Le Produit Scalaire dans un repère orthonormé et calculs d'angles dans des solides

1. Définition

Dans l'espace, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)}$$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Cas particuliers

- **Vecteurs orthogonaux :**
  Si $\theta = 90^\circ$, alors $\cos(90^\circ) = 0$, donc :

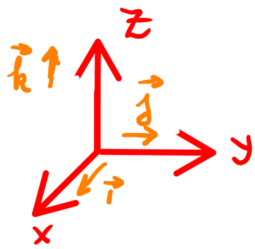
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- **Vecteurs de même sens :**
  Si $\theta = 0^\circ$, alors $\cos(0^\circ) = 1$, donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

- **Vecteurs de sens opposés :**
  Si $\theta = 180^\circ$, alors $\cos(180^\circ) = -1$, donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$



3. Formule dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, alors :

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vecteurs unitaires dans le sens de x, y et z.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Justification : Il suffit d'en revenir à l'interprétation de l'écriture en composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1 \vec{i} + \underline{y_1 \vec{j}} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}$$

$$= x_1 \cdot x_2 + 0 + 0 + 0 + y_1 \cdot y_2 + 0 + 0 + 0 + z_1 \cdot z_2 .$$

4. Exemple d'application

Soit $\vec{u} = (2, 1, 3)$ et $\vec{v} = (4, -1, 2)$. Calculons le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 8 - 1 + 6 = 13$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

La norme de $\vec{v}$ est :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

L'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{13} = \underbrace{\|\vec{u}\|}_{\sqrt{14}} \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\sqrt{21}} \cdot \cos\theta$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}}$$

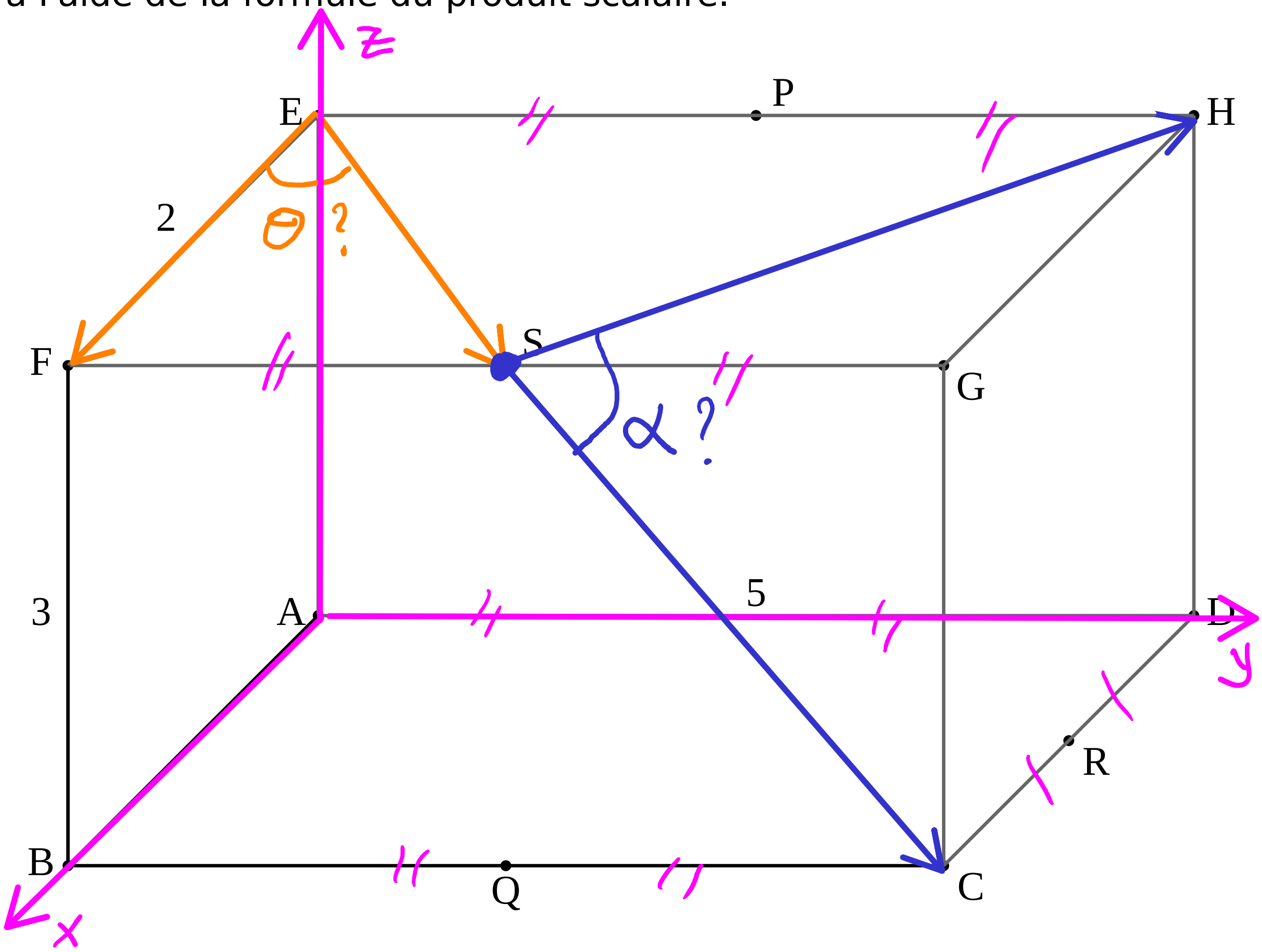
6. Traduction des termes importants

- **Produit scalaire :** Dot product
- **Vecteur :** Vector
- **Norme :** Magnitude
- **Angle :** Angle
- **Repère orthonormé :** Orthogonal coordinate system
- **Composante :** Component
- **Orthogonaux :** Perpendicular

- **De même sens :** In the same direction
- **De sens opposés :** In opposite directions

5. Exercices

Calculer les angles demandés en se basant sur la figure ci-dessous et à l'aide de la formule du produit scalaire.



$$\vec{EF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{ES} \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{EF} \cdot \vec{ES} = 4 \qquad \|\vec{EF}\| = \sqrt{2^2+0^2+0^2} = 2$$

$$\|\vec{ES}\| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\|\vec{ES}\| = \sqrt{4 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{16+25}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{41}}{\cancel{2}}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right) = 51{,}34°$$

Calculer l'angle α entre $\vec{SH}$ et $\vec{SC}$