

## La Formule de Bayes en Probabilité

La **formule de Bayes** permet de calculer une **probabilité conditionnelle inversée**, c'est-à-dire la probabilité qu'un événement  $A$  se produise, sachant qu'un événement  $B$  a déjà eu lieu. Elle est donnée par la formule :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Cette formule est très utile lorsque nous connaissons la probabilité de  $B$  sachant  $A$  et que nous voulons inverser cette relation.

### Exemple d'application

Prenons un exemple avec un test médical. Supposons qu'un test permet de détecter une maladie rare, et que :

- La probabilité d'être malade est de  $P(M) = 0.01$  (1% de la population).
- La probabilité qu'un malade soit testé positif est  $P(T|M) = 0.95$  (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne saine soit testée positive (faux positif) est  $P(T|\bar{M}) = 0.05$ .

Nous voulons savoir : **si une personne est testée positive, quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?**

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)}$$

Nous devons d'abord calculer  $P(T)$  :

$$P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})$$

En remplaçant par les valeurs :

$$P(T) = (0.95 \times 0.01) + (0.05 \times 0.99) = 0.059$$

Nous trouvons alors :

$$P(M|T) = \frac{0.95 \times 0.01}{0.059} \approx 0.161$$

Conclusion : Une personne testée positive n'a que 16.1% de chances d'être réellement malade !

## Exercices Pratiques

### 1. Vaccination contre la grippe

Dans une population où 60% sont vaccinés, 15% des vaccinés attrapent quand même la grippe contre 45% des non-vaccinés. Quelle est la probabilité qu'une personne soit vaccinée sachant qu'elle est malade ?

Arbre pondéré suggéré :

- Vacciné (60%) → Malade (15%) / Sain (85%)
- Non-vacciné (40%) → Malade (45%) / Sain (55%)

## 2. Détection de spam

Un filtre anti-spam détecte 98% des spams. 5% des emails sont des spams. Si un email est marqué comme spam, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un vrai spam ? (On suppose 2% de faux positifs çad 2% des emails normaux sont marqués comme spam)

### Exercice 3 : Contrôle antidopage

Un test antidopage détecte un dopage avec une fiabilité de 98%. Cependant, il donne 3% de faux positifs. On sait que 5% des sportifs sont dopés.

Questions :

1. Construis un arbre pondéré de cette situation.
2. Calcule la probabilité qu'un sportif testé positif soit réellement dopé.
3. Calcule la probabilité qu'un sportif dopé ait un test positif.