,1,2\,\}, \{\,1,3\,\}, \{\,1,4\,\}, \{\,2,3\,\}, \{\,2,4\,\}, \{\,3,4\,\}\\ &\{\,1,2,3\,\}, \{\,1,2,4\,\}, \{\,1,3,4\,\}, \{\,2,3,4\,\}, \{\,1,2,3,4\,\}\Big\}\end{aligned}$$

◀

Exercice 2.7. Soient $A = \{\, a, b, c, d \,\}$ et $B = \{\, c, d, e \,\}$. Construisez en extension l'ensemble $(A \times B) - \{\, (x, x) \in A \times B \,\}$.

Solution. On a

$$A \times B = \Big\{(a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (c,c), (c,d), (c,e), (d,c), (d,d), (d,e)\Big\}.$$

De cet ensemble, il faut enlever les couples (x, x), avec $x \in A \cap B$. Il faut donc enlever les couples (c, c) et (d, d). Au final, l'ensemble demandé est l'ensemble

$$\Big\{(a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (c,d), (c,e), (d,c), (d,e)\Big\}.$$

◀

CHAPITRE 3

Éléments de la théorie des graphes

Concepts de base en théorie des graphes • Chemins et connexité • Distances • Coloration de graphes • Exercices résolus

La théorie des graphes est une discipline des mathématiques discrètes consacrée à l'étude des graphes, souvent représentés comme un ensemble de cercles reliés par des lignes. Cette structure simple peut être utilisée pour modéliser beaucoup d'éléments et problèmes de la vie courante, ce qui motive leur étude théorique.

Par exemple, on peut modéliser une carte en assignant à chaque pays un cercle, et en reliant deux cercles entre eux si les pays correspondants ont une frontière commune, comme illustré à la figure 3.1 pour une carte d'Europe [1].

L'un des objectifs de ce chapitre est de présenter la terminologie de base de cette discipline, et d'être capable de modéliser divers problèmes à l'aide de cette structure, en se posant la question « Quels objets jouent le rôle de cercle, quelle est la relation entre ces objets qui est modélisée par les lignes ? ».

1. Les auteurs de ce document sont conscients que certains cercles ne sont pas des pays, et ont néanmoins décidé de les modéliser comme tels pour des raisons de pertinence avec les frontières affichées

(a) (b) (c)

FIGURE 3.1 – Modélisation d'une carte d'Europe sous forme de graphe

Plus particulièrement, la section 3.1 introduit à l'étudiant les concepts de base de ce domaine. La section 3.1.1 avance quelques variantes du modèle de base présenté en section 3.1.

Ensuite, la section 3.2 détaille la propriété de *connexité*, permettant de dire si un graphe est « en un seul morceau », et la terminologie de *chemin* associée. Le concept est également utile en section 3.3, consacrée aux distances dans un graphe. Finalement, la section 3.4 illustre la notion de *coloration* de graphe. Ce chapitre est conclu par la section 3.5 qui fournit une série d'exercices résolus.

3.1 Concepts de base en théorie des graphes

Définition 3.1

Un graphe G non orienté *est un couple* (V, E) *tel que*

— V *est un ensemble fini non vide d'éléments appelés* sommets*,*

— E *est un ensemble fini de paires*[a] *de sommets de* V *appelées* arêtes*.*

a. Une paire est un ensemble de taille 2.

On note un tel graphe $G = (V, E)$. Habituellement, un tel graphe est dit *simple* (maximum une arête par paire de sommets) et *sans boucles* (pas d'arête d'un sommet à lui-même). De plus, parfois, de tels graphes sont dits *non dirigés* plutôt que non orientés.

Définition 3.2

Soit $G = (V, E)$ *un graphe, on dit que*
— $|V|$ *est* l'ordre *de* G*,*
— $|E|$ *est* la taille *de* G*.*

En d'autres termes, l'ordre et la taille d'un graphe dénotent respectivement le nombre de sommets et d'arêtes de ce graphe.

Les graphes sont souvent visualisés comme un ensemble de cercles (les sommets) reliés par des lignes (les arêtes). L'exemple suivant illustre la définition de graphe non orienté ainsi qu'une représentation dans le plan de ce graphe.

Exemple 3.1. Sur la figure 3.2, on a $G = (V, E)$ avec
— $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
— $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

On remarque que l'arête $\{2, 1\}$ n'apparaît pas dans la liste des arêtes de G. En effet, comme les arêtes sont des paires, c'est-à-dire des sous-ensembles de taille 2, on a $\{2, 1\} = \{1, 2\}$. De plus, G est d'ordre 5 (il a 5 sommets) et de taille 7 (il a 7 arêtes). ◀

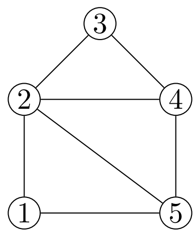


Figure 3.2 – Un graphe G non orienté

3.1.1 Adjacence

Le concept d'adjacence au sein d'un graphe permet de décrire la structure interne de ce graphe. On peut par exemple élaborer des concepts tels que « a est relié à b », « c est à côté de a », etc. On verra également dans la suite de cette section comment résumer l'information d'adjacence au sein d'une seule et même structure.

Définition 3.3

Soient $G = (V, E)$, et $u, v \in V$. On dit que u et v sont adjacents *si $\{ u, v \} \in E$. Si une arête $e = \{ u, v \} \in E$, on dit que e est* incidente *à u et v. De plus, on définit le* voisinage *$N(v)$ d'un sommet v comme*

$$N(v) = \{ u \mid \{ u, v \} \in E \},$$

et le degré $d(v)$ de v comme $|N(v)|$.

Autrement dit, deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête. Le voisinage d'un sommet est l'ensemble des sommets adjacents à ce sommet, et le degré d'un sommet est égal à la taille du voisinage d'un sommet, ou encore égal au nombre d'arêtes incidentes à un sommet.

Exemple 3.2. Les voisinages et degrés de chacun des sommets du graphe de la figure 3.2 sont illustrés à la table 3.1.

Sommet	Degré	Voisinage
1	2	$\{2, 5\}$
2	4	$\{1, 3, 4, 5\}$
3	2	$\{2, 4\}$
4	3	$\{2, 3, 5\}$
5	3	$\{1, 2, 4\}$

TABLE 3.1 – Voisinages et degrés de la figure 3.2

◀

On remarque que la propriété suivante est vérifiée sur les degrés d'un graphe.

Propriété 3.4

Soit $G = (V, E)$ un graphe de taille m, on a

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

En d'autres termes, la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois la taille de ce graphe. Intuitivement, comme le degré d'un sommet représente le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, additionner les sommets revient à compter chaque arête deux fois (une fois pour chaque extrémité correspondant à un sommet). Cette propriété peut être vérifiée à l'aide du graphe de la figure 3.2 et de la table 3.1

Un point important dans la manipulation des graphes est souvent leur représentation, et leur codage en informatique. Nous présentons ici l'une de ces représentations courantes.

Considérez les sommets d'un graphe G d'ordre n comme étiquetés par les naturels de 1 à n. Le concept d'adjacence d'un graphe est souvent résumé dans une matrice $M \in \mathbb{N}^{n \times n} = (m_{ij})$ telle que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle une telle matrice la *matrice d'adjacence* de G.

Remarque 3.3. Comme les graphes que l'on considère sont sans boucles, on a toujours $m_{ii} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. De plus, la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. En effet, on a toujours $m_{ij} = m_{ji}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exemple 3.4. La table 3.2 illustre ma matrice d'adjacence de G. La première ligne et colonne du tableau dénote les étiquettes des sommets considérés. On remarque que cette matrice est symétrique, et que sa diagonale est nulle, comme attendu. ◀

Remarque 3.5. Parfois, la matrice d'adjacence est encodée sous format booléen, on y remplace ainsi 1 par « vrai » (V) et 0 par « faux » (F).

Il existe de nombreuses autres représentations de graphes, telles que la *liste d'adjacence*. Nous ne détaillerons néanmoins pas ces représentations ici. L'étudiant intéressé peut consulter plus d'informations dans le livre d'Aho *et al.* [1].

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

TABLE 3.2 – Matrice d'adjacence de G

Variantes du modèle de graphe

Les applications des graphes étant très larges, il existe divers variantes au modèle présenté dans les sections précédentes. Nous présentons ici quelques-unes de ces variantes.

Multigraphe

Un *multigraphe* est un graphe pouvant contenir des *boucles* et dans lequel deux sommets distincts peuvent être rejoints par *plusieurs arêtes*. Lorsque deux arêtes joignent la même paire de sommets, on les qualifie d'arêtes *parallèles*.

Dans un tel graphe, on note en indice (i, j) de la matrice d'adjacence le nombre d'arêtes entre un sommet i et un sommet j. cette matrice n'est donc plus binaire, comme dans le cas des graphes simples. Elle est néanmoins toujours symétrique.

Exemple 3.6. La figure 3.3 illustre un exemple de multigraphe. Sur ce graphe G, on a entre autres les propriétés suivantes.

— Le graphe G est un multigraphe. Il compte des arêtes parallèles.

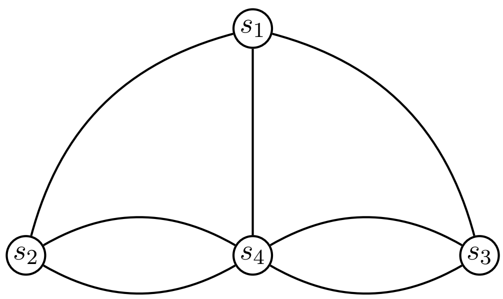
— Les sommets s_2 et s_4 sont reliés par 2 arêtes parallèles. Il en est de même des sommets s_3 et s_4.

La table 3.3 illustre la matrice d'adjacence de ce graphe. ◀

Dans la matrice d'adjacence d'un tel graphe, habituellement, on note un k à la case (i, j) s'il y a k arêtes entre les sommets i et j.

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	0	1	1	1
s_2	1	0	0	2
s_3	1	0	0	2
s_4	1	2	2	0

TABLE 3.3 – Matrice d'adjacence d'un multigraphe



Graphe G

FIGURE 3.3 – Exemple de multigraphe.

Graphe dirigé

Les graphes dirigés sont des variantes du modèle non orienté vu précédemment dans lesquelles les relations modélisées ne sont pas nécessairement symétriques. On les définit comme suit.

Définition 3.5

Un graphe G dirigé *est un couple* (V, E) *tel que*
- V *est un ensemble fini non vide d'éléments appelés* sommets*,*
- $E \subseteq V \times V$ *est un ensemble fini non vide de couples (ordonnés) de sommets disjoints de* V *appelés* arcs *ou* flèches.

Notez que dans certaines références, les notions de graphe *dirigé* et de graphe *orienté* [4] sont incorrectement confondues. Ce sont des concepts différents. Dans un graphe orienté, on ne peut pas avoir une paire d'arcs (i, j) et (j, i) entre deux sommets i et j d'un graphe, ni de boucle. Ce détail de terminologie n'est toutefois nécessaire que si l'on travaille avec les deux modèles de façon précise, ce qui n'est pas le cas dans ce document.

Habituellement, on représente ces graphes de façon similaire aux graphes non orientés, les arcs étant ici représentés par des flèches dotées d'une origine et d'une extrémité. On les représente par une flèche allant du sommet origine au sommet extrémité.

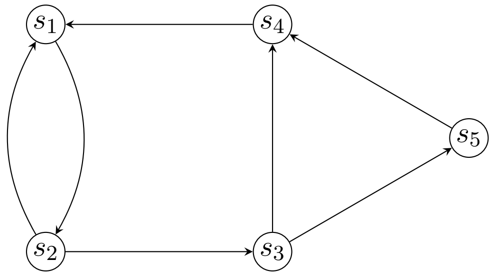
On peut également envisager des variantes du modèle de graphe dirigé en le rendant « multigraphe ».

La figure 3.4 illustre un exemple de graphe dirigé.

Exemple 3.7. La figure 3.4 illustre un exemple de graphe dirigé. Sur ce graphe G, on a entre autres les propriétés suivantes.
- Le graphe G est un graphe dirigé car « ses arêtes sont des arcs ».
- L'arc qui va du sommet s_1 vers le sommet s_2 est distinct de celui qui va de s_2 vers s_1.

◀

La matrice d'adjacence d'un graphe dirigé est construite de manière similaire à celle d'un graphe non orienté. Elle n'est néanmoins en général pas symétrique.



Graphe G

FIGURE 3.4 – Exemple de graphe dirigé.

Graphe étiqueté

Un graphe *étiqueté* est un graphe (non orienté, dirigé, multigraphe) dont chaque arête ou arc est étiqueté. Généralement, les étiquettes sont des nombres, dénotant, par exemple, ce que cela coûte pour se rendre d'un sommet à son voisin, combien rapporte la relation entre deux sommets, etc.

Parfois, de tels graphes sont dits *valués* ou *pondérés* si les étiquettes sont des nombres. Dans ce cas, on appelle de telles étiquettes des *poids*.

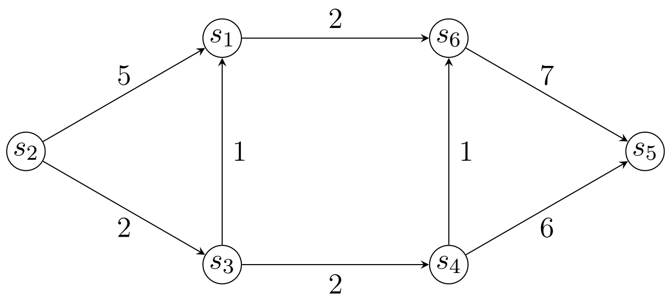
Exemple 3.8. La figure 3.5 illustre un exemple de graphe pondéré. Sur ce graphe G, on a entre autres les propriétés suivantes.

— Le graphe G est orienté car ses arêtes sont représentées par des flèches. C'est également un graphe étiqueté.

— L'arc (s_2, s_3) est de poids 2.

◀

Les graphes étiquetés ont de nombreuses applications pratiques. Modélisons par exemple une ville en désignant les croisements de routes comme les sommets et en reliant deux sommets par un arc si une route joint les deux carrefours correspondants. Notez que ce modèle dirigé inclut les sens interdits. De plus, on peut par exemple étiqueter un arc par un nombre dénotant la distance entre deux carrefours. On peut ainsi résoudre des problèmes complexes tels que se demander quel est le plus court chemin entre deux carrefours en ville.



Graphe G

FIGURE 3.5 – Exemple de graphe étiqueté

3.2 Chemins et connexité

Les chemins et la connexité sont des concepts qui permettent, par exemple, « de dire combien de morceaux composent un graphe », de « savoir s'il est possible de se rendre d'un sommet à un autre », etc. Ces concepts décrivent la structure interne du graphe d'un point de vue topologique, ainsi que la structure de la matrice d'adjacence.

Définition 3.6

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Un chemin de longueur k *avec $k \geqslant 1$ dans G est une séquence de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ telle que*

$$\forall i = 1, 2, \ldots, k, \{v_i, v_{i+1}\} \in E.$$

Un tel chemin est noté $v_1 - v_2 - \cdots - v_{k+1}$. De plus, si tous les sommets d'un chemin sont distincts, il est dit élémentaire.

Intuitivement, un chemin est une séquence de sommets joints deux à deux par des arêtes, et la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le composent. Ce concept peut être étendu facilement dans le contexte de graphes dirigés, pondérés et de multigraphes.

Notez que dans le cadre de ce cours, on considérera systématiquement des chemins élémentaires, à l'unique exception du *chemin eulérien*, formellement introduit à la définition 3.10.

Exemple 3.9. Sur le graphe de la figure 3.6, on remarque, entre autres, que

— $1-2-3-4$ est un chemin élémentaire de longueur 3,
— $4-5-1-4-2$ est un chemin non élémentaire de longueur 4,
— $1-2-4-5$ est un chemin élémentaire de longueur 3.

◀

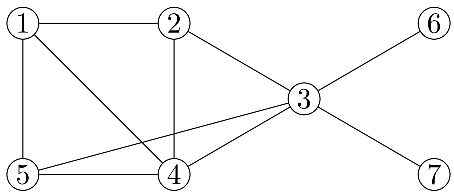


FIGURE 3.6 – Un exemple de graphe connexe

Définition 3.7

Un graphe non orienté G est connexe *si, pour chaque paire de sommets distincts de G il existe un chemin allant de l'un à l'autre.*

Remarque 3.10. Notons que la définition ci-dessus n'impose pas qu'il existe un *unique* chemin reliant chaque sommets. De tels chemins seront caractérisés à la définition 3.10.

Exemple 3.11. Le graphe de la figure 3.6 est connexe : il est possible de relier toute paire de sommets par un chemin (les chemins $1-2-3-4-5$ et $6-3-7$ ne sont pas disjoints et relient tous les sommets, par exemple). ◀

En pratique, on utilise des algorithmes dédiés pour déterminer si un graphe est connexe, tels que le *parcours en profondeur* [1, 7]. De tels algorithmes ne sont toutefois pas l'objet de ce cours.

Notons qu'en terme de caractérisation de la connexité d'un graphe, on est souvent amené à étudier des chemins particuliers : les cycles, qui sont intuitivement des chemins « qui se terminent au sommet où ils ont commencé ».

Définition 3.8

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $p = v_1 - v_2 - \cdots - v_{k+1}$ un chemin de G, avec $k \geqslant 3$. On dit que p est un cycle de longueur k *si $v_{k+1} = v_1$. Un cycle est dit* élémentaire *si les sommets $v_1, \ldots, v_k$ sont différents*[a]*.*

[a] Le sommet v_{k+1} est forcément identique à v_1

De plus, on dit qu'un graphe est *acyclique* s'il ne comprend pas de cycle élémentaire.

Exemple 3.12. Sur le graphe de la figure 3.6, on remarque, entre autres, que

— $1 - 2 - 4 - 1 - 2 - 4 - 1$ est un cycle non élémentaire de longueur 6,

— $1 - 2 - 4 - 5 - 1$ est un cycle élémentaire de longueur 4.

◀

À ce titre, on peut caractériser quels sont les graphes qui sont « minimalement connexes », au sens « si on supprime une arête arbitraire, le graphe n'est plus connexe ». On appelle de tels graphes des arbres. Intuitivement, un arbre a la même structure qu'un arbre généalogique : pas de cycles (on ne se marie pas avec ses parents, ses enfants ou ses frères et sœurs), et connexe. Les arbres sont très utilisés en tant que structures de données, comme concept illustratif d'appels récursifs, etc.

La définition suivante définit formellement le concept d'arbre à l'aide de plusieurs propositions équivalentes.

Définition 3.9 ▸ *[5]*

Soit G un graphe non orienté d'ordre $n \geqslant 2$, on dit que G est un arbre *si l'une des propositions suivantes équivalentes est vérifiée :*

— *G est connexe et acyclique,*

— *G est connexe et a $n - 1$ arêtes,*

— *G est acyclique et a $n - 1$ arêtes,*

— *G est acyclique et ajouter une arête crée exactement un cycle élémentaire,*

— *G est connexe et supprimer une arête brise la connexité de G,*

— *chaque paire de sommets de G est reliée par exactement un chemin élémentaire.*

Parfois, on nomme un sommet particulier du graphe qu'on appelle *racine*, à des fins de simple référencement.

Exemple 3.13. La figure 3.7 illustre un arbre de racine r. On remarque que chacune des propositions de la définition 3.9 est vérifiée. ◀

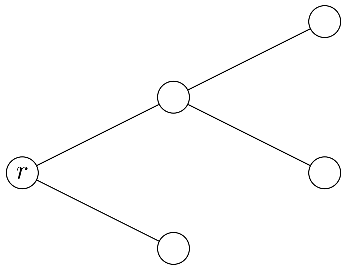


Figure 3.7 – Un exemple d'arbre de racine r

Finalement, on peut tenter de caractériser l'existence de chemins et cycles particuliers. Par exemple, on peut se demander si un graphe admet un chemin un cycle passant par toutes les arêtes ou tous les sommets. On appelle de tels chemins ou cycles *eulériens* ou *hamiltoniens*.

Définition 3.10

Soit G un graphe, un chemin eulérien *dans G est un chemin passant une unique fois par chaque arête de G. Un* cycle eulérien *dans G est un cycle passant une unique fois par chaque arête de G. Un graphe qui contient un cycle eulérien est appelé* graphe eulérien.

Notez que cette définition ne requiert *pas* que les chemins ou cycles recherchés au sein du graphe soient élémentaires. Il est donc tout à fait acceptable que ces chemins ou ces cycles passent plusieurs fois par un même sommet.

Pour savoir si un graphe est eulérien, une possibilité est de chercher un cycle eulérien, ou de montrer qu'il n'en existe pas. Une telle démarche peut être fastidieuse. Néanmoins, la propriété suivante est facile à vérifier et décrit les seuls cas dans lesquels un chemin ou un cycle eulérien peut exister au sein d'un graphe.

Propriété 3.11

Un graphe G est eulérien si et seulement si il est connexe et si le degré de chacun de ses sommets est pair. Un graphe G contient un chemin eulérien si et seulement si il est connexe et si le nombre de sommets de degré impair est zéro ou deux.

Intuitivement, lorsque l'on parcourt un cycle eulérien, à chaque fois que l'on entre dans un sommet, il est nécessaire d'en ressortir, ce qui explique la nécessité d'avoir des sommets de degré pair. Dans le cas d'un chemin, les sommets potentiels de degré impair sont le sommet de début et de fin du chemin.

Définition 3.12

Soit G un graphe, un chemin hamiltonien *dans G est un chemin élémentaire passant une unique fois par chaque sommet de G. Un* cycle hamiltonien *dans G est un cycle élémentaire passant par chaque sommet de G. Un graphe qui contient un cycle hamiltonien est appelé* graphe hamiltonien.

Contrairement au cas eulérien, les mathématiciens pensent qu'il n'existe pas d'algorithme rapide pour décider si un graphe admet un cycle hamiltonien ou non [9]. Ce problème est appelé le *problème du cycle hamiltonien*, et est très étudié en théorie des graphes [2, 3, 6, 11, 16, 17].

Dès lors, pour montrer qu'un graphe admet un cycle hamiltonien, il faut l'exhiber. Dans le cas contraire, il faut montrer qu'un tel cycle n'existe pas.

Exemple 3.14. Soient les graphes G et H illustrés à la figure 3.8. On remarque que :

— G est hamiltonien, il contient un cycle (et donc un chemin) hamiltonien, par exemple $v_1 - v_4 - v_2 - v_5 - v_3 - v_1$;

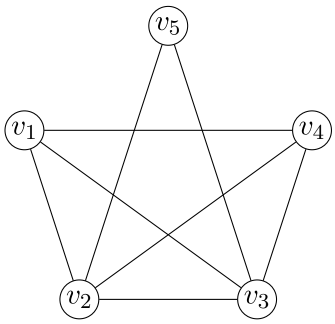
— G n'est pas eulérien : tous les sommets ne sont pas de degré pair (v_1 et v_4, par exemple) ;

— G contient un chemin eulérien : $v_1 - v_4 - v_2 - v_1 - v_3 - v_2 - v_5 - v_3 - v_4$, on remarque aussi que le nombre de sommets de degré impair est 2 (v_1 et v_4) ;

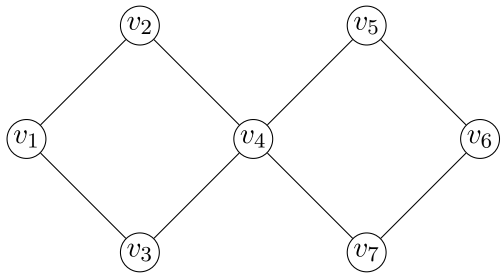
— H est eulérien, il contient donc un cycle (et un chemin) eulérien, par exemple $v_1 - v_2 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_4 - v_3 - v_1$, on note également que ce graphe est connexe et que le degré de tous les sommets est pair ;

— H n'est pas hamiltonien : en effet, pour passer de la partie droite à la partie gauche du graphe et y revenir, il est nécessaire de passer deux fois par v_4, ce qui n'est pas permis.

◀



(a) G



(b) H

FIGURE 3.8 – Deux exemples de graphes G et H

3.3 Distances

Les distances dans un graphe permettent de décrire l'éloignement d'un sommet par rapport à un autre, la distance moyenne pour se rendre d'un sommet arbitraire à un autre, le plus grand éloignement entre deux sommets d'un graphe, etc.

Ce concept a de nombreuses applications pratiques, des algorithmes guidant une voiture à l'aide de son G.P.S., en passant par le routage de paquets au sein d'un réseau ou l'analyse d'images.

Formellement, on définit la notion de distance de la façon suivante :

Définition 3.13

Soit G un graphe connexe, on définit la distance *entre deux sommets u et v de G, notée $|u, v|_G$, comme la longueur d'un plus court chemin entre u et v.*

Quand le contexte est clair, on omettra G et on notera[2] cette distance simplement $|u,v|$. Par convention, on suppose que $|u,u| = 0$ quel que soit le sommet u considéré.

Notez qu'au vu de cette définition, on ne considère pas la distance au sein de graphes non connexes[3]. En effet, dans un tel graphe, il est possible de trouver deux sommets qui ne sont pas reliés par un chemin. En particulier, ils ne sont donc pas reliés par un plus court chemin et la distance entre ces deux sommets ne peut être donc être calculée.

Par ailleurs, remarquez que dans le cas d'un graphe non orienté, on a toujours $|u,v| = |v,u|$, quel que soit les sommets u et v considérés. En effet, si $p = v - p_1 - \cdots - p_{k-1} - u$ est un plus court chemin de longueur k entre u et v, alors $p' = u - p_{k-1} - \cdots - p_1 - v$ est un plus court chemin de longueur k entre v et u.

Remarque 3.15. Bien que la longueur d'un plus court chemin entre deux sommets soit unique (et donc, la distance entre ces deux sommets également), il peut exister plusieurs plus courts chemins de même longueur entre deux sommets.

Remarque 3.16. La contrainte « longueur d'un *plus court* chemin » est importante dans la définition de distance. En effet, sans ce critère de minimalité, la longueur de n'importe quel chemin entre deux sommets pourrait être utilisée, ce qui induirait de l'ambiguïté.

Exemple 3.17. Sur le graphe G de la figure 3.9, on remarque, entre autres, que
- G est connexe,
- $|1,1| = 0$,
- $|1,3| = 1$,
- $|1,5| = 2$, et il y a quatre plus courts chemins joignant les sommets 1 à 5 : $1-2-5$, $1-3-5$, $1-6-5$ et $1-4-5$.

◀

Il existe de nombreux algorithmes efficaces pour calculer les distances au sein d'un graphe [7]. Ces algorithmes ne seront néanmoins pas détaillés dans cette section, dans la mesure où les concepts ne sont présentés qu'à titre d'introduction.

2. Dans la littérature, la distance entre deux sommets u et v est souvent notée $d(x,y)$. Dans ce document, on s'écarte de cette notation à des fins de clarté car la lettre d est déjà utilisée pour dénoter le degré d'un sommet, une notation également standard.

3. Dans la littérature, cette hypothèse n'est pas systématiquement faite. Le cas échéant, on considère que $|u,v| = \infty$ si aucun chemin ne relie u et v.

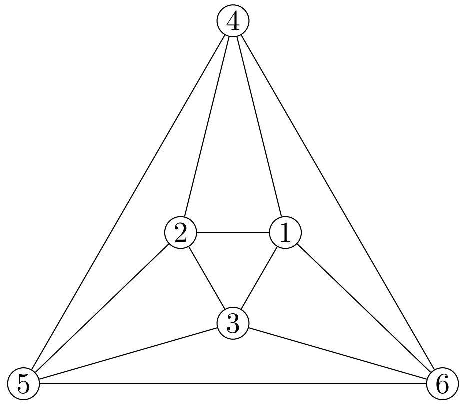


FIGURE 3.9 – Illustration du concept de distance

Aussi, lors d'exemples et d'exercices, les distances seront toujours calculées sur des graphes relativement petits.

Souvent, lorsque de nombreuses distances au sein d'un graphe ont besoin d'être calculées, on les calcule exhaustivement et on rassemble cette information au sein d'un tableau. Considérez les sommets d'un graphe G d'ordre n comme étiquetés par les naturels de 1 à n. On peut résumer les distances au sein d'un graphe dans une matrice $\varsigma \in \mathbb{N}^{n\times n} = (\varsigma_{ij})$ telle que

$$\varsigma_{ij} = k \text{ si } |i,j|_G = k.$$

On appelle une telle matrice la *matrice des distances* de G.

Exemple 3.18. La table 3.4 illustre la matrice des distances du graphe de la figure 3.9. La première ligne et colonne du tableau dénote les étiquettes des sommets considérés. On remarque que cette matrice est symétrique, et que sa diagonale est nulle, comme attendu. ◀

Une fois calculée, cette matrice est très utile pour connaître rapidement la distance entre n'importe quelle paire de sommets. Elle permet également de repérer facilement les distances les plus longues entre deux sommets arbitraires, le sommet le plus éloigné d'un sommet donné, etc. En l'occurrence, elle permet de facilement calculer le *diamètre* d'un graphe, défini comme suit.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	2	1
2	1	0	1	1	1	2
3	1	1	0	2	1	1
4	1	1	2	0	1	1
5	2	1	1	1	0	1
6	1	2	1	1	1	0

TABLE 3.4 – Matrice des distances de G

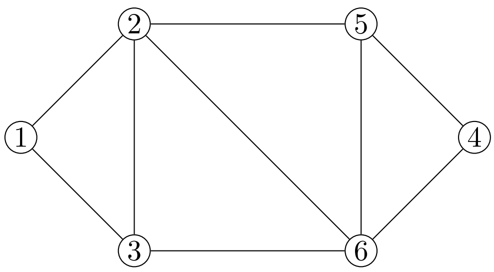
Définition 3.14

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, on définit le diamètre de G, noté $D(G)$ comme

$$D(G) = \max_{u,v \in V} |u, v|_G.$$

En d'autres termes, le diamètre est la distance la plus longue au sein d'un graphe, il décrit le plus grand éloignement entre deux sommets d'un graphe.

Exemple 3.19. Considérez le graphe de la figure 3.10. Dans sa matrice des distances, on remarque que la plus grande distance est 3, atteinte entre les sommets 1 et 4. On a donc $D(G) = 3$. ◀



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	3	2	2
2	1	0	1	2	1	1
3	1	1	0	2	2	1
4	3	2	2	0	1	1
5	2	1	2	1	0	1
6	2	1	1	1	1	0

FIGURE 3.10 – Un graphe et sa matrice des distances

Remarquez que la matrice des distances est l'une des seules façons de justifier formellement la valeur d'un diamètre. En effet, se contenter de dire « $D(G) = 3$, atteint entre les sommets v_1 et v_2 sur le chemin $v_1 - v_3 - v_5 - v_2$ » montre que la distance entre v_1 et v_2 est bien égale à 3, mais ne prouve en rien que cette distance est maximum. Cette information se trouve dans la matrice des distances, qui exhibe *toutes* les distances au sein du graphe considéré. De cette façon, on peut vérifier facilement que le nombre avancé est bien la distance maximum.

Finalement, notez que dans le cas de graphes pondérés, le concept de distance est facilement étendu en considérant la longueur d'un chemin comme étant la somme des poids des arêtes qu'il traverse. Similairement, dans les graphes dirigés, on considère qu'un chemin ne peut être construit qu'en suivant le sens des arcs.

3.4 Coloration de graphes

Les colorations de graphes sont une autre partie de la théorie des graphes riche en applications et en résultats. Les colorations permettent de partitionner les sommets d'un graphe en classes, chaque élément d'une classe étant incompatible avec les autres éléments de cette classe.

Par exemple, si l'on veut colorier les pays d'une carte du monde de sorte à ce que deux pays ayant une frontière commune ne partagent pas la même couleur, on va classer ces pays en plusieurs ensembles : les pays coloriés en rouge, les pays coloriés en bleu, etc. Aucun pays colorié en rouge ne peut avoir de frontière commune avec un autre pays colorié en rouge.

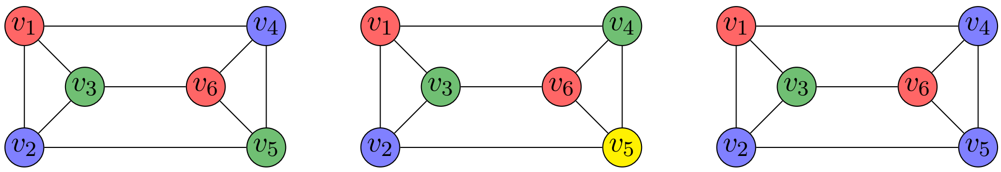
Les colorations sont utilisées notamment dans la conception d'horaires, l'assignation de fréquences radio, la distribution de ressources non partageables, etc. Formellement, on définit la notion de coloration de la façon suivante.

Définition 3.15

Une coloration *de graphe est une assignation de couleurs à chacun de ses sommets telle que deux sommets adjacents ne partagent pas la même couleur.*

Historiquement, le terme « coloration » trouve ses origines dans le problème de coloration des pays d'une carte cité ci-dessus [8].

Exemple 3.20. La figure 3.11 illustre deux colorations. La première utilise 3 couleurs et la deuxième 4. On remarque que l'assignation de couleurs sur le graphe de droite n'est pas une coloration : les sommets v_2 et v_5, ainsi que v_4 et v_5 ont la même couleur alors qu'ils sont adjacents. ◀



(a) Un graphe G colorié avec 3 couleurs

(b) Un graphe G colorié avec 4 couleurs

(c) Une assignation de couleurs qui n'est pas une coloration

FIGURE 3.11 – Plusieurs assignations de couleurs aux sommets d'un graphe

Souvent, dans le cadre de colorations, on est amené à chercher le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier un graphe. Ce concept est appelé le *nombre chromatique*.

Définition 3.16

Le nombre chromatique *d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs utilisées au sein d'une coloration de G.*

Exemple 3.21. Sur le graphe de la figure 3.11, on a $\chi(G) = 3$. En effet, on remarque que le graphe de gauche a été colorié avec 3 couleurs. De plus, il est impossible de le colorier avec 2 couleurs, car colorier uniquement les sommets v_1, v_2 et v_3 requiert déjà 3 couleurs (car ces sommets sont adjacents les uns aux autres). ◀

Remarque 3.22. Notez que l'hypothèse selon laquelle le nombre chromatique est le nombre *minimum* de couleurs nécessaires pour colorier un graphe est importante. En effet, sans cette contrainte de minimalité, on pourrait assigner une couleur à chaque sommet du graphe, ce qui n'est pas intéressant.

Remarquez également qu'au vu de la définition de χ, il est important de justifier que la quantité avancée est bien le nombre de couleurs minimum nécessaire. Une façon de le faire est de trouver, comme dans l'exemple ci-dessus, une partie du graphe qui ne peut pas être coloriée avec un nombre inférieur de couleurs.

Néanmoins, de telles parties « interdites » d'un graphe ne suffisent pas toujours : en effet, il existe des graphes possédant un ensemble de trois sommets tous connectés deux à deux [4] et ne pouvant néanmoins pas être coloriés avec trois couleurs. Par exemple, le graphe de la figure 3.12 ne peut être colorié avec 3 couleurs. En effet, une fois une couleur attribué au sommet central, il faut alterner deux couleurs le long du chemin périphérique. Comme la longueur de ce chemin est impaire, une quatrième couleur sera nécessaire pour achever la coloration.

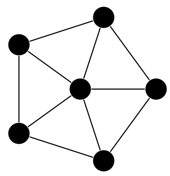


FIGURE 3.12 – Un graphe ne pouvant être colorié avec 3 couleurs

De plus, à partir d'une coloration non optimale (qui n'utilise pas un nombre minimum de couleurs), il n'est pas toujours facile de la transformer en coloration optimale. Sur le graphe du milieu de la figure 3.11, par exemple, on a utilisé 4 couleurs, ce qui n'est pas optimal. Toutefois, on ne peut pas se contenter de remplacer la couleur jaune de v_5 par la couleur rouge, bleue ou verte, car les sommets adjacents à v_5 sont coloriés dans ces couleurs.

Notez qu'il n'existe à ce jour pas de technique *rapide* permettant de calculer rapidement le nombre chromatique d'un graphe. De plus, les mathématiciens pensent qu'un tel algorithme n'existe tout simplement pas [9].

Il existe néanmoins certains résultats donnant des bornes sur le nombre chromatique, comme le théorème suivant, célèbre.

Théorème 3.17 ▸ ***Théorème des 4 couleurs***

Un graphe G peut être représenté dans le plan tel que ses arêtes ne se croisent pas [a] *si et seulement si* $\chi(G) \leqslant 4$.

a. Un tel graphe est appelé un graphe *planaire*.

Ce théorème affirme donc, entre autre, que toute carte des provinces d'un pays ou des pays du monde peut être coloriée avec un maximum de quatre couleurs.

La preuve de ce théorème est excessivement complexe, et n'est pas vue ici

4. Un tel ensemble de sommets est appelé une *clique* d'ordre 3.

entre autres pour cette raison. Notez que cette preuve a un sens historique, dans la mesure où c'est la première preuve assistée par ordinateur à avoir été acceptée par la communauté scientifique. Un ordinateur a en effet été utilisé pour énumérer des milliers de configurations, qui ont été ultérieurement analysées par des scientifiques.

3.5 Exercices résolus

Exercice 3.1. Soit le graphe[5] G de la figure 3.13. Déterminez

- l'ordre de G,
- la taille de G,
- si G est connexe,
- le diamètre de G,
- le nombre chromatique de G,
- si G possède un cycle ou un chemin eulérien.

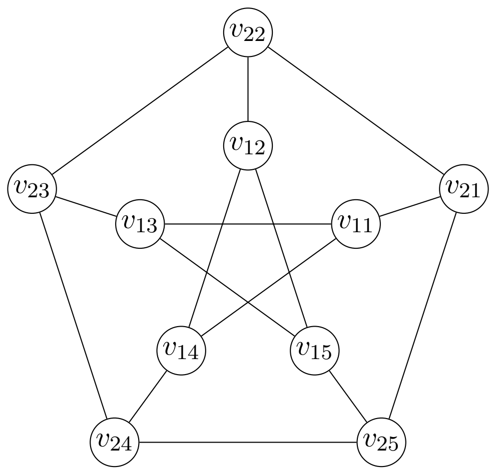


FIGURE 3.13 – Le graphe de Petersen

Solution. On remarque que G est d'ordre 10 et de taille 15 car il possède respectivement 10 sommets et 15 arêtes.

5. Ce graphe est appelé le graphe de Petersen.

Ce graphe est connexe, il est en effet possible de relier chaque paire de sommets entre eux par un chemin.

On remarque que $D(G) = 2$, à l'aide de la matrice des distances de G illustrée à la table 3.5. Comme cette matrice est symétrique à diagonale nulle (car G est non orienté), on s'est ici contenté de ne représenter que la partie triangulaire supérieure de la matrice.

	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}
v_{11}		2	1	1	2	1	2	2	2	2
v_{12}			2	1	1	2	1	2	2	2
v_{13}				2	1	2	2	1	2	2
v_{14}					2	2	2	2	1	2
v_{15}						2	2	2	2	1
v_{21}							1	2	2	1
v_{22}								1	2	2
v_{23}									1	2
v_{24}										1
v_{25}										

TABLE 3.5 – Matrice des distances du graphe de Petersen

Enfin, on a $\chi(G) = 3$. En effet, la figure 3.14 illustre une 3-coloration de G (on a donc $\chi(G) \geqslant 3$), et il n'est pas possible de colorier G avec 2 couleurs. En effet, si l'on donne arbitrairement la couleur 1 au sommet v_{22}, et donc en conséquence la couleur 2 à v_{23}, v_{12} et v_{21}, forçant ainsi la couleur 1 aux sommets v_{13} et v_{11}, il n'est pas possible d'assigner la couleur 1 ou 2 à v_{14} et v_{15}.

Ce graphe ne possède ni de chemin ni de cycle eulérien. En effet, les dix sommets de G sont de degré impair. ◀

Exercice 3.2. Même énoncé que précédemment avec le graphe $G = (V, E)$ d'ordre 5 tel que

$$\forall v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 \Rightarrow \{v_1, v_2\} \in E. \tag{3.1}$$

Solution. L'équation (3.1) dénote un graphe d'ordre 5 tel que quel que soit la paire de sommets distincts considérés, il existe une arête entre ces deux sommets.

On peut immédiatement conclure que

— G est d'ordre 5 et de taille $\frac{5\times 4}{2} = 10$;

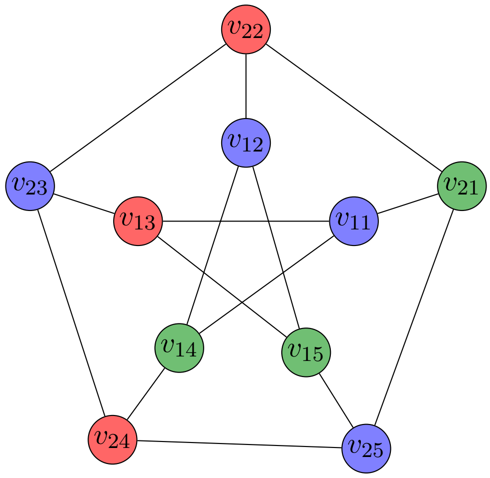


FIGURE 3.14 – Une 3-coloration du graphe de Petersen

— G est connexe (car tous les sommets sont reliés deux à deux) ;
— le diamètre de G est de 1, car il est possible de se rendre directement d'un sommet à n'importe quel autre en empruntant une unique arête ;
— $\chi(G) = 5$, car comme tous les sommets sont reliés entre eux par une arête, il n'est pas possible de colorier G avec moins de 5 couleurs ;
— G est eulérien, car tous ses sommet sont de degré pair (degré égal à 4).

Ces conclusions peuvent être vérifiés sur une représentation de G à la figure 3.15. Remarquons également que comme G n'est pas planaire, il n'est pas possible de le dessiner avec 4 couleurs.

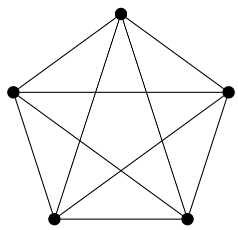


FIGURE 3.15 – Un graphe G

◀

Exercice 3.3. Dessinez un graphe G d'ordre 6 tel que $D(G) = 2$ et $\chi(G) = 2$.

Solution. Le graphe d'ordre 6 de la figure 3.16 répond aux caractéristiques.

On remarque que les sommets du haut du graphe ne sont pas adjacents entre eux, on peut donc leur assigner la même couleur. Avec un argument similaire pour les sommets du bas, on en conclut que $\chi(G) = 2$.

Par ailleurs, tous les sommets du haut du graphe sont adjacents deux à deux à un sommet du bas du graphe. De plus, pour relier un sommet d'un côté du graphe à un sommet du même côté, il faut recourir à un chemin de longueur 2. Dès lors, on a $D(G) = 2$. ◀

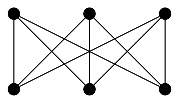


FIGURE 3.16 – Un G d'ordre 6 tel que $D(G) = 2$ et $\chi(G) = 2$

Exercice 3.4. Considérez une maison dont un plan simplifié est illustré à la figure 3.17. Les pièces de cette maison sont délimitées par des murs (les lignes), les trous désignent les portes. Est-il possible de promener le chien de la famille en passant une unique fois par chaque porte ? Est-ce possible si l'on impose de revenir à la pièce de départ ?

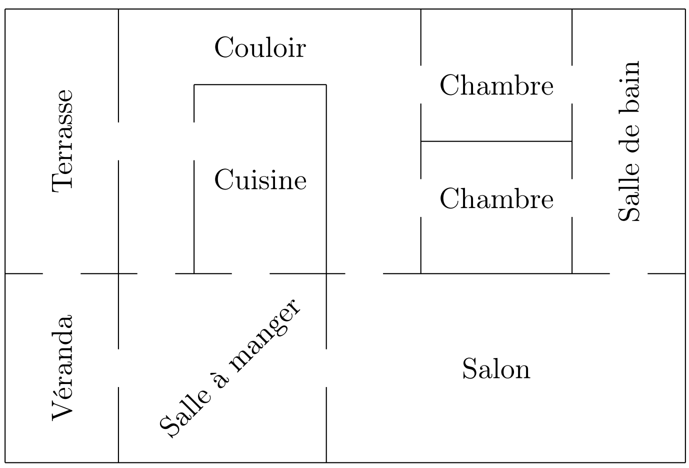


FIGURE 3.17 – Plan d'une maison

Solution. Pour des raisons de présentation, associons les étiquettes suivantes aux pièces de la maison :

— 1 : véranda,
— 2 : terrasse,
— 3 : salle à manger,
— 4 : couloir,
— 5 : cuisine,
— 6 : salon,
— 7 : chambre inférieure,
— 8 : chambre supérieure,
— 9 : salle de bain.

On peut modéliser la maison sous forme de graphe en associant un sommet à chaque pièce, et en reliant deux sommets par une arête si les pièces sous-jacentes sont séparées par une porte. Un tel graphe est illustré à la figure 3.18.

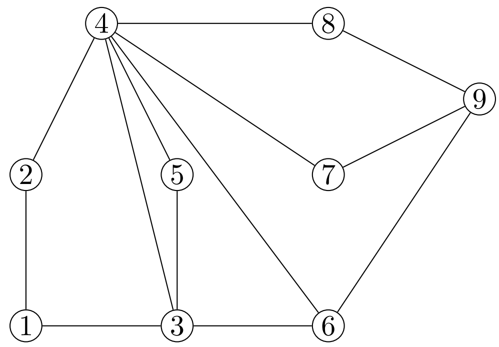


FIGURE 3.18 – Modélisation de la maison sous forme de graphe

Promener le chien en passant une unique fois par chaque porte correspond à trouver un chemin eulérien dans le graphe de la figure 3.18. On remarque que comme le nombre de sommets impair de ce graphe est 2 (pour le salon et la salle de bains), qu'un tel chemin existe (théorème d'Euler). Par exemple, le chemin

$$6 \to 3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 4 \to 6 \to 9 \to 7 \to 4 \to 8 \to 9$$

est eulérien.

On remarque qu'un circuit eulérien n'existe pas, en effet, certains sommets sont de degré impair (cf. argument précédent). Il n'est donc pas possible de promener le chien de la famille en passant une unique fois par chacune des portes et en revenant à son point de départ. ◀

Exercice 3.5. Panique à l'aéroport de Zaventem ! Les distances de sécurité des avions en approche ou qui viennent de décoller ne sont pas respectées. L'ordinateur de la tour de contrôle affiche la carte illustrée à la figure 3.19. Les distances de sécurité que doivent respecter chaque avion sont dessinées en pointillés. La procédure standard de sécurisation impose à deux avions trop proches de voler à des altitudes différentes.

Combien de niveaux d'altitudes différents la tour de contrôle doit-elle imposer aux avions aux alentours de l'aéroport, au moment où la carte de la figure 3.19 est affichée ?

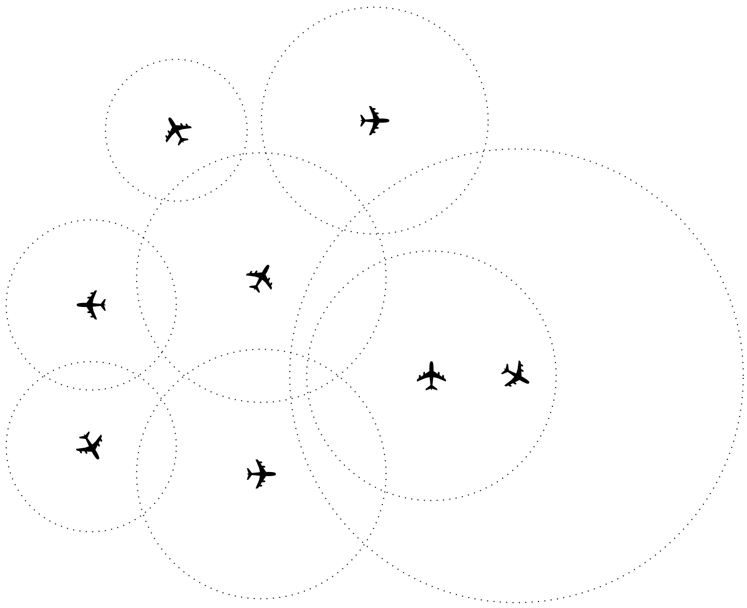


FIGURE 3.19 – Avions aux alentours de l'aéroport de Zaventem

Solution. Modélisons la situation de la figure 3.19 par un graphe. Les avions seront les sommets du graphe, et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les cercles correspondant aux distances de sécurité des avions considérés s'intersectent. Autrement dit, deux sommets sont reliés par une arête si les avions peuvent s'accrocher, c'est-à-dire s'ils doivent être affectés à des altitudes différentes.

On cherche à colorier les sommets du graphe : une couleur correspond à un niveau d'altitude. En effet, deux sommets avec des couleurs identiques étant non adjacents, les avions correspondants sont assignés à des altitudes différentes. Calculer le nombre minimum de niveaux d'altitude à assigner aux avions revient donc à calculer le nombre chromatique de ce graphe.

On obtient ainsi le graphe de la figure 3.20. On remarque que sur cette figure, il est impossible de colorier le graphe avec moins de 4 couleurs, à cause des sommets p_3, p_4, p_7 et p_8 qui sont tous adjacents deux à deux. De plus, il est possible de colorier le graphe avec 4 couleurs, comme illustré. On a donc $\chi(G) = 4$.

Ainsi, on a besoin d'assigner quatre niveaux d'altitude pour l'ensemble des avions : un par couleur.

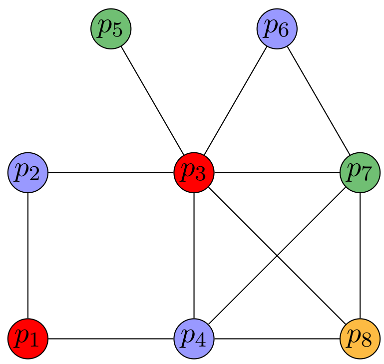


FIGURE 3.20 – Modélisation en graphe de la figure 3.19

◀

Exercice 3.6. Considérez les cours que doivent suivre les groupes A à F illustrés à la table 3.6. Par exemple, on remarque que le groupe A doit suivre « système » et « réseau », alors que le groupe C doit suivre à la fois système, java et analyse.

1. Modélisez la situation illustrée à la table 3.6 à l'aide d'un graphe.
2. Que vaut χ sur ce graphe ?
3. Tous ces cours de chacun 2h peuvent-ils être organisés au sein d'une journée de 8h, sachant que le professeur qui donne Java donne également le cours d'analyse, et que les classes ne peuvent accueillir qu'un groupe à la fois ?

	Système	**Math**	**Java**	**Analyse**	**Réseau**
Groupe A	X				X
Groupe B		X	X	X	
Groupe C	X		X	X	
Groupe D		X	X		X
Groupe E	X				X
Groupe F		X			

TABLE 3.6 – Cours à dispenser à différents groupes

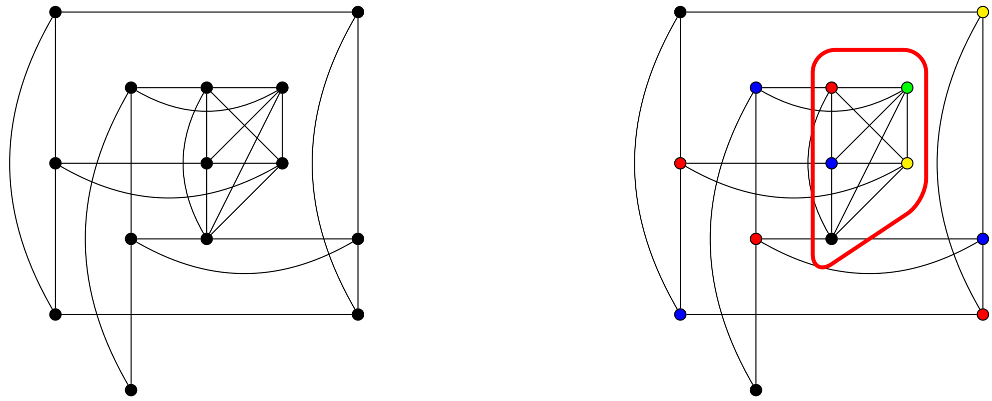
Solution. 1. On remarque, au vu des contraintes ci-dessus, que
- — un groupe ne peut pas suivre deux cours différents en même temps,
- — un cours ne peut pas être donné à plusieurs groupes en même temps,
- — un professeur ne peut pas donner plus d'un cours à la fois.

Modélisons cette situation à l'aide d'un graphe. Les sommets seront des couples « (Groupe, Cours) ». Deux sommets adjacents signifieront que les cours sous-jacents ne peuvent être donnés en même temps aux groupes concernés. Une coloration des sommets d'un tel graphe listera donc les cours qui peuvent être donnés en même temps et à quels groupes. En l'occurrence, les cours de deux sommets ayant la même couleur peuvent être donnés en même temps.

Modélisons donc chaque couple « (Groupe, Cours) » du tableau par un sommet. Un sommet (g_1, c_1) est adjacent à un sommet (g_2, c_2) si $g_1 = g_2$ ou si $c_1 = c_2$. Ainsi, lors du calcul du nombre chromatique, deux sommets ayant un groupe ou un cours commun ne pourront se voir assigner la même couleur, et donc ne pourront se donner en même temps. De la même manière, si les cours de deux sommets sont donnés par un même professeur, il faut également les joindre par une arête afin que les cours ne puissent être donnés en même temps.

Ceci donne donc le graphe illustré à la figure 3.21(a). Sur cette figure, on a respecté la disposition des sommets similairement à leur place au sein de la table 3.6, pour des raisons de clarté.

2. On a $\chi(G) = 5$. En effet, la figure 3.21(b) illustre une coloration à 5 couleurs. De plus, il n'est pas possible de colorier ce graphe avec moins de 5 couleurs, car les 5 sommets entourés en rouge sur cette figure sont complètement adjacents entre eux, et nécessitent donc 5 couleurs différentes pour une coloration.



(a) Modélisation en graphe

(b) Coloration de graphe

FIGURE 3.21 – Le graphe correspondant aux contraintes de cours

3. Comme la question est de savoir si ces cours de 2h chacun peuvent être organisés au sein d'une seule journée de 8h, il faut savoir s'il est possible de colorier ce graphe avec 4 couleurs. Si c'est possible, alors, chaque sommet ayant la même couleur peut être organisé en même temps.

   Or, on remarque que 5 sommets sont complètement adjacents entre eux, comme illustré en rouge à la figure 3.21(b). Ces 5 sommets nécessitent à eux seuls 5 couleurs pour être coloriés.

   Donc, il n'est pas possible de donner ces cours sur une seule journée.

◀

CHAPITRE 4

Dénombrement

Un problème de modélisation • Outils de base du dénombrement • Deux grandes questions • Arrangements et permutations • Combinaisons • Exercices résolus

Parfois, en informatique, on est amené à compter le nombre de configurations possibles d'une structure. En effet, la résolution de nombreux problèmes consiste en l'énumération exhaustive des possibilités pour ensuite décider pour chacune si elle est une solution ou non au problème. Et avant d'énumérer, il est prudent de dénombrer, c'est-à-dire de compter.

Habituellement, on classe ces énumérations en différents types, comme les *arrangements* et les *combinaisons*. L'étude du nombre de permutations, d'arrangements, de combinaisons ou de partitions d'un ensemble fini d'objets s'appelle traditionnellement en mathématique l'*analyse combinatoire*. Elle est omniprésente en informatique mais plus généralement en sciences.

Il y a plusieurs autres raisons à cette omniprésence de l'analyse combinatoire en sciences exactes, telles que

— le codage des données en binaire,
— les propriétés combinatoires des structures de données,
— la programmation itérative ou récursive,

— l'estimation du temps de calcul des algorithmes en fonction de la taille des entrées,
— séquençage de l'ADN,
— estimation des probabilités d'occurrence d'événements, etc.

L'analyse combinatoire joue également un rôle important en analyse statistique. Ses domaines d'application sont nombreux : physique, économie, médecine, recherche opérationnelle, démographie, et, comme déjà signalé, informatique.

Dans ce chapitre, on verra en détail comment décomposer un problème combinatoire en sous-problèmes, et calculer les arrangements ou combinaisons d'objets à l'aide de formules et de raisonnements efficaces dédiés. Notez qu'il existe certains comptages pour lesquels aucune formule ni aucun comptage efficace (qui n'énumère pas *à la main* toutes les configurations) ne peut être élaborée. Compter le nombre de graphes non isomorphes à un ordre donné est un exemple d'un tel problème.

Plus particulièrement, ce chapitre commence à la section 4.2 avec plusieurs règles et outils de base utilisés intensivement dans les problèmes de comptage habituels. Ce chapitre se poursuit en 4.1 avec deux exemples de problèmes classiques en combinatoire, et insiste sur l'importance de les modéliser correctement afin de pouvoir déterminer le type de raisonnement à utiliser pour compter.

Dans cet ordre d'idées, la suite de ce chapitre présente aux sections 4.4 et 4.5 ces types de raisonnement en question et les concepts associés d'arrangements et de combinaisons, à utiliser selon que l'ordre au sein des structures énumérées ait de l'importance ou non.

Enfin, comme d'accoutumée, des exercices résolus concluent ce chapitre en section 4.6.

4.1 Un problème de modélisation

Comme déjà mentionné dans les chapitres précédents, la modélisation mathématique est souvent une étape importante dans la résolution d'un problème, si ce n'est la plus importante. Dans ce chapitre, en l'occurrence, on verra que sans elle, on ne peut résoudre un problème à la fois correctement tout en justifiant son raisonnement sur des arguments formels.

En particulier, on expose deux principes de modélisation utilisés intensément en combinatoire, à savoir la modélisation d'un problème sous la forme d'un *diagramme en arbre*, détaillée à la section 4.1.1, et le codage d'une solution d'un problème en section 4.1.2.

4.1.1 Diagrammes en arbre

De nombreux problèmes de comptage peuvent être modélisés et résolus en utilisant des *diagrammes en arbre*. La structure d'arbre est sensiblement la même que celle vue dans le chapitre 3 dédié aux graphes.

On considère ici qu'un arbre est constitué d'une *racine* de laquelle partent plusieurs *branches*, avec d'autres branches partant des extrémités d'autres branches. Les sommets de degré 1 sont appelés les *feuilles*. On utilise cette structure en modélisant chaque choix possible d'une configuration comme une branche. Pour compter le nombre de configurations possibles du problème original, il suffit de compter les feuilles de l'arbre.

Exemple 4.1. Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 4 ne possèdent pas deux « 1 » consécutifs. ◀

Solution. Le diagramme de la figure 4.1 illustre cette situation. Sur cette figure, on remarque qu'il y a 8 telles chaînes de caractères. ◀

4.1.2 Encodage d'une solution d'un problème

Parfois, la modélisation en arbre ainsi ne suffit pas pour résoudre un problème combinatoire directement. Ceci peut arriver quand il existe un trop grand nombre de configurations (représenter en arbre devient fastidieux) ou quand le problème est trop complexe (les règles usuelles de comptage ne s'appliquent pas directement).

Dès lors, il convient d'utiliser une modélisation dédiée sur laquelle on pourra appliquer les outils vus précédemment.

Pour illustrer cette modélisation ainsi que les points importants à garder à

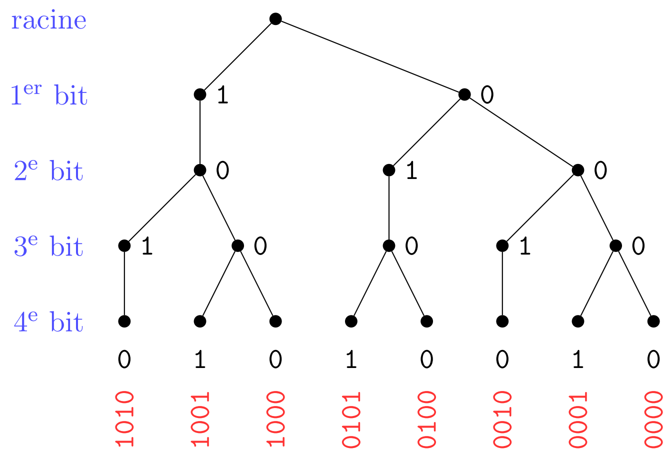


FIGURE 4.1 – Chaînes de caractères binaires de longueur 4 ne contenant pas deux « 1 » consécutifs

l'esprit dans le reste de ce chapitre, introduisons deux exemples de problèmes simples, sans chercher à les résoudre [1].

Problèmes

4.1. Combien de codes de vélos à quatre chiffres décimaux existe-t-il ?

4.2. Combien de mains poker à 5 cartes au sein d'un jeu de 52 existe-t-il ?

Modélisons ces problèmes de manière simple sous forme mathématique. En l'occurrence, on veut pouvoir décrire « ce qu'est un code de vélo » et « ce qu'est une main de poker ». On crée ainsi un « encodage » d'un code de vélo et d'une main de poker. Modéliser ces situations de cette manière permet de compter le nombre d'encodages différents possibles plutôt que de compter le nombre de situations originales, abstraites.

Dans le cas de des deux problèmes simples ci-dessus, on peut par exemple procéder de la façon suivante.

1. La résolution de ces problèmes sera effectuée plus loin dans le chapitre.

Encodage

Un code de vélo est un n-uple $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ tel que $c_i \in \{ 0, 1, 2, \ldots, 9 \}$ avec $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Cette petite définition décrit ce qu'est un code de vélo. Tous les codes de vélo peuvent être modélisés avec cette définition. Par exemple, le code « 2343 » est modélisé par le n-uple $(2, 3, 4, 3)$.

Dans le cas des mains de poker, on peut procéder comme suit. Dans cette définition, on note le valet comme 11, la reine comme 12, le roi comme 13 et l'as comme 1. Ainsi, le roi de trèfle est noté $13\clubsuit$.

Encodage

Une main de poker est un n-uple $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ tel que

$$\begin{aligned} m_i \in \{ & 1\heartsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, 11\heartsuit, 12\heartsuit, 13\heartsuit, \\ & 1\diamondsuit, 2\diamondsuit, 3\diamondsuit, 4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 6\diamondsuit, 7\diamondsuit, 8\diamondsuit, 9\diamondsuit, 10\diamondsuit, 11\diamondsuit, 12\diamondsuit, 13\diamondsuit, \\ & 1\clubsuit, 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, 5\clubsuit, 6\clubsuit, 7\clubsuit, 8\clubsuit, 9\clubsuit, 10\clubsuit, 11\clubsuit, 12\clubsuit, 13\clubsuit, \\ & 1\spadesuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 4\spadesuit, 5\spadesuit, 6\spadesuit, 7\spadesuit, 8\spadesuit, 9\spadesuit, 10\spadesuit, 11\spadesuit, 12\spadesuit, 13\spadesuit \}, \end{aligned}$$

avec $1 \leqslant i \leqslant 5$.

Cette définition décrit bien toutes les mains de poker possibles, comme des n-uples à 5 composantes. Par exemple, la main illustrée à la figure 4.2 est encodée comme $(11\spadesuit, 1\diamondsuit, 13\diamondsuit, 5\clubsuit, 12\heartsuit)$.

Bien que rébarbatives, ces deux définitions vont permettre de répondre très rapidement et avec une justification formelle à deux questions qu'il est *systématiquement* nécessaire de se poser dans les problèmes de comptage, à savoir « si l'ordre importe » et « si les répétitions sont autorisées ». Ces questions seront abordées plus loin, aux sections 4.3, 4.4 et 4.5.

Notons qu'en pratique, encoder une configuration dans le but d'effectuer un dénombrement sera parfois difficile, étant donné que les problèmes considérés incluent régulièrement des contraintes. Dans la mesure du possible, on essaiera d'introduire un maximum de ces contraintes dans l'encodage utilisé, afin de faciliter les calculs.

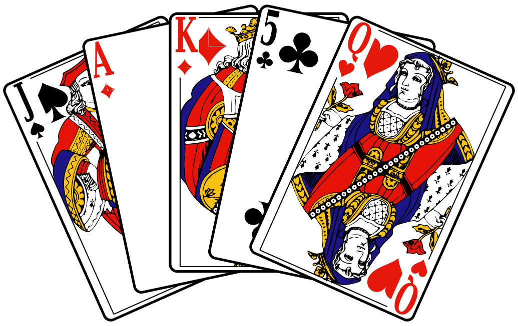


Figure 4.2 – Une main de cinq cartes

Par exemple, on peut compter un placement de 8 pions identiques sur un échiquier comme un 8-uple de composantes allant de 1 à 64 (ces composantes dénotant la case à laquelle les pions se trouvent), mais si l'on veut les placer sur des lignes différentes, il est peut-être plus sage de modéliser ce placement comme un 8-uple de composantes allant de 1 à 8 (la composante i étant à k si le pion de la i^{e} ligne se trouve à la colonne k).

4.2 Outils de base du dénombrement

Souvent, les problèmes de combinatoire ne peuvent être résolus directement par un encodage et des diagrammes en arbre. Ainsi, résoudre un problème combinatoire consiste avant tout à le décomposer en sous-problèmes plus faciles à résoudre, et à ensuite combiner les résultats de résolution de ces problèmes pour composer la solution du problème original.

Par exemple, si on doit assigner deux informaticiens sur des ordinateurs dans une salle qui en contient dix, on peut décomposer ce problème en assignant d'abord un ordinateur au premier informaticien, puis en assignant un ordinateur au second.

Cette section détaille donc comment analyser un problème complexe afin de choisir une bonne manière de le décomposer en sous-problèmes plus simples. De plus, elle explique comment recomposer la solution du problème original à partir des solutions de ces sous-problèmes, à l'aide d'opérateurs mathématiques simples tels que le « + » et le « × ».

La structure de cette section ainsi que les exemples qui s'y trouvent sont largement inspirés du livre de Rosen [14], à l'exception de la fin consacrée au principe des tiroirs.

4.2.1 La règle du produit

Supposons que l'on se pose la question suivante : « combien de chaînes de caractères binaires de longueur 3 peut-on créer ? ». Procédons comme indiqué ci-dessus, c'est-à-dire en décomposant ce problème en sous-problèmes.

On peut encoder une telle chaîne comme un triplet (c_1, c_2, c_3), où $c_i \in \{ 0, 1 \}$. Pour composer un tel triplet, on peut commencer par assigner un caractère à la position 1. Il y a 2 tels premiers choix. On peut ensuite assigner un caractère à la position 2. Il y a également 2 tels choix. Finalement, on peut assigner un caractère à la position 3, il y a encore une fois deux tels choix.

On peut représenter cette construction sous forme d'arbre, tel qu'illustré à la figure 4.3.

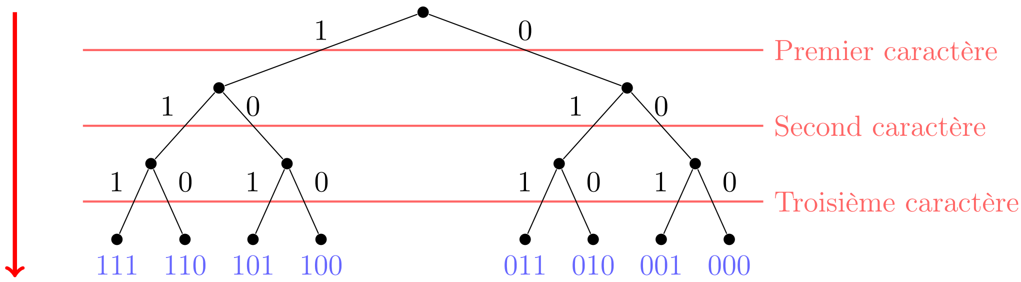


Figure 4.3 – Construction de chaînes de caractères binaires de longueur 3

Ainsi, on remarque qu'à l'étape 1, on a 2 choix possibles. Pour chacun de ces deux choix, on en a deux suivants, ce qui résulte en 4 choix possibles $(2 \cdot 2)$. Finalement, pour chacun de ces 4 choix, on a 2 choix possibles, ce qui résulte finalement en $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ chaînes de caractères possibles.

On peut généraliser cette démarche dans le cas du calcul de la taille d'un produit cartésien. Si l'on décompose la construction d'un couple, on doit sélectionner indépendamment un élément de chaque ensemble qui constitue ce produit, et on a donc

$$|S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2|.$$

On peut finalement énoncer la « *la règle du produit* », très utilisée en combinatoire et utilisée quand une tâche est constituée d'une séquence de différentes sous-tâches.

Théorème 4.1 ▸ *Règle du produit*

Supposez qu'une procédure soit constituée d'une séquence de deux tâches. Si il y a n_1 façons de réaliser la première tâche et n_2 façons de réaliser la deuxième, alors il y a $n_1 n_2$ façons de réaliser la procédure originale.

Exemple 4.2. Les chaises d'un auditoire sont étiquetées par une lettre majuscule de l'alphabet et un naturel compris entre 1 et 100. Quel est le plus grand nombre de chaises qui peuvent être étiquetées différemment de cette façon ? ◀

Solution. La procédure d'étiquetage des chaises peut être séparée en deux tâches :

1. assigner une lettre majuscule de l'alphabet parmi les 26 lettres disponibles,
2. assigner l'un des 100 naturels disponibles.

La règle du produit affirme qu'il y a donc $26 \cdot 100$ façons d'étiqueter une chaise. ◀

Parfois, il est utile de généraliser la règle du produit en séparant une procédure en une séquence de k tâches. Dans ce cas, on multiplie le nombre de façons qu'il y a de réaliser chacune des k tâches pour achever la procédure originale.

Exemple 4.3. Combien de plaques de voitures peuvent être conçues si chaque plaque est constituée d'une séquence de trois lettres majuscules, suivie d'un tiret et d'une séquence de trois chiffres décimaux ? ◀

Solution. Comme illustré à la figure 4.4, il y a 26 choix possibles pour chacune des trois lettres majuscules constituant la première partie de la plaque, et 10 choix possibles de chiffres décimaux pour la seconde partie de la plaque.

Dès lors, la règle du produit affirme qu'il y a

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$$

différentes plaques de voitures possibles. ◀

$$\underbrace{\_\quad \_\quad \_}_{\substack{\text{26 choix}\\ \text{possibles}\\ \text{pour}\\ \text{chaque}\\ \text{lettre}}} \quad \underbrace{\_\quad \_\quad \_}_{\substack{\text{10 choix}\\ \text{possibles}\\ \text{pour}\\ \text{chaque}\\ \text{chiffre}}}$$

FIGURE 4.4 – Structure d'une plaque de voiture

Exemple 4.4. L'information héréditaire d'un organisme vivant est encodée en utilisant *l'acide désoxyribonucléique* (ADN), ou dans certains virus, *l'acide ribonucléique* (ARN). L'ADN et l'ARN sont des molécules très complexes, et interagissent à différents niveaux du processus du vivant.

Dans le cadre de ce chapitre, on ne donne ici qu'une brève description sur ces deux structures, leurs interactions dans le vivant et l'utilisation de la combinatoire dans ce contexte. L'étudiant intéressé trouvera plus d'informations à ce sujet, ainsi que les références au contenu scientifique de cet exemple dans le livre de Petsko et Ringe [13].

Les molécules d'ADN et d'ARN sont constituées de sous-composants appelés *bases*, et dans les deux cas, chaque base peut être de quatre types différents [2]. Un *gène* est une séquence d'ADN qui encode une protéine particulière. L'ensemble de l'information génétique d'un organisme est appelé son *génome*.

Les séquences d'ADN et d'ARN codent de longues chaînes de protéines appelées *acides aminés*. Il y a 22 acides aminés essentiels dans l'organisme humain. On remarque rapidement qu'une séquence d'au moins 3 bases est nécessaire pour encoder ces 22 acides aminés. En effet, comme il n'y a que quatre possibilités

2. Dans le cas de l'ADN, les bases sont la guanine (G), la thymine (T), l'adénine (A) et la cytosine (C). Dans le cas de l'ARN, l'uracile (U) remplace la thymine.

pour chaque base dans l'ADN, par la règle du produit il y a $4^2 = 16 < 22$ différentes séquences de deux bases. Toutefois, il y a $4^3 = 64$ différentes séquences de trois bases, ce qui fournit assez de séquences différentes pour encoder les 22 acides aminés [3].

L'ADN des créatures vivantes simples telles que les algues et les bactéries a une longueur comprise entre 10^5 et 10^7, ce qui signifie que leur ADN est composé d'une séquence d'entre 10^5 et 10^7 bases. Des organismes plus complexes, tels que les insectes, les oiseaux et les mammifères ont un ADN de longueur comprise entre 10^8 et 10^{10}. Dès lors, par la règle du produit, il existe au moins 4^{10^5} séquences d'ADN différentes possibles pour les organismes simples, et au moins 4^{10^8} séquences dans le cas des organismes complexes. Ces nombres sont gigantesques, ce qui explique entre autres la grande diversité du vivant sur la planète [4]. ◀

4.2.2 Le principe d'inclusion-exclusion

Similairement au cas du produit, partons d'un problème simple : pour reformer la grille des sections « informatique : réseaux » et « informatique : systèmes », on réunit les professeurs donnant des cours dans ces deux sections. Combien de place faut-il prévoir ?

On peut représenter cette situation par un diagramme de Venn, tel qu'illustré à la figure 4.5.

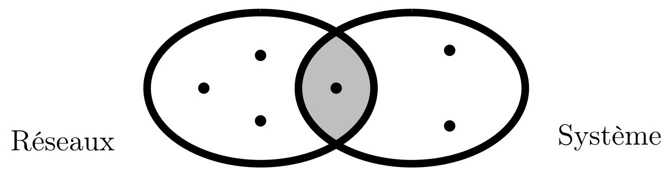


FIGURE 4.5 – Ensemble des professeurs de réseaux et de système

Sur cette figure, on remarque que bien qu'il y ait 4 professeurs de réseaux et 3 de systèmes, il ne faut pas prévoir $4 + 3$ places. En effet, il y a un des professeurs qui donne cours à la fois en réseaux et en systèmes. En conséquence, lorsque l'on

3. En pratique, plusieurs séquences différentes encodent les mêmes acides aminés, mais des séquences de trois bases suffisent quand même à encoder l'ensemble des 22 acides aminés.

4. Notons que de nombreuses séquences ne correspondent pas à un être vivant, et au sein de l'ADN, certaines parties sont considérées comme *non codantes*

fait $4+3$, on compte ce professeur deux fois [5]. La réponse est donnée par $4+3-1$, où 1 est le nombre de professeurs qui donnent cours à la fois en réseaux et en système.

On peut généraliser cette règle « addition / soustraction » de manière ensembliste comme suit.

Théorème 4.2 ▸ *Principe d'inclusion-exclusion*

Soient S_1 et S_2 deux ensembles, on a

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|.$$

En particulier, on remarque que si S_1 et S_2 sont disjoints, on a $|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$.

Exemple 4.5. Un étudiant peut choisir un projet en informatique parmi deux listes, qui contiennent respectivement 23 et 15 projets possibles. Aucun projet n'est présent sur plus d'une liste. Combien de projets l'étudiant peut-il choisir ? ◀

Solution. L'étudiant peur choisir un projet soit en le sélectionnant dans la première liste, soit dans la deuxième. Comme un projet n'est présent que dans une seule liste, le principe d'inclusion-exclusion affirme qu'il y a $23 + 15$ choix de projets disponibles. ◀

Exemple 4.6. Chaque utilisateur d'un système possède un mot de passe, qui comporte de 6 à 8 caractères, où chaque caractère est soit une lettre majuscule, soit un chiffre. De plus, chaque mot de passe doit contenir au moins un chiffre. Combien de mots de passe possible existe-t-il ? ◀

Solution. Soit P le nombre total de mots de passe possible. Ces mots de passe sont soit de longueur 6, soit de longueur 7, soit de longueur 8. Notons respectivement P_6, P_7 et P_8 le nombre de mots de passe de chacune de ces longueurs. Par le principe d'inclusion-exclusion, on sait que $P = P_6 + P_7 + P_8$. Cherchons à présent les valeurs de P_6, P_7 et P_8.

---

5. Remarquez que cette erreur : « compter deux fois plusieurs choses identiques » est très commune en combinatoire, il faut donc redoubler de vigilance dans la résolution de ces problèmes. Souvenez-vous que la section 4.1 détaille une manière de limiter ce risque, à savoir procéder par une étape de modélisation du problème à résoudre.

Trouver l'une de ces valeurs directement est difficile. Pour cette raison, pour calculer P_6, comptons le nombre de chaînes de caractères de longueur 6 contenant des chiffres et des lettres majuscules (incluant celles ne contenant pas de chiffres), et soustrayons de cette quantité le nombre de chaînes de caractères ne contenant pas de chiffres. Par la règle du produit, le nombre de chaînes de longueur 6 est 36^6 (car il y a 26 lettres et 10 chiffres), et le nombre de chaînes de caractères sans chiffres est 26^6. Dès lors, on a

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = 1\,867\,866\,560.$$

On calcule les valeurs de P_7 et P_8 de manière similaire, et on obtient donc

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\,364\,164\,096 - 8\,031\,810\,176 = 70\,332\,353\,920$$

et

$$\begin{aligned} P_8 &= 36^8 - 26^8 = 2\,821\,109\,907\,456 - 208\,827\,064\,576 \\ &= 2\,612\,282\,842\,880. \end{aligned}$$

Dès lors, on en conclut que $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\,684\,483\,063\,360$. ◀

Exemple 4.7. Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6 ? ◀

Solution. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à 100 qui sont divisibles par 4 ou par 6. On remarque que le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6 est égal à $100 - |\mathcal{I}|$.

Notons $\mathcal{I}_4$ l'ensemble de ces nombres qui sont divisibles par 4, et $\mathcal{I}_6$ l'ensemble de ces nombres qui sont divisibles par 6. Par le principe d'inclusion-exclusion, on sait que

$$|\mathcal{I}| = |\mathcal{I}_4| + |\mathcal{I}_6| - |\mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_6|.$$

On remarque qu'il y a exactement $100 \text{ div } 4 = 25$ nombres entiers inférieurs à 100 divisibles par 4, et $100 \text{ div } 6 = 16$ nombres entiers divisibles par 6. Ces nombres caractérisent les cardinalités de respectivement $\mathcal{I}_4$ et $\mathcal{I}_6$.

On remarque que $\mathcal{I}_4$ et $\mathcal{I}_6$ ne sont pas disjoints : les nombres entiers qui sont à la fois dans $\mathcal{I}_4$ et dans $\mathcal{I}_6$ sont des entiers à la fois divisibles par 4 et par 6, c'est à dire des entiers divisibles par $PPCM\,(4,6) = 12$. Dès lors, on a $|\mathcal{I}_4 \cap \mathcal{I}_6| = 100 \text{ div } 12 = 8$.

Dès lors, on sait que $|\mathcal{I}| = 25 + 16 - 8 = 33$. Dans la question originale, on demande les entiers qui ne sont divisibles ni par 4, ni par 6, c'est-à-dire les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 100 qui ne sont pas dans $|\mathcal{I}|$. On a $100 - 33 = 67$ tels entiers. ◀

Exemple 4.8. Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 8 commencent par « 1 » ou finissent par « 00 » ? ◀

Solution. On peut construire une chaîne de caractères qui commence par « `1` » ou finit par « `00` » en construisant une chaîne de caractères qui commence par « `1` » ou en construisant une chaîne de caractères qui finit par « `00` ».

Par la règle du produit, on sait qu'il y a $2^7 = 128$ chaînes de caractères qui commencent par « `1` », car on fixe le premier bit de la chaîne et les 7 autres peuvent être choisis indépendamment parmi les choix « `0` » et « `1` ». De la même manière et toujours par la règle du produit, on a $2^6 = 64$ chaînes de caractères qui finissent par « `00` ».

Notons que certaines chaînes commençant par « `1` » finissent par « `00` ». Par la règle du produit, il y a exactement $2^5 = 32$ telles chaînes, car on fixe le premier bit ainsi que les deux derniers, laissant les 5 autres être choisis indépendamment. Ces trois constructions sont illustrées à la figure 4.6.

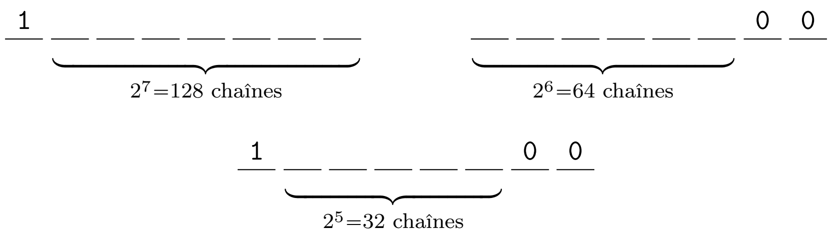


FIGURE 4.6 – Construction de chaînes de caractères binaires de longueur 8 commencent par « 1 » ou finissent par « 00 »

Dès lors, par le principe d'inclusion-exclusion, on a exactement $128+64-32 = 160$ chaînes de caractères binaires de longueur 8 commencent par « 1 » ou finissent par « 00 ». ◀

4.2.3 La règle de la division

Enfin, la dernière règle « arithmétique » que l'on peut utiliser en combinatoire est la *règle de la division.* Celle-ci est utile lorsqu'une tâche peut être réalisée de diverses n façons, mais dont certaines façons sont équivalentes.

Exemple 4.9. Combien de façons y a-t-il d'asseoir quatre personnes autour d'une table circulaire, où deux configurations sont considérées équivalentes quand chaque personne a le même voisin de droite et le même voisin de gauche ? ◀

Solution. Comptons préalablement toutes les façons possibles d'asseoir dans l'ordre ces quatre personnes. Pour cela, on choisit au hasard un siège autour de la table qu'on étiquette par « 1 ». On numérote les autres sièges dans l'ordre, sans perdre de généralité dans le sens horloger.

On sélectionne arbitrairement la première personne et on l'assoit sur le siège « 1 ». Il y a quatre façons de sélectionner cette personne. On sélectionne ensuite la deuxième personne, il reste trois choix possibles, on l'assoit sur le siège « 2 ». De la même manière, il reste deux façons de sélectionner la troisième personne à asseoir sur le siège « 3 », et un unique choix pour la dernière personne qui s'assied sur le siège « 4 ».

Par la règle du produit, il y a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ façons d'ordonner les quatre personnes autour de la table. Néanmoins, chacun des quatre choix possible du siège numéroté « 1 » conduit à une même configuration, car on considère deux configurations comme différentes si l'une des personnes a un voisin direct à droite ou à gauche différent.

Comme il y a quatre choix d'étiquettes pour le siège « 1 », on a $\frac{24}{4} = 6$ différentes configurations possibles d'asseoir les quatre personnes autour de la table. Ces configurations sont illustrées à la figure 4.7.

◀

D'un point de vue ensembliste, cette technique correspond à compter le nombre d'ensembles dans d'une union d'ensembles disjoints. Ainsi, on peut gé-

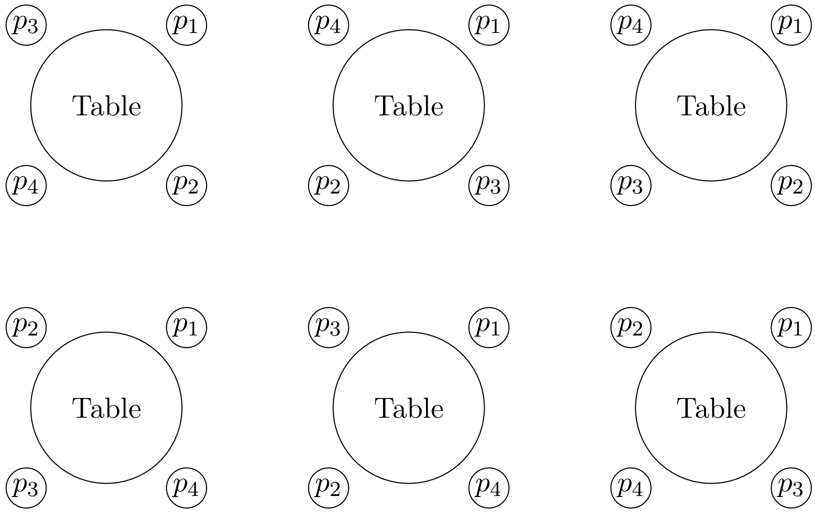


FIGURE 4.7 – Six différentes façons d'asseoir quatre personnes atour d'une table

néraliser cette technique de comptage de manière ensembliste comme suit : si un ensemble S est l'union de n ensembles disjoints de taille d, alors $n = \frac{|S|}{d}$.

Cette situation est illustrée à la figure 4.8, avec $|S| = 12$ et $d = 3$. On remarque que S est bien constitué de $\frac{|S|}{3} = 4$ ensembles disjoints.

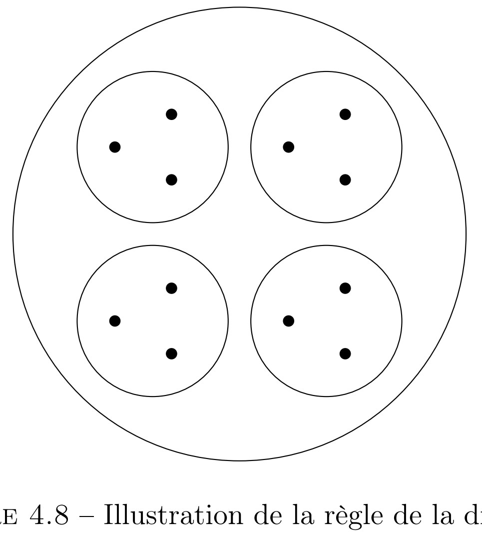


FIGURE 4.8 – Illustration de la règle de la division

Similairement aux cas précédents, on peut généraliser ce principe en termes de tâches, de la manière suivante.

Théorème 4.3 ▸ *Règle de la division*

Si une tâche peut être effectuée de n façons, mais pour chaque façon w, exactement d de ces n façons sont équivalentes à w, alors il y a $\frac{n}{d}$ façons de réaliser la tâche originale.

Intuitivement, on procède à un comptage avec cette règle de la manière suivante : on compte l'intégralité des façons par lesquelles une tâche peut être effectuée, et on divise ce nombre par le nombre de façons équivalentes à tous les cas comptés. Ceci permet d'éviter de compter deux fois deux façons équivalentes de réaliser la tâche originale.

4.2.4 Le principe des tiroirs

Comme on l'a vu dans le chapitre dédié aux ensembles, comparer les cardinalités d'ensembles peut s'avérer difficile. En effet, il y est affirmé que si deux ensembles sont finis, comparer leur taille est aisé car une simple énumération de leurs éléments suffit à montrer lequel d'entre eux possède le plus grand cardinal.

Néanmoins, une telle technique ne peut être utilisée dans le cadre d'ensembles infinis. Premièrement, une énumération exhaustive des éléments n'est en toute généralité pas possible. Deuxièmement, même si une énumération est possible, il n'est pas trivial de montrer que deux infinis ont le même ordre de grandeur.

On présente ici une technique, permettant de résoudre ce problème, illustrée par l'exemple suivant.

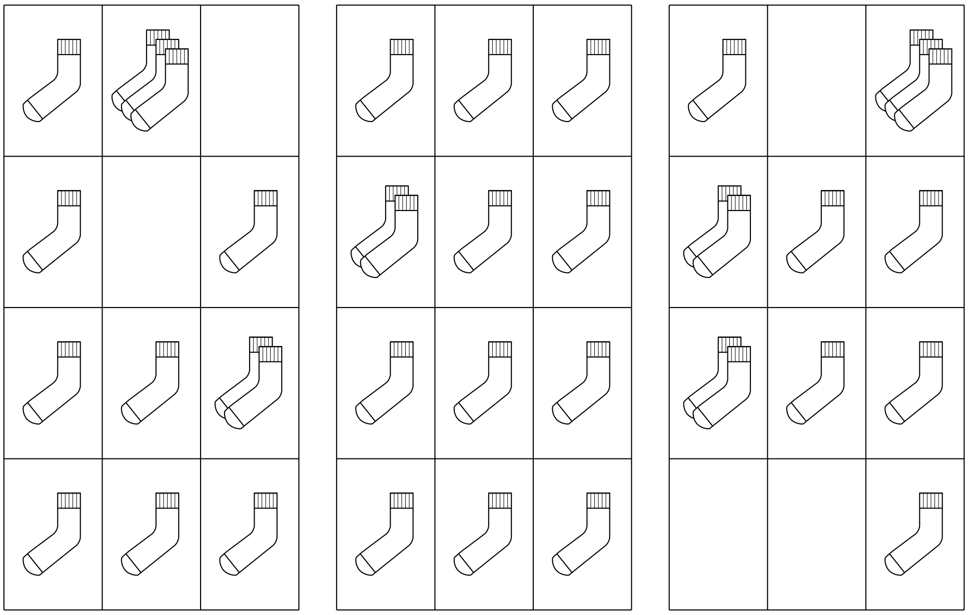
Supposez que l'on veuille ranger 13 chaussettes dans 12 tiroirs. Comme il n'y a que 12 tiroirs pour 13 chaussettes, il doit y avoir un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. En effet, si chaque tiroir contient au moins une chaussette, au moins 12 chaussettes (une par tiroir) peuvent être rangées. Ce principe est appelé le *principe des tiroirs* de Dirichlet[6].

6. En anglais, ce principe est souvent appelé le « principe des trous de pigeon » ou *pigeonhole principle*, où n pigeons veulent nicher dans m nichoirs.

Théorème 4.4 ▸ *Principe des tiroirs*

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m > n$, si m objets sont placés dans n boîtes, alors au moins une boîte contient deux objets.

Ce principe est illustré sur base de l'exemple précédent à la figure 4.9.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.9 – Au moins une boite contient deux chaussettes

Exemple 4.10. Combien de personnes doit-on placer dans une pièce afin qu'au moins deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire ? ◀

Solution. Dans la mesure où il y a 366 dates d'anniversaire possibles (incluant le 29 février), par le principe des tiroirs, la pièce doit contenir au moins 367 personnes afin que deux d'entre elles aient le même anniversaire. ◀

Exemple 4.11. Combien de cartes doivent être piochées dans un jeu de 52 cartes afin que trois cartes de la même couleur soient sélectionnées ? ◀

Solution. On dispose de quatre boîtes différentes, une pour chaque couleur, et chaque fois qu'une carte est piochée, on la place dans la boîte correspondant à sa couleur. Ainsi, par le principe des tiroirs, si n cartes sont sélectionnées, au moins une des boîtes contient $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ cartes, où $\lceil x \rceil$ dénote le plus entier supérieur à x.

Dès lors, on sait que 3 cartes de la même couleur sont sélectionnées si $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \geqslant 3$. Le plus petit entier tel que $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \geqslant 3$ est $2 \cdot 4 + 1 = 9$. Ainsi, piocher 9 cartes suffit pour en piocher trois de la même couleur.

Remarquons que si l'on pioche 8 cartes, on pourrait malencontreusement en piocher 2 de chaque couleur, ainsi au moins 9 cartes doivent être piochées. Ce cas arrive si on pioche par exemple les quatre as (aucune carte n'a la même couleur), puis les quatre rois (chaque couleur est représentée par deux cartes). La carte suivante que l'on piochera sera forcément d'une couleur déjà présente. ◀

Les deux corollaires suivants sur les bijections sont en particulier très utiles dans le cadre des cardinalités d'ensemble, comme mentionné plus haut.

Corollaire 4.5

Une application f d'un ensemble de taille $n+1$ vers un ensemble de taille n ne peut pas être une bijection.

En effet, par le principe des tiroirs, au moins deux éléments de l'ensemble de départ doivent être envoyés sur un même élément de l'ensemble d'arrivée. Ceci empêche f d'être injective, et donc d'être une bijection.

De plus, on remarque que la réciproque de ce corollaire est également vraie, ce qui peut être démontré avec des arguments similaires à ceux du paragraphe précédent.

Exemple 4.12. Sur la figure 4.10, les trois applications de S_1 vers S_2 ne sont pas des bijections. En effet, on remarque que $S_1 = 4$ et $S_2 = 3$. De la même manière, les inverses de ces trois fonctions ne peuvent également pas être des bijections. ◀

Néanmoins, toute la puissance du principe des tiroirs et de l'application des bijections ne réside pas dans les ensembles finis, mais bien dans les ensembles infinis. En effet, l'existence ou l'absence d'une bijection entre deux ensembles, finis

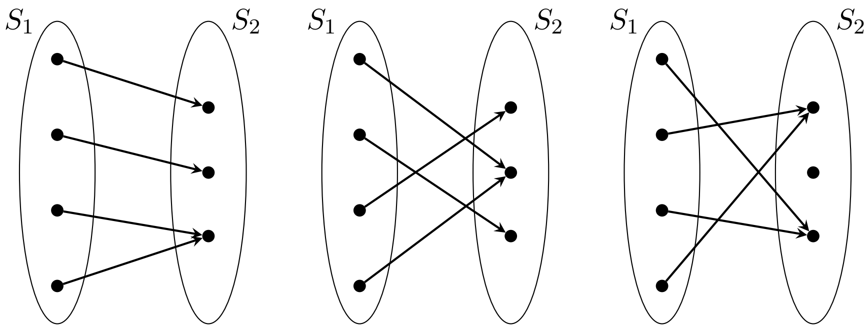


FIGURE 4.10 – Trois fonctions qui ne peuvent être des bijections

ou non, permet de comparer leurs cardinalités. Ceci est exprimé par le corollaire suivant.

Corollaire 4.6

Si deux ensembles sont en bijection, alors ils ont la même cardinalité.

Avec ce corollaire, on peut prouver certains résultats *a priori* contre-intuitifs relatifs aux ensembles de taille infinis.

Exemple 4.13. Montrons qu'il existe autant de nombres naturels pairs que de nombres naturels. L'intuition voudrait qu'il y en ait deux fois moins.

On va construire $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ de la façon suivante (avec $2\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres pairs) :
- on associe 0 à 0 ;
- on associe le premier nombre naturel (1) au premier nombre naturel (2). Ainsi, $f(1) = 2$;
- on associe le deuxième nombre naturel (2) au deuxième nombre naturel (4). Ainsi, $f(2) = 4$;
- on procède de manière similaire pour les autres naturels.

On a donc construit l'application $f(n) = 2n$, illustrée sur la figure 4.11.

On remarque que cette application est une bijection. Elle est en effet injective (tous les éléments de $2\mathbb{N}$ sont l'image de maximum un élément de $\mathbb{N}$) et surjective (tous les éléments de $2\mathbb{N}$ sont l'image d'au moins un élément de $\mathbb{N}$). Donc, on a $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$. On a associé chaque nombre entier à un nombre pair, et inversement.

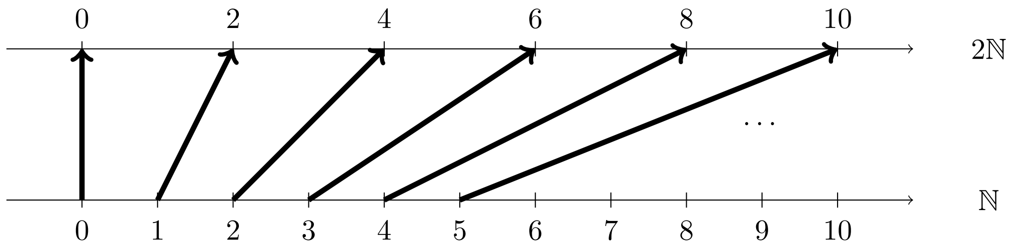


FIGURE 4.11 – Bijection entre $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$

◀

Avec des arguments similaires, on peut montrer que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$, que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$, que $|[0,1]| = |\mathbb{R}|$, etc. Notez qu'il est possible de montrer que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

4.3 Deux grandes questions

Parfois, les diagrammes en arbre et les règles vues à la section ne suffisent pas pour résoudre un problème de combinatoire, dans la mesure où il n'est pas toujours possible d'encoder toutes les contraintes d'un problème au sein du codage d'une configuration à compter.

En effet, une fois un problème de comptage modélisé, afin d'appliquer un raisonnement correct, il est souvent nécessaire de répondre à deux questions fondamentales, posées sur cette modélisation même.

Questions

1. L'ordre des composantes au sein de la modélisation a-t-il de l'importance ?
2. Des répétitions des composantes au sein de la modélisation sont-elles autorisées ?

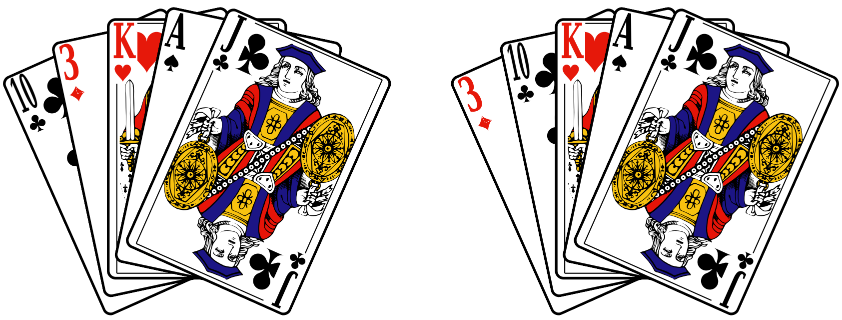
On peut répondre à chacune de ces questions positivement ou négativement, ce qui laisse 4 choix de raisonnement possibles dans tous les cas de figure.

Dans le cas du problème 4.1 comptant les codes de vélo, on remarque les points suivants.

1. L'ordre des composantes au sein du codage a de l'importance. En effet, le vecteur $(2, 3, 4, 5)$ décrit le code « `2345` », qui est différent du code décrit par le vecteur $(3, 2, 4, 5)$, correspondant au code « `3245` ». Permuter les deux premières composantes du vecteur change le code.
2. Les répétitions des composantes au sein du codage sont autorisées. En effet, le vecteur $(2, 3, 4, 3)$ décrit le code « `2343` » qui est tout à fait légal. Les deuxième et quatrième composantes sont répétées, et ce code peut exister pour un vélo.

Dans le cas du problème 4.2 comptant les mains de bridge, on remarque les points suivants.

1. L'ordre des composantes au sein du codage n'a pas d'importance. En effet, le vecteur $(10\clubsuit, 3\diamondsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 11\clubsuit)$ décrit la main illustré à la figure 4.12(a), qui est la même main que celle décrite par le vecteur $(3\diamondsuit, 10\clubsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 11\clubsuit)$, illustrée à la figure 4.12(b). Ces deux mains sont les mêmes pour les joueurs, qui d'ailleurs trient habituellement les cartes dans leur main.
2. Les répétitions des composantes au sein du codage ne sont pas autorisées. En effet, le vecteur $(10\clubsuit, 3\diamondsuit, 13\heartsuit, 1\spadesuit, 10\clubsuit)$ décrit une main qui n'est pas légale, illustrée à la figure 4.13. Il n'y a en effet qu'un exemplaire de chaque carte au sein du paquet, on ne peut donc pas avoir deux 10 de trèfle.



(a) (b)

Figure 4.12 – Deux mains identiques

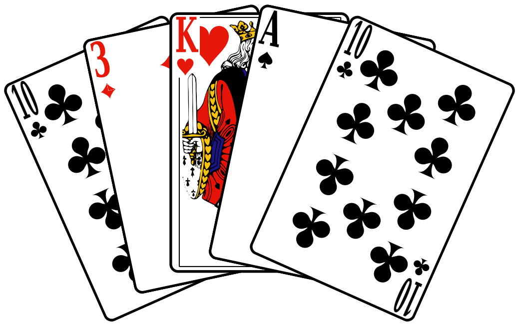


Figure 4.13 – Une main illégale

Ces deux questions seront omniprésentes dans la suite de ce chapitre, et on axera tous les raisonnements présentés en fonction des réponses à ses questions.

Notez également que bien que la modélisation des problèmes puisse parfois sembler rébarbative (comme dans le cas ci-dessus), sans elle on ne pourrait pas formellement justifier les réponses à ces deux questions.

Notez toutefois que les formules vues dans les chapitres ne peuvent pas être utilisées en toute généralité en répondant aux deux questions posées ci-dessus. On sera très souvent confronté à des cas particuliers, et il faudra alors adapter les calculs en fonctions de la situation.

Les techniques et raisonnements vus dans les sections suivantes peuvent toutefois être adaptés, en fonction des particularités des problèmes rencontrés.

4.4 Arrangements et permutations

Les arrangements sont le type de structure sur laquelle on appuie un raisonnement dans le cas où l'ordre des composantes au sein d'un codage importe, où l'ordre dans lequel sont sélectionnés des éléments importe. On les rencontre par exemple dans la structure des codes de cadenas, les lettres d'un mot de passe, les caractères d'une plaque de voiture, etc. Dans tous ces cas de figure, l'ordre dans lequel est spécifié les éléments a de l'importance.

Plus formellement, on les définit comme suit.

Définition 4.7

Soit S un ensemble, un arrangement *de k éléments de S est une séquence ordonnée de k éléments de S.*

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter le nombre d'arrangements possibles de k éléments pris parmi les n éléments d'un ensemble. Dès lors, comme annoncé, on est amené à distinguer deux cas, selon que les éléments sélectionnés puissent se répéter ou non.

4.4.1 Arrangements sans répétitions

Dans le cas où les éléments sélectionnés sont tous distincts, on parle d'arrangements sans répétitions. On les définit formellement comme suit.

Définition 4.8

Soit S un ensemble de n éléments, un arrangement sans répétitions *de k éléments de E est une séquence ordonnée de k éléments distincts de E.*

Parfois, on qualifie ces arrangements d'arrangements *simples*, d'arrangements de k objets pris parmi n, ou d'arrangements de n objets pris k à k.

Exemple 4.14. Soit $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$. Les cinq quadruplets suivants sont des exemples d'arrangements de 4 objets pris parmi 6 :

$$(a, b, c, d) \quad (a, c, b, d) \quad (a, b, c, e) \quad (b, d, c, e) \quad (e, a, f, d).$$

Comme mentionné dans l'introduction, ce chapitre se concentre sur le comptage de structures, en l'occurrence au sein de cette section le comptage d'arrangements sans répétitions.

Comptons donc à présent *tous* les arrangements de 4 objets pris parmi 6. Ceci signifie en d'autres termes que l'on possède un sac de 6 objets, et qu'on en tire 4 différents. On cherche dès lors le nombre de tels tirages différents, dans l'ordre, comme dans certaines loteries.

Pour le premier objet, nous avons 6 possibilités : a, b, c, d, e ou f. Pour le second objet, nous n'avons plus que 5 possibilités car une possibilité a déjà été prise pour le premier objet. Pour le troisième objet, nous avons 4 possibilités. Et enfin, pour le quatrième objet, il reste 3 possibilités. Ceci donne donc par la règle du produit $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ arrangements sans répétitions de 4 objets pris parmi 6. Cette situation est illustrée à la figure 4.14 à l'aide d'un diagramme partiel en arbre.

◀

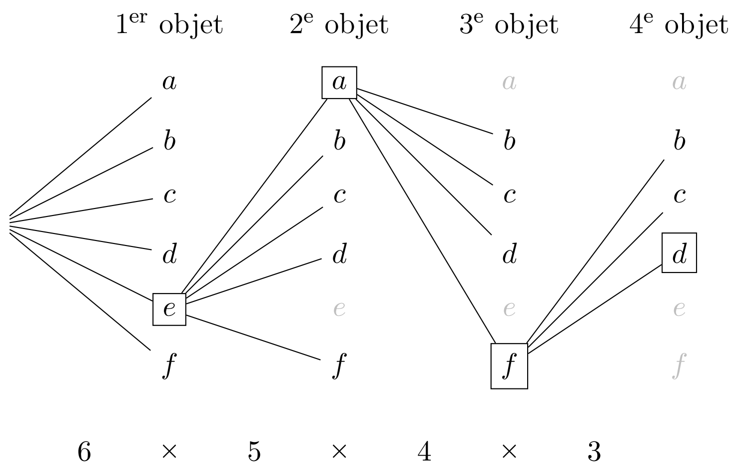


FIGURE 4.14 – Construction du nombre d'arrangements sans répétitions

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle du produit, on peut donc définir le *nombre d'arrangements sans répétitions* d'éléments.

Définition 4.9

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre d'arrangements sans répétitions *de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté A_n^k et est défini comme*

$$\begin{aligned} A_n^k &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}, \end{aligned}$$

avec $k \leqslant n$.

La fonction $n!$ est appelée la *factorielle* de n est est définie comme

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par récurrence, on peut également définir A_n^k comme

$$A_n^k = \begin{cases} n \cdot A_{n-1}^{k-1} & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Exemple 4.15. Douze voitures sont au départ d'un rallie. Combien de podiums de trois pilotes est-il possible d'obtenir une fois la course finie, sachant que les *ex-æquo* sont départagés via les tours d'essai. ◀

Solution. Le fait que les *ex-æquo* soient départagés signifie que l'on n'a pas à se soucier du fait que deux pilotes pourraient finir la course en même temps et se retrouver à la même place du podium.

Ainsi, on remarque qu'on doit sélectionner, dans l'ordre, trois pilotes pour un podium. Sachant qu'il y a douze pilotes de voiture, on a donc

$$A_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

podiums possibles. ◀

4.4.2 Permutations

On remarque en particulier avec la définition 4.9 que $A_n^n = n!$. Ceci correspond, au vu de la notation, à ordonner n éléments sélectionnés par n éléments. Un tel ordonnancement s'appelle une *permutation*, définie formellement comme suit.

Définition 4.10

Une permutation *d'éléments d'un ensemble est une séquence ordonnée d'éléments distincts de cet ensemble.*

On remarque qu'une permutation est simplement un cas particulier d'arrangement de n objets pris parmi n objets.

Exemple 4.16. Soit $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$, les trois n-uples suivants sont des exemples de permutations des éléments de E :

$$(a, b, c, d, e, f) \quad (a, c, b, d, e, f) \quad (a, b, c, e, d, f).$$

◀

Comme les permutations sont un cas particulier d'arrangement, on peut caractériser leur nombre de la façon suivante.

Définition 4.11

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre de permutations *des n éléments de S est noté P_n et est défini comme*

$$P_n = n!,$$

ou encore par récurrence comme

$$P_n = \begin{cases} n \cdot P_{n-1} & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 4.17. Il y a 8 coureurs au départ d'une course d'athlétisme. Combien de classements possibles des coureurs (sans *ex-æquo*) y a-t-il à l'issue de cette course ? ◀

Solution. Le nombre de classements de coureurs possibles est le nombre de permutations de 8 éléments. On a donc $8! = 40\,320$ tels classements possibles. ◀

4.4.3 Arrangement avec répétitions

Dans le cas où l'ordre dans lequel des éléments sont sélectionnés a de l'importance, mais où des répétitions peuvent apparaître, on parle d'*arrangements avec répétitions*. On les définit formellement comme suit.

Définition 4.12

Soit S un ensemble de n éléments, un arrangement avec répétitions *de k éléments de S est une séquence ordonnée de k éléments de S.*

Remarquez que comparée à la définition 4.9 des arrangements sans répétition, on ne force pas ici les éléments à être distincts, ce qui permet d'avoir des répétitions au sein de la sélection.

Exemple 4.18. Soit $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$. Les cinq quadruplets suivants sont des exemples d'arrangements de 4 objets pris parmi 6, avec répétitions potentielles :

$$(a, b, c, d) \quad (a, c, b, a) \quad (a, b, b, e) \quad (b, e, e, e) \quad (a, a, a, a).$$

Comptons à présent *tous* les arrangements avec répétitions de 4 objets pris parmi 6. Ceci signifie en d'autres termes que l'on possède un sac de 6 objets, et qu'on en tire 4. On cherche dès lors le nombre de tels tirages différents, dans l'ordre, comme par exemple lors de 4 lancés consécutifs de dés à 6 faces.

Pour le premier objet, nous avons 6 possibilités : a, b, c, d, e ou f. Pour le second objet, on a toujours 6 choix possibles, car les répétitions sont autorisées. Pour les mêmes raisons, on a également 6 choix possibles pour chacun des tirages restants. Ceci donne donc par la règle du produit $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ arrangements avec répétitions de 4 objets pris parmi 6. Cette situation est illustrée à la figure 4.15 à l'aide d'un diagramme partiel en arbre. ◀

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle du produit, on peut donc définir le *nombre d'arrangements* d'éléments.

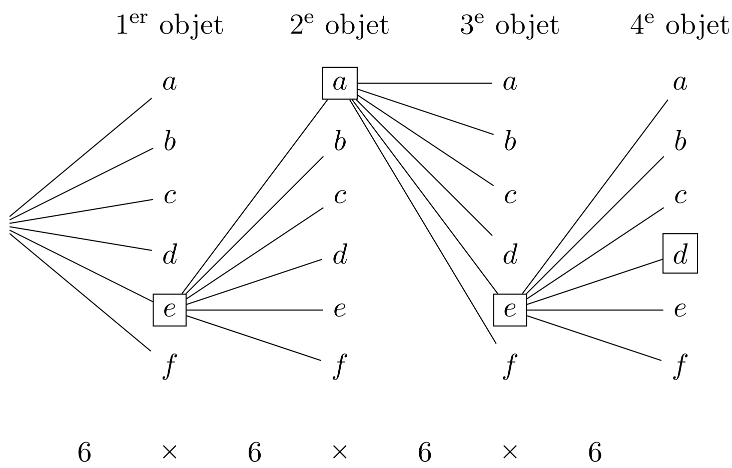


FIGURE 4.15 – Construction nu nombre d'arrangements avec répétitions

Définition 4.13

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre d'arrangements avec répétitions *de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté α_n^k et est défini comme*

$$\alpha_n^k = n^k.$$

Par récurrence, on les définit comme suit :

$$\alpha_n^k = \begin{cases} 1 & si\ k = 0 \\ n\,\alpha_n^{k-1} & sinon. \end{cases}$$

On peut à présent résoudre le problème 4.1, demandant de calculer le nombre de codes de vélo à quatre chiffres décimaux.

Solution du problème 4.1 (page 90). Modélisons ce problème sous forme d'un vecteur c à quatre composantes, comme effectué en section 4.1.2. Compter le nombre de codes à quatre chiffres décimaux correspond à compter le nombre de vecteurs $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ tel que $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ avec $1 \leqslant i \leqslant 4$. Ce nombre est égal au nombre d'arrangements avec répétitions de 4 éléments sélectionnés parmi 10, c'est à dire $\alpha_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$. □

4.5 Combinaisons

On a à présent vu tous les cas de figure dans lesquels l'ordre de sélection des éléments pour un tirage importe, et on utilise les arrangements pour ces problèmes. Dans les autres cas, on utilise les *combinaisons*. Plus précisément, on les utilise quand l'ordre des composantes au sein d'un codage n'importe pas, quand l'ordre dans lequel sont sélectionnés des éléments dans un tirage est sans importance.

On les rencontre par exemple dans la structure des mains de jeu de cartes, des positions assises autour d'une table ronde, etc. Dans tous ces cas de figure, l'ordre dans lequel est spécifié les éléments n'a pas d'importance.

Plus formellement, on les définit comme suit.

Définition 4.14

Soit S un ensemble, une combinaison *de k éléments de S est une séquence non ordonnée de k éléments de S.*

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter le nombre de combinaisons possibles de k éléments pris parmi les n éléments d'un ensemble. On procédera comme annoncé dans l'introduction et similairement à la section consacrée aux arrangements, c'est-à-dire en distinguant deux cas, selon que les éléments sélectionnés puissent se répéter ou non.

4.5.1 Combinaisons sans répétition

Dans le cas où les éléments sélectionnés sont tous distincts, on parle de combinaisons sans répétitions. On les définit formellement comme suit.

Définition 4.15

Soit S un ensemble de n éléments, une combinaison sans répétitions *de k éléments de S est une séquence non ordonnée de k éléments distincts de S.*

Dans le cadre de ce chapitre, on est amené à compter toutes les combinaisons de k objets pris parmi n. On basera le raisonnement permettant de trouver cette quantité sur le problème 4.2, tentant de déterminer le nombre de mains possibles de poker. Basons ce raisonnement sur la modélisation dégagée en section 4.1.

Solution du problème 4.2 (page 90). On doit sélectionner 5 cartes parmi les 52 disponibles. On remarque que l'ordre dans lequel ces cartes sont piochées est sans importance, car la main résultante est la même, comme illustré précédemment à la figure 4.12(b).

Procédons par étapes : supposons que l'ordre importe, il y a donc A_{52}^5 telles pioches possibles. Toutefois, comme l'ordre importe bel et bien, on a compté certaines pioches plusieurs fois. En l'occurrence, pour chaque pioche p de 5 cartes, exactement 5! pioches sont équivalentes à p : toutes les permutations de cartes au sein de la main sont équivalentes.

Par exemple, les mains des figures 4.12(a) et 4.12(b) sont équivalentes, on peut obtenir l'une en permutant certaines cartes de l'autre (le dix de trèfle et le trois de carreau).

Dès lors, avec la règle de la division, on a exactement

$$\frac{A_{52}^5}{P_5} = \frac{52!}{(52-5)!\,5!} = 2\,598\,960$$

mains différentes possibles. □

Sur base de cet exemple et à l'aide de la règle de la division, on peut caractériser le *nombre de combinaisons sans répétitions.*

Définition 4.16

Soit S un ensemble de n éléments, le nombre de combinaisons sans répétitions *de k éléments de S pris parmi n éléments de S est noté C_n^k et est défini comme*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

avec $k \leqslant n$. Par récurrence, on les définit comme suit :

$$C_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \vee k = n \\ C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notez également que ce nombre de combinaison sans répétitions donne en fait le nombre de sous-ensembles de k éléments dans un ensemble de n éléments.

Par ailleurs, parfois, on nomme C_n^k le *coefficient binomial*, et on le note $\binom{n}{k}$.

Exemple 4.19. Combien de délégations différentes de 4 personnes sélectionnées parmi un groupe 50 peut-on constituer ? ◀

Solution. Encodons une délégation comme un vecteur $d = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, où $v_i \in \{1, 2, \dots, 50\}$.

On voit que les répétitions sont interdites dans ce codage, en effet, par exemple, la délégation $(4, 3, 5, 4)$ sélectionnerait la personne numéro 4 deux fois. De plus, l'ordre ici n'importe pas. Par exemple, la délégation $(2, 3, 4, 5)$ est la même que la délégation $(3, 2, 4, 5)$.

On calcule donc le nombre de délégations de 4 personnes sélectionnées parmi 50 comme le nombre de combinaisons sans répétitions $C_{50}^4 = 230\,300$. ◀

On remarque la propriété de symétrie suivante sur les combinaisons.

Propriété 4.17

Soient $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$, on a

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

En effet, calculer le nombre de combinaisons possibles pour k objets choisis est équivalent à calculer le nombre de combinaisons pour $n - k$ éléments non choisis.

4.5.2 Binôme de Newton et triangle de Pascal

On peut se servir de la définition par récurrence des combinaisons afin de construire le *triangle de Pascal*. Ce triangle illustre cette construction récursive, en construisant chaque étage sur base de somme d'éléments de l'étage inférieur.

La construction complète de ce triangle est illustrée à la figure 4.16 pour C_n^k, avec n et k allant de 0 à 10.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}
$$

FIGURE 4.16 – Triangle de Pascal

Par ailleurs, le terme *coefficient binomial* vient en mathématiques de l'expression $(a+b)^n$ appelée le *binôme de Newton*. Ils tirent leur nom du fait que leur valeur décrit exactement les coefficients du polynôme $(a+b)^n$, comme illustré par le théorème suivant.

Théorème 4.18 ▸ *Binôme de Newton*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, a^i \, b^{n-i}, \\
&= b^n + nab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^3 a^3 b^{n-3} + \dots \\
&+ C_n^{n-3} a^{n-3} b^3 + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + na^{n-1} b + a^n
\end{aligned}
$$

Cette formule est particulièrement utile lorsqu'on doit calculer la puissance entière positive d'une somme de deux termes. Ainsi, avec $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve immédiatement les formules bien connues

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= b^2 + 2\,ab^{2-1} + a^2 \\
&= b^2 + 2\,ab + a^2, \\
(a+b)^3 &= b^3 + 3\,ab^{3-1} + 3\,a^{3-1}b + a^3 \\
&= b^3 + 3\,ab^2 + 3\,a^2b + a^3,
\end{aligned}$$

en se référant aux 3e et 4e lignes du triangle de Pascal de la figure 4.16.

La table 4.1 résume tous les cas vus dans ce documents de sélections de k éléments choisis parmi n éléments, selon que l'ordre dans lequel ces éléments sont sélectionnés importe ou non, et s'il est permis de sélectionner plusieurs fois un même élément.

Type	**Répétitions autorisées ?**	**Ordre importe ?**	**Formule**
Arrangement	Non	Oui	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
Combinaison	Non	Non	$\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Arrangement	Oui	Oui	n^k

Table 4.1 – Nombre d'arrangements et de combinaisons avec et sans répétitions

4.6 Exercices résolus

Exercice 4.1. Combien de chaînes de caractères binaires de longueur n contiennent exactement k « `1` » ?

Solution. Les positions des k « `1` » au sein de la chaîne de caractères correspondent à la sélection de k éléments sélectionnés parmi n. Modélisons ceci comme un vecteur

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_k),$$

où $c_i = j$ signifie qu'on a un « `1` » au sein de la chaîne en position j, avec $1 \leqslant j \leqslant n$. Par exemple, sur des chaînes de longueur 5 et $k = 3$, $c = (1, 3, 4)$ correspond à la chaîne « `10110` ».

Au sein de ce codage, l'ordre n'importe pas. Par exemple, le vecteur $(1, 3, \dots)$ représente la même situation que le vecteur $(3, 1, \dots)$ et ces deux vecteurs dénotent qu'on a un « `1` » en positions 1 et 3.

Dès lors, on a C_n^k chaînes de caractères binaires de longueur n comprenant exactement k « `1` ». ◀

Exercice 4.2. Considérez un échiquier standard de taille 8×8, comme illustré à la figure 4.17. De combien de façons peut-on y placer 8 pions identiques en n'en mettant qu'un seul par case et :

1. en les mettant n'importe où ?
2. en les mettant sur les cases du bord de l'échiquier ?
3. de telle sorte qu'ils soient tous alignés, que ce soit horizontalement, verticalement ou en oblique ?
4. de telle sorte qu'il n'y en ait jamais 2 sur une même rangée ni sur une même colonne ?

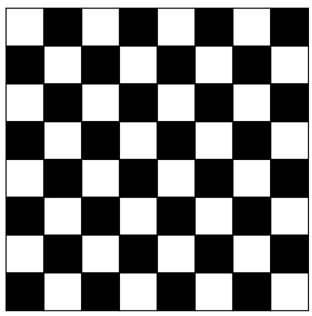


FIGURE 4.17 – Un plateau d'échecs

Solution. On procède de la manière suivante.

1. Modélisons un placement p de huit pions sous la forme d'un vecteur à huit composantes de la forme suivante :

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_8),$$

avec $p_i \in \{1, 2, \ldots, 64\}$, où $p_i = k$ signifie que le pion i est placé à la case numéro k (avec $1 \leqslant i \leqslant 8$ et $1 \leqslant k \leqslant 64$).

Au sein de ce codage, on remarque que l'ordre n'importe pas, en effet, par exemple, $(12, 34, \ldots)$ et $(34, 12, \ldots)$ décrivent tous deux le fait qu'il y ait un pion à la case numéro 12 et un autre à la case 34. Par ailleurs, les répétitions sont interdites. En effet, par exemple, $(17, 17, \ldots)$ signifierait qu'il y a deux pions à la case 17, ce qui est interdit.

Dès lors, répondre à la question revient à calculer le nombre de combinaisons sans répétitions de 8 éléments pris parmi 64, c'est à dire C^8_{64}. Remarquez qu'on aurait pu, au premier abord, modéliser un placement de pions comme un vecteur à 64 composantes binaires, où un « 1 » marquerait le fait qu'une case soit occupée. Cette modélisation est néanmoins hasardeuse, comme l'illustre l'Erreur A.5.

2. Dans le cas où on ne peut placer les pions que sur le bord de l'échiquier, en utilisant une modélisation et un raisonnement similaire à ci-dessus, on a donc C^8_{28} tels placements possibles, car il y a 28 cases sur le bord de l'échiquier.
3. Dans le cas où on force tous les pions à être alignés, on peut se contenter simplement d'énumérer toutes les possibilités de tels placements. Il y a 8 tels alignements horizontaux, 8 tels alignements verticaux et 2 en oblique. Par le principe d'inclusion-exclusion, on a donc $8 + 8 + 2 = 18$ tels alignements.
4. Dans le cas où un pion ne peut se trouver sur la même ligne ou la même colonne qu'un autre pion, on ne peut pas utiliser la modélisation du premier pion, à cause de cette contrainte additionnelle. Dès lors, modélisons un placement sous la forme d'un vecteur p à huit composantes défini comme

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_8),$$

où $p_i \in 1, \ldots, 8$, où $p_i = k$ signifie qu'il y a un pion à la ligne i et la colonne k.

Notez que cette modélisation empêche immédiatement que deux pions soient placés sur la même ligne.

De plus, l'ordre dans lequel est spécifié les composantes importe : $(3, 4, \ldots)$ signifie qu'il y a un pion à la ligne 1 et à la colonne 3, ainsi qu'un pion à la ligne 2 et la colonne 4, alors que $(4, 3, \ldots)$ signifie qu'il y a un pion à la ligne 1 et à la colonne 4, ainsi qu'un pion à la ligne 2 et la colonne 3. Ces placements ne sont clairement pas identiques.

Par ailleurs, les répétitions sont interdites au sein de ce codage : $(3, 3, \ldots)$ signifierait qu'il y a un pion à la ligne 1 et à la colonne 3, ainsi qu'un pion à la ligne 2 et à la colonne 3, ce qui est interdit par contrainte (deux pions sur la même colonne).

Ainsi, répondre à la question consiste à compter le nombre d'arrangements sans répétitions de 8 éléments sélectionnés parmi 8, c'est-à-dire au nombre de permutations de 8 éléments. Il y a exactement 8! telles permutations.

◀

Exercice 4.3. Durant un mois de 30 jours, une équipe de basket joue au moins un match par jour, mais pas plus de 45 matchs. Montrez qu'il doit y avoir une période de jours consécutifs pendant laquelle l'équipe doit jouer exactement 14 matchs.

Solution. Soit a_j le nombre de matchs joués avant le j^{e} jour (ce jour inclus) du mois. On remarque que $a_1 < a_2 < \ldots a_{30}$, avec $1 \leqslant a_j \leqslant 45$ et que tous ces entiers positifs sont distincts. En conséquence, $a_1 + 14 < a_2 + 14 < \ldots a_{30} + 14$, avec $15 \leqslant a_j \leqslant 59$, et tous ces entiers sont également distincts.

Dès lors, les 60 entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ sont tous inférieurs ou égaux à 59. Donc, par le principe des tiroirs, au moins deux de ces entiers sont égaux. Comme les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ sont distincts et que les entiers $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ sont distincts, il doit exister deux indices i et j tels que $a_i = a_j + 14$. Ceci implique qu'exactement 14 matchs ont été joués du jour $j + 1$ au jour i. ◀

Exercice 4.4. Supposez que les T-shirts « I ♡ ESI » sont disponibles en cinq tailles : S, M, L, XL et XXL. De plus, supposez que chaque taille est disponible en quatre couleurs : blanc, rouge, vert et noir, à l'exception de la taille XL qui n'est pas disponible en blanc, et XXL qui n'est ni disponible en blanc, ni en rouge. Combien de T-shirts un stand doit-il au moins contenir pour disposer d'au moins trois T-shirts en chaque taille et chaque couleur ?

Solution. Le diagramme en arbre de la figure 4.18 détaille toutes les tailles et couleurs possibles de T-shirts. Cet arbre possède 17 feuilles. Comme le stand doit posséder au moins trois T-shirt de chaque type, il faut donc qu'il ait au minimum $17 \cdot 3 = 51$ T-shirts. ◀

Exercice 4.5. Considérez le graphe en grille de la figure 4.19. Combien de plus courts chemins existe-il entre les deux sommets noirs, sachant que la largeur m

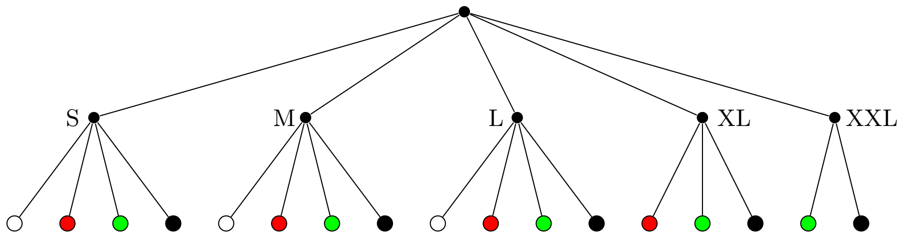


Figure 4.18 – T-shirts disponibles

et la hauteur n de la grille sont arbitraires ? Sur cette figure, on remarque que $m = 4$ et $n = 6$.

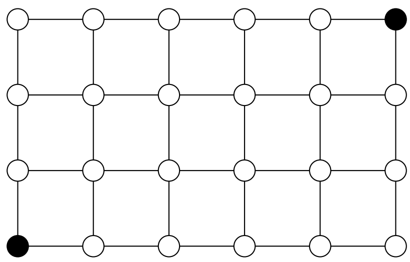


Figure 4.19 – Un graphe en grille

Solution. Modélisons un plus court chemin entre deux sommets noirs comme un vecteur binaire

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_{n+m-2}),$$

où 0 représente un « mouvement vers la droite » et 1 un « mouvement vers le haut ». Ainsi, le chemin en gras de la figure 4.20 est représenté comme $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$. Ce codage a la propriété suivante : si un vecteur v représente un chemin reliant deux sommets noirs, alors ce chemin est un plus court chemin.

On remarque sur cette modélisation que, dans le cas général, on est obligé de sélectionner $m - 1$ mouvements vers la droite, et en conséquence $n - 1$ mouvements vers le haut. Les positions de ces $n - 1$ mouvements vers le haut sont une combinaison de $n - 1$ éléments sélectionnés parmi $n + m - 2$. Notez que ceci correspond également au nombre de chaînes de caractères binaires de longueur 8

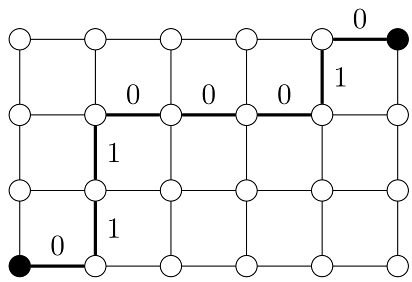


FIGURE 4.20 – Un graphe en grille

contenant exactement 3 « 1 » [7].

Dès lors, on a exactement C_{m+n-2}^{n-1} chemins joignant deux sommets noirs. En particulier, on remarque aisément que si la grille est de taille 2×2, on n'a que $2 = C_2^1$ chemins possibles. ◀

Exercice 4.6. Donnez le coefficient en $x^{12}y^{13}$ dans le développement de l'expression

1. $(x + y)^{25}$,
2. $(2x - 3y)^{25}$.

Solution. Dans le premier cas, grâce au théorème 4.18 relatif au binôme de Newton, on sait que ce coefficient est égal à

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!\,12!} = 5\,200\,300.$$

Dans le second cas, on remarque que $(2x - 3y)^{25} = \big(2x + (-3y)\big)^{25}$. Encore une fois grâce au théorème 4.18, on sait que

$$\big(2x + (-3y)\big)^{25} = \sum_{i=0}^{25} \binom{25}{i} (2x)^{25-i}(-3y)^i.$$

7. Sous cette forme, on peut modéliser un positionnement de 3 « 1 » comme un vecteur à trois composantes variant de 1 à 8, chaque composante dénotant la place d'un « 1 ».

Dès lors, le coefficient en $x^{12}y^{13}$ est obtenu quand $i = 13$ (comme précédemment), et vaut donc

$$\binom{25}{13} 2^{12}(-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\,12!} 2^{12}(-3)^{13}.$$

◀

Exercice 4.7. Supposez qu'au sein d'un conseil étudiant, il y ait 9 étudiants inscrits en section « gestion », 11 en section « réseau » et 13 en section « industrielle ». Combien de façons y a-t-il de constituer un comité pour défendre les intérêts des étudiants aux autorités si ce comité doit être constitué à partir des membres du conseil et doit comprendre 3 étudiants en gestion, 4 en réseau et 5 en industrielle ?

Solution. On remarque qu'au sein du comité, l'ordre des membres n'importe pas (seule la composition importe), et que les répétitions sont interdites vu qu'on ne peut sélectionner un étudiant qu'une seule fois. De plus, on peut décomposer la tâche de composition du comité en la sélection indépendante de ses membres en gestion, réseau et industrielle. On peut en effet d'abord sélectionner les trois étudiants de gestion, puis, sans se préoccuper de ces étudiants, sélectionner les étudiants de réseau, et enfin ceux d'industrielle.

Dès lors, par la règle du produit et la définition du nombre de combinaisons, on a exactement

$$C_9^3 \cdot C_{11}^4 \cdot C_{13}^5 = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{11!}{4!\,7!} \cdot \frac{13!}{5!\,8!}$$

façons de composer le comité. ◀

Exercice 4.8. Combien de permutations des lettres « ABCDEFGH » contiennent la chaîne « ABC » ?

Solution. Comme les lettres « ABC » doivent apparaître sous la forme d'un bloc, il suffit pour répondre à la question de trouver le nombre de permutations de 6 objets, en l'occurrence, la chaîne « ABC », ainsi que les cinq lettres « D », « E », « F », « G » et « H ».

On en conclut qu'il y a donc $6! = 720$ permutations des lettres « ABCDEFGH » qui contiennent la chaîne « ABC ». ◀

Exercice 4.9. Combien de podiums de trois concurrents (*ex-æquo* exclus) peut-il y avoir dans une compétitions de 100 sportifs ?

Solution. On remarque que les concurrents sur le podium sont tous distincts, et que l'ordre sur le podium importe. Dès lors, il y a $A_{100}^3 = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$ podiums possibles. ◀

Exercice 4.10. Un marchand doit visiter huit villes différentes, toutes reliées deux à deux par une route. Il commence sa visite dans une ville déterminée, et peut ensuite visiter les autres dans n'importe quel ordre. Combien de façons le marchand possède-t-il de visiter les huit villes ?

Solution. Le nombre de chemins possibles pour le marchand est le nombre de permutations de 7 éléments, car la première ville est fixée, et les 7 autres peuvent être parcourues dans un ordre arbitraire.

Dès lors, il y a $7! = 5040$ façons pour le marchand d'effectuer sa tournée. ◀

Exercice 4.11. Combien de séquences de 5 éléments d'ADN [8]
- finissent par A ?
- commencent par T et finissent par G ?
- ne contiennent que des A et des T ?
- ne contiennent pas C ?

Solution. L'ADN étant une séquence ordonnée d'éléments sélectionnés parmi 4 types possibles pouvant se répéter, il est clair que, dans chaque cas, il faille utiliser le nombre d'arrangements avec répétitions de 5 éléments.
- Imposer que la chaîne finisse par A revient à fixer un élément, et donc à ne considérer que des séquences de longueur 4 pour le comptage. Dès lors, on a $\alpha_4^4 = 4^4 = 256$ différentes séquences de ce type.
- Similairement, fixer la première et la dernière lettre revient à compter les arrangements avec répétitions de 3 éléments pris parmi 4. On a donc $\alpha_4^3 = 4^3 = 64$ différentes séquences de ce type.
- Dans le cas où les séquences ne contiennent que des A et des T, on réduit le comptage à celui d'un arrangement de 5 éléments pris parmi 2 (le A et le T). Dès lors, on a $\alpha_2^5 = 2^5 = 32$ séquences de ce type.

8. Pour rappel, l'ADN est composé de quatre bases différentes notées A, C, T, G.

— Similairement, si les séquences ne peuvent pas contenir de C, on réduit le comptage à celui d'un arrangement de 5 éléments pris parmi 3 (le A, le T et le G). Dès lors, on a $\alpha_3^5 = 3^5 = 243$ séquences de ce type.

◀

Exercice 4.12. Combien de mots peuvent être formés en réorganisant les lettres du mot « Abracadabra » ?

Solution. On remarque que comme certaines lettres du mot « Abracadabra » se répètent, la réponse à la question n'est *pas* donnée par le nombre de permutations de 11 éléments. En effet, ce mot contient cinq « a », deux « b », deux « r », un « c » et un « d ».

Afin de déterminer le nombre de mots différents qui peuvent être formés en réordonnant les lettres, décomposons la construction de ce mot en y plaçant itérativement les lettres de même type. Ainsi, on remarque avant tout que les cinq « a » peuvent être placés sur n'importe lesquelles des onze positions de C_{11}^5 façons différentes, laissant ainsi six positions libres. Ensuite, les deux « b » peuvent être placés de C_6^2 façons différentes sur n'importe lesquelles de ces six positions, laissant au final quatre positions encore vides. En poursuivant ce résultat, on conclut que les deux « r » peuvent être placés de C_4^2 façons différentes, le « c » de C_2^1 façons différentes et finalement le « d » d'une unique façon possible.

En conséquence, par la règle du produit, le nombre de mots qui peuvent être formés en réorganisant les lettres du mot « Abracadabra » est égal à

$$\begin{aligned}
C_{11}^5 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 1 &= \frac{11!}{5!\,6!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} \\
&= \frac{11!}{5!\,2!\,2!} \\
&= 83\,160.
\end{aligned}$$

Notez que si l'on change l'ordre dans lequel on place les lettres, cela ne change évidemment rien au résultat. Par exemple, si l'on place les « b » avant les « a », on a

$$\begin{aligned}
C_{11}^2 \cdot C_9^5 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 1 &= \frac{11!}{2!\,9!} \cdot \frac{9!}{5!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} \\
&= \frac{11!}{5!\,2!\,2!} \\
&= 83\,160
\end{aligned}$$

façons de réorganiser les lettres du mut « Abracadabra ». ◀

Exercice 4.13. Combien de chaînes de caractères binaires de longueur 10

1. commencent par deux « `0` » ou finissent par trois « `1` » ?
2. soit commencent par deux « `0` », soit finissent par trois « `1` » ?
3. contiennent cinq « `0` » zéros consécutifs ou cinq « `1` » consécutifs ?
4. contiennent soit trois « `0` » consécutifs, soit quatre « `1` » consécutifs ?

Solution. Dans chacun des cas de cette question, on remarque que l'ordre des éléments importe, chaque séquence énumérée étant différente, et que des répétitions (de « `0` » et de « `1` ») peuvent se produire. On devra donc utiliser les arrangements avec répétitions tout au long de cet exercice.

1. Soit n_0 le nombre de chaînes commençant par deux « `0` », n_1 le nombre de chaînes finissant par trois « `1` » et n_{01} le nombre de chaînes commençant par deux « `0` » et finissant par trois « `1` ». Par le principe d'inclusion-exclusion, on a exactement $n_0 + n_1 - n_{01}$ chaînes qui commencent par deux « `0` » ou qui finissent par trois « `1` ».

   De plus, on remarque que commencer par deux « `0` » revient à fixer les deux premiers caractères de la chaîne, et donc à ne considérer que les arrangements avec répétitions de 8 caractères pris parmi 2. On a $n_0 = \alpha_2^8 = 2^8 = 256$ telles chaînes.

   Similairement, on a $n_1 = \alpha_2^7 = 2^7 = 128$ chaînes qui finissent par trois « `1` », et $n_{01} = \alpha_2^5 = 2^5 = 32$ chaînes commençant par deux « `0` » et finissant par trois « `1` ».

   Ainsi, on a $256 + 128 - 32 = 352$ chaînes qui commencent par deux « `0` » ou finissent par trois « `1` ».

2. On utilise ici les mêmes notations qu'au point précédent. Comme on ne permet pas aux deux cas de se produire en même temps, on a

   $$n_0 + n_1 - n_{01} - n_{01}$$

   chaînes qui soit commencent par deux « `0` », soit qui finissent par trois « `1` ». On doit ici soustraire deux fois n_{01} : une fois pour les chaînes commençant par deux « `0` » et finissant par trois « `1` », et une autre fois pour les chaînes qui ni ne commencent par deux « `0` », ni ne finissent par trois « `1` ». Ainsi, on a $352 - 32 = 320$ telles chaînes.

3. On remarque que les blocs de cinq « `0` » ou « `1` » consécutifs peuvent commencer à six positions possibles : 1, 2, 3, 4, 5,et 6. Dans une telle chaîne, les 5 autres caractères aux positions libres peuvent prendre des valeurs arbitraires. Cette situation est illustrée à la figure 4.21.

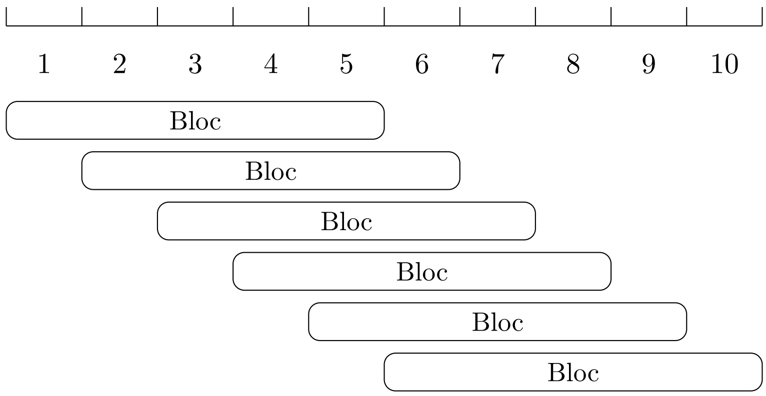


FIGURE 4.21 – Un bloc peut apparaître à six positions disponibles

Ainsi, par la règle du produit, on a exactement $6 \cdot \alpha_2^5 = 192$ chaînes contenant un bloc de cinq « `1` » consécutifs, et également 192 chaînes contenant un bloc de cinq « `0` » consécutifs. On remarque également qu'il n'existe que deux chaînes contenant à la fois un bloc de cinq « `0` » consécutifs et un bloc de cinq « `1` » consécutifs : les chaînes `0000011111` et `1111100000`.

Dès lors, par le principe d'inclusion-exclusion, on a exactement $192 + 192 - 2 = 382$ chaînes qui contiennent cinq « `0` » zéros consécutifs ou cinq « `1` » consécutifs.

4. Similairement au point précédent, on remarque que les blocs de trois « `0` » consécutifs peuvent commencer à 8 positions différentes, et les blocs de quatre « `1` » consécutifs peuvent commencer à 7 positions différentes. Les autres caractères des chaînes peuvent prendre des valeurs arbitraires. On a donc $8 \cdot \alpha_2^7 = 1024$ chaînes qui contiennent un bloc de trois « `0` » consécutifs, et $7 \cdot \alpha_2^6 = 448$ chaînes qui contiennent un bloc de quatre « `1` » consécutifs.

   Néanmoins, on ne peut pas se contenter d'additionner en l'état, sachant que certaines chaînes qui contiennent un bloc de trois « `0` » consécutifs contiennent également un bloc de quatre « `1` » consécutifs.

   Calculons le nombre de chaînes comprenant ces deux configurations, en les construisant par étapes. Bien qu'elle puisse sembler rébarbative, il est nécessaire de prendre des précautions afin de ne pas compter deux fois une configuration, comme l'illustre la résolution délibérément fausse de l'Erreur A.6, en annexe.

Comptons séparément le nombre de telles chaînes qui contiennent exactement quatre « `1` », cinq « `1` », six « `1` » et sept « `1` ». Il n'y a pas d'autres cas possibles, les dernières positions restantes devant au minimum contenir le bloc de trois « `0` » consécutifs.

Dans le cas où la chaîne contient exactement quatre « `1` », ils forment un bloc (par contrainte) et les autres caractères de la chaîne sont tous des « `0` ». Il y a exactement sept telles chaînes, comme illustré à la figure 4.22.

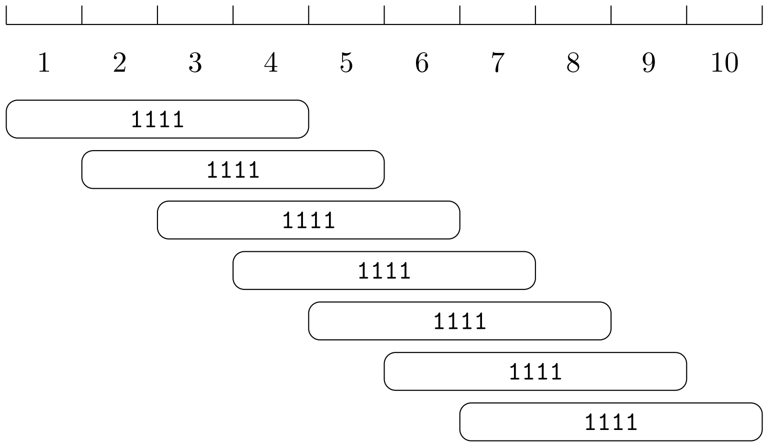


FIGURE 4.22 – Le bloc de quatre « `1` » peut apparaître à sept positions disponibles

Dans le cas où la chaîne contient exactement cinq « `1` », il faut distinguer deux cas. Le premier, celui où ladite chaîne ne contient pas de bloc de cinq « `1` » consécutifs, et le second où tel est le cas [9]. Dans le cas où la chaîne ne contient pas de bloc de cinq « `1` » et où le bloc de quatre « `1` » commence aux positions 1 ou 7, il y a exactement cinq positions possibles pour le dernier « `1` » afin de permettre au bloc de trois « `0` » d'être inséré [10]. La figure 4.23 illustre tous les placements possibles pour le dernier « `1` », il y a donc 22 telles chaînes. De plus, avec un raisonnement similaire à celui de la figure 4.22, on compte exactement six chaînes contenant un bloc de cinq « `1` » consécutifs (les autres caractères étant des zéros). On a donc

9. Une telle distinction *est nécessaire*. Voyez-vous pourquoi ?

10. Par exemple, si le bloc de quatre « `1` » commence en 1, les positions disponibles pour le dernier « `1` » sont 6, 7, 8, 9 et 10.

exactement $22 + 6 = 28$ chaînes contenant exactement cinq « `1` ».

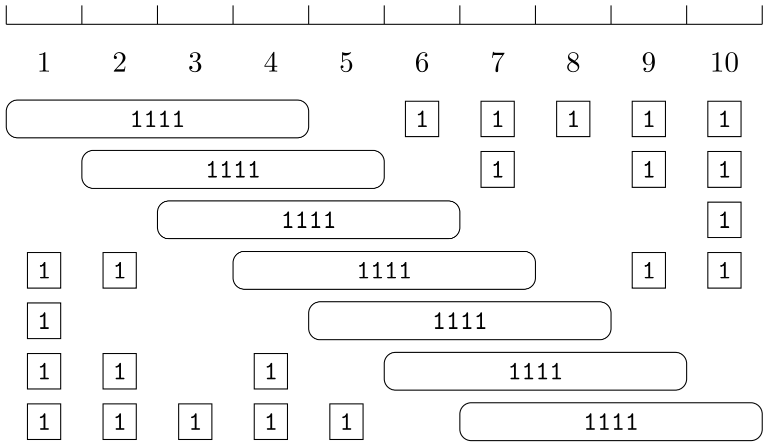


FIGURE 4.23 – Le bloc de quatre « `1` » peut apparaître à sept positions disponibles

On peut utiliser un raisonnement similaire d'énumération minutieuse pour les chaînes contenant exactement six et sept « `1` ». Ces énumérations sont détaillées aux figures 4.24 et 4.25, respectivement. On y remarque qu'on a exactement $16 + 6 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 = 35$ telles chaînes.
Ainsi, on en conclut, au final, qu'il y a exactement

$$1024 + 448 - (7 + 28 + 35) - (7 + 28 + 35) = 1332$$

chaînes qui contiennent soit trois « `0` » consécutifs, soit quatre « `1` » consécutifs.

◀

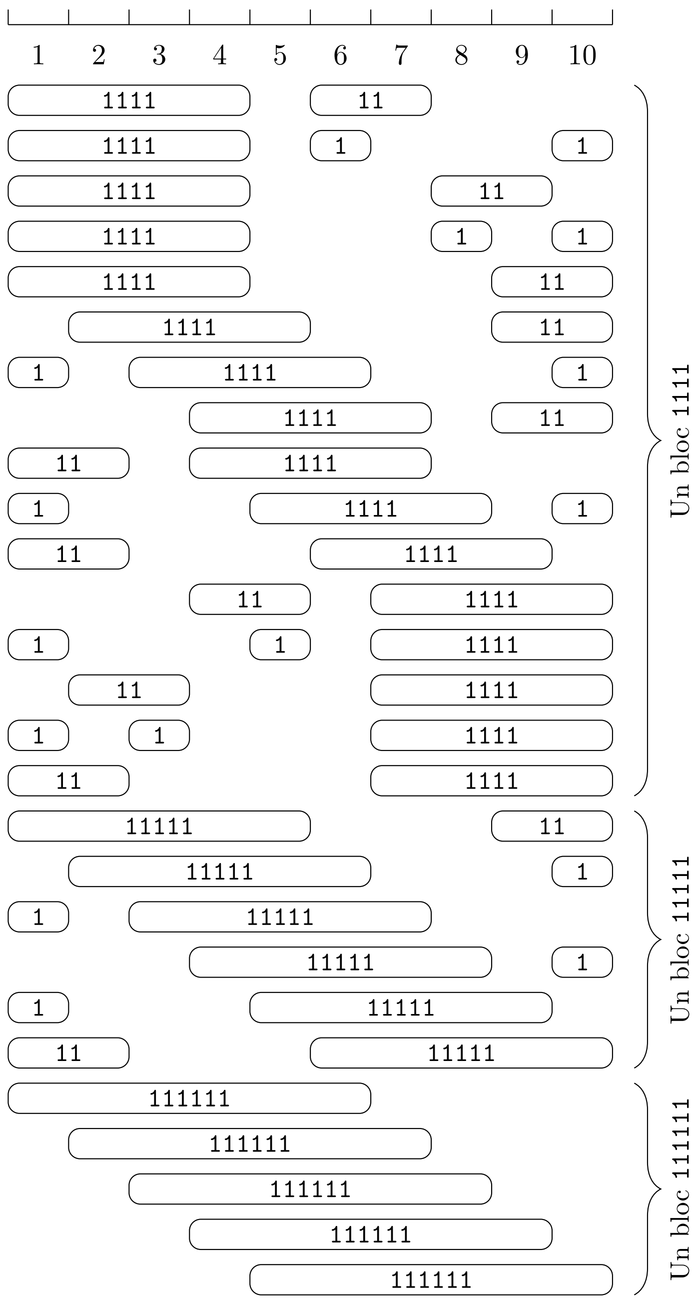


FIGURE 4.24 – Énumération des chaînes contenant exactement six « 1 »

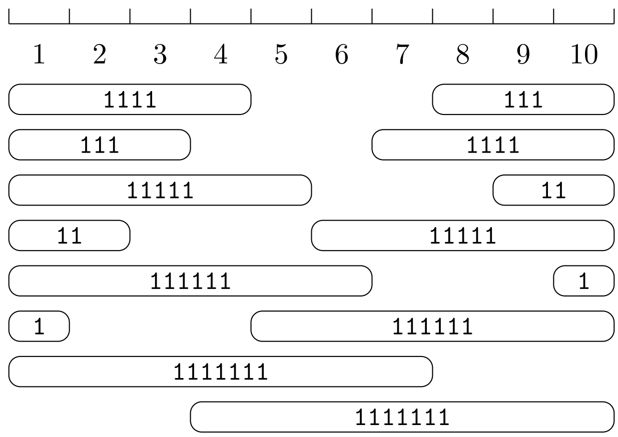


FIGURE 4.25 – Énumération des chaînes contenant exactement sept « 1 »

CHAPITRE 5

Principe de récurrence

Introduction • Définitions récursives • Preuve par récurrence • Exercices résolus

Dans le chapitre 4, on a vu que l'une des clés dans la résolution de problèmes de comptage est la stratégie « diviser et conquérir », à savoir découper un problème complexe en sous-problèmes plus simples, les résoudres, et assembler leurs solutions pour trouver la solution du problème original.

Ce chapitre approffondit ce concept. En effet, il est parfois difficile de définir un objet explicitement, et on a parfois besoin de le définir en fonction de lui-même. Ce principe est appelé la *récursion*. L'idée de base est de définir un objet O_n de taille n en fonction d'objets O_m où m est plus petit que n. Similairement, on veut parfois montrer que si une propriété est vraie sur un objet de petite taille, elle l'est également sur un objet plus gros.

On verra également que ce principe de récurrence est également utile dans la conception de preuves et d'algorithmes.

Ce concept de récurrence étant très utilisé en mathématiques, il existe de nombreux ouvrages et exemples pour l'illustrer. À ce titre, ce chapitre s'inspire de beaucoup d'exemples du livre de Rosen [14].

Ainsi, la section 5.1 présente une introduction au concept de récurrance. La section 5.2 introduit le concept de définition récursive, classiquement à propos de fonctions. Finalement, la section 5.3 introduit le concept de preuve par récurrence, fondamental en mathématiques et servant de base aux invariants de boucle, utilisés dans les preuves d'exactitude d'algorithmes. La section 5.4 conclut ce document par une série d'exercices résolus.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous explorons un concept, appelé la *récurrence*, dans deux directions :

— la *définition récursive* (ou *définition par récurrence*), permettant de construire certains « objets » (objets au sens mathématiques, tels que des fonctions ou des formes géométriques) à partir d'objets « plus petits » ;

— la *preuve par récurrence*, permettant de prouver certaines propriétés [1].

Définition récursive

Le principe de la définition récursive est :

— on suppose que l'on soit capable de construire un objet simple,

— étant donné un objet, on construit un objet « un peu plus complexe ».

De la sorte on rend l'objet de plus en plus complexe.

Exemple 5.1. Considérons l'image de la figure 5.1. On imagine que cette image pourrait "continuer" en ajoutant des cadres : c'est de la récurrence. En effet,

— on est capable de construire une image de base : c'est le cadre extérieur, le grand texte « récurrence » situé en bas, et le grand chat de gauche. C'est la première image que l'on peut construire. Appelons-la I_1.

— à partir d'une image I_k « avec k chats », on peut construire une image avec « $k+1$ chats » : on place d'abord I_k, et lui rajoute une réduction de I_1 en son centre.

◀

1. Dans le cadre de ce cours, ce seront surtout des preuves de formules mathématiques et des preuves d'algorithmes.

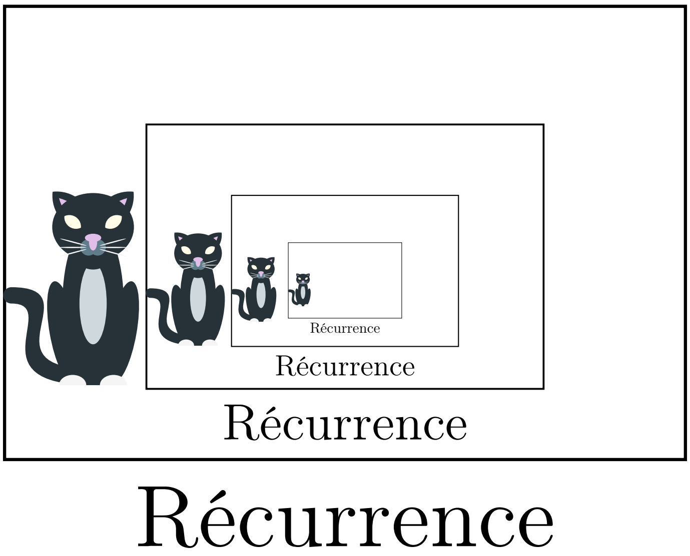


Figure 5.1 – Récursion

Preuve par récurrence

Dans un contexte de preuve d'une certaine propriété, on a un principe similaire :

— on suppose que l'on soit possible de prouver la propriété pour un « objet simple »,

— On prouve ensuite qu'étant donné un objet possédant la propriété, alors un objet « un peu plus complexe » possède aussi la propriété voulue.

Exemple 5.2. Supposons que l'on dispose d'une échelle infinie (voir figure 5.2). Supposons

1. que l'on puisse atteindre le premier échelon ;
2. qu'à partir d'un échelon arbitraire k on peut atteindre l'échelon suivant $k + 1$ (en montant simplement d'un échelon)

Sous ces hypothèses, il est alors évident qu'on peut donc grimper l'échelle « jusqu'où l'on veut » !

Notons que la précision des hypothèses est très importante :

1. si on ne peut pas monter sur le premier échellon, on ne pourra pas grimper à l'échelle ;
2. si à partir d'un certain échellon, on ne peut pas atteindre le suivant, on ne pourra pas, non plus, grimper à l'échelle.

◀

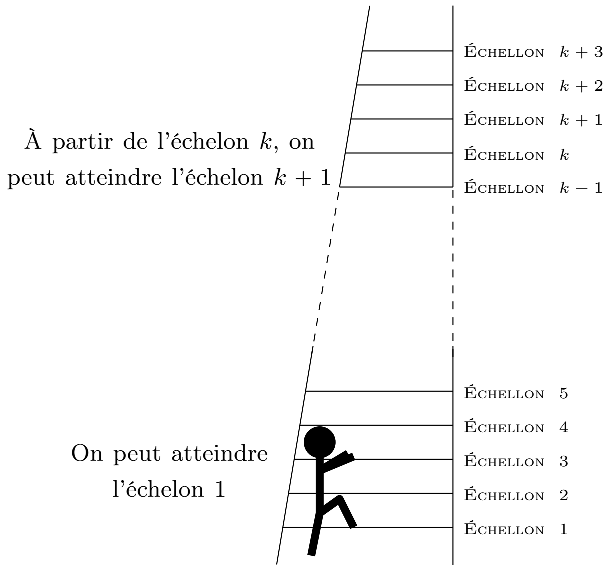


FIGURE 5.2 – Monter une échelle infinie

Les deux sections suivantes détailleront ces deux types d'utilisation de récurrence, en fournissant divers exemples concrets et formels dans chaque cas.

5.2 Définitions récursives

Il est parfois difficile de définir un objet, une propriété ou une fonction de manière explicite. Ainsi, parfois, il est plus facile d'énoncer cette fonction en fonction d'autres fonctions, voire d'elle-même. On parle alors de *définition récursive*.

Une telle définition informelle repose sur deux étapes essentielles. À vertu de simplification, nous nous restreignons aux fonctions définies sur l'ensemble des naturels, sachant toutefois qu'on pourra rencontrer d'autres cas.

Définition récursive

- *Étape de base* : spécifier $f(0)$ (ou d'autres valeurs « de départ »).
- *Étape d'induction* : donner une règle permettant de calculer $f(n)$ (« la valeur au rang n ») à partir de ses valeurs aux rangs plus petits (généralement $f(n-1)$)

Parfois, l'étape d'induction est appelée l'*étape de récurrence*. Par ailleurs, on remarque qu'il n'est pas particulièrement difficile d'adapter la définition ci-dessus à d'autres objets mathématiques que des fonctions. À ce titre, les exemples suivants définissent également des ensembles, des propriétés, des graphes, etc.

Exemple 5.3. Soit

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ n \cdot f(n-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Évaluons $f(5)$. Pour cela nous appliquons la règle d'induction $f(n) = nf(n-1)$ jusqu'à terminer par le cas de base :

$$\begin{aligned} f(5) &= 5 \cdot f(4) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot f(3) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot f(2) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot f(1) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot f(0) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

La fonction f n'est autre que la fonction factorielle : $f(5) = 5! = 120$. ◀

Exemple 5.4. Considérons la fonction de Fibonnaci, définie comme

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ 1 & \text{si } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons ici la présence de deux cas de base ! Ces deux cas de base sont nécessaires parce que la formule d'induction a besoin des *deux* valeurs précédentes pour obtenir la valeur au rang n.

Calculons ici aussi la valeur de $f(5)$. À chaque étape nous appliquons la formule de récurrence ou le cas de base :

$$\begin{aligned} f(5) &= f(4) + f(3) \\ &= f(3) + f(2) + f(2) + f(1) \\ &= f(2) + f(1) + f(1) + f(0) + f(1) + f(0) + 1 \\ &= f(1) + f(0) + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 \\ &= 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

L'arbre d'appel d'évaluation de cette fonction est illustré à la figure 5.3. Sur cette figure, on remarque que certaines valeurs (comme $f(3)$) sont calculées plusieurs fois. Ainsi, les appels en rouge et en bleu sont redondants. Si l'on devait être amenés à écrire un programme évaluant cette fonction, il conviendra donc de prendre quelques précautions afin d'être efficace, telles que la *programmation dynamique* [7]. ◀

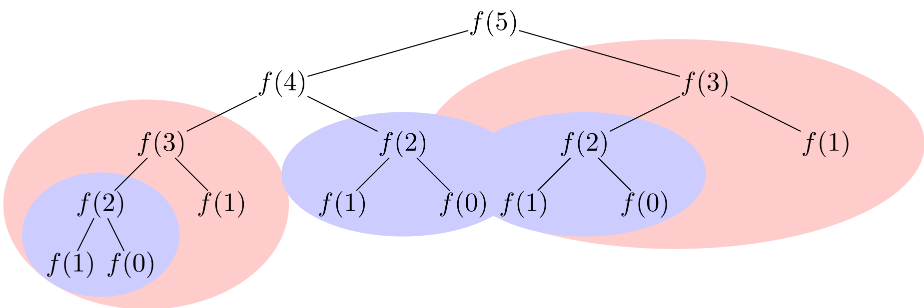


FIGURE 5.3 – Évaluation de la suite de Fibonacci

Notons que la présence d'un cas base et d'une étape de récurrence *ne suffit pas* à avoir une fonction bien définie : il est essentiel à la fois de pouvoir l'évaluer sur tout son domaine, et aussi de ne pas tenter d'évaluer un élement hors domaine lors du déploiement de l'étape de récurrence. Les deux exemples suivants illustrent ces deux problèmes potentiels.

Exemple 5.5. Soit la fonction $f(n)$ définie pour n naturel comme

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ 2 \cdot f(n-2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas bien formulée récursivement. En effet, pour de calculer $f(1)$ il faudrait écrire $f(1) = 2f(-1)$, or $f(-1)$ n'est pas défini. On remarque que ce cas de figure se produit quel que soit n impair. ◀

Exemple 5.6. Soit la fonction $f(n)$ définie pour n naturel comme

$$f(a,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a & \text{si } n = 1 \\ f(f(a, n \text{ div } 2), 2) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas bien formulée récursivement : elle n'est pas définie sur les nombres impairs supérieurs à 1 (ni en fait pour aucune valeur de n qui n'est pas une puissance de 2).

Par ailleurs, si l'on examine les appels possibles plus en détails, on remarque également la présence d'une *récursion infinie* : il n'est pas possible de calculer $f(3,2)$, car, par définition, $f(3,2) = f(f(3,1),2) = f(3,2)$. Cette définition est un exemple de raisonnement circulaire erroné. ◀

Exemple 5.7. Soit la fonction $f(n) = a^n$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Donnons-en une définition récursive.

Le premier naturel à considérer est 0. Par définition, $a^0 = 1$: c'est notre cas de base. Il reste à trouver comment trouver a^n à partir de a^{n-1} (ou a^{n+1} à partir de a^n). Comme $a^n = a \cdot a^{n-1}$, on peut fixer l'étape de d'induction à $a^n = a \cdot a^{n-1}$ si $n \neq 0$.

Ainsi, la formulation récursive de a^n est

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a \cdot a^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

◀

Exemple 5.8. On peut également définir a^n à partir de la définition la fonction de l'exemple 5.6, comme ceci :

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a & \text{si } n = 1, \\ (a \cdot a)^{n \text{ div } 2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ a \cdot (a \cdot a)^{n \text{ div } 2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Contrairement à l'exemple 5.6, la fonction est cette fois-ci définie correctement par récurrence. Avec ces deux définitions, on a, par exemple,

$$
\begin{aligned}
3^9 &= 3 \cdot 3^8 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3^7 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^6 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^5 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^4 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^3 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^2 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^1 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^0 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3^9 &= 3 \cdot (3 \cdot 3)^4 \\
&= 3 \cdot \big((3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \big)^2 \\
&= 3 \cdot \Big(\big((3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \big) \cdot \big((3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \big) \Big)^1 \\
&= 3 \cdot \Big(\big((3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \big) \cdot \big((3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \big) \Big)
\end{aligned}
$$

On remarque que la deuxième définition utilise significaticement moins de calculs que la première. Dans le cadre de l'implémentation d'un programme, on sera sensible à ce critère de qualité. ◀

Exemple 5.9. Soit $n \geqslant 4$, on définit le graphe $W_n = (V_n, E_n)$ comme suit :

— $V_4 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$,

— $E_4 = \Big\{ \{ 4, 0 \}, \{ 4, 1 \}, \{ 4, 2 \}, \{ 4, 3 \} \Big\} \cup \Big\{ \{ 0, 1 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 3, 0 \} \Big\}$,

— si $n > 4$, W_{n+1} est obtenu à partir de W_n en

1. ajoutant un sommet (non connecté) w,
2. ajoutant une arête joignant le sommet de plus haut degré de W_n à w,
3. supprimant une arête de W_n connectant deux sommets u et v de degré 3,
4. ajoutant les arêtes $\{ u, w \}$ et $\{ v, w \}$.

Construisons quelques graphes W_n. Comme dans l'exemple précédent, le cas de base est ici $n = 2$.

— Par définition du cas de base, $W_4 = (V_4, E_4)$ avec

  — $V_4 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$,

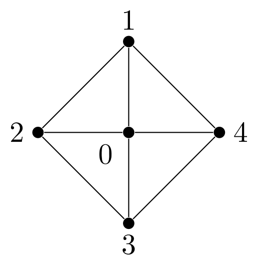
  — $E_4 = \Big\{ \{ 4, 0 \}, \{ 4, 1 \}, \{ 4, 2 \}, \{ 4, 3 \} \Big\} \cup \Big\{ \{ 0, 1 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 3, 0 \} \Big\}$,

  tel qu'illustré à la figure 5.5(a).

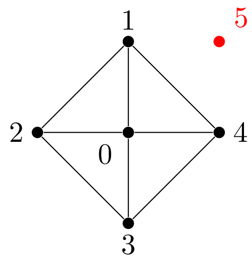
— On construit W_5 de la manière suivante :

1. numérotons les sommets de W_4 de 0 à 4, tel qu'illustré à la figure 5.4(a),

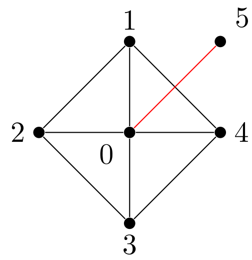
2. ajoutons un sommet 5, non connecté, tel qu'illustré à la figure 5.4(b),
3. ajoutons une arête joignant le sommet de plus haut degré (le sommet 0) à 5, tel qu'illustré à la figure 5.4(c),
4. supprimons une arête joignant deux sommets de degré 3 (sans perdre de généralité, supposons que ce soit $\{1, 4\}$, connectant les sommets 1 et 4), tel qu'illustré à la figure 5.4(d),
5. ajoutons deux arêtes pour joindre 1 à 5, et 4 à 5 : les arêtes $\{1, 5\}$ et $\{4, 5\}$, tel qu'illustré à la figure 5.4(e).



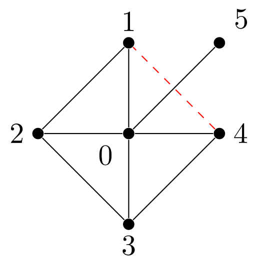
(a) Numérotation des sommets de W_4



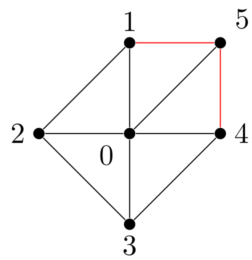
(b) Ajout d'un sommet 5



(c) Ajout de $\{0, 5\}$



(d) Suppression de $\{1, 4\}$



(e) Ajout de $\{1, 5\}$ et $\{4, 5\}$

FIGURE 5.4 – Construction de W_5 à partir de W_4

Ainsi, on a $W_5 = (V_5, E_5)$ avec
— $V_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
— $E_5 = \Big\{ \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,4\}, \{0,5\} \Big\}$
$\cup \Big\{ \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\} \Big\}$,

tel qu'illustré à la figure 5.5(b).

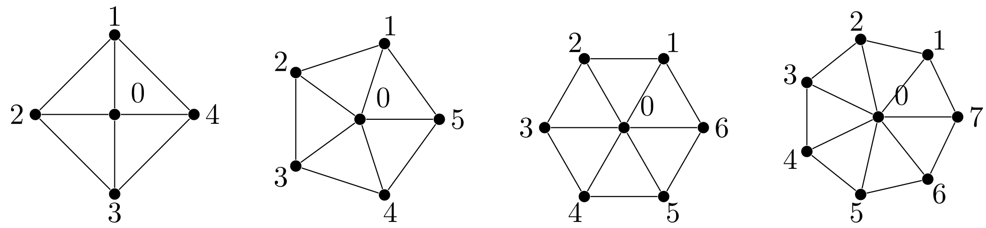
— En procédant de manière similaire à la construction de W_5, on a $W_6 = (V_6, E_6)$ avec

  - $V_6 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$,
  - $E_6 = \Big\{ \{ 0, 1 \}, \{ 0, 2 \}, \{ 0, 3 \}, \{ 0, 4 \}, \{ 0, 5 \}, \{ 0, 6 \} \Big\}$
    $\cup \Big\{ \{ 1, 2 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 3, 4 \}, \{ 4, 5 \}, \{ 5, 6 \}, \{ 6, 1 \} \Big\}$,

  tel qu'illustré à la figure 5.5(c).
- En procédant de manière similaire à la construction de W_5, on a $W_7 = (V_7, E_7)$ avec
  - $V_7 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$,
  - $E_7 = \Big\{ \{ 0, 1 \}, \{ 0, 2 \}, \{ 0, 3 \}, \{ 0, 4 \}, \{ 0, 5 \}, \{ 0, 6 \}, \{ 0, 7 \} \Big\}$
    $\cup \Big\{ \{ 1, 2 \}, \{ 2, 3 \}, \{ 3, 4 \}, \{ 4, 5 \}, \{ 5, 6 \}, \{ 6, 7 \}, \{ 7, 1 \} \Big\}$,

  tel qu'illustré à la figure 5.5(d).

◀



(a) W_4 (b) W_5 (c) W_6 (d) W_7

FIGURE 5.5 – Quelques graphes W_n

5.3 Preuve par récurrence

La preuve par récurrence est un outil central en mathématiques, car elle est particulièrement adaptée à prouver des propriétés relatives à des objets définis par récurrence, comme détaillé à la section 5.2. Elle est également très utilisée en informatique, sous la forme d'*invariant de boucle*, pour prouver l'exactitude d'algorithmes itératifs.

Le mathématicien italien du XVII$^{\text{e}}$ siècle Francesco Maurolico est le premier [14] à avoir utilisé informellement la preuve par récurrence, dans ses travaux *Arithmetico Libri Duo*, où il y présente une variété de propositions sur les entiers, et les prouve. En particulier, il y prouve que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2. Le premier usage formel de la preuve par récurrence est attribué à Auguste De Morgan en 1838, qui a également introduit la terminologie à ce sujet [10].

Le principe est assez simple : on montre d'abord qu'une propriété est vraie sur un « objet simple ». Ensuite, on montre que si elle est vraie sur un objet arbitraire, alors elle l'est sur un objet « un peu plus complexe ».

Comme précédemment, la preuve par récurrence se repose sur deux étapes essentielles : un *cas de base* et une *étape d'induction*.

Preuve par récurrence

Soit $p(n)$ une proposition définie sur les naturels. Afin de *prouver par récurrence* qu'une telle proposition est vraie pour tout n, on procède en deux étapes :

— *Étape de base* : on vérifie que $p(0)$ est vrai,

— *Étape d'induction* : on montre que l'implication $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ est vraie quel que soit k.

Parfois, l'étape d'induction est appelée l'*étape de récurrence*. Notez qu'il n'est pas difficile d'adapter ce principe aux propositions dont le domaine de définition n'est pas les naturels : le cas de base devient la plus petite valeur sur laquelle la proposition peut être évaluée.

Concrètement, pour prouver par récurrence qu'une proposition $p(n)$ est vraie, on suit les deux étapes :

— en premier lieu on remplace n par 0 et on vérifie que la proposition est vraie ;

— ensuite, pour prouver l'étape d'induction, il suffit de montrer que $p(k+1)$ est vrai (ou ne peut pas être faux) si $p(k)$ est vrai. La supposition « $p(k)$ est vrai pour un certain k arbitraire », est appelé *l'hypothèse d'induction* ou l'*hypothèse de récurrence.*. L'objectif est de se servir de cette supposition pour montrer que si elle est effectivement vraie, alors $p(k+1)$ l'est également.

Notez que dans le principe ci-dessus, on ne *suppose pas* que $p(k)$ est vrai *quel que soit* le naturel k considéré. On se contente de montrer que si $p(k)$ est vrai, alors $p(k+1)$ l'est aussi. La preuve par récurrence n'est donc pas un exemple de raisonnement circulaire [2].

La suite de cette section présente diverses propriétés, et les prouve par récurrence.

Exemple 5.10. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$ naturel,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

Preuve. Soit $p(n)$ la proposition affirmant que la somme des n premiers naturels $1+2+3+\cdots+n$ soit égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Il faut prouver deux étapes pour prouver que $p(n)$ est vrai quel que soit $n = 1, 2, 3, \ldots$ Premièrement, il faut montrer que $p(1)$ est vrai : c'est l'étape de base. Ensuite, il faut montrer que si $p(k)$ est vrai pour un certain k arbitraire, alors $p(k+1)$ est également vrai : c'est l'étape d'induction. Faisons-le.

Cas de base

Pour vérifier que $p(1)$ est vrai, il suffit de calculer les deux côtés de l'égalité en remplaçant n par 1 :

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$$

Le côté gauche vaut 1, parce que c'est la somme de 1 et rien d'autre. Le côté droit vaut 1 et également, parce que (on substitue n par 1) : $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Dès lors, $p(1)$ est vrai car $1 = 1$.

Étape d'induction

2. Un exemple de raisonnement circulaire est de dire « Les limaces mangent des salades. Pourquoi les limaces mangent-elles des salades ? Parce que les salades sont la nourriture des limaces. Pourquoi les salades sont-elles la nourriture des limaces ? Parce que les limaces mangent des salades, etc. »

Pour cette étape, on prend un entier arbitaire k et on suppose que $p(k)$ est vrai pour cet entier, c'est-à-dire, on suppose que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

C'est l'hypothèse d'induction. On veut montrer que sous cette hypothèse, $p(k+1)$ est vraie également, c'est-à-dire que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

est également vrai.

Calculons le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \qquad \text{par hypothèse d'induction} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Cette dernière achève la preuve : on a montré que si $p(k)$ est vrai, c'est-à-dire si $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$, alors $p(k+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire $1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Ceci conclut l'étape d'induction.

Comme on a complété à la fois le cas de base et l'étape d'induction, on a montré que $p(n)$ est vrai quel que soit n, c'est-à-dire que

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

quel que soit $n > 0$ naturel.

◀

Ce premier exemple illustre une utilisation simple de la preuve par récurrence.

On remarque que la récurrence ne permet pas de découvrir de nouveaux résultats, au contraire du raisonnement déductif : il faut d'abord trouver « la formule » puis la prouver.

Voici une preuve alternative –tout aussi valide– qui permet de comprendre d'où vient la formule de l'exemple 5.10 :

Preuve. Notons d'abord S le résultat de la somme :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

Si on écrit $S + S$, on a

$$S + S = (1 + 2 + \cdots + (n-1) + n) + (1 + 2 + \cdots + (n-1) + n)$$

on peut aussi l'écrire en ré-arrangeant les termes :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline \end{array}$$

ce qui donne[3]

$$S + S = (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1)$$

où chacune des n parenthèses vaut $n+1$. On en conclut que $2S = n(n+1)$ d'où le résultat : $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Notons que l'idée de cette démontration fut la première fois mise en évidence par Gauss en 1788 lorsqu'il était agé de tout juste 10 ans [12].

Exemple 5.11. Prouvons par récurrence la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$ et de terme initial a, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

Rappelons que le membre de gauche est une notation pour $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$.

3. On additionne verticalement d'abord.

Preuve. Cas de base : $n = 0$

La propriété est vraie pour $n = 0$, en effet,

$$\frac{ar^{0+1} - a}{r - 1} = \frac{ar - a}{r - 1} = \frac{a(r-1)}{r-1} = a,$$

ce qui est bien ce que l'on veut démontrer : en développant les termes de la somme quand il n'y a qu'un seul terme (pour $i = 0$), il ne reste que a.

Étape de récurrence

Supposons, par hypothèse de récurrence, que la propriété soit vraie pour un certain k, c'est-à-dire que

$$\sum_{i=0}^{k} ar^i = \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1},$$

et montrons que, sous cette hypothèse, la formule est encore vraie pour $n = k+1$, c'est-à-dire nous voulons montrer que la somme ci-dessous est égale à $\frac{ar^{k+2} - a}{r - 1}$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} ar^i &= \left(\sum_{i=0}^{k} ar^i\right) + ar^{k+1} \\
&= \frac{ar^{k+1} - a}{r - 1} + ar^{k+1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{ar^{k+1} - a + (r-1)ar^{k+1}}{r - 1} \\
&= \frac{ar^{k+1}(1 + r - 1) - a}{r - 1} && \text{mise en évidence par } ar^{k+1} \\
&= \frac{ar^{k+1} \cdot r - a}{r - 1} \\
&= \frac{ar^{k+2} - a}{r - 1}
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement ce que l'on voulait montrer. Comme on a montré l'étape de base et l'étape d'induction, la propriété est bien démontrée. ◀

Notons que la preuve par récurrence n'est pas utile uniquement pour prouver des égalités de sommes. On peut prouver des inégalités, des égalités sur des ensembles, sur des invariants de graphes, sur des critères de divisibilité, etc., comme illustré par les exemples suivants.

Exemple 5.12. Montrons que $n < 2^n$ quel que soit $n > 0$.

Preuve. CAS DE BASE : $n = 1$

La propriété est vraie quand $n = 1$, en effet, $1 < 2^1 = 2$.

ÉTAPE DE RÉCURRENCE

Supposons, par hypothèse de récurrence, que la propriété est vraie pour un certain k, c'est-à-dire que $k < 2^k$, et montrons que, sous cette hypothèse, cette propriété est également vraie pour $k + 1$, c'est-à-dire que $k + 1 < 2^{k+1}$. On a

$$\begin{aligned} k + 1 &< 2^k + 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant 2^k + 2^k && \text{car } 1 \leqslant 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

et donc on a bien $k + 1 < 2^{k+1}$, ce qui prouve la priorité.

◀

Exemple 5.13. Montrons que $n^3 - n$ est divisible par 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. CAS DE BASE : $n = 0$

La propriété est vraie quand $n = 0$, en effet, $0^3 - 0 = 0$ est divisible par 3.

ÉTAPE DE RÉCURRENCE

Supposons, par hypothèse de récurrence, que la propriété est vraie pour un certain k, c'est-à-dire que $k^3 - k$ est divisible par 3, et montrons que, sous cette hypothèse, cette propriété est également vraie pour $k+1$, c'est-à-dire que $(k+1)^3 - (k+1)$ est divisible par 3. On a

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1\\ &= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k)\\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que le premier terme $k^3 - k$ est divisible par 3. Quant au deuxième terme, si on le divise par 3, on obtient $k^2 + k$, ce qui est bien un entier, donc $3(k^2 + k)$ est bien divisible par 3. Comme la somme de deux nombres divisibles par 3 est également divisible[4] par 3, on en conclut que le nombre $(k+1)^3 - (k+1)$ est également divisible par 3, ce qui prouve la propriété.

◀

Exemple 5.14. Prouvons par récurrence une généralisation des lois de De Morgan, c'est-à-dire, étant donné des ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_n$, on a

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} S_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i},$$

avec $n \geqslant 2$.

Preuve. Cas de base : $n = 2$

On a bel et bien $\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$, par les lois de De Morgan (propriété 1.12, p. 17).

Étape de récurrence

Supposons la propriété vraie pour un certain k, c'est-à-dire

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{k} S_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i},$$

4. Si a et b sont divisibles par 3, ils peuvent s'écrire $a = 3q_1$ et $b = 3q_2$, par division euclidienne. Dès lors, $a + b = 3q_1 + 3q_2 = 3(q_1 + q_2)$, et ce nombre est divisible par 3.

et montrons qu'elle est vérifiée pour $k+1$, c'est-à-dire

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{k+1} S_i} = \bigcup_{i=1}^{k+1} \overline{S_i}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{i=1}^{k+1} S_i} &= \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k} S_i\right) \cap S_{k+1}} \\
&= \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k} S_i\right)} \cup \overline{S_{k+1}} && \text{par les lois de De Morgan, où les ensembles considérés} \\
& && \text{sont } \bigcap_{i=1}^{k} S_i \text{ et } S_{k+1} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{S_i}\right) \cup \overline{S_{k+1}} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \bigcup_{i=1}^{k+1} \overline{S_i}
\end{aligned}$$

Ceci conclut dont l'étape de récurrence, et la preuve.

◀

Exemple 5.15. Considérons des plateaux rectangulaires de $2^n \times 2^n$ cases, que l'on va paver avec des triominos en forme de « L » couvrant trois cases, tel qu'illustré en figure 5.6. Montrons que tout plateau de taille $2^n \times 2^n$, avec $1 \geqslant 1$, dont on a retiré une case peut être pavé avec de tels triominos.

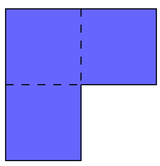
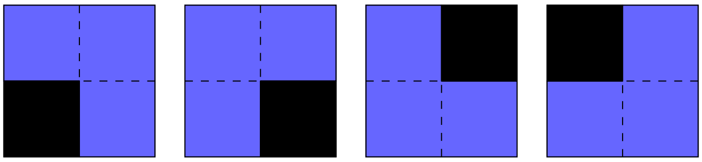


FIGURE 5.6 – Un triomino en forme de « L »

Preuve. Procédons par récurrence.

Cas de base : $n = 1$

Il n'y a que quatre plateaux de taille $2^1 \times 2^1 = 2 \times 2$ dont on a retiré une case, et tous peuvent être pavés en utilisant un triomino, tel qu'illustré à la figure 5.7.



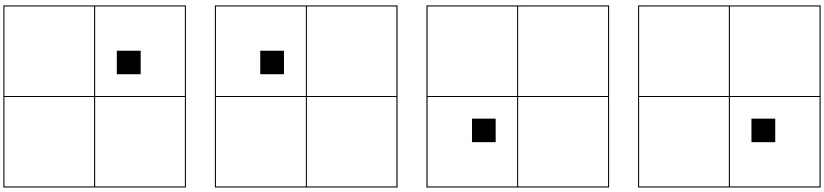
(a) (b) (c) (d)

Figure 5.7 – Quatre plateaux 2×2 dont une case (noire) manque, pavés avec des triominos (bleus)

Étape de récurrence

Supposons la propriété vraie pour un certain k, c'est-à-dire que tous les plateaux de taille $2^k \times 2^k$ dont on a retiré une case peuvent être pavés avec des triominos. On doit montrer qu'elle est vraie pour $k+1$, c'est-à-dire que tous les plateaux de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ dont on a retiré une case peuvent être pavés avec des triominos.

Soit un plateau de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ dont on a retiré une case. Divisons-le en quatre plateaux de taille $2^k \times 2^k$. La case manquante se trouve dans l'un des quatre sous-plateaux de taille $2^k \times 2^k$. Il y a ainsi quatre possibilités, illustrées à la figure 5.8.



(a) (b) (c) (d)

Figure 5.8 – Quatre divisions d'un plateau de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ en quatre plateaux de taille $2^k \times 2^k$

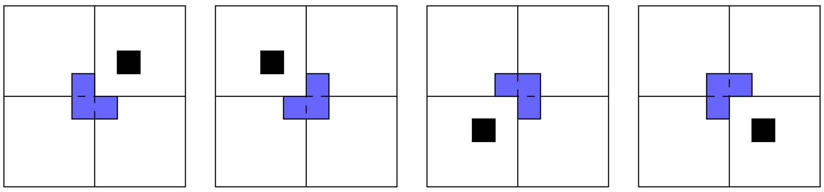
On peut immédiatemment affirmer que le sous-plateau de taille $2^k \times 2^k$ dont la case a été retirée peut être pavé en utilisant des triominos, par hypothèse de récurrence. Par contre, on ne peut rien dire des trois autres, dont toutes les cases sont pleines.

Par contre, on peut « temporairement » supprimer une case de chacun de ces trois sous-plateaux : la case adjacente au centre du grand plateau. En procédant ainsi,

1. il manque une case à chacun de ces trois sous-plateaux de taille $2^k \times 2^k$: par hypothèse de récurrence, ils peuvent être pavés avec des triominos,
2. les trois cases supprimées de ces sous-plateaux peuvent être couverte par un triomino.

Cette situation est illustrée à la figure 5.9, pour les quatre cas possibles.

On a ainsi pu paver avec des triominos un plateau de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ dont une case manque, sous l'hypothèse de récurrence qu'on pouvait le faire avec des plateaux de taille $2^k \times 2^k$ dont une case manque. Ceci conclut donc l'étape de réccurence, et la preuve.



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 5.9 – Pavage des d'un plateau de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ dont une case a été retirée, en fonction du pavage de plateaux de taille $2^k \times 2^k$

◀

Comme dans tout type de preuve, il y a des erreurs couramment commises avec la preuve par récurrence. Toutefois, ce n'est souvent pas facile de trouver lesdites erreurs dans de tels raisonnements, tel qu'illustré dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 5.16. Tout ensemble de $n \geqslant 2$ droites non parallèles deux à deux du plan se coupent en un unique point. À l'évidence, cette proposition est fausse. On présente ici une fause preuve par récurrence de cette propriété, et on mettra ensuite en évidence l'erreur commise.

Preuve erronée. Procédons par récurrence.

CAS DE BASE : $n = 2$

Le cas de base est vérifié : en effet, deux droites non parallèles se coupent en un unique point.

ÉTAPE DE RÉCURRENCE

Supposons la propriété vraie pour un certain k, c'est-à-dire que k droites non parallèles deux à deux du plan se coupent en un unique point, et montrons qu'elles est vraie pour $k + 1$.

Soient $k + 1$ droites distinctes non parallèles deux à deux du plan. Par hypothèse de récurrence, les k premières droites se coupent en un point p_1. De plus, toujours par hypothèse de récurrence, les k dernières droites se coupent également en un point p_2. On va montrer que $p_1 = p_2$.

Si $p_1 \neq p_2$, alors toutes les droites qui les contiennent tous les deux doivent être les mêmes, car une droite est définie de manière unique par deux points. Ceci est une contradiction : on a supposé les droites distinctes. Donc, on a bien $p_1 = p_2$. Ainsi, $p_1 = p_2$ se trouve bien sur toutes les $k + 1$ droites, et on a adonc prouvé la propriété. □

En examinant cette preuve, tout semble en ordre : le cas de base et l'hypothèse de récurrence sont vérifiés. Pourtant, à l'évidence, il doit y avoir une erreur : la proposition est évidemment fausse. En effet, si l'on examine l'étape de récurrence, on remarque qu'elle suppose $k \geqslant 3$. Or, on ne peut pas prouver que si la propriété est vraie pour $k = 2$, alors elle l'est pour $k = 3$. Quand $k = 2$, on doit montrer que tout ensemble de $k + 1 = 3$ droites ont une unique intersection. Les deux premières droites ont une intersection p_1, et les deux dernières une intersection p_2. Toutefois, dans ce cas précis, p_1 et p_2 ne sont pas forcement identiques, car seule la seconde droite est commune aux deux ensembles de droites. C'est à cet endroit que la preuve est fausse. ◀

5.4 Exercices résolus

Exercice 5.1. On définit ci-dessous les fonctions f, g, h et u par récurrence sur l'ensemble des naturels. Pour chacune d'elle, calculer les valeurs de ces fonctions en 1, 2, 3 et 4 :

1. $f(0) = 1$ et $f(n+1) = f(n) + 2$,
2. $g(0) = 1$ et $g(n+1) = 3g(n)$,
3. $h(0) = 1$ et $h(n+1) = 2^{h(n)}$,
4. $u(0) = 1$ et $u(n+1) = (u(n))^2 + u(n) + 1$.

Solution. On va calculer les images des fonctions en appliquant les définitions récursives.

1. On a
   — $f(1) = f(0) + 2 = 1 + 2 = 3$,
   — $f(2) = f(1) + 2 = 3 + 2 = 5$,
   — $f(3) = f(2) + 2 = 5 + 2 = 7$,
   — $f(4) = f(3) + 2 = 7 + 2 = 9$.
2. On a
   — $g(1) = 3g(0) = 3 \cdot 1 = 3$,
   — $g(2) = 3g(1) = 3 \cdot 3 = 9$,
   — $g(3) = 3g(2) = 3 \cdot 9 = 27$,
   — $g(4) = 3g(3) = 3 \cdot 27 = 81$.
3. On a
   — $h(1) = 2^{h(0)} = 2^1 = 2$,
   — $h(2) = 2^{h(1)} = 2^2 = 4$,
   — $h(3) = 2^{h(2)} = 2^4 = 16$,
   — $h(4) = 2^{h(3)} = 2^{16} = 65\,536$.
4. On a
   — $u(1) = (u(0))^2 + u(0) + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$,
   — $u(2) = (u(1))^2 + u(1) + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 13$,
   — $u(3) = (u(2))^2 + u(2) + 1 = 13^2 + 13 + 1 = 183$,
   — $u(4) = (u(3))^2 + u(3) + 1 = 183^2 + 183 + 1 = 33\,673$.

◀

Exercice 5.2. Donner une définition récursive de chacune des suites ci-dessous :

1. $a_n = 6n$,
2. $b_n = 2n + 1$,
3. $c_n = 10^n$,
4. $d_n = 5$.

Solution. On définit ces suites par récurrence en calculant le premier élément et en le posant comme cas de base de la récurrence, et en donnant ensuite une formule pour calculer le n^{e} élément à partir du $n-1^{\text{e}}$ élément (il suffit de calculer la différence entre les deux).

1. On a
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; \mathrm{n} = 0, \\ a_{n-1} + 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. On a
$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; \mathrm{n} = 0, \\ b_{n-1} + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. On a
$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; \mathrm{n} = 0, \\ 10 \cdot c_{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. On a
$$d_n = \begin{cases} 5 & \text{si} \;\; \mathrm{n} = 0, \\ d_{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

◀

Exercice 5.3. Montrons par récurrence que $\sum_{i=0}^{n} \left(2 \cdot (-7)^i\right) = \frac{1 - (-7)^{n+1}}{4}$.

Solution. Procédons comme habituellement.

Cas de base : $n = 0$

On a $\sum_{i=0}^{0}\left(2\cdot(-7)^i\right) = 2\cdot(-7)^0 = 2$, et $\dfrac{1-(-7)^{0+1}}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$. Les deux membres de l'équation étant égaux, le cas de base est bien vérifié.

Étape de récurrence

Supposons que la propriété est vraie pour un certain k, c'est-à-dire supposons que $\sum_{i=0}^{k}\left(2\cdot(-7)^i\right) = \dfrac{1-(-7)^{k+1}}{4}$, et montrons qu'elle est également vraie pour $k+1$, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{k+1}\left(2\cdot(-7)^i\right) = \dfrac{1-(-7)^{k+2}}{4}$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1}\left(2\cdot(-7)^i\right) &= \left(\sum_{i=0}^{k}\left(2\cdot(-7)^i\right)\right) + 2\cdot(-7)^{n+1} \\
&= \frac{1-(-7)^{k+1}}{4} + 2\cdot(-7)^{n+1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-7)^{n+1} + 2\cdot(-7)^{n+1} \\
&= (-7)^{n+1}\left(2-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} && \text{mise en évidence par } (-7)^{n+1} \\
&= \frac{7}{4}\cdot(-7)^{n+1} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{(-7)^{n+2}}{-4} + \frac{1}{4} && \text{multiplication par -7} \\
&= \frac{1}{4}(1-(-7)^{n+2}) && \text{mise en évidence par } \frac{1}{4} \\
&= \frac{1-(-7)^{k+2}}{4}
\end{aligned}$$

Ceci conclut donc l'étape de récurrence, et la preuve. ◀

Exercice 5.4. Montrons par récurrence[5] que $\prod_{i=1}^{n}\left(2i-1\right) = \dfrac{(2n)!}{n!\ 2^n}$.

5. La notation $\prod$ signifie « produit ». Ainsi, par exemple, $\prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$.

Solution. Procédons comme habituellement.

Cas de base : $n = 1$

On a $\prod_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ et $\frac{2!}{1! \cdot 2^1} = \frac{2}{2} = 1$. Les deux membres de l'équation étant égaux, le cas de base est bien vérifié.

Étape de récurrence

Supposons que la propriété est vraie pour un certain k, c'est-à-dire supposons que $\prod_{i=1}^{k}\Big(2i-1\Big) = \frac{(2k)!}{k!\ 2^k}$, et montrons qu'elle est également vraie pour $k+1$, c'est-à-dire $\prod_{i=1}^{k+1}\Big(2i-1\Big) = \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!\ 2^{k+1}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1}\Big(2i-1\Big) &= \left(\prod_{i=1}^{k}(2i-1)\right) \cdot (2(k+1)-1) \\
&= \frac{(2k)!}{k! \cdot 2^k}(2k+1) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(2k)!}{k! \cdot 2^k}\frac{(2k+2)(2k+1)}{2(k+1)} \\
&= \frac{(2(k+1))!}{(k+1)! \cdot 2^{k+1}}
\end{aligned}$$

car $(2k+2)(2k+1) \cdot (2k)! = (2(k+1))!$, et $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$, et $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Ceci conclut donc l'étape de récurrence, et la preuve. ◀

Exercice 5.5. Montrons par récurrence que $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$.

Solution. Comme d'habitude, procédons en deux étapes.

Cas de base : $n = 1$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{1}{1} &> 2(\sqrt{2}-1)\\ &= 2\sqrt{2}-2\\ &\simeq 0{,}82,\end{aligned}$$

la propriété est bien vérfiée pour $n = 1$.

Étape de récurrence

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain k, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{k+1}-1)$, et montrons qu'elle est égalemet vraie pour $k+1$, c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{k+2}-1)$. On a

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \qquad > 2(\sqrt{k+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

par hypothèse de récurrence. Si l'on peut montrer que

$$2(\sqrt{k+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2(\sqrt{k+2}-1),$$

on aura prouvé la propriété. On a

$$\begin{aligned}
&2(\sqrt{k+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2(\sqrt{k+2}-1)\\
&\Leftrightarrow 2\Big(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\Big) < \frac{1}{\sqrt{k+1}}\\
&\Leftrightarrow 2\Big(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\Big)\Big(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}\Big) < \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} + \frac{k+2}{k+1}\\
&\Leftrightarrow 2\Big((k+2)-(k+1)\Big) < 1 + \frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k+1}}\\
&\Leftrightarrow 2 < 1 + \frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k+1}}\\
&\Leftrightarrow 1 < \frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k+1}}\\
&\Leftrightarrow \sqrt{k+1} < \sqrt{k+2}
\end{aligned}$$

ce qui est clairement vrai.

Ceci achève l'étape de récurrence, et donc la preuve de la propriété. ◀

Exercice 5.6. Montrons par récurrence que $5^n + 3$ est divisible par 4.

Solution. Le cas de base est vérifié (quand $n = 0$), car $5^0 + 3 = 1 + 3 = 4$, et 4 est divisible par 4. Pour l'étape de récurrence, supposons que $5^k + 3$ est divisible par 4 (pour un certain k), et montrons que $5^{k+1} + 3$ est divisible par 4. On a bien sûr :

$$5^{k+1} + 3 = 5^k \cdot 5 + 3$$

Puisque c'est notre hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire $5^k + 3 = 4q$, où q est le quotient ; dès lors nous calculons :

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 3 &= 5^k \cdot 5 + 3 \\ &= (4q - 3) \cdot 5 + 3 \\ &= 20q - 12 \\ &= 4(5q - 3) \end{aligned}$$

ce qui est bien un multiple de 4 ! Ceci conclut l'étape de récurrence, et la preuve. ◀

Première partie

Annexes

ANNEXE A

Exemples de raisonnements erronés classiques

Ce chapitre illustre des solutions délibérément erronées de plusieurs exercices de ce document. Ces raisonnements faux sont fournis à titre pédagogique, car ils illustrent des exemples classiques d'erreurs commises par les étudiants.

L'erreur ci-dessous illustre les raisonnement incorrects habituellement suivis par les étudiants dans la compréhension de la disjonction (le « ou ») et de l'implication.

Erreur A.1. Construisez la table de vérité de la proposition $(p \vee q) \Rightarrow r$.

On construit la table de vérité de cette proposition comme suit.

Plusieurs erreurs, en rouge, apparaissent dans la construction de cette table :

- souvent, les étudiants pensent que $V \vee V$ est faux, or ce n'est pas le cas,
- souvent, les étudiants pensent que $F \Rightarrow V$ est faux, ainsi que $F \Rightarrow F$, or ce n'est pas le cas.

Pour rappel,

- une disjonction (« ou », noté $\vee$) est fausse uniquement quand ses deux opérandes sont fausses,
- une implication est fausse uniquement si le premier opérande est vrai et le second faux.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
V	V	V	F	F
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

TABLE A.1 – Table de vérité de $(p \vee q) \Rightarrow r$

Souvent, les étudiants ont du mal à nier des conjonctions, des disjonctions et des implications. L'erreur ci-dessous illustre les fautes couramment commises dans la négation de ces propositions.

Erreur A.2. Niez en français

1. « un brasseur achète de l'orge et du houblon »,
2. « je vais m'entraîner le mardi ou le vendredi »,
3. « si je mange trop de frites, alors je vais grossir ».

Procédons au cas par cas.

1. On peut modéliser cette proposition comme $p \wedge q$, avec p : « un brasseur achète de l'orge » et q : « un brasseur achète du houblon ». La négation de cette proposition est donc $\neg p \wedge \neg q$, c'est-à-dire « le brasseur n'achète pas d'orge et pas de houblon ».

   Or, si l'on réfléchit, si un brasseur doit acheter à la fois de l'orge et du houblon, les cas dans lesquels il est en défaut sont celui où au moins l'un des deux ingrédient est manquants, c'est-à-dire s'il n'achète *pas* de bière *ou* *pas* de houblon, comme décrit par les lois de De Morgan :

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

   En français, la négation correcte est donc « le brasseur n'achète pas d'orge ou pas de houblon ».

2. On peut modéliser cette proposition comme $p \vee q$, avec p : « je vais m'entraîner le mardi » et q : « je vais m'entraîner le vendredi ». La négation de cette proposition est donc $\neg p \vee \neg q$, c'est-à-dire « je ne vais pas m'entraîner le mardi ou pas le vendredi ».

Notons que cette solution interdit de s'entraîner l'un des deux jours. Or, de nouveau, si l'on réfléchit, si l'on affirme s'entraîner le mardi ou le vendredi, l'unique cas où l'on ment est celui où on ne va ni s'entraîner le mardi, ni le vendredi, comme décrit par les lois de De Morgan :

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q.$$

En français, la négation correcte est donc « je vais pas m'entraîner le mardi, et pas le vendredi non plus » (ou encore, « je ne vais m'entraîner ni le mardi, ni le vendredi »).

On peut modéliser cette proposition comme $p \Rightarrow q$, avec p : « je mange trop de frites » et q : « je vais grossir ». La négation de cette proposition est donc $\neg p \Rightarrow \neg q$, c'est-à-dire « si je ne mange pas trop de frites, alors je ne vais pas grossir ».

Or, le seul cas dans lequel on ment dans cette proposition originale est si l'on mange trop de frites *et* qu'on ne grossit pas, ce qui a un sens différent de la solution exprimée ci-dessus. Pour rappel,

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

En français, la négation correcte est donc « je mange trop de frites et je ne vais pas grossir ».

L'erreur ci-dessous est souvent commise dans le calcul de domaine de fonctions.

Erreur A.3. Calculez le domaine et l'image de $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$.

Clairement, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{Z}^+$, car aucun carré ne peut être négatif. Par ailleurs, comme x^2 est évaluable sur tout $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$.

Néanmoins, le réflexe de considérer le domaine comme un ensemble d'entrées que l'on a le droit de mathématiquement introduire dans une formule est erroné. Il est bel et bien possible de calculer $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, qui donne $\frac{9}{4}$, néanmoins $\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$! Pour rappel, le domaine est l'ensemble des points de l'ensemble de départ qui ont une image dans l'ensemble d'arrivée, et $\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$ n'a pas d'image dans $\mathbb{Z}$.

Comme seuls les entiers peuvent avoir une image entière, le domaine de f est $\mathbb{Z}$, et non $\mathbb{R}$.

L'erreur ci-dessous illustre des fautes classiques de modélisation de prédicat quantifié.

Erreur A.4. Nier et modélisez en français la proposition « tous les serpents ne sont pas venimeux ».

Soient s la variable modélisant un serpent, et $v(s)$ le prédicat « le serpent s est venimeux », défini sur l'ensemble des serpents. La proposition ci-dessus peut-être modélisée comme $\forall s, \neg v(s)$.

Dès lors, sa négation mathématique est $\exists s, v(s)$, c'est-à-dire « il existe un serpent venimeux ». Ce n'est, à l'évidence pas le contraire de la proposition originale.

L'erreur provient du fait que lorsque que l'on modélise cette proposition comme $\forall s, \neg v(s)$, on ne dit pas « tous les serpents ne sont pas venimeux », mais « quel que soit le serpent que je considère, ce serpent n'est pas venimeux », ou en d'autres termes « aucun serpent n'est venimeux ». Cette dernière proposition n'a clairement pas le sens de la proposition originale.

On peut modéliser correctement cette proposition par $\exists s, \neg v(s)$, c'est-à-dire « il existe un serpent qui n'est pas venimeux », ou en d'autres termes « tous les serpents ne sont pas venimeux ». Dès lors, la négation de cette proposition est construite comme $\forall s, v(s)$, c'est-à-dire « tous les serpents sont venimeux ».

L'erreur ci-dessous illustre les problèmes de calculs qui peuvent découler d'une modélisation incorrecte dans le cas de comptage.

Erreur A.5 (Exercice 4.2, pt. 1)**.** Comptons le nombre de placements de 8 pions possibles sur un échiquier de 64 cases. Modélisons un placement de pions comme un vecteur

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_{64}),$$

avec

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si la case } i \text{ est occupée,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette modélisation, on remarque que l'ordre importe, sans la mesure où $(1, 0, \ldots) \neq (0, 1, \ldots)$. Dans le premier cas, on aurait un pion à la case 1 et pas à la case 2, et l'inverse dans le second cas. De la même manière, on ne peut placer qu'un pion par case, les répétitions sont donc interdites, et on a A_{64}^{8} possibilités de placement possibles.

L'erreur dans ce type de raisonnement est que considérer les arrangements de cette manière distingue l'ordre dans lequel les pions sont placés, ce qui est sans importance pour le problème. Aussi, à chaque tel positionnement, il y a exactement 8! positionnements similaires : les 8! réarrangements de l'ordre dans lequel les pions ont été placés. Par la règle de la division, on a donc $\frac{A_{64}^8}{8!} = C_{64}^8$ placements possibles, ce qui correspond à la réponse attendue.

L'erreur ci-dessous illustre un problème classique en combinatoire : le surcomptage.

Erreur A.6 (Exercice 4.13 - 4)**.** Reprenons au calcul du nombre de chaînes qui contiennent un bloc de trois « `0` » consécutifs et un bloc de quatre « `1` » consécutifs. La construction détaillée ci-après est illustrée à la Figure A.1.

Il y a initialement 8 positions possibles pour le bloc de trois « `0` ». Ensuite, le bloc de quatre « 1 » peut se positionner à maximum quatre indices possibles.

Plus particulièrement, si le bloc « `000` » se trouve à la position
- 1, les blocs « `1111` » peuvent se placer aux positions 4, 5, 6 et 7 ;
- 2, les blocs « `1111` » peuvent se placer aux positions 5, 6 et 7 ;
- 3, les blocs « `1111` » peuvent se placer aux positions 6 et 7 ;
- 4, les blocs « `1111` » peuvent se placer uniquement à la position 7 ;
- 5, les blocs « `1111` » peuvent se placer uniquement à la position 1 ;
- 6, les blocs « `1111` » peuvent se placer aux positions 1 et 2 ;
- 7, les blocs « `1111` » peuvent se placer aux positions 1, 2, 3 ;
- 8, les blocs « `1111` » peuvent se placer aux positions 1, 2, 3 et 4.

Enfin, les trois positions libres dans la chaîne peuvent prendre des valeurs arbitraires. Il y a $\alpha_2^3 = 2^3 = 8$ telles possibilités pour ces caractères.

Ainsi, en s'aidant de la Figure A.1 pour compter le nombre de chaînes qui contiennent un bloc de trois « `0` » consécutifs et un bloc de quatre « `1` » consécutifs, on remarque qu'on a exactement

$$4 \cdot 8 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 160$$

telles chaînes. Ainsi, par la règle de la soustraction, on a $1028 + 252 - 160 - 160 = 960$ chaînes de chaînes de caractères binaires de longueur 10 qui contiennent soit trois « `0` » consécutifs, soit quatre « `1` » consécutifs.

Cette décomposition semble « simple » et intuitive, mais est erronée, à cause d'une erreur de surcomptage. En effet, si l'on considère la première bulle de la

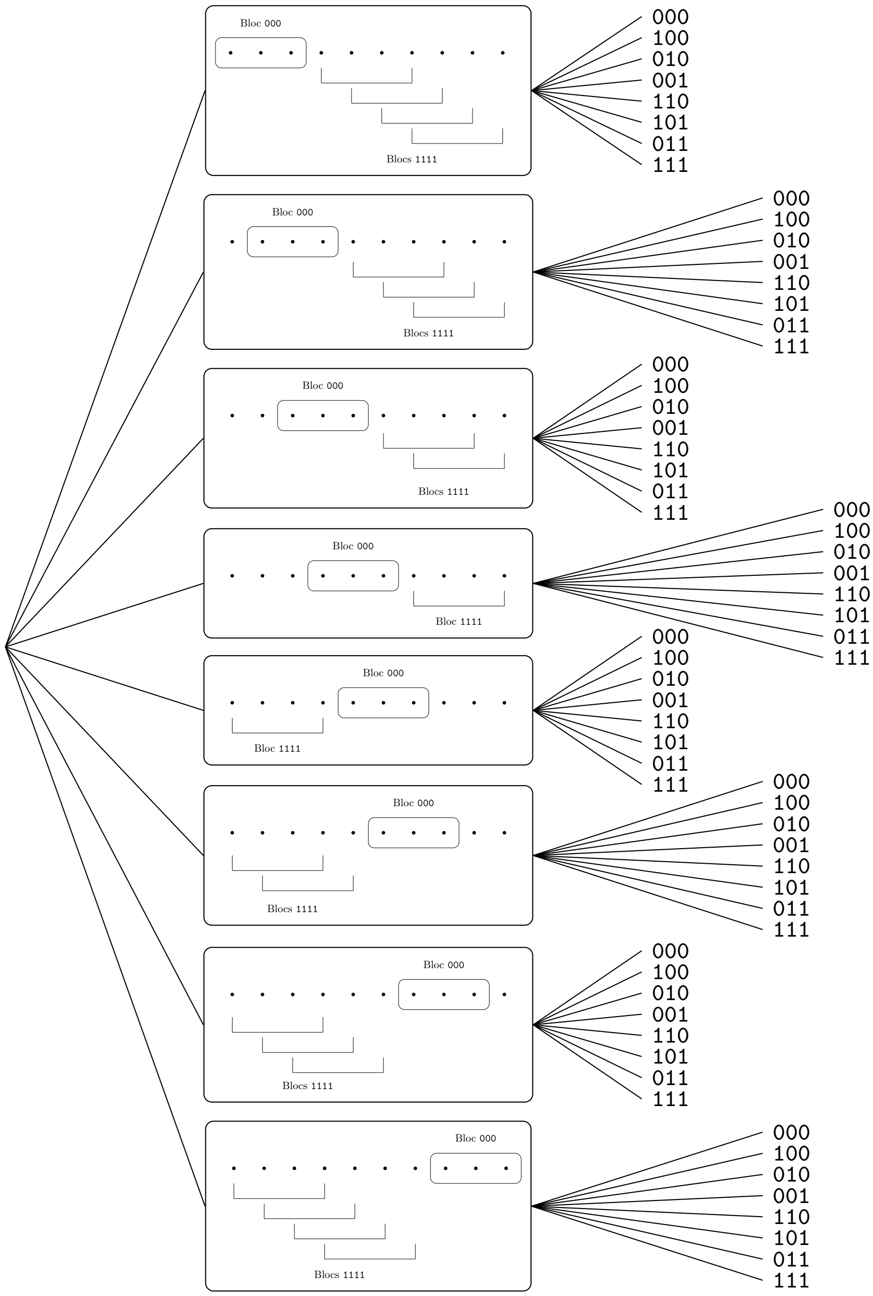


FIGURE A.1 – Construction des chaînes qui contiennent trois « 0 » consécutifs et quatre « 1 » consécutifs

Figure A.1, la première ligne compte entre autres la chaîne « `0001111100` », et la deuxième ligne compte également entre autres cette chaîne.

L'erreur ci-dessous illustre le genre de problèmes que l'on peut rencontrer en manipulant de manière imprudente une notation travaillant avec des quantités « infinies ».

ANNEXE B

Intervalles réels

Un *intervalle réel* (ou simplement *intervalle*) est tout ensemble qui prend l'une des neuf formes suivantes (pour certaines valeurs $a \leqslant b$) :

1. $[a, b]$
2. $[a, b[$
3. $]a, b]$
4. $]a, b[$
5. $]-\infty, b[$
6. $]-\infty, b]$
7. $[a, \infty[$
8. $]a, \infty[$
9. $]-\infty, \infty[$

La définition de chacun de ces ensembles est ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b \right\} \\
[a, b[&= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leqslant x < b \right\} \\
]a, b] &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \leqslant b \right\} \\
]a, b[&= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leqslant x < b \right\} \\
]-\infty, b[&= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < b \right\} \\
]-\infty, b] &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leqslant b \right\} \\
[a, \infty[&= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leqslant x \right\} \\
]a, \infty[&= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \right\} \\
]-\infty, \infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

On retrouve en particlier dans cette liste : l'ensemble vide ($\varnothing =]3, 3[$), et les singletons ($\{ a \} = [a, a]$).

Ces intervalles sont *connexes*, c'est-à-dire qu'ils ont tous la propriété de ne pas avoir de « trou » : si on prend deux réels dans un intervalle, tous les réels entre ces deux-là seront également dans l'intervalle. On peut montrer que les intervalles sont les seuls sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$.

Il est à noter que la notation « entre crochet » utilisée ci-dessus est définie uniquement pour les intervalles de nombres réels. En d'autres termes, l'ensemble $\{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ne s'écrit pas $[2, 6]$. (Le premier ensemble ne contient que des entiers, le second pas !)

Bibliographie

[1] A. Aho, J. Ullman, and X. Cazin. *Concepts fondamentaux de l'informatique.* Sciences sup. Dunod, 1996.

[2] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Alternating paths and cycles in edge-coloured multigraphs : a survey. *Discrete Mathematics*, 165-166 :39–60, 1997.

[3] J. Bang-Jensen and G. Gutin. On the complexity of hamiltonian path and cycle problem in certain classes of digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 95 :41–60, 1999.

[4] J. Bang-Jensen and G. Gutin, editors. *Digraphs : Theory, Algorithms and Applications.* Springer, New York, 2001.

[5] C. Berge. *Graphes et Hypergraphes.* Gauthier-Villars, Paris, 1983.

[6] J. A. Bondy. Basic graph theory : paths and circuits. In *Handbook of combinatorics*, volume 1-2, pages 3–110. Elsevier, 1995.

[7] T. H. Cormen, C. Stein, R. L. Rivest, and C. E. Leiserson. *Introduction to Algorithms.* McGraw-Hill Higher Education, 2nd edition, 2001.

[8] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer-Verlag, second edition edition, 2000.

[9] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.* Freeman and Company, 1979.

[10] D. A. Gunderson. *Handbook of mathematical induction.* Chapman and Hall, 2020.

[11] G. Gutin. Cycles and paths in semicomplete multipartite digraphs, theorems and algorithms : a survey. *Journal of Graph Theory*, 19 :481–505, 1995.

[12] B. Hayes. Gauss's day of reckoning. *American Scientist*, 94(3), 2006.

[13] G. A. Petsko and G. Ringe. *Structure et fonction des protéines.* De Boeck, 2009.

[14] K. H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications*. Mc Graw Hill, 2012.

[15] C. Troestler. Introduction à la logique du premier ordre et à la théorie naïve des ensembles, 2006. http://math.umons.ac.be/an/fr/enseignement/mathelem/.

[16] L. Volkmann. Longuest paths in semicomplete multipartite digraphs. *Discrete Mathematics*, 199 :279–284, 1999.

[17] L. Volkmann. Cycles in multipartite tournaments : results and problems. *Discrete Mathematics*, 245 :19–53, 2002.

Notations

Terminologie