Dénombrement en Probabilité

Counting in Probability

1. Introduction : Pourquoi compter en probabilité ?
Why count in probability?

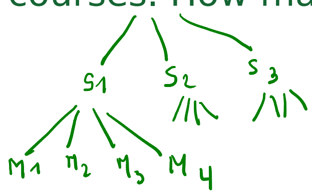
Le **dénombrement** est une technique essentielle en probabilités. Il permet de déterminer le **nombre de cas possibles** et de **cas favorables**, ce qui est nécessaire pour calculer une probabilité.
Counting is an essential technique in probability. It helps determine the **number of possible cases** and **favorable cases**, which is necessary to calculate a probability.

2. Le Principe Fondamental du Comptage
Fundamental Counting Principle

Si une tâche peut être réalisée de **n** manières et une autre de **m** manières, alors l'ensemble des deux tâches peut être réalisé de :
If a task can be done in **n** ways and another in **m** ways, then the total number of ways to perform both tasks is:

$$n \times m \text{ façons}$$

Exemple : Un menu propose 3 entrées et 4 plats principaux. Combien de repas différents peut-on composer ?
Example: A menu offers 3 starters and 4 main courses. How many different meals can be created?



$$3 \times 4 = 12 \text{ repas possibles}$$

3. Arrangements et Permutations
Arrangements and Permutations

A , B , C C , A , B
A , C , B C , B A
B , A , C
B , C , A

a) Permutations (ordre important)
Permutations (order matters)

Une **permutation** est un arrangement de tous les éléments d'un ensemble dans un certain ordre. Le nombre de permutations de **n** objets est donné par :

A **permutation** is an arrangement of all elements of a set in a specific order. The number of permutations of **n** objects is given by:

n! factorielle. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

A B C

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

AB , BA,
CA , AC
CB, BC

b) Arrangements (ordre important, mais sélection d'objets)
Arrangements (order matters, selecting objects)

Un **arrangement** est une sélection ordonnée de **k** éléments parmi **n**. La formule est :

An **arrangement** is an ordered selection of **k** elements from **n**. The formula is:

éléments sélectionnés.

$\frac{11!}{9!} = 11 \cdot 10$

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$A_{11,3} = \frac{11!}{8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8 \cdot 7 \ldots}}{\cancel{8 \cdot 7 \cdot 6 \ldots}}$

990

de rangées 3 élèves parmi 11

Stefan
Ivan
Anais

A

Basma
Veronica
Stefan
$\neq$
Veronica,
Basma
Stefan.
. . . .

$\frac{11!}{8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

4. Combinaisons et Coefficients Binomiaux
Combinations and Binomial Coefficients

C

Une **combinaison** est une sélection de **k** objets parmi **n**, où l'ordre **n'a pas d'importance**. La formule est :

A **combination** is a selection of **k** objects from **n**, where order **does not matter**. The formula is:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \left(= \frac{A_{n,k}}{P_k}\right)$$

$$C_{11,3} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{990}{3!} = \frac{990}{6} = 165$$

5. Exercices

Exercises

$$\frac{20!}{16!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \cancel{16 \cdot 15 \cdot 14} \cdots \quad \cancel{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}$$

1. Combien de numéros peut-on composer avec les chiffres {1,2,3,4,5} si aucun chiffre ne peut être répété ?

C →

2. Dans une classe de 20 élèves, combien de groupes de 4 peut-on former ? → $C_{20,4} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!\,16!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4845$

élèves

20-4

A →

3. Un club de 10 membres élit un président, un vice-président et un trésorier. Combien de façons différentes peut-on attribuer ces postes ?

$A_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ possibilités.

① $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ en utilisant tous les chiffres

exemple : 21354

$0! = 1$

et si je ne suis pas obligé d'utiliser tous les chiffres ?

$A_{5,1} = 5 + A_{5,2} + A_{5,3} + A_{5,4} + P_5$ (P_5 " $A_{5,5}$)

1 chiffre — 2 chiffres

$$= 5 + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{1!} + 5!$$

$$= 5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$$