Modélisation de la Croissance d'une Situation avec les Fonctions Exponentielles

1. Exemple : Croissance d'une Plante

Imaginons une plante qui mesure 10 cm au départ, et dont la taille double chaque jour. Nous pouvons modéliser cette situation avec la fonction exponentielle :

$$T(t) = 10 \cdot 2^t$$

Où $T(t)$ est la taille de la plante après t jours, 10 est la taille initiale, et 2 est le facteur multiplicatif, qui indique que la plante double de taille chaque jour.

En effet :

- Au jour 0, la plante mesure 10 cm.
- Au jour 1, la plante mesure $10 \cdot 2^1 = 20\,\text{cm}$.
- Au jour 2, la plante mesure $10 \cdot 2^2 = 40\,\text{cm}$.
- Au jour 3, la plante mesure $10 \cdot 2^3 = 80\,\text{cm}$.

Ainsi, le facteur 2 est la base de ma fonction exponentielle et représente la manière dont la taille de la plante est multipliée chaque jour. Son rôle est donc de **déterminer le rythme de la croissance ou de la décroissance**

As-tu compris ?

i. Dans une situation qui dépend du temps modélisée par la fonction $f(t) = c \cdot a^t$, comment évolue la valeur de $f(t)$ lorsque t augmente de 1 unité ?

....

ii. Si une plante triple de taille chaque jour et mesure 5 cm au départ, quelle serait la fonction exponentielle qui modélise cette croissance ?

....

2. Cas général

De nombreuses situations peuvent être modélisées par une fonction qui dépend du temps, par exemples :

- La croissance d'une population de bactéries
- La décomposition d'un élément radioactif
- La croissance d'un capital financier
- La croissance d'une plante

Cette fonction peut s'écrire de manière générale sous la forme

$$\boxed{f(t) = c \cdot a^{k \cdot t}}$$

Exemple traité : Croissance d'une population bactérienne

Considérons une population de bactéries qui double toutes les 4 heures. Au départ, il y a 500 bactéries. Nous voulons modéliser la croissance de cette population en fonction du temps t (en heures) avec une fonction exponentielle.

Nous savons que la population double toutes les 4 heures, donc le facteur multiplicatif $a = 2$ et la période est 4 heures. Cela signifie que pour chaque période de 4 heures, la population est multipliée par 2.

On connaît donc déjà la valeur initiale et le facteur multiplicatif :

$$N(t) = 500 \cdot 2^{k \cdot t}$$

Pour déterminer la valeur de k, on écrit :

$$N(4) = 500 \cdot 2^{k \cdot 4} = 500 \cdot 2 = 1000$$

On en déduit que $k = \frac{1}{4}$ et donc la fonction exponentielle est :

$$N(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$$

Où :

- $N(t)$ est la taille de la population au bout de t heures,

- 500 est la taille initiale de la population,
- 2 est le facteur multiplicatif (la population double),

Avec cette formule, on peut maintenant calculer la taille de la population au bout de t heures. Par exemple :

- Au bout de 0 heures : $N(0) = 500 \cdot 2^0 = 500 \, \text{bactéries}$
- Au bout de 4 heures : $N(4) = 500 \cdot 2^1 = 1000 \, \text{bactéries}$
- Au bout de 8 heures : $N(8) = 500 \cdot 2^2 = 2000 \, \text{bactéries}$
- Au bout de 12 heures : $N(12) = 500 \cdot 2^3 = 4000 \, \text{bactéries}$

Batterie d'exercices

Voici quelques exercices pour pratiquer la modélisation avec une fonction exponentielle :

i. Une population de champignons quadruple tous les 3 jours. Au départ, il y a 50 champignons. Modélise cette croissance avec une fonction exponentielle, puis détermine la population après 9 jours.

ii. Une somme d’argent placée dans un compte bancaire augmente de 5% chaque année. Si la somme initiale est de 1000 euros, modélise cette situation avec une fonction exponentielle, et calcule la somme d’argent après 5 ans.

iii. Un produit radioactif se désintègre de 10% toutes les heures. Si l’on commence avec 100 grammes de produit, modélise cette désintégration avec une fonction exponentielle, puis détermine la quantité de produit restant après 6 heures.

iv. La population d'une ville augmente de 7% par an. Si la population initiale est de 20 000 habitants, modélise la croissance avec une fonction exponentielle et calcule la population après 10 ans.