Situations exponentielles

Batterie d'exercices - Inconnue : le temps

i. Une population de bactéries double toutes les 8 heures. Combien de temps faudra-t-il pour que la population initiale de 200 bactéries atteigne 1600 bactéries ?

ii. Un capital placé à un taux d'intérêt de 4% annuel double de valeur. Combien de temps faudra-t-il pour qu’un montant initial de 1500 euros atteigne 3000 euros ?

iii. Un produit radioactif se désintègre de 12% toutes les heures. Combien de temps faudra-t-il pour que la masse initiale de 200 grammes soit réduite à 50 grammes ?

iv. La population d’une espèce de poisson dans un lac croît de 9% par an. Combien de temps faudra-t-il pour que la population initiale de 500 poissons atteigne 2000 poissons ?

Inconnue : pourcentage d'augmentation ou de diminution et modélisation

i. Une population de bactéries passe de 100 à 800 bactéries en 5 heures. Calcule le pourcentage d'augmentation par heure, puis écris la fonction exponentielle en base 10 qui modélise cette croissance.

ii. Un capital initial de 1500 euros atteint 3000 euros en 6 ans. Trouve le pourcentage d'augmentation annuel, puis écris la fonction exponentielle en base e qui représente cette augmentation.

iii. Un produit radioactif voit sa masse passer de 500 grammes à 125 grammes en 4 heures. Détermine le pourcentage de diminution par heure, puis écris la fonction exponentielle en base 10 qui modélise cette décroissance.

iv. La population d’une ville passe de 20 000 à 35 000 habitants en 8 ans. Trouve le pourcentage d'augmentation annuel, puis écris la fonction exponentielle en base e qui modélise cette croissance.

Transfert - Utiliser le logarithme naturel (base e) pour linéariser une fonction exponentielle

Une start-up technologique connaît une croissance exponentielle très rapide de son chiffre d'affaires, modélisée par une fonction de la forme $f(x) = a \cdot e^{bx}$, où $f(x)$ représente le chiffre d'affaires en millions d'euros et x est le nombre d'années écoulées depuis le lancement de l'entreprise. Voici les données observées pour les premières années :

- Quand $x = 0$, $f(0) = 100$ (soit 100 millions d'euros).
- Quand $x = 1$, $f(1) = 500$ (soit 500 millions d'euros).
- Quand $x = 2$, $f(2) = 2500$ (soit 2 500 millions d'euros).
- Quand $x = 3$, $f(3) = 12500$ (soit 12 500 millions d'euros).

Objectifs :

1. Utiliser le logarithme naturel (base e) pour transformer la fonction exponentielle en une fonction linéaire.
2. Tracer les points dans un graphique semi-logarithmique avec x sur l'axe des abscisses et $\ln(f(x))$ sur l'axe des ordonnées.
3. Déduire les valeurs de a et b, puis écrire la fonction exponentielle qui modélise le chiffre d'affaires de l'entreprise.

Résolution Méthodique :

1. Calcul des logarithmes naturels :

On commence par appliquer le logarithme naturel aux valeurs du chiffre d'affaires :

$$\ln(f(x)) = \ln(a) + bx$$

Nous allons donc calculer $\ln(f(x))$ pour chaque valeur donnée de $f(x)$:

- $\ln(f(0)) = \ln(100) \approx 4.605$
- $\ln(f(1)) = \ln(500) \approx 6.215$
- $\ln(f(2)) = \ln(2500) \approx 7.824$
- $\ln(f(3)) = \ln(12500) \approx 9.434$

2. Tracer le graphique semi-logarithmique :

On trace ces points dans un graphique où l'axe des ordonnées représente $\ln(f(x))$ et l'axe des abscisses représente x (le nombre d'années).

3. Détermination de a et b :

- Pour a, on sait que lorsque $x = 0$, $f(0) = a$, donc $a = 100$.
- Pour b, on calcule la pente de la droite obtenue sur le graphique semi-logarithmique, qui correspond à la valeur de b. En calculant la pente entre $x = 0$ et $x = 3$:

$$b = \frac{\ln(f(3)) - \ln(f(0))}{3 - 0} = \frac{9.434 - 4.605}{3} \approx 1.609$$

4. Fonction exponentielle finale :

La fonction exponentielle qui modélise le chiffre d'affaires est :

$$f(x) = 100 \cdot e^{1.609x}$$