Produit et quotient de nombres complexes

1. Produit de deux nombres complexes

Le produit de deux nombres complexes $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ est un nombre complexe $z = z_1 \cdot z_2$ avec :

$$z = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

Cette formule signifie que pour multiplier deux nombres complexes en forme trigonométrique, on multiplie leurs modules et on additionne leurs arguments.

Démonstration

En utilisant les expressions trigonométriques de z_1 et z_2, le produit est donné par :

$$z = (r_1\cos\theta_1 + ir_1\sin\theta_1) \cdot (r_2\cos\theta_2 + ir_2\sin\theta_2)$$

En développant et en regroupant les termes réels et imaginaires :

$$z = r_1r_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\,r_1r_2\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right)$$

En appliquant les formules d'addition pour le cosinus et le sinus, on obtient :

$$z = r_1r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

As-tu compris ?

Que se passe-t-il avec l'argument d'un nombre complexe si on le multiplie par un nombre réel ?

---

2. Quotient de deux nombres complexes

Le quotient de deux nombres complexes $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, avec $z_2 \neq 0$, est un nombre complexe $z = \frac{z_1}{z_2}$ donné par :

$$z = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Pour diviser deux nombres complexes en forme trigonométrique, on divise leurs modules et on soustrait leurs arguments.

Démonstration

En utilisant la forme trigonométrique, le quotient s'écrit :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

As-tu compris ?

Que devient le module du résultat si on divise un nombre complexe par lui-même ?

---

3. Interprétation géométrique dans le plan complexe

Dans le plan complexe, le produit de deux nombres complexes peut être interprété comme une composition de dilatation et de rotation. Multiplier par $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ revient à :

- Multiplie le module de z_2 par r_1, ce qui correspond à une dilatation du vecteur dans le plan complexe.
- Ajoute l'argument θ_1 à l'argument de z_2, effectuant ainsi une rotation du vecteur.

La division est similaire mais inverse : elle réduit le module du nombre complexe et effectue une rotation dans le sens opposé.

Batterie d'exercices

Exercice 1 : Produit de nombres complexes

Calculer le produit des nombres complexes $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ et $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ en utilisant la forme trigonométrique.

Exercice 2 : Quotient de nombres complexes

Trouver le quotient des nombres complexes $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ et $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ en forme trigonométrique.

Exercice 3 : Interprétation géométrique

Soit $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Représentez graphiquement ce nombre complexe, puis effectuez une rotation de 45° autour de l'origine. Exprimez le nouveau nombre complexe obtenu sous forme trigonométrique.

Exercice 4 : Vecteurs et transformation

Interprétez le produit de $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ avec $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ comme une transformation du vecteur w dans le plan complexe.
