# Odpor mezi uzly sítě rezistorů

František Fröde

May 15, 2022

**Abstract**

Nahrazení sítě rezistorů nižším množstvím rezistorů, které propojují pouze vývody této sítě se dá řešit využitím Kirchhoffových zákonů. Ty však vedou ke vzniku nelineárních vztahů a to i v relativně jednoduchých případech. Zapojíme li paralelně dva rezistory o odoprech $R_1$ a $R_2$, jejich celkový odpor je, jak známo, $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. Pokud bychom místo odporů používali vodivosti, podobný problém by nastal v případě sériového zapojení.

V tomto dokumentu ukážeme, že problém zjednodušení rezistorové sítě lze převést na soustavu lineárních rovnic.

# 1 Převod hvězdy na úplný graf

Je známo, že trojici rezistorů zapojenou do hvězdy lze nahradit trojicí (zpravidla jiných) rezistorů zapojených do trojúhelníku. Tato metoda lze, jak uvidíme, zobecnit na převod hvězdy o $n$ listech na kompletní graf o $n$ vrcholech. To může být velmi užitečné, protože uzel ležící ve středu přepojované hvězdy touto operací ze sítě naprosto odstraníme.

Pojďme se nyní zabývat, jak takové nahrazení provést a jsetli je vůbec možné. Z důvodů, které budou zanedlouho zřejmé, budeme pracovat výhradně s vodivostmi rezistorů.

Uvažujme hvězdu o $n$ listech. Potenciál na $i$-tém listu označíme $\varphi_i$, potenciál ve středu $\varphi_s$. Vodivost rezistoru příslušného $i$-tému listu označíme $G_{i,s}$ a proud tekoucí tímto rezistorem $I_{i\to s}$. Vodivosti uvažujeme nezáporné. Možnost, kdy jsou všechny vodivosti rovné nule vynecháme, protože odpovídá již odpojenému středu. Znaménko proudu volíme kladné pokud teče z listu do středu. Z Ohmova zákona platí:

$$I_{i\to s} = G_{i,s}(\varphi_i - \varphi_s)$$

Z prvního Kirchhoffova zákona pak odvodíme:

$$0 = \sum_i I_{i\to s} = \sum_i G_{i,s}\varphi_i - \varphi_s \sum_i G_{i,s}$$

$$\varphi_s = \frac{\sum_i G_{i,s}\varphi_i}{\sum_i G_{i,s}}$$

Zaveďme nyní vodivosti $G_{i,j}$ odporů úplného grafu, na který se hvězdu přepojit. Požadujeme, aby se úplný graf "choval stejně" jako hvězda, tj. aby při pevně zvolených potenciálech vrcholy tekl stejný proud. Matematicky:

$$\sum_j I_{i\to j} = \sum_j G_{i,j}(\varphi_i - \varphi_j) \overset{!}{=} I_{i\to s} = G_{i,s}(\varphi_i - \varphi_s)$$

$$= G_{i,s}(\varphi_i - \frac{\sum_j G_{j,s}\varphi_j}{\sum_j G_{j,s}}) = G_{i,s}\frac{\sum_j G_{j,s}(\varphi_i - \varphi_j)}{\sum_j G_{j,s}}$$

Volbou $\varphi_i = 0$ a porovnáním členů u $\varphi_j$ ve druhém a posledním výrazu vidíme, že pro $G_{i,j}$ existuje právě jedno řešení, a to

$$G_{i,j} = \frac{G_{i,s}G_{j,s}}{\sum_k G_{k,s}} \tag{1}$$

Nahradit hvězdu úplným grafem nad listy je tedey možné a dokonce víme jak toto nahrazení provést. Také si můžeme uvědomit, že pokud některé z listů byly propojené rezistorem už před převodem, vodivost z rovnice (1) k vodivosti existujícího rezistoru přičteme.

# 2 Maticový zápis převodu hvězdy na úplný graf

## 2.1 Základní maticová formulace

Zamysleme se, jakým způsobem lze síť rezistorů reprezenotvat. Často se setkáme se situací, kdy máme síť rezistorů zadanou prostřednictvím schéma. Použít schéma dává smysl pro sítě, které je potřeba sestavit. Zato při postupné redukci sítě počet rezistorů zpočátku zpravidla roste a schéma by rychle začalo být velmi nepřehledné.

Očíslujme jednotlivé uzly tak, aby uzly mezi kterými počítáme odpor byly poslední dva. Poté zavedeme matici vodivostí.

**Definice 2.1** (Matice vodivostí)**.** Maticí vodivostí řádu $n$ rozumíme čtvercovou matici

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\sum_i G_{1,i} & G_{1,2} & G_{1,3} & \dots & G_{1,n} \\ G_{2,1} & -\sum_i G_{2,i} & G_{2,3} & \dots & G_{2,n} \\ G_{3,1} & G_{3,2} & -\sum_i G_{3,i} & \dots & G_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n,1} & G_{n,2} & G_{n,3} & \dots & -\sum_i G_{n,i} \end{pmatrix}$$

kde $G_{i,j} = G_{j,i}$ je vodivost rezistoru propojujícího uzly $i, j$. Pokud uzly nejsou přímo propojené, píšeme nulu. Jestliže je některý řádek celý nulový, vynecháme jej i s příslušným sloupcem.

**Definice 2.2** (Redukce matice vodivostí)**.** Redukcí matice vodivostí rozumíme operaci, kdy přičtením vhodného násobku prvního řádku vynulujeme první člen každého dalšího řádku a následně vynecháme první řádek a sloupec.

**Tvrzení 2.1.** *Matice* $\mathbf{G}'$ *získaná redukcí matice vodivostí* $\mathbf{G}$ *je matice vodivostí odpovídající síti, ve které byla hvězda se středem v prvním uzlu nahrazena úplným grafem.*

*Důkaz.* Aby se v $\mathbf{G}$ vynuloval prvek na místě $(j, 1)$, musíme k $j$-tému řádku přičíst $\frac{G_{j,1}}{\sum_i G_{1,i}}$ násobek prvního řádku. Nulou určitě nedělíme, protože řádek je dle definice nenulový. K prvku $G_{i,j}$ tedy přičítáme

$$\frac{G_{j,1} G_{i,1}}{\sum_k G_{1,k}}$$

Porovnáním s rovnicí (1) vidíme, že tato úprava odpovídá přepojení hvězdy se středem v prvním uzlu. Zároveň si všimneme, že přičítaný výraz je symetrický vzhledem k prohození $i$ a $j$, takže podmatice (ta bez prvního sloupce a řádku) je stále symetrická. Součet v řádcích se touto úpravou nemění, protože součet prvního řádku je nulový. Spolu s nulovostí prvního sloupce to znamená, že na diagonále podmatice je součet zbylých prvků jejích řádků a tedy, pokud vynecháme případné nulové řádky, podmatice je skutečně matice vodivostí. □

Nyní si stačí uvědomit, že matici můžeme redukovat dokud nám nevznikne matice $2\times 2$, kde na vedlejší diagonále přečteme vodivost mezi zbývajícími dvěma uzly, nebo dokud nevyřadíme jeden z našich uzlů, kdy jsou naše uzly rozpojené.

## 2.2 Příklad: rezistorová krychle

### Zadání

Mějme krychly sestavenou z dvanácti rezistorů o odporu 1Ω.
Jaký odpor naměříme mezi dvěma sousedními vrcholy?

### Řešení

Všechny rezistory mají odpor 1Ω, takže jejich vodivost je $1S$. V průběhu výpočtu nebudeme jednotky pro přehlednost psát. Vrcholy očíslujeme

$$
\begin{array}{cccc}
 & {\scriptstyle 7} & & {\scriptstyle 8} \\
3 & & 4 & \\
 & {\scriptstyle 5} & & {\scriptstyle 6} \\
1 & & 2 &
\end{array}
$$

Odpor budeme určovat mezi vrcholy 7 a 8, abychom nemuseli prohazovat řádky v matici vodivosti. Ta má tvar

$$
\mathbf{G} = \begin{pmatrix}
-3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3
\end{pmatrix}
$$

Postupně redukcí získáme

$$
\begin{pmatrix}
-8/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\
1/3 & -8/3 & 1 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1/3 & 1/3 & 0 & -8/3 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
-21/8 & 9/8 & 3/8 & 1/8 & 1 & 0 \\
9/8 & -21/8 & 1/8 & 3/8 & 0 & 1 \\
3/8 & 1/8 & -21/8 & 9/8 & 1 & 0 \\
1/8 & 3/8 & 9/8 & -21/8 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3
\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}
-15/7 & 2/7 & 3/7 & 3/7 & 1 \\
2/7 & -18/7 & 8/7 & 8/7 & 0 \\
3/7 & 8/7 & -55/21 & 1/21 & 1 \\
3/7 & 8/7 & 1/21 & -55/21 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & -3
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
-38/15 & 6/5 & 6/5 & 2/15 \\
6/5 & -38/15 & 2/15 & 6/5 \\
6/5 & 2/15 & -38/15 & 6/5 \\
2/15 & 6/5 & 6/5 & -38/15
\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}
-112/57 & 40/57 & 24/19 \\
40/57 & -112/57 & 24/19 \\
24/19 & 24/19 & -48/19
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
-12/7 & 12/7 \\
12/7 & -12/7
\end{pmatrix}
$$

Teď už víme, že odpor mezi sousedními vrcholy krychle je $\frac{7}{12}\Omega$.

## 2.3 Zavedení dalších řádkových úprav

**Definice 2.3** (Zmenšená matice)**.** Matici $\mathbf{M_{i/n}}$, která vznikne z čtvercové matice $\mathbf{M}$ řádu $n$ vynecháním $i$-tého sloupce a řádku nazveme $i$-zmenšenou, (nebo pokud je $i$ zřejmé z kontextu jen zmenšenou) maticí.

**Tvrzení 2.2.** *Nechť* $\mathbf{G}$ *je matice vodivostí a* $-\vec{e}_{i/j}$ *je* $i$*-tý vektor kanonické báze* $\mathbb{R}^j$*. Pokud existuje řešení rovnice* $\mathbf{G_{n/n}}\vec{x} = -\vec{e}_{n-1/n-1}$*, pak poslední složka* $\vec{x}$ *je rovna převrácené hodnotě vodivosti mezi uzly* $n$ *a* $(n-1)$*. Naopak pokud žádné řešení neexistuje, tato vodivost je nulová.*

*Důkaz.* Provedeme redukci $\mathbf{G}$, ale řádky a sloupce, které bychom odstraňovali ponecháme. Narazíme-li na situaci, kdy máme redukovat nulovým řádkem, překročíme k dalšímu řádku a sloupci, protože problémový sloupec už je díky symetrii matice vodivostí nulový. Tímto postupem jistě dojdeme do bodu, kdy na předposledním řádku jsou dvě opačné nenulové hodnoty na posledních dvou místech, nebo samé nuly. V tomto bodě označíme matici $\mathbf{G}'$. V její zmenšené formě $\mathbf{G}'_{\mathbf{n/n}}$ je v pravém dolním rohu záporná hodnota vodivosti mezi uzly $n$ a $(n-1)$.

Pokud je nenulová, každé potenciální řešení musí na posledním místě mít převrácenou hodnotu této vodivosti. Každý jiný řádek $\mathbf{G}'_{\mathbf{n/n}}$ je buď celý nulový, takže mu potenciální řešení automaticky vyhovuje, nebo má nenulový diagonální člen, tedy jeho součin s řešením lze učinit nulovým.

Nakonec si uvědomíme, že matice $\mathbf{G}'$ vznikla z matice $\mathbf{G}$ pouze přičítáním násobků řádků směrem dolů, což je ekvivalentí úprava, která navíc nemění pravou stranu. Redukce a zmenšení o poslední řádek a sloupec na sebe navíc nemají žádný vliv. □

Tímto jsme problém převedli na řešení soustavy lineárních rovnic.