Formulaire : Équations logarithmiques et exponentielles

1. Rappel : Résoudre une équation du second degré

Une équation du second degré a la forme générale :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solution est donnée par la formule du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une solution unique :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle.

2. Exemple : Résolution d'une équation exponentielle via substitution

Prenons l'exemple suivant :

$$e^{2x} + e^x - 6 = 0$$

Nous posons $e^x = t$, ce qui donne l'équation du second degré :

$$t^2 + t - 6 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2, \quad t_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3$$

En revenant à la variable x, nous avons :

$$e^x = 2 \quad \text{donc} \quad x = \ln(2)$$

et

$$e^x = -3 \quad \text{impossible car} \quad e^x > 0 \text{ pour tout } x$$

La solution finale est donc $x = \ln(2)$.

3. Rappel des propriétés des logarithmes et exponentielles

Propriétés des logarithmes

- Produit : $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- Quotient : $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- Puissance : $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
- Réciproque : $a^{\log_a(x)} = x$ et $\log_a(a^x) = x$

Propriétés des exponentielles

- Produit : $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- Quotient : $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- Puissance : $(a^x)^n = a^{x \cdot n}$
- Réciproque : $a^{\log_a(x)} = x$