EF : Situations Exponentielles

1. Inconnue : le temps

La population d'une espèce d'oiseaux dans une réserve augmente de 7 % chaque année.

En combien de temps la population initiale de 1200 individus atteindra-t-elle 7000 individus ?

Exprime ta réponse en années, en détaillant les étapes de calcul.

facteur multiplicatif = 1,07

1200 → 7000

$N(t) = 1200 \cdot 1{,}07^t$ Modèle exponentiel

$7000 = 1200 \cdot 1{,}07^t \Leftrightarrow \frac{7000}{1200} = 1{,}07^t \Leftrightarrow \frac{\log \frac{7000}{1200}}{\log 1{,}07} = t \cong 26$

Il faut 26 ans pour atteindre 7000 individus.

2. Inconnue : pourcentage d'augmentation ou de diminution et modélisation

Une ville voit sa population passer de 150 000 à 280 000 habitants en 10 ans.

→ Calcule le pourcentage d'augmentation annuel et modélise cette croissance par une fonction exponentielle en base *e*.

→ Exprime la fonction sous forme $f(x) = a \cdot e^{bx}$ en indiquant les valeurs de a et b.

$N(t) = 150\,000 \cdot b^t \Rightarrow 280\,000 = 150\,000 \cdot b^{10}$

$\Rightarrow \sqrt[10]{\frac{280\,000}{150\,000}} = b \Rightarrow b = 1{,}0644$

Le % d'↗ annuel = 6,44 %.

$N(t) = 150\,000 \cdot 1{,}0644^t = 150\,000 \cdot [\underbrace{e^{\ln 1{,}0644}}_{1{,}0644}]^t$ → $10^{\log 1{,}0644}$ → $2^{\log_2 \ldots}$

$N(t) = 150\,000 \cdot e^{t \cdot \ln 1{,}0644}$

ou $f(x) = 150\,000 \cdot e^{x \cdot \ln 1{,}0644}$.

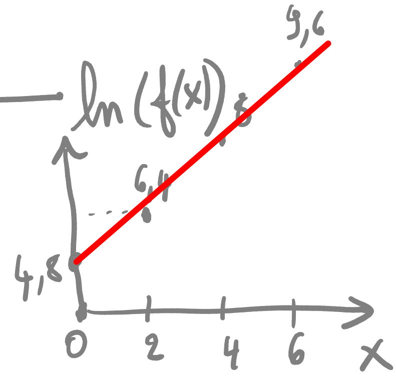
3. Transfert - Utiliser le logarithme naturel pour linéariser une fonction exponentielle

Une entreprise technologique enregistre une croissance rapide de son chiffre d'affaires, modélisée par la fonction $\boxed{f(x) = a \cdot e^{bx}}$, où $f(x)$ est en millions d'euros et x représente les années écoulées.

Données observées :

t

- $x = 0$, $f(0) = 120$ millions d'euros ⇒ ln → 4,8
- $x = 2$, $f(2) = 600$ millions d'euros 6,4
- $x = 4$, $f(4) = 3000$ millions d'euros 8
- $x = 6$, $f(6) = 15\ 000$ millions d'euros 9,6



Objectifs :

1. Utiliser le logarithme naturel pour transformer la fonction exponentielle en une fonction linéaire.

$$f(x) = a \cdot e^{bx}$$
$$\ln f(x) = \ln(a \cdot e^{bx})$$
$$\ln f(x) = \ln a + \ln e^{bx}$$
$$\underbrace{\ln f(x)}_{y} = \underbrace{\ln a}_{p} + \underbrace{b.x}_{m} \rightarrow y = \underbrace{\underline{m}}_{\text{pente}}.x + \overset{\text{y-intercept}}{p}$$

slope

2. Tracer les points dans un graphique semi-logarithmique avec x sur l'axe des abscisses et $\ln(f(x))$ sur l'axe des ordonnées (sur feuillets quadrillés).
3. Dédire les valeurs de a et b, puis écrire la fonction exponentielle modélisant la croissance du chiffre d'affaires.

$$\text{pente } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9,6 - 8}{6 - 4} = \frac{1,6}{2} = 0,8 = b$$
$$\ln a = 4,8 \Rightarrow a = 120$$
$$f(x) = 120 \cdot e^{0,8x}$$

après 7 ans t $f(7) = 120 \cdot e^{0,8 \cdot 7} = 32\ 451$ millions