Indépendance des événements

1. Introduction

Lorsque deux événements sont **indépendants**, la réalisation de l'un n'a **aucun effet** sur la probabilité de réalisation de l'autre. En revanche, si la probabilité de l'un change en fonction de l'autre, ces événements sont considérés comme **dépendants**.

2. Définition mathématique

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si cette égalité n'est pas vérifiée, les événements sont **dépendants**.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Remarque : Si A et B sont indépendants, alors :

B n'a pas d'influence sur A

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{et} \quad P(B \mid A) = P(B).$$

3. Exemples

Exemple 1 : Lancer d'un dé

Soient A : "Obtenir un nombre pair" ($\{2, 4, 6\}$) et B : "Obtenir un nombre supérieur ou égal à 4" ($\{4, 5, 6\}$).

- $P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$
- $P(B) = \frac{3}{6} = 0.5$
- $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 0.333$
- $P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$

$\underbrace{P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)}_{\text{indépendant}}$

Conclusion : $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, donc A et B sont **dépendants**.

4. As-tu compris ?

Réponds aux questions suivantes :

1. Si $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ et $P(A \cap B) = 0.15$, A et B sont-ils indépendants ?

   $0,3 \cdot 0,5 = 0,15$ donc A et B sont indépendants.

2. Soit A : "Tirer un as" et B : "Tirer une carte rouge" dans un jeu de cartes, A et B sont-ils indépendants ?

   $P(A) = \frac{4}{52}$ $P(B) = \frac{26}{52}$ $\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{as rouge}} = \frac{2}{52}$

   $P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{26}{52} = \frac{2}{52}$ donc A et B sont indépendants.

5. Exercices : Vérification de l'indépendance

Vérifie si les événements suivants sont indépendants. Justifie tes réponses avec des calculs précis.

1. Une urne contient 5 boules rouges et 5 boules bleues. On tire une boule au hasard. Considérons :
   - A : "La boule est rouge."
   - B : "La boule est bleue."

   Ces événements sont-ils indépendants ?

   $P(A) = \frac{5}{10} = 0,5$ $P(B) = 0,5$

   $P(A \cap B) = 0$

   dépendant

2. On lance deux dés. Considérons :
   - A : "Obtenir un 6 sur le premier dé." → $P(A) = \frac{1}{6}$
   - B : "Obtenir un total pair sur les deux dés." → $P(B) = \frac{1}{2}$ *

   Les événements A et B sont-ils indépendants ? → $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

   62 64 66

   $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$ donc indépendants !

3. Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules bleues. On tire deux boules **avec remise**. Considérons :
   - A : "La première boule est rouge."
   - B : "La deuxième boule est rouge."

   Ces événements sont-ils indépendants ?

   $\frac{3}{7}$ A $\frac{3}{7}$ B

   $P(A \cap B)$

   $= P(B|A) \cdot P(A)$

   $= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}$

4. Une pièce équilibrée est lancée deux fois. Considérons :
   - A : "Le premier lancer donne pile."
   - B : "Le deuxième lancer donne pile."

   Montre que les événements A et B sont indépendants.

* Question 2 : évènement B.

$\Omega = \{ 11, 12, 13, 14, 15, 16,$

$\#\Omega = 36$ $\quad 21, 22, 23, 24, 25, 26,$ $\quad$ 18

$31, 32, 33, 34, 35, 36$

$41, 42, 43, 44, 45, 46,$ $\quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

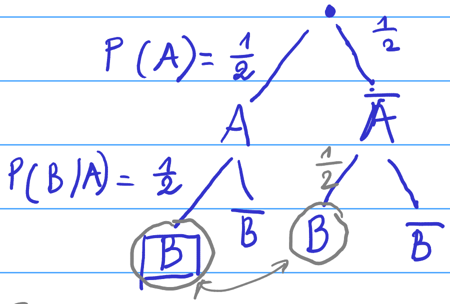
$51, 52, 53, 54, 55, 56,$

$61, 62, 63, 64, 65, 66 \}$

4. Une pièce équilibrée est lancée deux fois. Considérons :
   - A : "Le premier lancer donne pile."
   - B : "Le deuxième lancer donne pile."

   Montre que les événements A et B sont indépendants.

Je dois montrer que $P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$



$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}.$

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

Donc

$\underbrace{P(A \cap B)}_{\frac{1}{4}} = \underbrace{P(A)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{2}}.$

$$\text{A1} \left[\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

"Probabilité totale"

5. On tire deux cartes **sans remise** d'un jeu de 52 cartes. Considérons :
   - A : "La première carte est un cœur."
   - B : "La deuxième carte est un cœur."

   Les événements A et B sont-ils indépendants ?

6. Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules vertes. On tire deux boules **sans remise**. Considérons :
   - A : "La première boule est rouge."
   - B : "La deuxième boule est rouge."

   Les événements A et B sont-ils indépendants ?

7. Montre que si deux événements A et B sont indépendants, alors :

$$P(A \mid B) = P(A).$$

   Justifie cette propriété à l'aide de la définition de $P(A \mid B)$.

6. Conclusion

L'indépendance des événements est une notion clé qui simplifie les calculs de probabilités lorsque les événements n'interagissent pas.
Pour vérifier l'indépendance, on utilise la relation $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

5. On tire deux cartes **sans remise** d'un jeu de 52 cartes. Considérons :

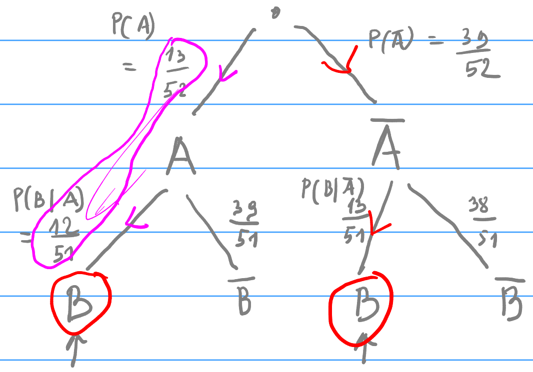
- A : "La première carte est un cœur."
- B : "La deuxième carte est un cœur."

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

4 couleurs 13 ♡

1ère carte

2ème carte



A et B sont indépendants ?

$P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B)$

$= P(B|A) \cdot P(A)$

$= \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{17}$

$P(A) = \frac{13}{52}$

$= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$= \frac{1}{17} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{1}{4}$

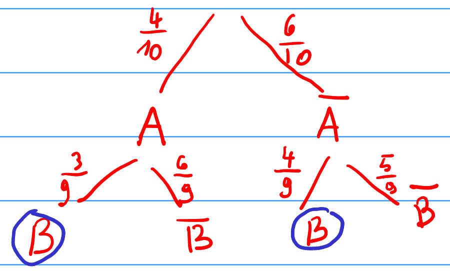
$$\underbrace{P(A \cap B)}_{\frac{1}{17}} \overset{?}{=} \underbrace{P(A)}_{\frac{13}{52}} \cdot \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{4}}$$

$\frac{1}{17} \neq \frac{1}{16}$ donc A et B sont dépendants.

6. Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules vertes. On tire deux boules **sans remise**. Considérons :

- A : "La première boule est rouge."
- B : "La deuxième boule est rouge."

Les événements A et B sont-ils indépendants ?



$P(A \cap B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

$P(A) = \frac{4}{10}$

$P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}$

$= \frac{2}{5}$

$$\frac{2}{15} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{5}}_{\frac{4}{25}}$$

c'est différent donc A et B sont dépendants !

7. Montre que si deux événements A et B sont indépendants, alors :

hypothèse

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Justifie cette propriété à l'aide de la définition de $P(A \mid B)$.

A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

on a par définition $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$ $\boxtimes$