EF Théorie : Complétez la démonstration de la formule de De Moivre

Nous allons démontrer la formule de De Moivre par récurrence. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe en forme trigonométrique. Nous voulons prouver que pour tout entier n,

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

Étape 1 : Initialisation (cas de base)

Pour $n = 1$, la formule est évidente, car elle revient à écrire simplement :

$z^1 = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$

~~\(z^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots~~

Ainsi, la formule est vraie pour $n = 1$.

Étape 2 : Hypothèse de récurrence

Supposons que la formule est vraie pour un entier n, c'est-à-dire que :

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Cette hypothèse signifie que si nous connaissons z^n, nous pouvons l'exprimer avec un module r^n et un argument $n\theta$.

Étape 3 : Pas de récurrence

Nous devons montrer que si la formule est vraie pour n, alors elle est également vraie pour $n+1$, c'est-à-dire que :

$$z^{n+1} = z^n \cdot z.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, écrivons z^{n+1} comme :

$$z^{n+1} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Développons cette expression en utilisant la distributivité et les formules trigonométriques :

$$z^{n+1} = r^{n+1}\Big[\overbrace{(\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\cdot\sin\theta)}^{\text{reelle}} + i\overbrace{(\cos n\theta\cdot\sin\theta + \cos\theta\cdot\sin n\theta)}^{\text{img}}\Big].$$

En utilisant les formules d'addition des angles pour le cosinus et le sinus :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

$$z^{n+1} = r^{n+1}(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)).$$

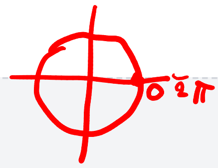
Conclusion

Par le principe de récurrence, nous avons montré que la formule de De Moivre est vraie pour tout entier n. Complétez les étapes ci-dessus avec les expressions correctes pour valider la démonstration.

PARTIE APPLICATION

module au cube et argument ·3

Soit le complexe $z = 5(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$, calcule z^3



Module $5^3 = 125$

argument $3 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ $\qquad \frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

entre $-\pi$ et π.

réponse : $Z^3 = 125 \cdot \text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

Calcule les racines 4èmes du complexe $z = 16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z^{\frac{1}{4}}$ 4 racines

Module : $16^{\frac{1}{4}} = 2$

Argument : $\dfrac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$

$k=0 \rightarrow \frac{\pi}{12}$

$k=1 \rightarrow \frac{\pi}{12} + \cancel{\frac{\pi}{2}}\ \frac{6\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$

$k=2 \quad \frac{13\pi}{12}$

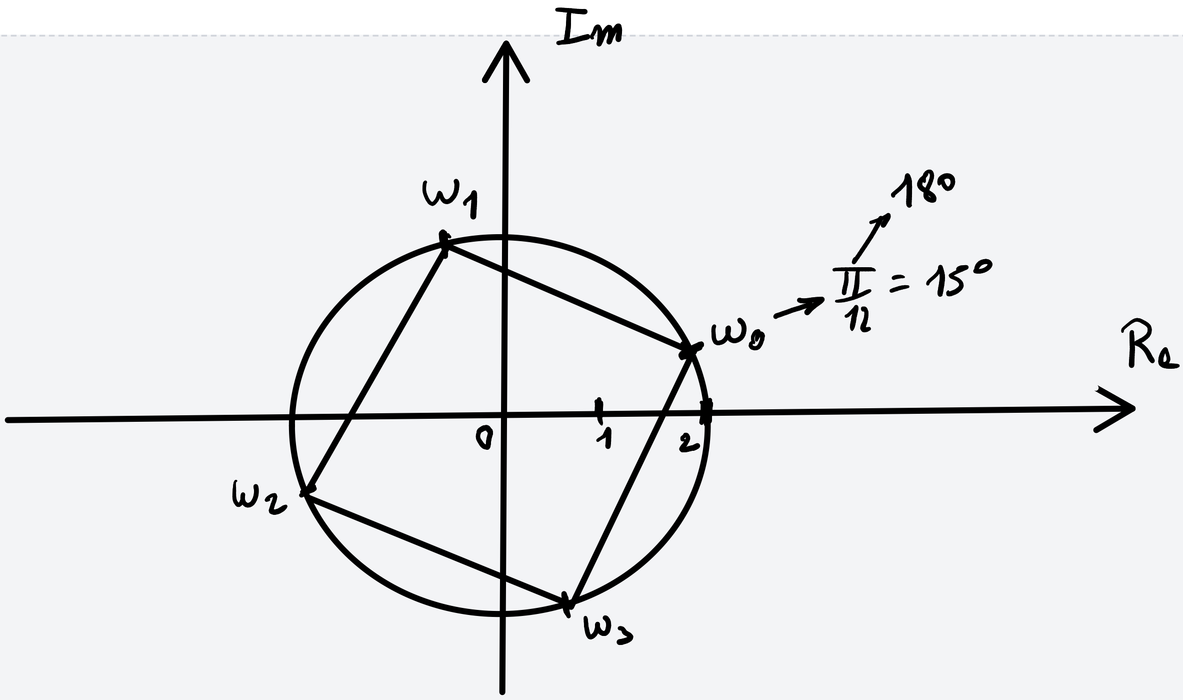
$k=3 \quad \frac{19\pi}{12}$

Les racines sont :

$w_0 = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{\pi}{12}$ $\qquad w_2 = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{13\pi}{12}$

$w_1 = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{7\pi}{12}$ $\qquad w_3 = 2\ \text{cis}\,\frac{19\pi}{12}$

Représente ces racines dans le plan complexe



À préparer : (1) les racines 6ème de $Z = 64\ \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$ + tracer l'hexagone.

(0) la puissance 4 de $Z = \frac{3}{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

(2) les racines 5ème de $Z = 243 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$