Schéma de Bernoulli et Loi binomiale

Quand une expérience aléatoire a seulement deux résultats possibles (succès ou échec), on parle d'une **épreuve de Bernoulli**.

A **Bernoulli trial** is a random experiment with only two outcomes: success or failure.

Exemple: Lancer une pièce \rightarrow pile = succès (P), face = échec (F).

Toss a coin \rightarrow heads = success (H), tails = failure (T).

Si on répète **plusieurs fois** une même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, on parle de **schéma de Bernoulli**.

Repeating independent Bernoulli trials defines a **Bernoulli scheme**.

Répéter un lancer de pièce 4 fois = schéma de Bernoulli avec n=4. On définit la variable aléatoire X= nombre de succès (nombre de piles).

12 Et maintenant :

Quand on compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X suit une **loi binomiale** :

$$X \sim \mathcal{B}(n,p)$$

où n= nombre d'épreuves, p= probabilité de succès.

 $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ means X follows a binomial distribution.

La **loi de probabilité** donne la probabilité de chaque valeur possible de \boldsymbol{X} .

$$P(X=k)=inom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Nombre de façons d'avoir k succès \times probabilité d'une telle issue.

Espérance mathématique

L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $\mathbb{E}(X)$, représente la valeur moyenne attendue de X si on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, l'espérance est donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = n imes p$$

Interprétation : Si on lance 100 fois une pièce équilibrée, on s'attend à environ 50 piles. L'espérance est cette "tendance centrale" à long terme.

Analogie : Imaginez une roue de loterie qui donne 1€, 2€, ou 3€ avec des chances différentes. L'espérance est ce que vous gagneriez en moyenne par tour.

The expected value is the long-term average gain.

📥 À vous!

Pour chaque situation ci-dessous, trouvez : la loi de probabilité de X, l'espérance $\mathbb{E}(X)$, et interprétez-la.

1.	Une pièce e	est lancée 5	fois.	On note	X le	nombre	de	piles.
----	-------------	---------------------	-------	---------	------	--------	----	--------

- Déterminez la loi de probabilité de X.
- Calculez $\mathbb{E}(X)$ et interprétez-la.

- 2. Un test QCM contient **10 questions** vrai/faux. Un élève répond au hasard. X = nombre de bonnes réponses.
 - Quelle est la loi suivie par X ?
 - Quelle est son espérance ? Que représente-t-elle dans ce contexte ?

- 3. Une machine réussit à produire une pièce correcte avec une probabilité p=0.95. Sur une série de 20 pièces, on note X le nombre de pièces correctes.
 - Calculez la probabilité d'avoir exactement 19 pièces correctes.
 - Calculez et interprétez $\mathbb{E}(X)$.