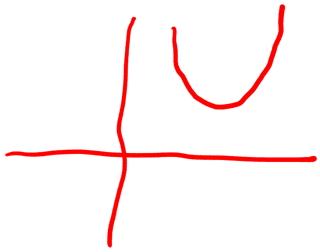
Les formes de la fonction quadratique

Les trois formes de la fonction quadratique sont :

1. **Forme développée** :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



2. **Forme canonique** :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

3. **Forme factorisée** :

2 racines

$$f(x) = a(x-\underset{-10}{x_1})(x-x_2)$$

$f(x) = a\cdot(x-x_0)^2$
1 racine

Objectif du cours : savoir passer d'une forme à une autre

Exemple en Partant de la forme développée

$$\boxed{f(x) = x^2 + 6x + 5}$$

Recherche des racines

Pour trouver les racines de $f(x) = x^2 + 6x + 5$, nous résolvons l'équation $\overbrace{x^2 + 6x + 5 = 0}^{f(x)=0}$.

Les racines sont $x_1 = -1$ et $x_2 = -5$.

$\Delta = b^2 - 4ac$
$a = 1 \quad b = 6 \quad c = 5$
$\Delta = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 5$
$= 36 - 20 = 16 > 0$
2 racines
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x = \dfrac{-6 \pm 4}{2}$ ↗ -1 ↘ -5

Forme factorisée

$f(x) = \overset{1}{a}\cdot(x-(-1))\cdot(x-(-5))$

La forme factorisée est donc : $f(x) = (x+1)(x+5)$

$= x^2 + 5x + x + 5$
$= x^2 + 6x + 5$

Détermination de α et β

L'image de $\overset{-3}{\alpha}$ est $\beta = -4$.

$\alpha = \dfrac{(-1)+(-5)}{2} = \dfrac{-1-5}{2} = -3$

Ainsi, la forme canonique est : $f(x) = (x+3)^2 \underbrace{-4}_{\beta}$ où $\alpha = -3$ et $\beta = -4$.

$\beta = f(\alpha)$ car tous les points de la parabole ont pour coordonnées $(x, f(x))$
donc on a $(\alpha, \underset{\beta}{f(\alpha)})$ les coordonnées du sommet.

$= f(-3)$
$= (-3)^2 + 6\cdot(-3) + 5$
$= 9 - 18 + 5 = -4$

$\Rightarrow f(x) = 1\cdot(x+3)^2 - 4$

Exercices de passage d'une forme à une autre

1. Trouvez les racines et écrivez la forme factorisée de $f(x) = x^2 - 4x + 4$.
2. Écrivez la forme canonique de $f(x) = (x-2)(x-3)$.
3. Développez $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ pour obtenir la forme développée.
4. Trouvez α et β et écrivez la forme canonique de $f(x) = 3x^2 + 12x + 7$.
5. Développez $f(x) = (x-1)(x+4)$ pour obtenir la forme développée.

Exercices supplémentaires

6. Trouvez les racines et écrivez la forme factorisée de $f(x) = x^2 + 2x - 8$.
7. Écrivez la forme canonique de $f(x) = (x+1)(x-4)$.
8. Développez $f(x) = (x-3)^2 + 2$ pour obtenir la forme développée.
9. Trouvez α et β et écrivez la forme canonique de $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.
10. Développez $f(x) = (x+2)(x-5)$ pour obtenir la forme développée.

$f(x) = x^2 - 4x + 4.$ Forme factorisée ?

racines (roots)

$a=1 \quad b=-4 \quad c=4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$

$= 16 - 16 = 0$ 1 racine.

$-4^2 = -16$

$(-4)^2 = 16$

Δ !

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$ "racine double"

$\rightarrow f(x) = 1 \cdot (x-2) \cdot (x-2) = (x-2)^2$

[$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2$ 1 seule racine]

1 racine.

$f(x) = (x-2)(x-3).$ Forme canonique ?

Plus tard (later)

[$S_{\text{somme}} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}$

$= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$]

racines : 2 et 3

$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$. par comparaison

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \qquad \alpha = ? \quad \beta ?$

α et β coordonnées du sommet

$\rightarrow \boxed{\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = \alpha$

$f(x) = (x-2)(x-3)$

$\rightarrow \boxed{\beta = f(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{5}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{5}{2} - 3\right)$

x

$= -\frac{1}{4} = \beta$

$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

canonique !

3) $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ pour obtenir la forme développée.

$$f(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 3$$

$$= 2x^2 + 4x + 2 - 3$$

$$= 2x^2 + 4x - 1.$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

carré d'une somme.

4) $f(x) = 3x^2 + 12x + 7$

a , b , c

forme canonique.

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$S(\alpha, \beta)$

$b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7$$

$$= 60$$

2 racines.

$$x = \frac{-12 \pm 2\sqrt{15}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{15}}{3} = \begin{cases} \frac{-6-\sqrt{15}}{3} \\ \frac{-6+\sqrt{15}}{3} \end{cases}$$

$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$$\alpha = \frac{\frac{-6-\sqrt{15}}{3} + \frac{-6+\sqrt{15}}{3}}{2} = -2$$

$$\beta = f(\alpha) = 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 7$$

$$= 12 - 24 + 7 = -5$$

$$\boxed{f(x) = 3 \cdot (x+2)^2 - 5}.$$