

Cours de Statistique - Étendue et Médiane

cours précédent } moyenne
écart-type

3. Étendue et Médiane

Définitions

Étendue : La différence entre la plus grande et la plus petite valeur d'un ensemble de données.

$$\text{Étendue} = \text{Valeur max} - \text{Valeur min}$$

Médiane : La valeur qui divise l'ensemble des données triées en deux parties égales :

- Si le nombre de données est impair, c'est la valeur du milieu.
- Si le nombre de données est pair, c'est la moyenne des deux valeurs du milieu.

Exemple 1 : Ensemble de données impair

Données : 4, 7, 9, 11, 15 (5 valeurs)

- Étendue : $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MIN}}}{4}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MAX}}}{15}$

(les données sont triées par ordre croissant)

$$15 - 4 = 11$$

- Médiane : 9 (valeur au milieu).

Exemple 2 : Ensemble de données pair

Données : 3, 5, 8, 10, 12, 18 (6 valeurs)

- Étendue : $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MIN}}}{3}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MAX}}}{18}$

$$18 - 3 = 15$$

- Médiane : moyenne des deux valeurs centrales :

$$\text{Médiane} = \frac{8 + 10}{2} = 9$$

4. Activité : Étendue et Médiane

Voici deux séries de données à analyser :

- **Série 1** : 6, 12, 15, 18, 21

- **Série 2** : 5, 9, 11, 13, 17, 19 *6 valeurs paires.*

Questions :

1. Calculez l'étendue pour chaque série de données.
2. Calculez la médiane pour chaque série.
3. Comparez l'étendue des deux séries : laquelle est la plus dispersée ?
4. Interprétez les résultats : que nous apprend la médiane sur la répartition des valeurs ?

<u>Série 1</u>	6	12	<u>15</u>	18	21	5 valeurs impaires		<u>Série 2</u>
1)	$21 - 6 = 15$							1) $19 - 5 = 14$
2)								2) $\frac{11+13}{2} = 12$
3) la série 1 est plus dispersée du point de vue de l'étendue								
4) la médiane coupe la série en deux parties égales								
[. 50% des données sont plus petites que la médiane et 50% sont plus grandes .								

Traitement d'un grand nombre de données discrètes

Lorsqu'on travaille avec un grand nombre de données discrètes, on regroupe ces données en fonction de leurs valeurs possibles (appelées **modalités** ou **valeurs des variables**). Nous allons calculer la moyenne, l'écart-type et d'autres paramètres statistiques à partir d'un tableau récapitulatif.

Exemple *nombre de fois que les valeurs apparaissent* $n = \sum n_i$
fréquences $= \frac{n_i}{n}$
 Voici un tableau contenant des données sur la note obtenue par plusieurs élèves à un test :

Valeurs (x_i)	Effectifs n_i	Effectifs cumulés	Fréq. f_i	Fréq. cumulées	$x_i \times n_i$	Écart quadratique $(x_i - \bar{x})^2$	$n_i \times (x_i - \bar{x})^2$
10	4	4	0.2	$0.2 = \frac{4}{20}$	40	$(10 - 12,2)^2 = 4,84$	$4 \cdot 4,84 = 19,36$
12	10	14	0.5	$0.7 = \frac{14}{20}$	120	$(12 - 12,2)^2 = 0,04$	$10 \cdot 0,04 = 0,4$
14	6	20	0.3	$1 = \frac{20}{20}$	84	$(14 - 12,2)^2 = 3,24$	$6 \cdot 3,24 = 19,44$
Total	$n: 20$	Total	$1 = 100\%$		244		39,2

- Moyenne (\bar{x}) :

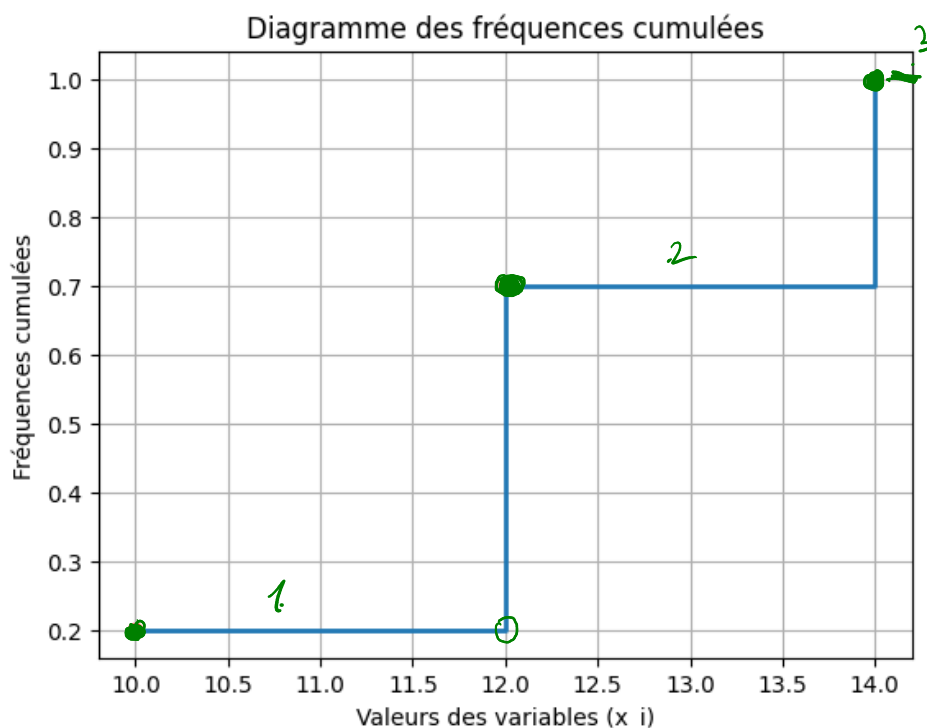
Σ Sigma
Somme

addition de toutes les données

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \times n_i}{\sum n_i} = \frac{244}{20} = 12,2$$
1 $n_1 + n_2 + n_3$

- Écart-type (σ) :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i \times (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{39,2}{20}} = 1,4$$



Interprétation du Diagramme :

1^{ère} marche : Il ya 20% des données égale à 10

2^{ème} marche : Il ya 70% des données plus petites ou égales à 12
(10 et 12)

3^{ème} marche : Il ya 100% des données plus petites ou
égales à 14 (10, 12 et 14)

Estimation de la médiane :

La médiane est la valeur centrale de la série de données triées. Ici, la médiane est entre 10 et 12, car elle se situe au milieu de la série (on l'observe en traçant une droite horizontale à partir de 0.5 sur l'axe des ordonnées).

Calcul de la médiane :

La formule de la médiane avec interpolation linéaire est la suivante :

$$\text{Médiane} = x_{\text{inf}} + \frac{F_m - F_{\text{inf}}}{F_{\text{sup}} - F_{\text{inf}}} \times (x_{\text{sup}} - x_{\text{inf}})$$

Où :

- x_{inf} : valeur inférieure de la marche.
- x_{sup} : valeur supérieure de la marche.
- F_m : fréquence correspondant à la moitié de l'effectif total, donc c'est 0.5 (50%).
- F_{inf} : fréquence cumulée de la marche inférieure.
- F_{sup} : fréquence cumulée de la marche supérieure.

Voici l'application de la formule avec les valeurs :

$$\text{Mediane} = \dots + \frac{\dots - 0.2}{0.7 - 0.2} \times (\dots - 10)$$

$$\text{Médiane} = \dots$$

Calcul de la médiane : Il ya 20 données : pair
prenons la moyenne de la 10^{ème} et la 11^{ème} données
la 10^{ème} et la 11^{ème} sont de 12
je fais donc $\frac{12 + 12}{2} = 12 = \text{médiane}$

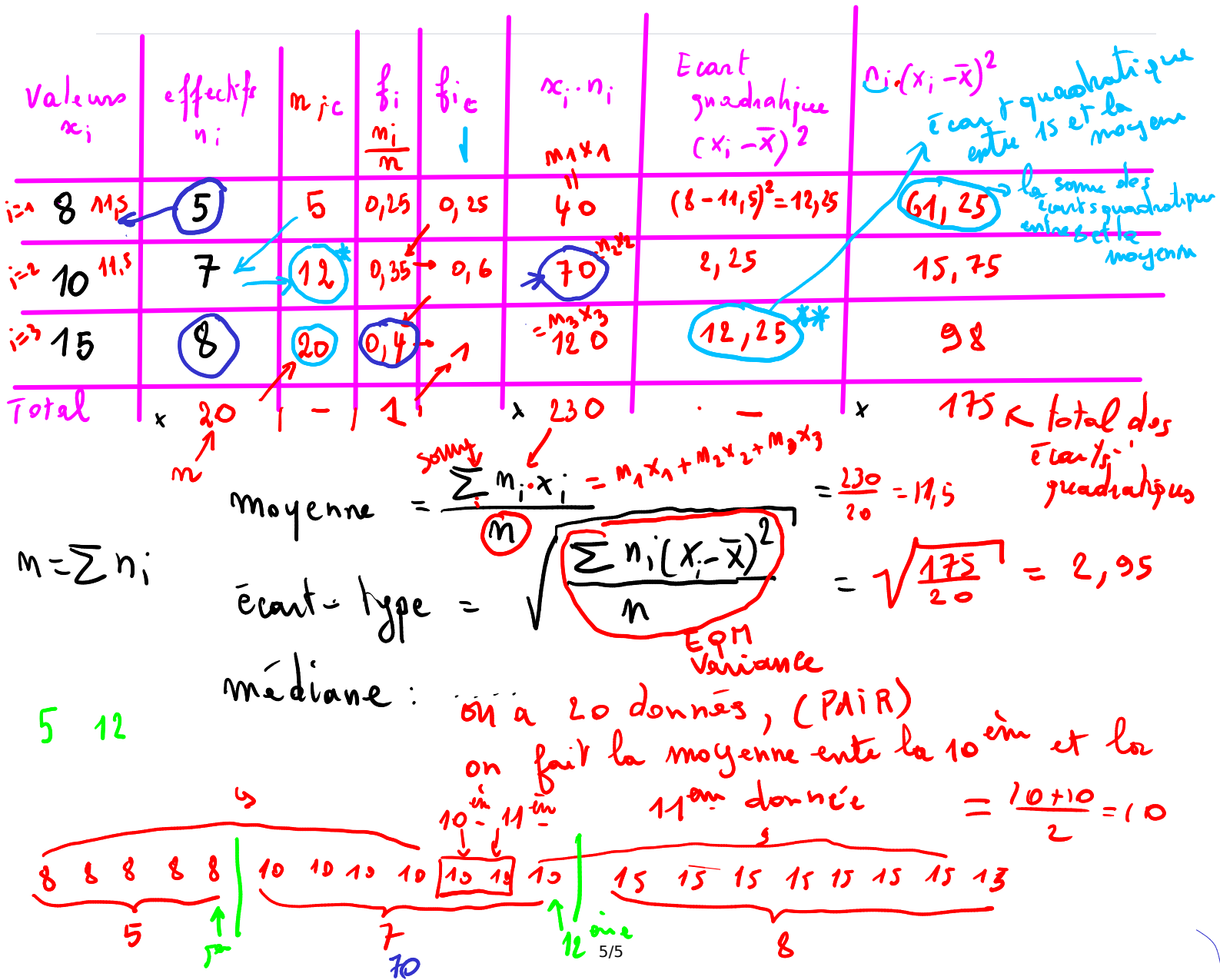
Exercice :

Voici un tableau de notes :

Valeurs (x_i)	Effectifs (n_i)
8	5
10	7
15	8

Questions :

- 1. Complétez le tableau avec les fréquences, les fréquences cumulées, etc.
- 2. Calculez la moyenne.
- 3. Calculez l'écart-type.
- 4. Calculez l'étendue
- 5. Tracez le diagramme en escalier.
- 6. Interprétez le diagramme en escalier
- ~~7. Estimez la médiane.~~
- 8. Calculez la médiane



* 12 élèves ont eu une note inférieure ou égale à 10.

Étendue : Val max - Val min

$$15 - 8 = 7$$

Diagramme des fréquences cumulées.

