Séquence : Probabilité Conditionnelle

1. Définition et formule de la probabilité conditionnelle

La **probabilité conditionnelle** de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé se note $P(A \mid B)$ et se calcule avec la formule :

si condition et

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Cela signifie que l'on ajuste la probabilité de A en tenant compte du fait que B s'est déjà produit.

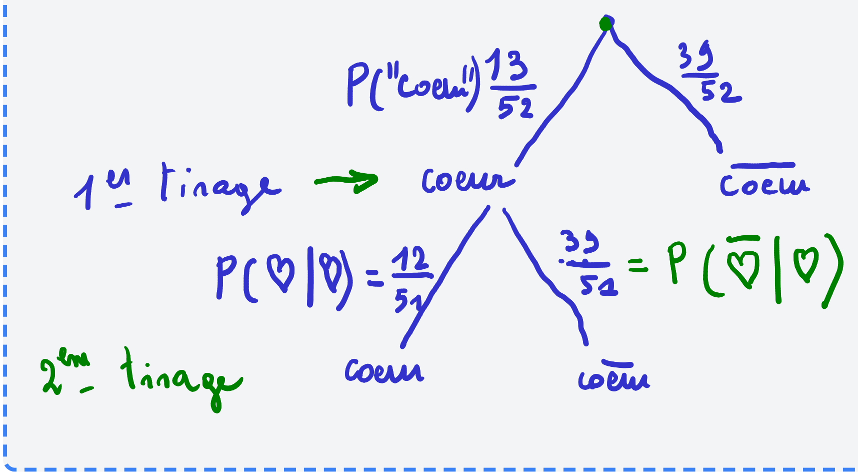
2. Exemple : Tirage de cartes

Considérons un jeu de **52 cartes**. On tire une carte puis une seconde **sans remettre la première**.

- **Question :** Quelle est la probabilité de tirer un cœur, sachant qu'on a déjà tiré un cœur au premier tirage ?

52 cartes : ♡ coeur 13, ♧ trèfle 13, ♤ pic 13, ◇ carreau 13 — rouge / N.

Voici l'arbre de probabilités associé :



Calcul :

Nombre de cartes restantes après le premier tirage : 51. Nombre de cœurs restants si le premier tirage est un cœur : 12. Donc :

$$P(\text{Cœur au 2e tirage} \mid \text{Cœur au 1er tirage}) = \frac{12}{51} \approx 0.235$$

3. Exercices pratiques : Tirage de cartes

Exercice 1 : Suite de tirages

4 rois coeur, trèfle, pic, carreau
R N N. R

1. On tire deux cartes sans remise :
   - a) Quelle est la probabilité de tirer un roi sachant qu'on a déjà tiré un roi au premier tirage ?
   - b) Quelle est la probabilité de tirer deux rois consécutivement ?
   - c) Quelle est la probabilité de tirer une carte noire puis une carte rouge ?
   - ~~d)~~ Quelle est la probabilité de tirer un roi sachant que la première carte tirée était noire ? arbre

4. Exemple : Tirage dans une urne

On considère une urne contenant :

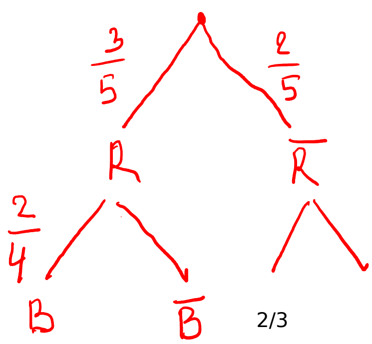
- 3 boules rouges
- 2 boules bleues

On tire une boule au hasard, puis une seconde **sans remise**. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue au second tirage sachant que la première boule était rouge ?

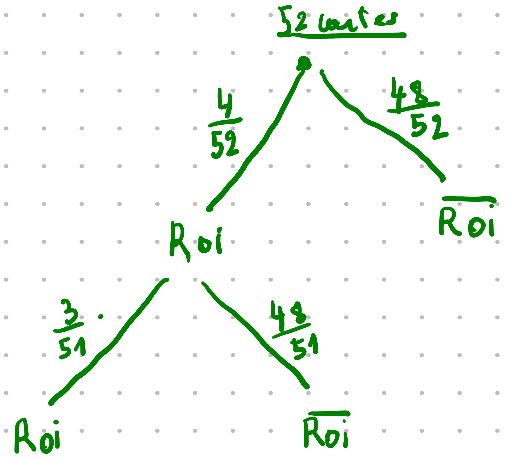
$$P(\text{Bleue au 2e tirage} \mid \text{Rouge au 1er tirage}) = \frac{2}{4} = 0.5$$

$P(R) = \frac{3}{5}$

$P(B|R) = \frac{2}{4}$



EX 1 A



$P(Roi_2 | Roi_1) = \frac{3}{51}$

2ème tirage — 1er tirage

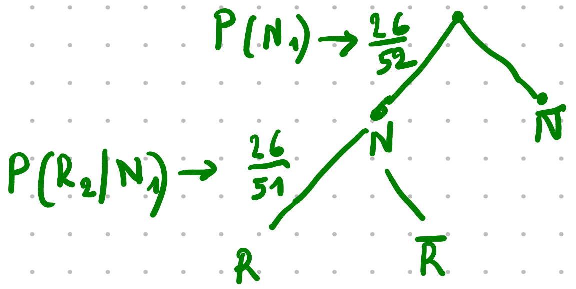
1 B Tirer 2 rois consécutivement.

$= P(Roi_2 \cap Roi_1) = P(Roi_2 | Roi_1) \cdot P(Roi_1)$

et

$= \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{52} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$

1 C $P(N_1 \cap R_2)$



$\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{51}$ 13

$P(N_1 \cap R_2) = P(N_1) \cdot P(R_2 | N_1) = \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{51} = \frac{676}{2652} = \frac{13}{51}$

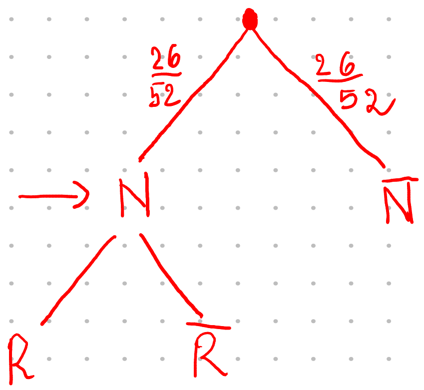
annulé →

- d) Quelle est la probabilité de tirer un roi sachant que la première carte tirée était noire ? arbre

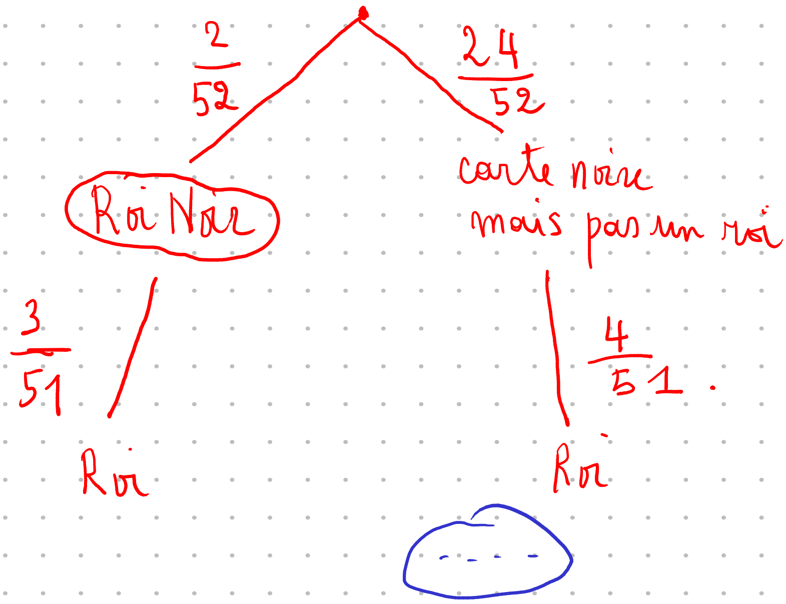
2 roi Noirs

$P(N) = \frac{26}{52}$

est-ce un roi noir ? →



26 cartes noires



5. Exercices pratiques : Tirage dans une urne

Exercice 2 : Probabilités conditionnelles

On considère une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules vertes.
On tire deux boules sans remise.

1. a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges consécutivement ?
2. b) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis une boule verte ? et
3. c) Quelle est la probabilité de tirer une boule verte sachant que la première boule tirée était rouge ? si
4. d) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge sachant que la seconde boule tirée était verte ? Bayes

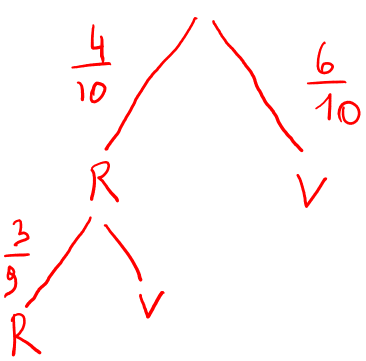
6. Conclusion

La probabilité conditionnelle permet d'ajuster la probabilité d'un événement en fonction d'une information préalable. L'utilisation d'arbres de probabilités aide à représenter visuellement les calculs et à mieux comprendre la dépendance des événements.

Réponses :

On considère une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules vertes.
On tire deux boules sans remise.
1. a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges consécutivement ?

$P(R_1) = \frac{4}{10}$



$P(R_2 \mid R_1) = \frac{3}{9}$

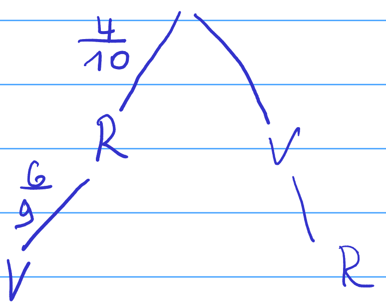
$P(R_1 \cap R_2) = P(R_2 \mid R_1) \cdot P(R_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$

2. b) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis une boule verte ? et

3. c) Quelle est la probabilité de tirer une boule verte sachant que la première boule tirée était rouge ? si

$P(R_1) = \frac{4}{10}$

$P(V_2 | R_1) = \frac{6}{9}$



$$P(R_1 \cap V_2) = P(V_2 | R_1) \cdot P(R_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$$

3) $P(V_2 | R_1) = \frac{6}{9}$