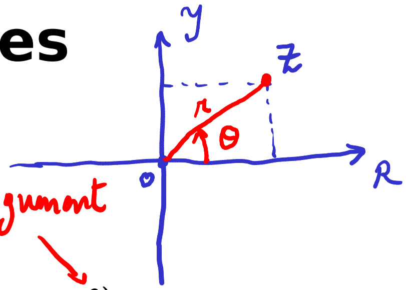
Puissances et racines de nombres complexes



1. Puissances de nombres complexes

module argument

La puissance n-ième d'un nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est obtenue en élevant son module à la puissance n et en multipliant son argument par n. Si $n \in \mathbb{N}$, alors :

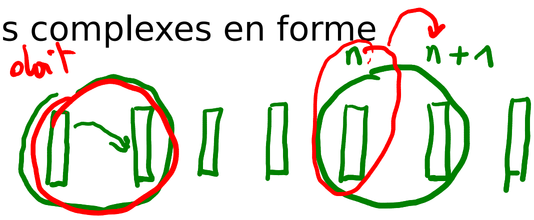
e.g. $z^3 = r^3 . (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$

$$z^n = r^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Vrai pour $n=1$

Cette formule, connue sous le nom de **formule de ~~De~~ Moivre**, permet de calculer facilement les puissances de nombres complexes en forme trigonométrique.

le premier doit tomber



Analogie : le principe de récurrence

Le principe de récurrence est similaire à une rangée de dominos. Si nous faisons tomber le premier domino (le cas de base) et que nous savons que chaque domino renverse le suivant (le pas de récurrence), alors tous les dominos tomberont successivement.

Pour prouver une formule par récurrence, nous devons d'abord vérifier qu'elle est vraie pour un premier cas (comme faire tomber le premier domino). Ensuite, nous montrons que si elle est vraie pour un certain entier n, alors elle est aussi vraie pour $n+1$ (comme si chaque domino fait tomber le suivant). Cela garantit que la formule est vraie pour tous les entiers naturels.

Démonstration de la formule de De Moivre

Nous allons démontrer la formule de De Moivre par récurrence. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un nombre complexe en forme trigonométrique. Nous voulons prouver que pour tout entier n,

$$z^n = r^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

Étape 1 : Initialisation (cas de base)

Pour $n = 1$, la formule est évidente, car elle revient à écrire simplement :

$$z^1 = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Ainsi, la formule est vraie pour $n = 1$.

Étape 2 : Hypothèse de récurrence

Supposons que la formule est vraie pour un entier n, c'est-à-dire que :

$$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$ Vrai

Cette hypothèse signifie que si nous connaissons z^n, nous pouvons l'exprimer avec un module r^n et un argument $n\theta$.

Étape 3 : Pas de récurrence

Nous devons montrer que si la formule est vraie pour n, alors elle est également vraie pour $n+1$, c'est-à-dire que :

$$z^{n+1} = r^{n+1}\left(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\right).$$ je veux arriver à cela

En utilisant l'hypothèse de récurrence, écrivons z^{n+1} comme :

$$z^{n+1} = z^n \cdot z^{1}$$ Clé

En remplaçant z^n et z par leurs formes trigonométriques respectives :

$$z^{n+1} = \overbrace{\left[r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)\right]}^{z^n} \cdot \overbrace{\left[r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right]}^{z}.$$ $i^2 = -1$

En simplifiant, on obtient :

double distributivité

$$z^{n+1} = r^{n+1}\left(\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta + i\left(\sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta\right)\right).$$

$\cos(a+b) =$ $\quad$ $\sin(a+b)$

$n\theta$ $\quad$ 1θ

En utilisant les formules d'addition des angles pour le cosinus et le sinus :

$$z^{n+1} = r^{n+1}\left(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\right).$$

Nous avons donc prouvé que la formule est vraie pour $n+1$ si elle est vraie pour n.

Conclusion

Rappel trigonométrie

$$* \underline{\cos(a+b)} = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

ition pour le sinus :

$$* \underline{\sin(a+b)} = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$\rightarrow \cos 2a = \cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$z = r.(\cos\theta + i\sin\theta) = r.(\cos(\theta+2\pi) + i\sin(\theta+2\pi))$

$= r.(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi))$

$k \in \mathbb{Z}$

$k = -\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16}$ $\qquad 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$\boxed{\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}}$

Par le principe de récurrence, la formule de De Moivre est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.

As-tu compris ?

Que se passe-t-il avec le module et l'argument d'un nombre complexe si on élève ce nombre au carré ?

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^2 = r^2.(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

---

2. Racines de nombres complexes

La racine n-ième d'un nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ correspond aux solutions de l'équation $w^n = z$. Ces solutions sont données par :

$r^{\frac{1}{n}}$

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Cela signifie qu'il y a n racines distinctes, équidistantes dans le plan complexe, correspondant à une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ entre chaque racine.

3. Interprétation géométrique dans le plan complexe

Dans le plan complexe, élever un nombre complexe à une puissance positive est équivalent à dilater son module et à multiplier son angle. Cela étire le vecteur tout en le faisant tourner.

Pour les racines n-ième, on obtient n vecteurs de même module, également répartis autour de l'origine, avec un écart angulaire de $\frac{2\pi}{n}$.

Batterie d'exercices

Exercice 1 : Calcul de puissances

Calculez la puissance z^3 pour le nombre complexe $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ en utilisant la formule de De Moivre.

Exercice 2 : Calcul de racines carrées

Trouvez les deux racines carrées du nombre complexe $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ et représentez-les dans le plan complexe.

Exercice 3 : Racine cubique

Trouvez les trois racines cubiques du nombre complexe $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ et représentez-les dans le plan complexe.

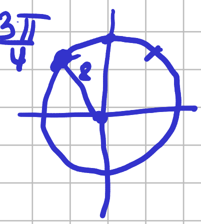
NON

Exercice 4 : Rotation et module

En utilisant la formule des puissances, calculez la puissance z^5 pour $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, et interprétez géométriquement cette transformation dans le plan complexe.

Calculez la puissance z^3 pour le nombre complexe $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z^3 = \underbrace{2^3}_{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$



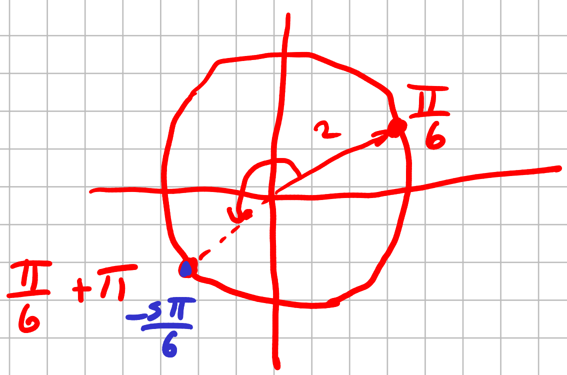
Trouvez les deux racines carrées du nombre complexe $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sqrt[2]{z} = z^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2} :$$

$k = 0 \Rightarrow \dfrac{\frac{\pi}{3}+0}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

$k = 1 \Rightarrow \dfrac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6} + \pi$



Les 2 racines sont :

$Z_1 = 2 \cdot \left(\text{cis}\,\frac{\pi}{6}\right)$

et $Z_2 = 2 \cdot \left(\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

$$\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

si on demande l'argument entre $-\pi$ et π

alors je dois prendre $\theta_2 = \frac{\pi}{6} - \pi$

$= \frac{\pi}{6} - \frac{6\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

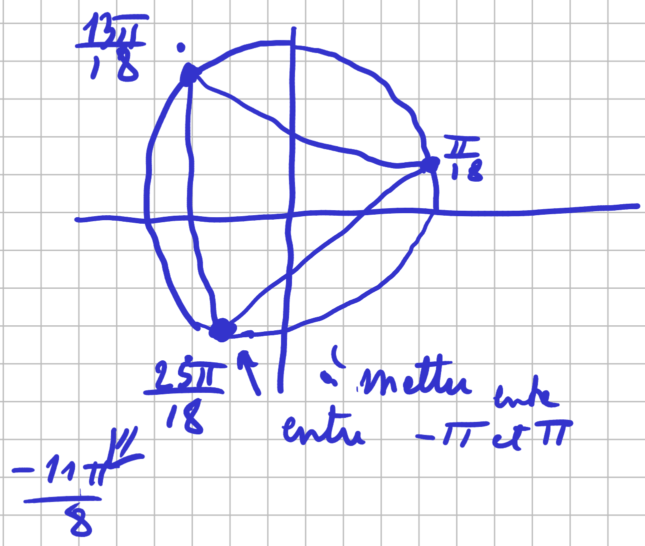
d'où $\boxed{Z_2 = 2 \cdot \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ et représentez-les dans le plan complexe.

racine cubique

$$\sqrt[3]{z} = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3} = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right)$$

120°



$k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{18}$

$k = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi$

$= \frac{\pi}{18} + \frac{12\pi}{18} = \frac{13\pi}{18}$