

Projektowanie Efektywnych Algorytmów

Projekt

20/12/2022

259126 Maciej Fras

(4) Symulowane Wyżarzanie

spis treści	strona
Sformułowanie zadania	2
Opis metody	3
Opis algorytmu	4-5
Dane testowe	6
Procedura badawcza	7-8
Wyniki	8-18
Analiza wyników i wnioski	19

1. Sformułowanie zadania

Zadane polega na opracowaniu, implementacji i zbadaniu efektywności algorytmu symulowanego wyżarzania rozwiązującego problem komiwojażera w wersji optymalizacyjnej.

Problem komiwojażera (ang. Travelling salesman problem, TSP) to zagadnienie optymalizacyjne, polegające na znalezieniu minimalnego cyklu Hamiltona w pełnym grafie ważonym, gdzie:

Cykl Hamiltona – to taki cykl w grafie, w którym każdy wierzchołek grafu odwiedzany jest dokładnie raz (oprócz pierwszego wierzchołka)

Graf Ważony Pełny – struktura składająca się ze zbioru wierzchołków oraz zbioru krawędzi. Każdej krawędzi przypisana jest pewna wartość liczbowa.

Symulowane wyżarzanie jest określane jako najstarszy rodzaj metaheurystyki (czyli ogólnego algorytmu do rozwiązywania problemów obliczeniowych). Została ona wprowadzona niezależnie w latach: 1970, 1979, 1981, 1985, jednakże w 1983 r. (S. Kirkpatrick, D. Gelett, M. P. Vecchi) podejście to zostało wykorzystane do rozwiązania problemu Komiwojażera oraz zaproponowana została jego dzisiejsza nazwa.

Cechą charakterystyczną metaheurystyki symulowanego wyżarzania jest występowanie parametru sterującego zwanego temperaturą, który maleje w trakcie wykonywania algorytmu. Im wyższą wartość ma ten parametr, tym bardziej chaotyczne mogą być zmiany. Podejście to jest inspirowane zjawiskami obserwowanymi w metalurgii – im większa temperatura metalu, tym bardziej jest on plastyczny. Szerszy opis zastosowanej metody znajduje się w *punkcie 2*, natomiast opis działania zaimplementowanego algorytmu w *punkcie 3*.

Przy wykorzystaniu algorytmu symulowanego wyżarzania nie jesteśmy w stanie przewidzieć dokładnej złożoności obliczeniowej, lecz możemy postawić pewne oczekiwania wobec efektów jego działania. Powinien on umożliwić nam rozwiązanie problemu komiwojażera w dużo szybszym czasie niż dla algorytmów: naiwnego i Helda-Karpa, jednakże kosztem dokładności rozwiązania, ponieważ bazuje on na niedokładnym przeszukiwaniu przestrzeni rozwiązań z wykorzystaniem parametrów losowych.

Spodziewamy się, że złożoność pamięciowa nie będzie stanowić przeszkody w badaniu działania algorytmu.

Oczekiwany jest możliwość wykonania algorytmu dla instancji od kilkudziesięciu do kilkuset elementów w czasie do kilkudziesięciu minut, z zachowaniem dokładności do max. 30% różnicy względem najlepszego znanego rozwiązania.

2. Opis metody

Symulowane wyżarzanie wykorzystuje metodę iteracyjną. Najpierw losowane jest pewne rozwiązanie, a następnie jest ono w kolejnych krokach modyfikowane. Jeśli w danym kroku uzyskamy lepsze rozwiązanie to zastępujemy nim najlepsze znane do tej pory rozwiązanie problemu. Istotną cechą symulowanego wyżarzania jest jednak to, że z pewnym prawdopodobieństwem może być również zaakceptowane rozwiązanie gorsze (ma to na celu umożliwienie wyjścia z maksimum lokalnego). Prawdopodobieństwo przyjęcia gorszego rozwiązania wyrażone jest wzorem (rozkład Boltzmanna):

$$e^{(f(X) - f(X')) / T}$$

Gdzie:

X jest poprzednim rozwiązaniem,

X' jest nowym rozwiązaniem,

f jest funkcją oceny jakości

Im wyższa wartość $f(X)$, tym lepsze rozwiązanie. Ze wzoru można zauważyć, że prawdopodobieństwo przyjęcia gorszego rozwiązania spada wraz ze spadkiem temperatury i wzrostem różnicy jakości obu rozwiązań.

Przed rozpoczęciem działania algorytmu należy ustalić:

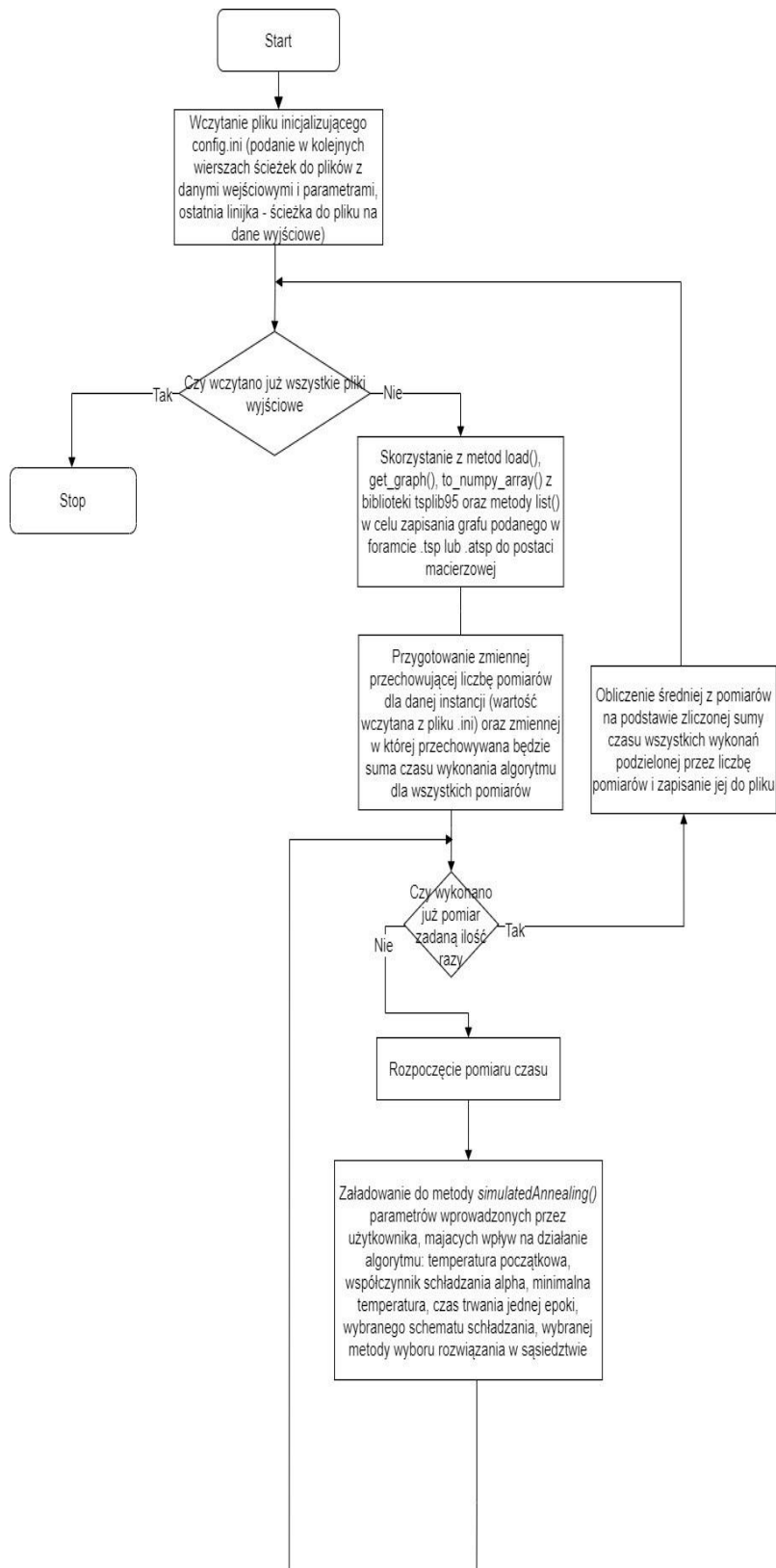
- Początkową wartość temperatury T
- Sposób obniżania temperatury – w tym celu można wykorzystać wybrany schemat chłodzenia. Jednym z możliwych do użycia jest (zaimplementowany w algorytmie opisanym na schemacie blokowym w *punkcie 3*) schemat geometryczny. Jego działanie przedstawione jest na *rysunku 1* w *punkcie 3*. Polega ono na mnożeniu wartości aktualnej temperatury przez wybrany współczynnik, np. 0.99.
- Liczbę prób przeprowadzanych w ramach jednej epoki (z tą samą temperaturą)
- Sposób wyboru nowego rozwiązania w ramach pojedynczej próby. Nowe rozwiązanie powinno znajdować się w pobliżu aktualnego. Przy wyznaczaniu nowego rozwiązania można wziąć pod uwagę aktualną temperaturę. – im wyższa, tym bardziej nowe i aktualne rozwiązanie mogą się od siebie różnić.
- Warunek stopu – może to być np. osiągnięcie określonej liczby epok lub odpowiednio mała zmiana rozwiązania w trakcie ostatnio wykonanych epok. W zaimplementowanym algorytmie warunkiem stopu jest osiągnięcie temperatury końcowej.

Temperatura:

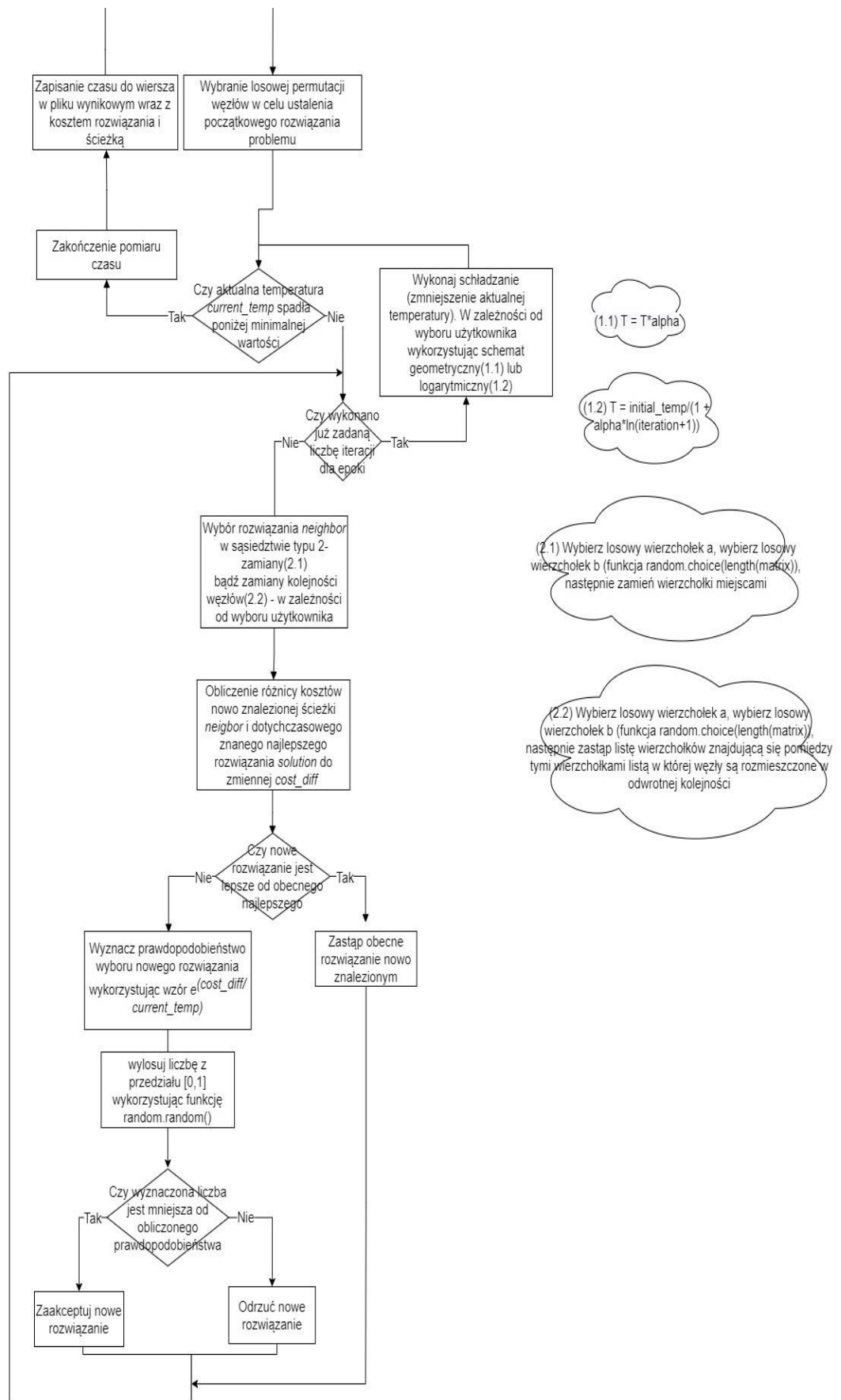
- Steruje wyborem kolejnych przybliżeń, gdy propozycja nowego rozwiązania jest gorsza od starego
- Jeżeli jej wartość jest wysoka to prawdopodobieństwo wyboru gorszego rozwiązania jest duże
- Jeżeli wartość parametru jest niska to prawdopodobieństwo wyboru gorszego rozwiązania jest małe
- W trakcie działania algorytmu, wartość parametru jest stale obniżana – w efekcie szansa wyboru gorszego rozwiązania maleje
- Ostatnim etapem jest stabilizacja rozwiązania, gdzie żadne zmiany nie są akceptowane

Algorytm opisany w *punkcie 3* działa w oparciu o metodę *greedy* (zachłanną)

3. Opis algorytmu



Rysunek 1 – Pierwsza część schematu blokowego opisującego algorytm rozwiązujący problem komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania



Rysunek 2 – Druga część schematu blokowego rozwiązujący problem komiwożażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania

4. Dane testowe

Dane testowe są wczytywane zgodnie z procedurą przedstawioną na *rysunku 1*.

Do sprawdzenia poprawności działania algorytmu oraz do wykonania badań wybrano następujący zestaw instancji, dla których podano również najlepsze znane rozwiązanie:

Dane pochodzące ze strony Dr. Jarosława Mierzwy

<http://jaroslaw.mierzwa.staff.iiar.pwr.wroc.pl/pea-stud/tsp/>

tsp_10.txt - 212

tsp_12.txt - 264

tsp_13.txt - 269

tsp_15.txt - 291

Dane z biblioteki tsp-lib

<http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsp/index.html>

burma14.tsp - 3323

gr17.tsp - 2085

gr21.tsp - 2707

gr24.tsp - 1272

gr48.tsp - 5046

gr96.tsp - 55209

kroA100.tsp - 21281

kroB150.tsp - 26130

kroB200.tsp - 29437

a280.tsp - 2579

lin318.tsp - 42029

fl417.tsp - 11861

pa561.tsp - 2763

5. Procedura badawcza

Należało zbadać zależność czasu rozwiązania problemu od wielkości instancji. Zdefiniowane zostały następujące parametry mające zasadniczy wpływ na czas wykonania oraz dokładność znalezionej rozwiązania:

- Temperatura początkowa
- Współczynnik Alpha – wykorzystywany do zmniejszania aktualnej temperatury
- Temperatura końcowa – określa jak długo algorytm ma się wykonywać; dążymy do niej pomniejszając temperaturę aktualną z użyciem współczynnika *alpha*
- Długość epoki – określa jak długo szukamy rozwiązań w ramach stałej wartości temperatury

Procedura badawcza polegała na uruchomieniu programu sterowanego plikiem konfiguracyjnym *config.ini*

Przykładowa zawartość gotowego pliku:

```
Nazwa pliku, Liczba testów, Optymalny koszt, Optymalna ścieżka, temperatura
początkowa, temperatura końcowa, długość epoki, współczynnik alpha, sposób wyboru
rozw. w sąsiedztwie (1: 2-zamiana, 2: zamiana kolejności węzłów), schemat chłodzenia
(1: geometryczny, 2: logarytmiczny)
Gr17.tsp 3 10 2085 [] 100000 0.0000001 1 0.9999 1 1
Gr24.tsp 2 10 1272 [] 100000 0.0000001 1 0.9999 2 1
wyniki_gr17_24.csv
```

Do pliku wyjściowego zapisywany był czas wykonania, otrzymane rozwiązanie (koszt ścieżki) oraz ścieżka (numery kolejnych odwiedzanych węzłów). Zapisywane są również wykorzystane parametry dla badanej instancji oraz procentowa wartość określająca o ile obliczona wartość kosztu odbiega od podanej optymalnej. Plik wyjściowy może być zapisany w wybranym formacie: *txt* lub *csv*. Poniżej przedstawiono zawartość pliku wyjściowego dla przykładowych pomiarów.

Gr17.tsp

```
0.344444284439086914 2185.0 19.28% [16, 7, 6, 12, 3, 0, 15, 11, 8, 13, 14, 9, 1, 4, 10, 2, 5]
0.09873604774475098 2136.0 21.09% [3, 8, 11, 15, 0, 7, 5, 2, 10, 4, 1, 9, 14, 13, 16, 6, 12]
0.15358996391296387 2123.0 21.57% [7, 5, 2, 10, 4, 1, 9, 14, 13, 16, 0, 15, 11, 8, 3, 12, 6]
```

Uśredniony wynik pomiaru dla 3 instancji: 0.19892295201619467

Gr24.tsp

```
3.2408809661865234 1272.0 0.0% [0, 11, 3, 22, 8, 12, 13, 19, 1, 14, 18, 17, 21, 16, 9, 4, 20, 7, 23, 5, 6,
2, 10, 15]
```

```
2.6267919540405273 1272.0 0.0% [5, 6, 2, 10, 15, 0, 11, 3, 22, 8, 12, 13, 19, 1, 14, 18, 17, 21, 16, 9, 4,
20, 7, 23]
```

Uśredniony wynik pomiaru dla 2 instancji: 3.0920228958129883

Pomiar czasu został wykonany za pomocą funkcji `time()` z modułu `time` języka Python. Funkcja ta zwraca czas POSIX, czyli liczbę sekund, które upłynęły od 1 stycznia 1970 r. Procedura pomiaru czasu składa się z dwukrotnego wywołania tejże funkcji – przed rozpoczęciem wykonywania algorytmu oraz zaraz po jego ukończeniu. Wynikiem pomiaru czasu jest różnica tych wywołań.

Pomiar czasu odbywa się dla każdego wykonania funkcji rozwiązującej problem komiwojażera. Każdy pojedynczy wynik pomiar zapisywany jest do pliku wyjściowego. Czasy wszystkich wywołań są sumowane do jednej zmiennej, a gdy zakończy się pętla sprawdzająca jak wiele razy problem ma być rozwiązany suma czasów dzielona jest przez liczbę wywołań dzięki czemu uzyskujemy średnią z pomiarów, która zapisywana jest do wynikowego pliku `.csv` lub `.txt`.

Pomiarów dokonano z wykorzystaniem interpretera języka Python o nazwie *PyPy* w celu zwiększenia wydajności algorytmu. Interpreter ten okazał się być 5x – 10x szybszy w stosunku do domyślnego rozwiązania *cpython*.

Pomiarów dokonano na laptopie Lenovo Legion 15 o specyfikacji:

Pamięć Ram: 16GB DDR4

Procesor: Intel Core i5 8300H 4,0GHz (4 rdzenie, 8 wątków)

Dysk: SSD 512gb nvme

Karta graficzna: GeForce GTX 1050Ti

6. Wyniki

Wyniki zostały zgromadzone w osobnych katalogach z podziałem na cel badania. Wyniki opracowane zostały w programie MS Excel.

1) Wyniki zgromadzone w celu pomiaru wydajności algorytmu

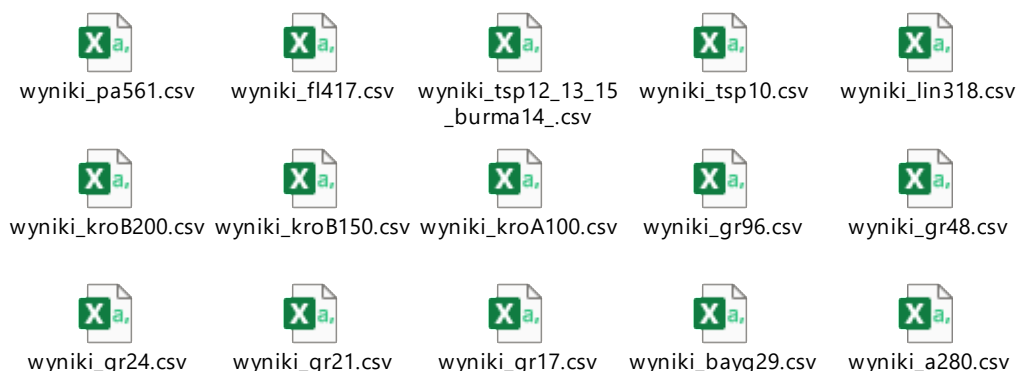


Tabela 1: Wyniki pomiaru czasu rozwiązania problemu Komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]	alpha
tsp10.txt	0.09	212	212	0	0.999
tsp12.txt	0.11	264	264	0	0.999
tsp13.txt	0.1	269	269	0	0.999
burma14.tsp	0.24	3323	3323	0	0.999
tsp15.txt	0.11	291	291	0	0.999
gr17.tsp	0.23	208	2085	0	0.999
gr21.tsp	0.25	2707	2707	0	0.999
gr24.tsp	2.014	1272	1272	0	0.999
gr48.tsp	4.32	5097	5046	1.01	0.999
gr96.tsp	27.13	59177	55209	7.2	0.999
kroA100.tsp	19.12	22139	21281	4.03	0.999
kroB150.tsp	53.6	27891	26130	6.74	0.999
kroB200.tsp	105	31744	29437	7.84	0.9996
a280.tsp	170.1	2817	2579	9.23	0.9996
lin318.tsp	112	47911	42029	14	0.9996
fl417.tsp	156.8	13592	11861	14.6	0.9996

Dla instancji *pa561* wartość błędu wyniosła 34.42%, dlatego pomiar ten nie został już uwzględniony w tabeli oraz na wykresie.

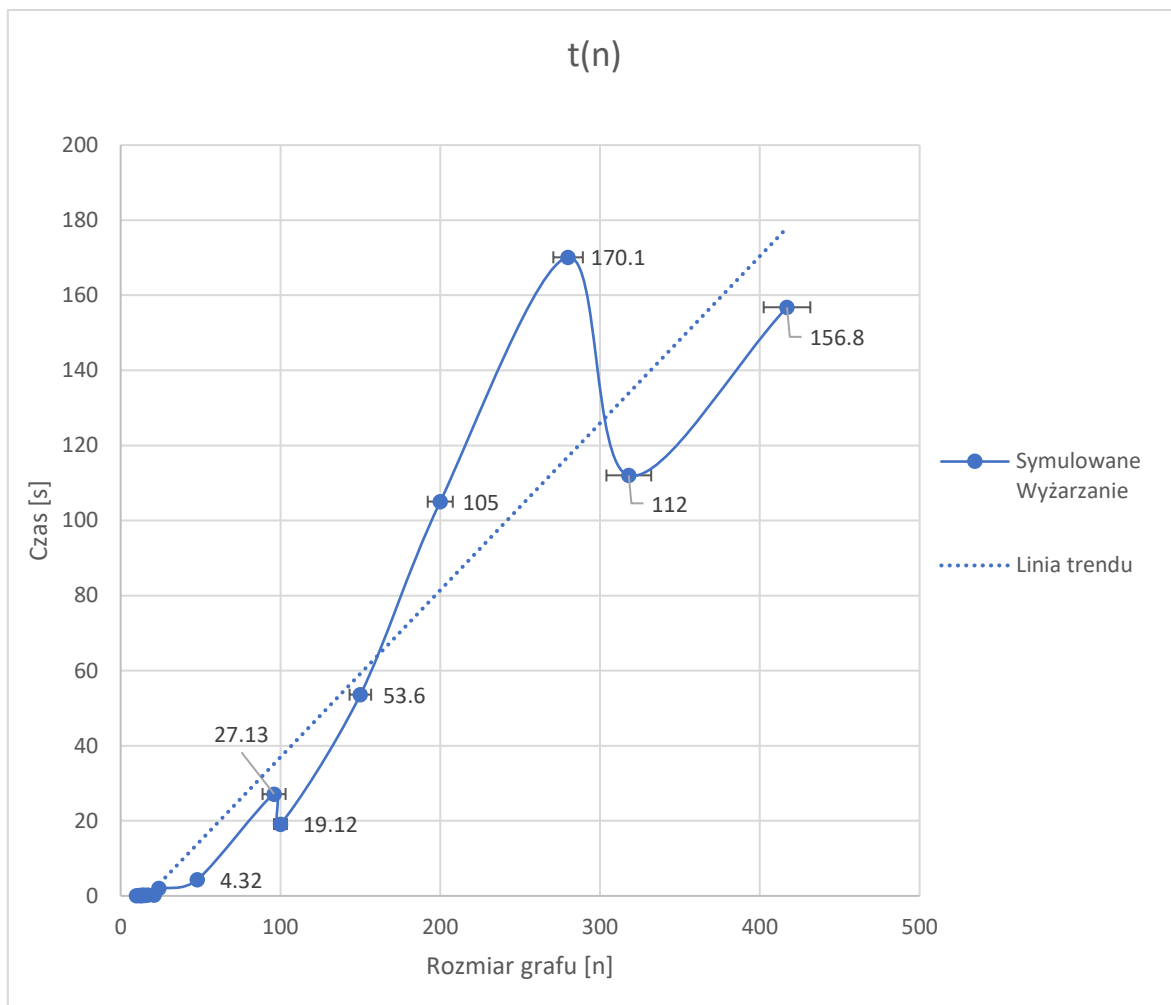
Dla powyższych pomiarów zastąpiono warunek stopu spadku temperatury do określonej wartości wykorzystując warunki:

- Wybranie takiego samego rozwiązania dla określonej liczby kroków (ustawiono 10000)
- Wybranie rozwiązania o tej samej wartości określoną liczbę razy (ustawiono 100000)

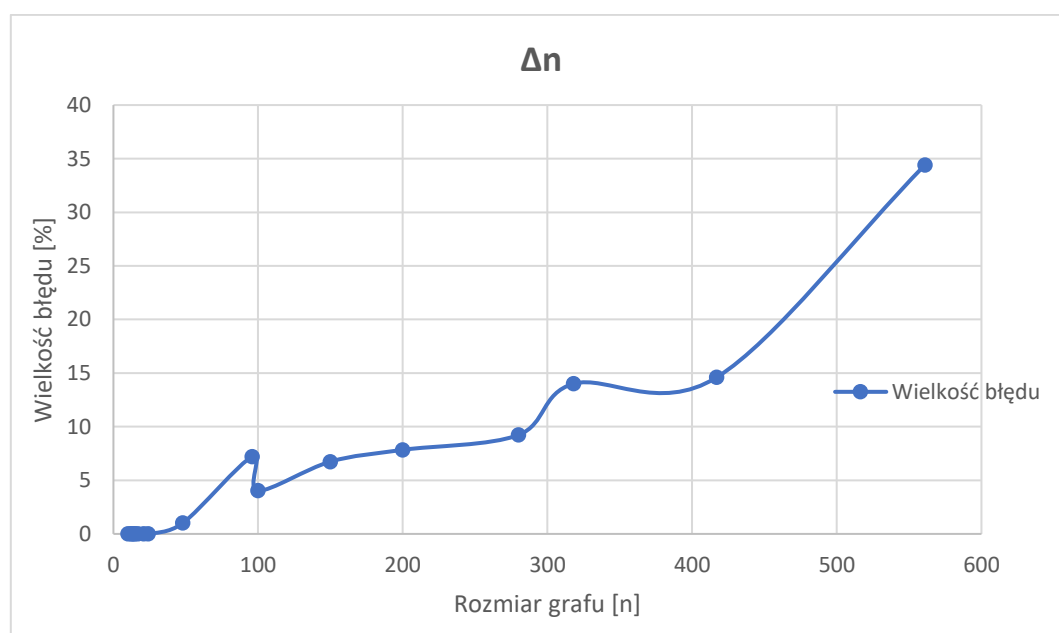
Dla wszystkich pomiarów wybrano temperaturę początkową = 100000

Wybrano długość epoki = 1

Wykorzystano metodę 2-zamiany



Rysunek 3: Wpływ wielkości instancji na czas uzyskania rozwiązania problemu Komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania



Rysunek 4: Wpływ wielkości instancji na wielkość błędu względnego (wyrażonego względem najlepszego znanego rozwiązania danego problemu) w rozwiązywaniu problemu Komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania

2) Wyniki zgromadzone w celu porównania wyboru rozwiązań w sąsiedztwie: 2-zamiana i inwersja wierzchołków



wyniki_inwersja.csv wyniki_2-zamiana.csv

Tabela 2: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania (wybór rozwiązania w sąsiedztwie: 2-zamiana)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]
gr17.tsp	1.6	2707	2085	0.24
gr21.tsp	1.58	2801	2707	3.47
gr24.tsp	1.54	1286	1272	1.1
gr48.tsp	2.92	5242	5046	3.88
gr96.tsp	12.21	63330	55209	14.71

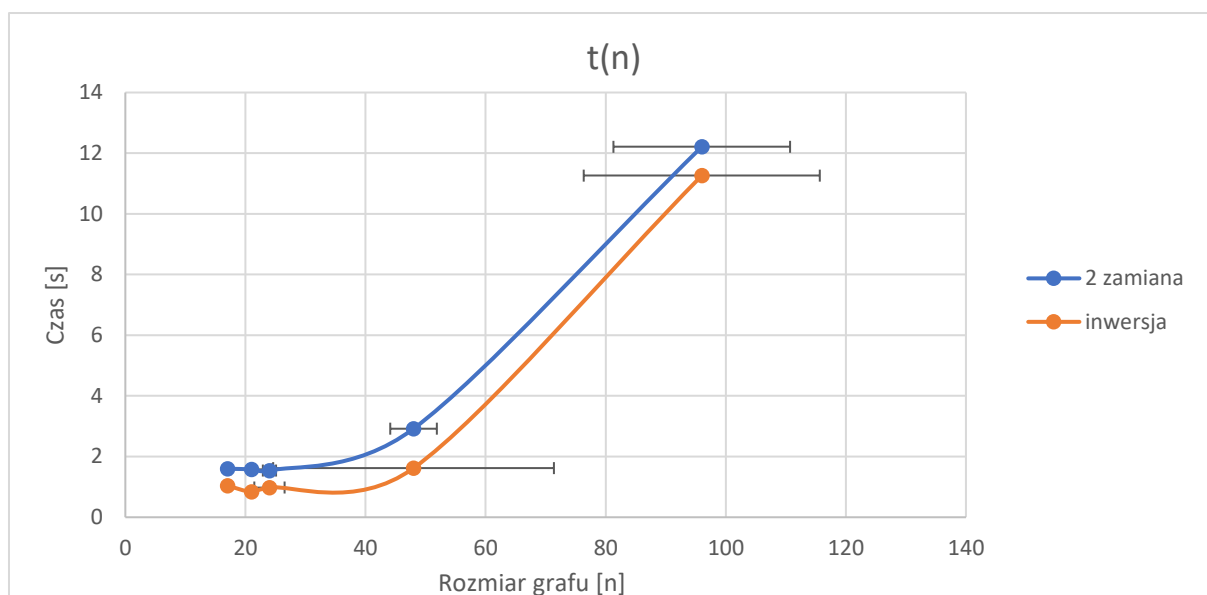
Tabela 3: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania (wybór rozwiązania w sąsiedztwie: inwersja wierzchołków)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]
gr17.tsp	1.04	2085	2085	0
gr21.tsp	0.84	2707	2707	0
gr24.tsp	0.98	1304	1272	2.52
gr48.tsp	1.62	5046	5046	23.38
gr96.tsp	11.26	66063	55209	19.66

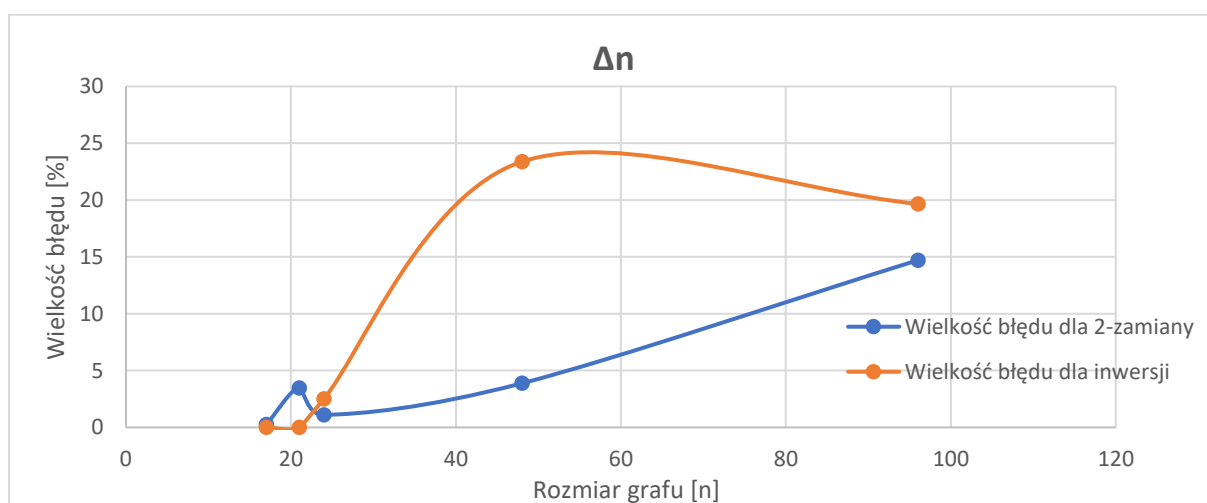
Dla wszystkich z powyższych pomiarów stałe były parametry:

- temperatura początkowa = 100000
- współczynnik chłodzenia = 0.999

Wykorzystano geometryczny schemat chłodzenia.



Rysunek 5: Porównanie wyboru rozwiązania w sąsiedztwie z wykorzystaniem 2-zamiany i inwersji przy rozwiązywaniu problemu Komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania



Rysunek 6: Porównanie wielkości błędu względnego w zależności od wykorzystanej metody wyboru rozwiązania w sąsiedztwie oraz wielkości instancji przy rozwiązywaniu problemu Komiwojażera z wykorzystaniem algorytmu symulowanego wyżarzania

3) Wyniki zgromadzone w celu porównania schematów chłodzenia

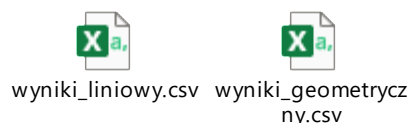


Tabela 4: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania (geometryczny schemat chłodzenia)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]
gr17.tsp	6.45	2085	2085	0
gr21.tsp	6.99	2707	2707	0
gr24.tsp	7.51	1272	1272	0
gr48.tsp	11.44	5125	5046	1.57
gr96.tsp	48.4	56891	55209	3.05

Do zmniejszania temperatury zastosowano współczynnik $\alpha = 0.9999$

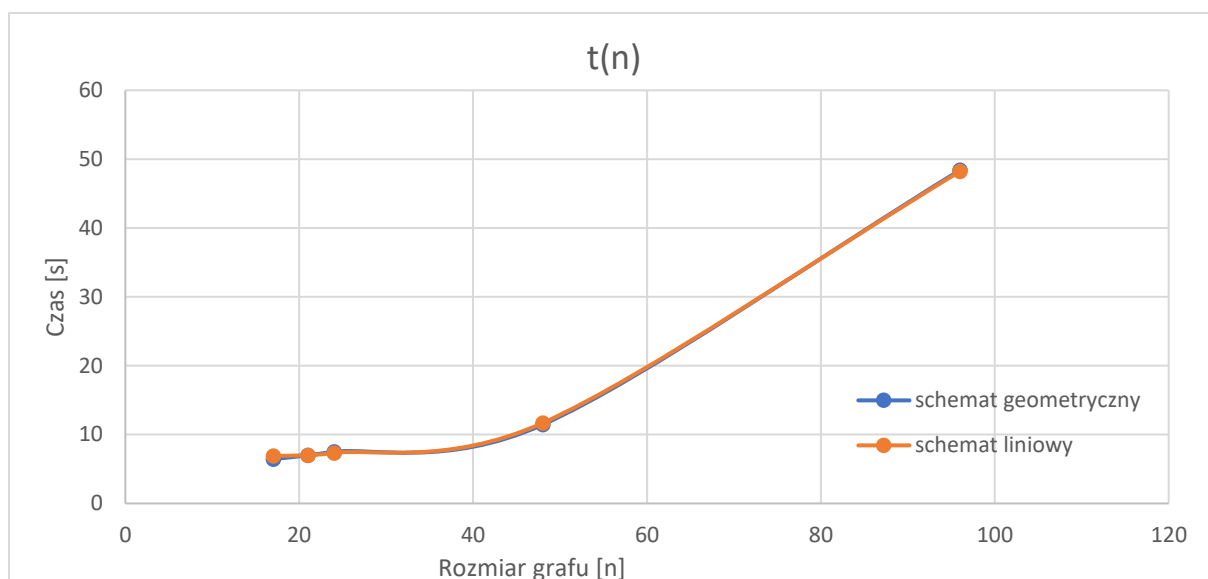
Tabela 5: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania (liniowy schemat chłodzenia)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]
gr17.tsp	6.91	2085	2085	0
gr21.tsp	7.01	2707	2707	0
gr24.tsp	7.34	1272	1272	0
gr48.tsp	11.68	5846	5046	15.85
gr96.tsp	48.23	404088	55209	631.92

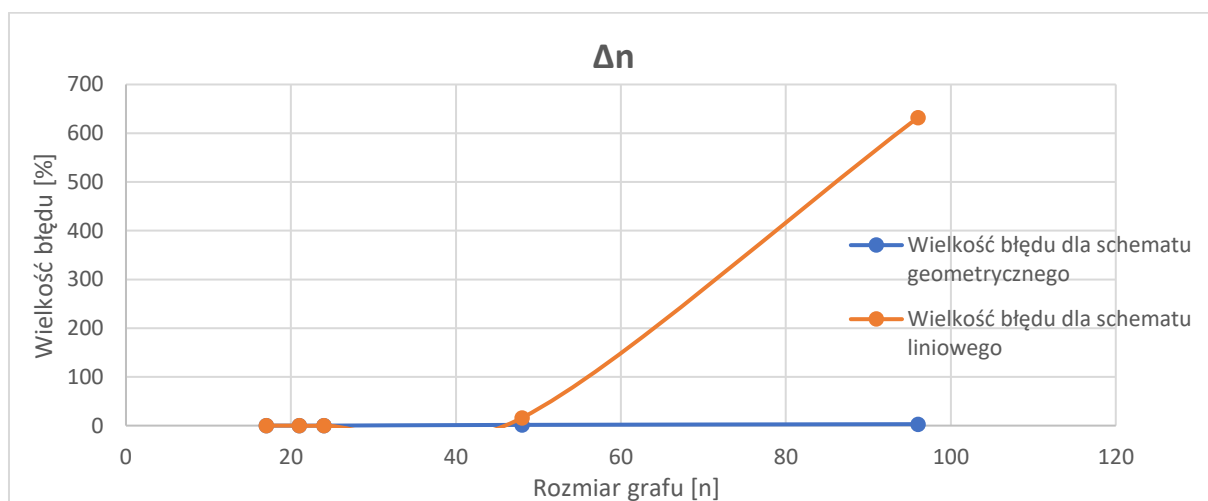
Do zmniejszania temperatury zastosowano współczynnik $\alpha = 100000$ (należało zastosować zdecydowanie większy współczynnik niż dla schematu geometrycznego, ponieważ nie bylibyśmy w stanie uzyskać dokładnych wyników w zadawalającym czasie)

Każdy pomiar został wykonany dla 1000000 iteracji pętli głównej, z tego powodu czasy wykonania algorytmu są do siebie bardzo zbliżone – krzywe na *rysunku 7* nakładają się na siebie. Taki pomiar miał na celu porównanie błędów pomiaru jakie uzyskamy dla obu metod.

Dla małych instancji (do 24 wierzchołków) algorytm w obu wersjach zadziałał bezbłędnie. Dla 48 węzłów różnica wynosiła już ok. 14 pkt. Procentowych. W przypadku instancji o 96 węzłach wynik pomiaru dla algorytmu wykorzystującego liniowy schemat schładzania stał się nieakceptowalny. Prawdopodobnie wydłużenie czasu pracy algorytmu lub jeszcze dokładniejsze dostrojenie wartości współczynnika schładzania pozwoliłoby na poprawienie tego wyniku.



Rysunek 7: Porównanie czasów wykonania algorytmu dla geometrycznego i liniowego schematu schładzania przy rozwiązywaniu problemu Komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania



Rysunek 8: Porównanie wielkości błędów względnych uzyskanych dla geometrycznego i liniowego schematu schładzania przy rozwiązywaniu problemu Komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania

4) Wyniki zgromadzone w celu porównania wpływu temperatury początkowej na wynik działania algorytmu



Tabela 6: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania dla instancji 17-elementowej (zmienna temperatura początkowa)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]	Temperatura	
gr17.tsp	6.93	2090	2085	0.24	100	17
gr17.tsp	5.42	2707	2085	0.24	1000	21
gr17.tsp	5.81	1272	2085	0	10000	24
gr17.tsp	6.09	5125	2085	0	100000	48

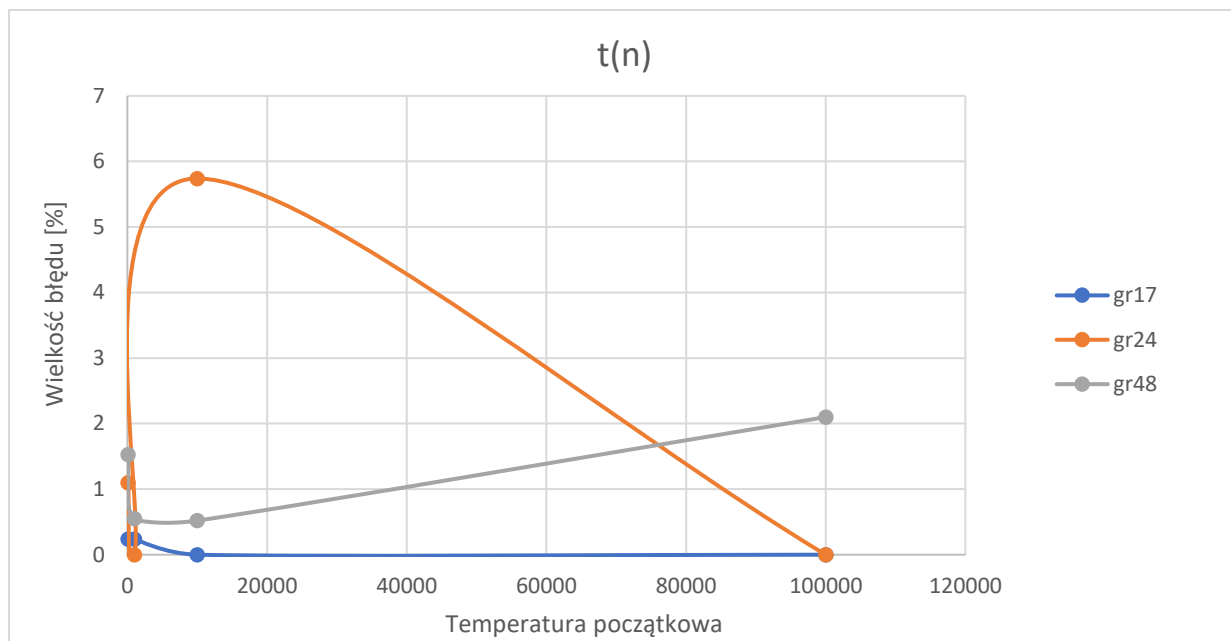
Tabela 7: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania dla instancji 24-elementowej (zmienna temperatura początkowa)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]	Temperatura	
gr24.tsp	7.92	1286	1272	1.1	100	17
gr24.tsp	7.24	1272	1272	0	1000	21
gr24.tsp	6.77	1345	1272	5.74	10000	24
gr24.tsp	6.89	1272	1272	0	100000	48

Tabela 8: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania dla instancji 48-elementowej (zmienna temperatura początkowa)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]	Temperatura	
gr48.tsp	13.31	5123	5046	1.53	100	17
gr48.tsp	12.59	5074	5046	0.55	1000	21
gr48.tsp	12.34	5072	5046	0.52	10000	24
gr48.tsp	11.59	5152	5046	2.1	100000	48

Badania przeprowadzone zostały dla 1000000 iteracji pętli głównej (dla jednokrotnego rozwiązywania problemu)



Rysunek 9: Porównanie wielkości błędów względnych uzyskanych dla instancji wielkości 17, 24, 48 wierzchołków w zależności od temperatury początkowej przy rozwiązywaniu problemu Komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania .

- 5) Wyniki zgromadzone w celu porównania wpływu współczynnika alpha (dla geometrycznego schematu schładzania) na wynik działania algorytmu

  
 współczynnikAlpha_współczynnikAlpha_współczynnikAlpha
 _gr24.csv _gr21.csv _gr17.csv

Tabela 9: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania dla instancji 17-elementowej (zmienny współczynnik chłodzenia)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]	Wsp. Chłodzenia
gr17.tsp	0.04	3174	2085	52.23	0.85
gr17.tsp	0.03	3352	2085	60.77	0.9
gr17.tsp	0.16	2168	2085	3.98	0.99
gr17.tsp	0.4	2090	2085	0.24	0.999
gr17.tsp	1.45	2090	2085	0.24	0.9999

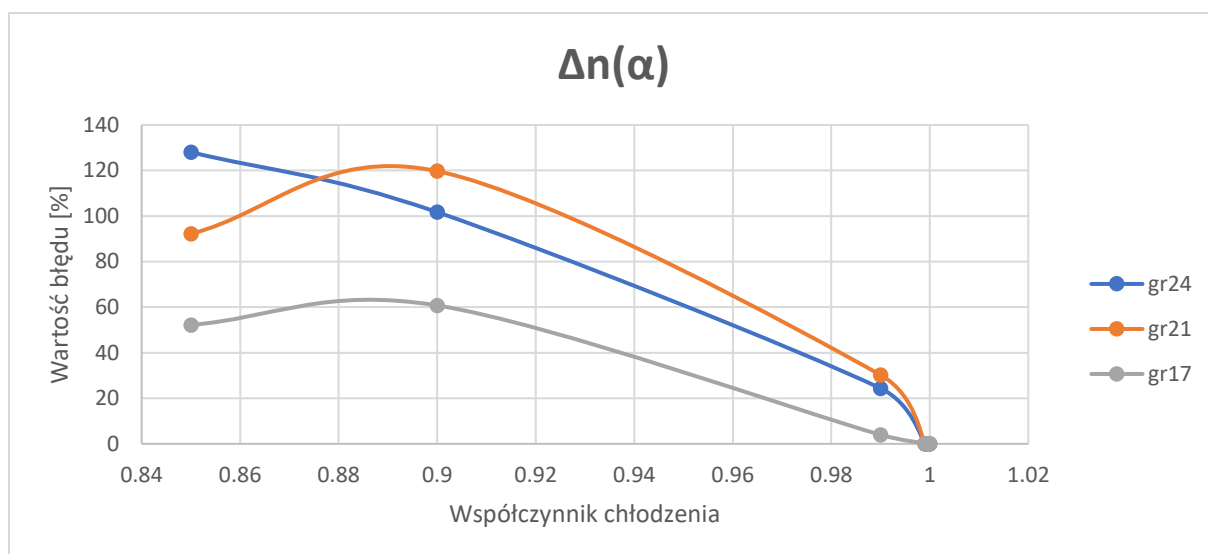
Tabela 10: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania dla instancji 21-elementowej (zmienny współczynnik chłodzenia)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]	Wsp. Chłodzenia
gr21.tsp	0.05	5203	2707	92.21	0.85
gr21.tsp	0.04	5948	2707	119.73	0.9
gr21.tsp	0.12	3525	2707	30.25	0.99
gr21.tsp	0.45	2707	2707	0	0.999
gr21.tsp	1.64	2707	2707	0	0.9999

Tabela 11: Wyniki pomiarów czasu rozwiązania problemu komiwojażera wykorzystując metodę symulowanego wyżarzania dla instancji 24-elementowej (zmienny współczynnik chłodzenia)

Instancja	Czas [s]	Wynik	Wynik Optymalny	Błąd [%]	Wsp. Chłodzenia
gr24.tsp	0.05	2901	1272	128.07	0.85
gr24.tsp	0.04	2566	1272	101.73	0.9
gr24.tsp	0.12	1581	1272	24.37	0.99
gr24.tsp	0.45	1272	1272	0	0.999
gr24.tsp	1.64	1272	1272	0	0.9999

Jako warunek stopu dla wybrana została temperatura minimalna = 0.0000001



Rysunek 10: Porównanie wielkości błędów względnych uzyskanych dla instancji o wielkości: 17, 21, 24 wierzchołków przy rozwiązywaniu problemu Komiwojażera z wykorzystaniem metody symulowanego wyżarzania w zależności od współczynnika chłodzenia.

Na podstawie *rysunku 10* możemy zaobserwować zasadniczy wpływ współczynnika chłodzenia dla wyników działania algorytmu. Wraz ze zbliżaniem jego wartości do wartości równej 1 rośnie dokładność uzyskiwanego rozwiązania. Dla wszystkich z badanych instancji (*gr17*, *gr21*, *gr24*) zwiększenie wartości współczynnika α pozwoliło na uzyskanie wyniku optymalnego. Dla wartości minimalnej (0,85) wyniki są bardzo niedokładne, nawet dla małej instancji problemu (*gr17*) – nieakceptowalna wartość błędu równa 52,23%. Zwiększanie współczynnika α do wartości 0.9 również nie przyczynia się do zadawalającej poprawy wyników (*gr24*), natomiast dla instancji *gr17*, *gr21* uzyskano gorsze rezultaty. Dopiero dla wartości wsp. $\alpha = 0.99$ uzyskujemy akceptowalne wyniki (błąd maksymalny na poziomie 30%). Warto również zwrócić uwagę na fakt że dla mniejszej instancji (*gr17*) dla $\alpha = 0.99$ już uzyskujemy wynik zbliżony do optymalnego, lecz dla instancji *gr21*, *gr24* błąd wciąż jest wysoki. Można na tej podstawie wyciągnąć wniosek, że wraz ze wzrostem wielkości instancji, dla której rozwiązujemy problem warto jest zwiększać współczynnik α w celu poprawy jakości rozwiązania. Wadą która się pojawia jest czas wykonania algorytmu, który rośnie. Z tego powodu należy dobrać współczynnik indywidualnie w zależności od potrzeb.

8. Analiza wyników i wnioski

Najbardziej interesujące nas wyniki badań z perspektywy oceny wydajności algorytmu znajdują się w *tabeli 1*, natomiast zostały one zwizualizowane na wykresach przedstawionych na *rysunku 3* i *rysunku 4*. Skorzystanie z heurystyki symulowanego wyżarzania pozwoliło mi na rozwiązanie problemu dla instancji o maksymalnej wielkości 417 z błędem 14.6%. Dla większej instancji (561) błąd przekroczył granicę 30%. Bardzo pozytywnie wypada czas wykonania algorytmu – możemy rozwiązać problem dla instancji większych o rząd wielkości względem algorytmu Helda-Karpa w kilkukrotnie krótszym czasie. Wynika to z faktu, że symulowane wyżarzanie nie przegląda całej przestrzeni rozwiązań. Na *rysunku 3* możemy również zauważyć, że czas wykonania algorytmu nie musi rosnąć wraz ze wzrostem wielkości instancji. Wpływ na ten stan rzeczy poza specyfiką (trudnością) rozwiązywania specyficznego problemu ma również odpowiednie dobranie parametrów początkowych.

Na podstawie przeprowadzonych badań możemy zauważyć, że dobór parametrów algorytmu przy rozwiązywaniu problemu komiwojażera ma kluczowy wpływ na jego działanie. Najbardziej istotnym parametrem z punktu widzenia użytkownika okazał się być współczynnik α , ponieważ jego zmiana skutkuje najbardziej widocznymi różnicami w czasie i dokładności wykonania algorytmu.

Temperatura początkowa jest również bardzo istotnym parametrem mającym wpływ na sposób działania algorytmu. Na podstawie *rysunku 9* zauważamy, że wraz ze wzrostem wielkości badanej instancji rośnie znaczenie odpowiedniego dobrania wartości temperatury początkowej.

Rysunek 8 pokazuje, że dla większych instancji problemu wykorzystanie liniowego schematu schładzania niesie za sobą duży błąd pomiaru (z zachowaniem czasu wykonania porównywalnego z schematem geometrycznym)

Bardzo ciekawe różnice w wykonaniu algorytmu wynikły z wykorzystania różnych sposobów wyboru rozwiązania w sąsiedztwie. *Tabele 2 i 3* oraz *rysunki 5 i 6* pokazują, że 2-zamiana pozwala na uzyskanie dokładniejszych rozwiązań kosztem dłuższego czasu wykonania względem inwersji.

Projektowanie Efektywnych Algorytmów

Projekt

20/12/2022

259126 Maciej Fras

Dodatek do sprawozdania 3 – Brute Force, algorytm Held-Karpi i Symulowane wyżarzanie

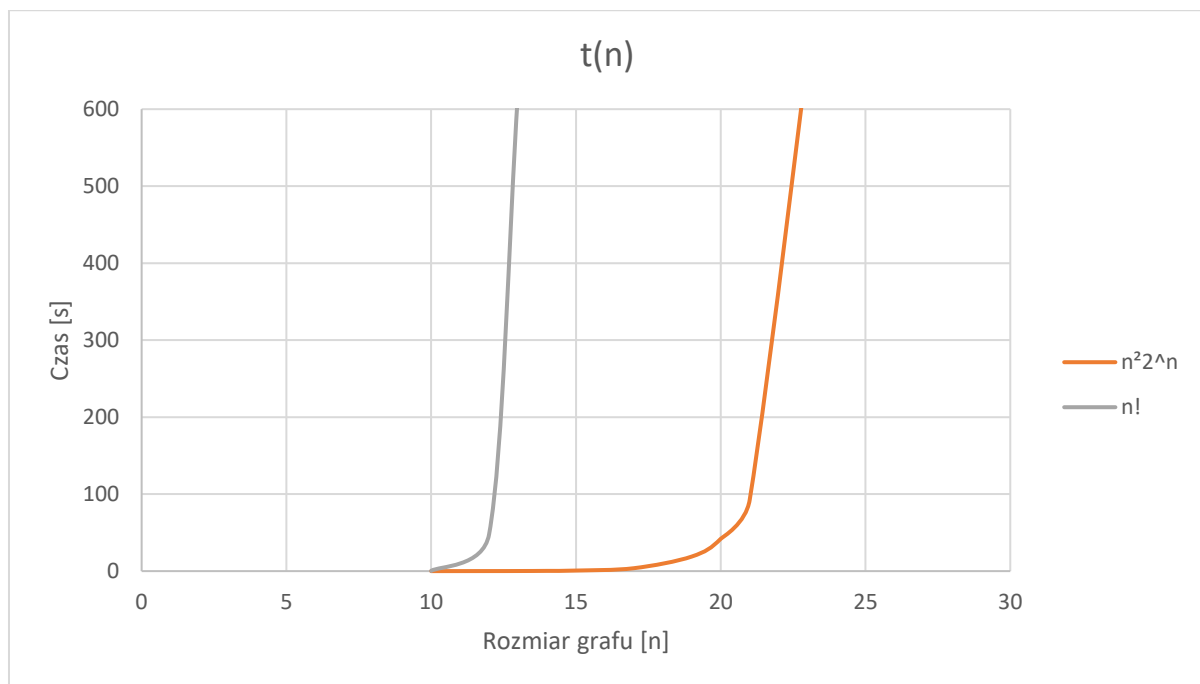
1. Oszacowanie teoretycznej różnicy czasu wykonania algorytmu napisanego z wykorzystaniem algorytmu Held-Karpi oraz metody brute force

Oszacowanie wielokrotności różnicy czasu rozwiązywania problemu dla instancji 13-elementowej:

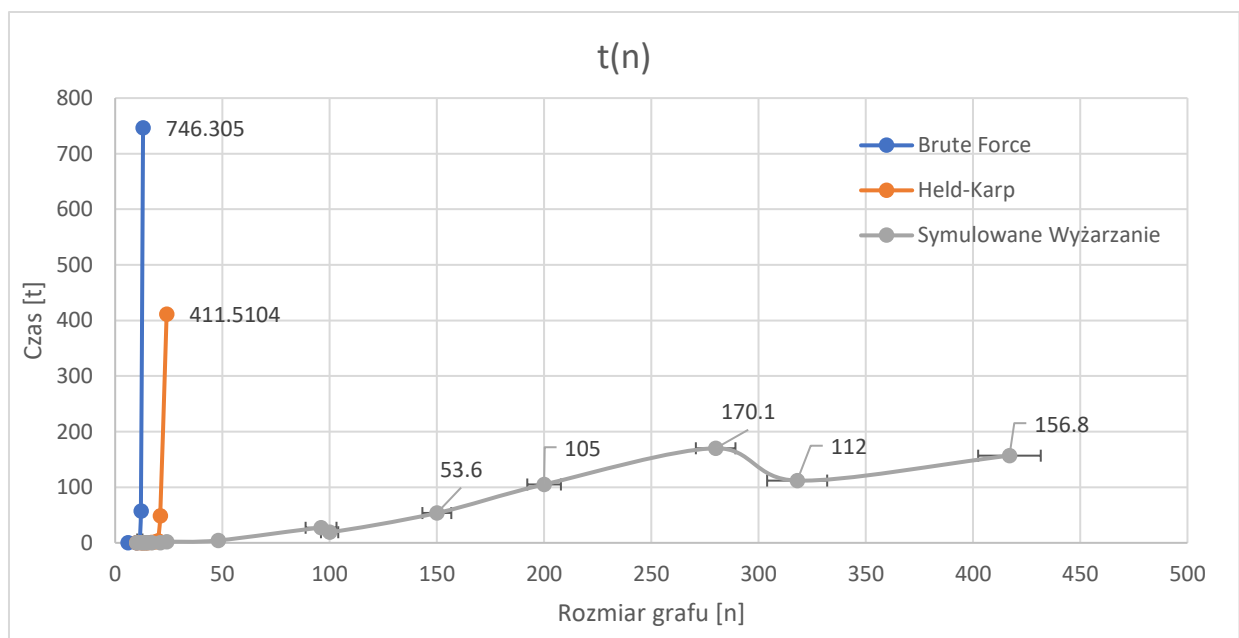
$$\Delta = \frac{n!}{2^n * n^2} = \frac{13!}{2^{13} * 13^2} = 4497.83653 \approx 4500$$

Zatem dla takiej instancji możemy spodziewać się rozwiązania problemu w czasie krótszym rzędu 4500 razy wykorzystując algorytm Held-Karpi w stosunku do algorytmu wykorzystującego metodę brute force. Jest to oczywiście oszacowanie w pełni teoretyczne, na które wpływ mogą mieć zakłócenia takie jak niedokładne zaimplementowanie algorytmu, czy też specyfika sprzętu, na którym rozwiązujemy problem, niemniej jednak może ono być przydatne w celu dodatkowego porównania obu sprawdzanych metod.

2. Porównanie wyników działania algorytmów



Rysunek 1 - porównanie złożoności obliczeniowych algorytmu Helda Karpa oraz Brute Force pomnożonych przez współczynnik równy 10^{-7}



Rysunek 2 - porównanie czasu wykonania algorytmów Brute Force, Helda Karpa i Symulowanego Wyżarzania dla różnych instancji problemu

Brute Force i algorytm Helda-Karpa

Na podstawie wykresów możemy zaobserwować wzrost wydajności algorytmu *Helda-Karpa* względem algorytmu wykorzystującego metodę *Brute Force*. Nagły wzrost czasu rozwiązania problemu w zależności od wielkości instancji w przypadku algorytmu Helda Karpa następuje później o 10 instancji w stosunku do *Brute Force*. Krzywa dla *Helda Karpa* jest łagodniej nachylona niż dla *Brute Force*.

Charakterystyka wykresu na *rysunku 2* przedstawiającym wyniki pomiaru jest zbliżona do wykresu porównującego teoretyczne złożoności obliczeniowe z *rysunku 1*. Ze względu na wyczerpanie dostępnej pamięci RAM w komputerze nie udało mi się wykonać pomyślnego pomiaru dla instancji 29 elementowej, który pozwoliłby jeszcze dokładniej porównać wyniki rzeczywiste z teoretycznymi.

Dla instancji 13 elementowej, która jest największą wspólną badaną instancją dla obu podejść wykonane zostanie porównanie względem teoretycznych złożoności obliczeniowych.

Obliczenie rzeczywistej różnicy wielokrotności czasu wykonania algorytmu dla badanej instancji 13 elementowej:

$$\frac{746s}{0.023s} = 32434.7826 \approx 32435.0$$

W porównaniu do wartości teoretycznej obliczonej w *punkcie 1* uzyskałem wynik od niego odbiegający, lecz zgodny z założeniami, że na wynik wpływ może mieć dokładność wykonania algorytmów, dokładność pomiarów a także sposób dysponowania zasobami przez system operacyjny.

Porównanie różnicy teoretycznej z różnicą rzeczywistą:

$$\frac{32435.0}{4500} = 7.20777 \approx 7.21$$

Różnica, mimo że jest znaczna, to wydaje się akceptowalna ze względu na wszystkie wzięte pod uwagę zakłócenia.

Symulowane Wyżarzanie

Dla algorytmu symulowanego wyżarzania ze względu na liczne parametry (temperatura początkowa, współczynnik schładzania, sposób wyboru rozwiązania w sąsiedztwie, liczba wykonywanych iteracji) oraz duże znaczenie czynnika losowego w przebiegu wykonywania algorytmu (ocena szansy na wybór nowego, gorszego rozwiązania) trudnym zadaniem jest określenie dokładnej złożoności obliczeniowej. Z tego powodu przyjrzymy się wynikom działania algorytmu w sposób poglądowy.

Symulowane wyżarzanie pozwala na rozwiązanie problemu komiwojażera dla instancji nawet kilkunastokrotnie większych niż w przypadku metody naiwnej oraz algorytmu Helda-Karpa. Naszym ograniczeniem nie jest już długi czas wykonania (podejście naiwne) a także złożoność pamięciowa algorytmu (Held-Karp). Wadą algorytmu opartego o metodę symulowanego wyżarzania jest niedokładność wyników pomiarów, którą można minimalizować poprzez wydłużenie czasu badania przestrzeni rozwiązań oraz odpowiedni wybór parametrów początkowych.

Dodatkowo, na *rysunku 2* zostały opisane błędy względne opisujące różnicę w wyniku działania algorytmu w porównaniu do najlepszego znanego rozwiązania problemu.

Dokładne wyniki pomiarów oraz wartości błędów zwizualizowane na *rysunku 2* zostały zgromadzone w *tabeli 1* głównej części sprawozdania: 4 (*Symulowane Wyżarzanie*).

Sposób obliczenia błędu względnego pomiaru:

$$\Delta n = \frac{res * 100}{opt}$$

Gdzie:

res - koszt obliczony z wykorzystaniem algorytmu opartego o metodę symulowanego wyżarzania
opt – najlepsze znane rozwiązanie problemu (rozwiązanie o najmniejszym koszcie)