Blatt 3

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie, ob $f \in \mathcal{O}(g)$ oder $f \in \Omega(g)$ oder beides (d.h. $f \in \Theta(g)$). Beweisen Sie Ihre Aussagen.

1. $f(n) = \pi \cdot 3^{\frac{n}{2}}$, $g(n) = 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi \cdot 3^{\frac{n}{2}}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{(\sqrt{3})^n}{2^n} = 0$$

Da $\sqrt{3} < 2$.

Damit folgt: $f \in o(g) \subseteq O(g)$

2. $f(n) = n \log n$, $g(n) = n \log(n^{\frac{1}{3}})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n \log(n^{\frac{1}{3}})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log(n^{\frac{1}{3}})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \log n}{\log n} = 3$$

Damit folgt: $f \in \Theta(g)$

3. $f(n) = \frac{\log(n)}{n}$, $g(n) = \frac{\sqrt{n}}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

Da sowohl Zähler als auch Nenner gegen unendlich streben, vergleiche wir hier nach Hopital die Ableitungen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \overset{abl.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

Damit folgt: $f \in o(g) \subseteq O(g)$

b) Sei $g(n) = \frac{1}{n}$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f \in o(g)$ existiert, oder beweisen Sie, dass $o(g) = \emptyset$.

$$f(n) := \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Damit folgt: $f \in o(g) \subseteq O(g)$

Also ist $o(g)$ nicht leer bzw enthält mindestens eine Funktion.