Démonstration des propriétés du logarithme

Propriété 1 : $\boxed{\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \text{ avec } x, y > 0}$

Nous allons démontrer cette propriété du logarithme qui dit que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.

Démonstration

1. Par réciprocité on a $b^{\log_b(x)} = x$ et $b^{\log_b(y)} = y$, nous pouvons écrire :

$$\log_b(xy) = \log_b(b^{\log_b(x)} \times b^{\log_b(y)})$$

2. Par propriété des puissances (produit de puissance de même base), nous avons :

$$\log_b(xy) = \log_b(b^{\log_b(x)+\log_b(y))}$$

3. Finalement, par réciprocité :

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Propriété 2 : $\boxed{\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y) \text{ avec } x, y > 0}$

Nous allons démontrer cette propriété du logarithme qui dit que le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du numérateur et du dénominateur.

Démonstration

1. Par récipricité du logarithme et de l'exponentielle :

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b\left(\frac{b^{\log_b(x)}}{b^{\log_b(y)}}\right)$$

2. Par propriété des puissances (quotient de puissance de même base), nous avons :

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b\left(b^{\log_b(x)-\log_b(y)}\right)$$

3. Finalement, par réciprocité, nous obtenons :

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Propriété 3 : $\boxed{\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x) \text{ avec } x > 0 \text{ et } n \in \mathbb{R}}$

Nous allons démontrer cette propriété du logarithme qui dit que le logarithme d'une puissance est égal au produit de l'exposant par le logarithme de la base.

Démonstration

1. Par réciprocité :

$$\log_b(x^n) = \log_b\left([b^{\log_b(x)}]^n\right)$$

2. Par propriété des puissances (puissance de puissance), nous avons :

$$\log_b(x^n) = \log_b\left(b^{n \cdot \log_b(x)}\right)$$

3. Finalement, par réciprocité, nous obtenons :

$$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

As-tu compris ? Complète les démonstrations des propriétés du logarithme

Propriété 1 : $\boxed{\log_c(pq) = \log_c(p) + \log_c(q) \text{ avec } p, q > 0}$

Complète la démonstration qui dit que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.

Démonstration

1. Par réciprocité, on a $c^{\log_c(p)} = p$ et $c^{\log_c(q)} = q$. Nous pouvons écrire :

$$\log_c(pq) = \log_c(c^{\log_c(p)} \times \ldots)$$

2. Par propriété des puissances (produit de puissance de même base), nous avons :

$$\log_c(pq) = \log_c(c^{\log_c(p) + \cdots})$$

3. Finalement, par réciprocité :

$$\log_c(pq) = \log_c(p) + \ldots$$

Propriété 2 : $\boxed{\log_c\left(\frac{p}{q}\right) = \log_c(p) - \log_c(q) \text{ avec } p, q > 0}$

Complète la démonstration qui dit que le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du numérateur et du dénominateur.

Démonstration

1. Par réciprocité du logarithme et de l'exponentielle :

$$\log_c\left(\frac{p}{q}\right) = \log_c\left(\frac{c^{\log_c(p)}}{\ldots}\right)$$

2. Par propriété des puissances (quotient de puissance de même base), nous avons :

$$\log_c\left(\frac{p}{q}\right) = \log_c\left(c^{\log_c(p) - \cdots}\right)$$

3. Finalement, par réciprocité, nous obtenons :

$$\log_c\left(\frac{p}{q}\right) = \log_c(p) - \ldots$$

Propriété 3 : $\boxed{\log_c(p^m) = m \cdot \log_c(p) \text{ avec } p > 0 \text{ et } m \in \mathbb{R}}$

Complète la démonstration qui dit que le logarithme d'une puissance est égal au produit de l'exposant par le logarithme de la base.

Démonstration

1. Par réciprocité :

$$\log_c(p^m) = \log_c\left([c^{\log_c(p)}]^{\cdots}\right)$$

2. Par propriété des puissances (puissance de puissance), nous avons :

$$\log_c(p^m) = \log_c\left(c^{m\cdot\ldots}\right)$$

3. Finalement, par réciprocité, nous obtenons :

$$\log_c(p^m) = m \cdot \ldots$$

As-tu compris ? énonce les propriétées des puissances utilisées dans les démonstrations

....

....

....

As-tu compris? Combinaison des propriétés

1. Sachant que $\log_{10}(2) \approx 0.3010$ et $\log_{10}(5) \approx 0.69897$, calculez $\log_{10}(20)$.
2. Sachant que $\log_{10}(3) \approx 0.4771$ et $\log_{10}(7) \approx 0.8451$, calculez $\log_{10}(21)$.
3. Sachant que $\log_{10}(2) \approx 0.3010$ et $\log_{10}(5) \approx 0.69897$, calculez $\log_{10}(250)$.