Injection, Surjection, Bijection

1. Introduction avec un Exemple Concret

Pour comprendre les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité, commençons par un exemple concret.

Exemple : Dates de Naissance

Dans une classe, chaque élève a une date de naissance. On définit une fonction f qui associe à chaque élève sa date de naissance.

- **Domaine** : Les élèves de la classe.
- **Codomaine** : Les dates de naissance possibles.
- **Image** : Les dates de naissance réellement utilisées dans la classe.

Questions pour la Classe

1. **Injectivité** : Est-ce que deux élèves peuvent avoir la même date de naissance ?

2. **Surjectivité** : Est-ce que toutes les dates de naissance possibles sont utilisées dans la classe ?

3. **Bijectivité** : Est-ce que chaque date de naissance est utilisée par exactement un élève ?

2. Définitions Formelles

Passons maintenant aux définitions mathématiques.

Injectivité

Une fonction $f : A \to B$ est **injective** si chaque élément de l'image est atteint par **au plus un** élément du domaine. Formellement :

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Surjectivité

Une fonction $f : A \to B$ est **surjective** si chaque élément du codomaine est atteint par **au moins un** élément du domaine. Formellement :

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ t.q. } f(x) = y.$$

Bijectivité

Une fonction $f : A \to B$ est **bijective** si elle est à la fois **injective** et **surjective**. Cela signifie que chaque élément du codomaine est atteint par **exactement un** élément du domaine.

3. Méthodes de Vérification

Voici comment vérifier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une fonction.

Injectivité

Pour vérifier l'injectivité :

- **Méthode algébrique** : Résoudre $f(x_1) = f(x_2)$ et vérifier si $x_1 = x_2$.
- **Méthode graphique** : Utiliser le **test de la droite horizontale** (si toute droite horizontale coupe le graphe au plus une fois).

Surjectivité

Pour vérifier la surjectivité :

- **Méthode algébrique** : Résoudre $f(x) = y$ pour un y quelconque et vérifier si une solution existe.
- **Méthode graphique** : Vérifier si le graphe couvre tout le codomaine.

4. Exercices Guidés

Appliquons ces concepts à des exercices concrets.

Exercice 1 : Injectivité

Soit f : $\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Montrer que f est injective.

Exercice 2 : Surjectivité

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4$.

Déterminer si f est surjective sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Bijectivité

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Montrer que f est bijective.

5. Synthèse et Transition

Résumons les concepts clés :

- **Injectivité** : Chaque élément de l'image est atteint par **au plus un** élément du domaine.
- **Surjectivité** : Chaque élément du codomaine est atteint par **au moins un** élément du domaine.
- **Bijectivité** : Chaque élément du codomaine est atteint par **exactement un** élément du domaine.

Transition : Maintenant qu'on sait ce qu'est une fonction bijective, on va étudier les fonctions réciproques. Une fonction bijective admet toujours une réciproque, ce qui nous permettra de résoudre des équations et de modéliser des situations inverses.

6. Batterie

Appliquez les concepts d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité à ces exercices.

Injectivité

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x - 5$.

Montrer que f est injective.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Montrer que f est injective.

Surjectivité

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 2$.

Déterminer si f est surjective sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

Déterminer si f est surjective sur $\mathbb{R}$.

Bijectivité

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 3$.

Montrer que f est bijective.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Montrer que f est bijective.