

# Investigación de Operaciones

## Repaso problemas de optimización

Leslie Pérez Cáceres  
*leslie.perez@pucv.cl*

Escuela de Informática  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

2021



# **Bienvenidos al módulo 3!**

En los problemas de optimización se debe buscar:

una asignación de valores para un set de **variables de decisión**

que respete un conjunto de **restricciones**

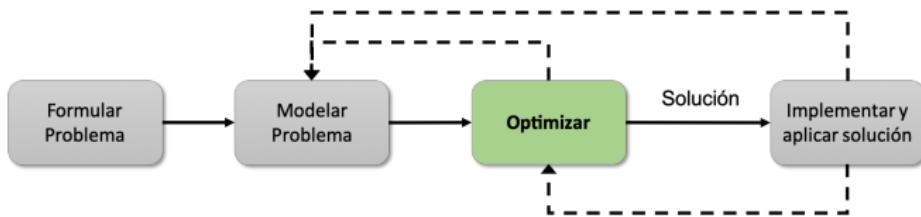
y optimice una **función objetivo**

A diferencia de los problemas de satisfacción de restricciones (CSP), se pueden **comparar** soluciones:

$$solucion_1 > solucion_2$$

Los CSP también pueden formularse como problemas de optimización contando las restricciones satisfechas

- Los problemas de optimización surgen en muchas disciplinas



- Los modelos nos permiten representar y simplificar los problemas  
→ ayudan a hacer su resolución mas sencilla y eficaz

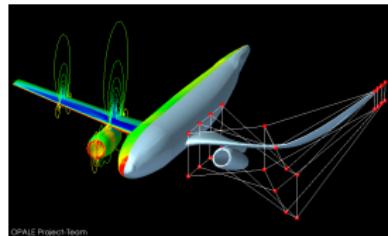
¿Qué elementos debe definir el **modelo** de un problema?

- Variables + dominios
- Restricciones
- Parámetros
- Función objetivo

- Un problema puede ser modelado de diferentes maneras  
→ un problema puede tener **varios** modelos
- El modelo de un problema se puede **clasificar** en base a sus elementos
- El tipo de problema (modelo) a resolver sugiere las **técnicas mas adecuadas** para resolverlo

# Problemas: Dominios de las variables

- Continuo



- Discreto, combinatorial

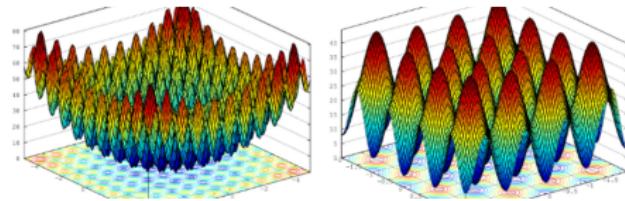


- Mixtos

- Restringidos



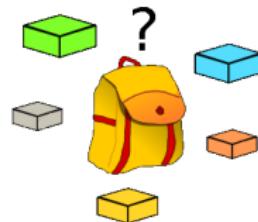
- No restringidos



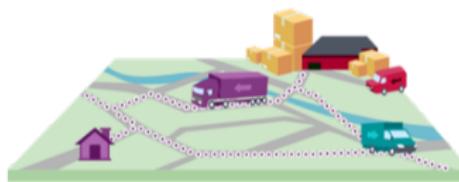
Ojo: dominios ! = restricciones

# Problemas: Objetivo

- Un objetivo



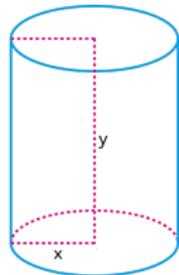
- Multi-objetivo



... veamos algunos ejemplos

## Ejemplos de problemas de optimización: Cilindro

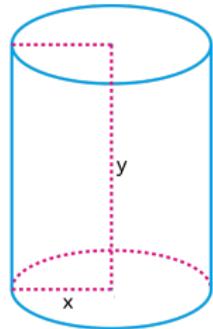
Un emprendedor porteño ha creado una innovadora bebida de frutas y plantas, la cual será producida 100% con productos locales.



Para su comercialización desea diseñar un envase de aluminio (*cilíndrico*) la cual deberá poseer un volumen total de 128ml.

Encuentre un diseño para el envase de aluminio que **minimice** la superficie total de aluminio de este.

# Ejemplos de problemas de optimización: Cilindro



Variables

$x$ : radio del cilindro

$y$ : altura del cilindro

Dominios

$x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

Parámetros

*No hay*

Restricciones

$\pi x^2 y = 128$

Función objetivo

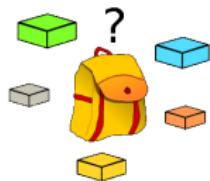
*minimizar*  $f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$

# Ejemplos de problemas de optimización: Mochila

Dos exploradores se encuentran en una caverna a punto de colapsar.

Encuentran un tesoro de 8 objetos, cada uno con un peso y valor.

Rápidamente deben seleccionar cuales llevar: no podrán regresar.



	$o_1$	$o_2$	$o_3$	$o_4$	$o_5$	$o_6$	$o_7$	$o_8$
valor	32	47	18	26	85	33	45	59
peso	26	48	21	22	95	43	55	52

- el peso de los objetos seleccionados no debe ser mas de **101 kg**
- el valor de los objetos debe ser el **máximo** posible

# Ejemplos de problemas de optimización: Mochila

Variables  $x_i$ : indica si se selecciona el objeto  $i$

Dominios  $x_i \in \{0, 1\}$

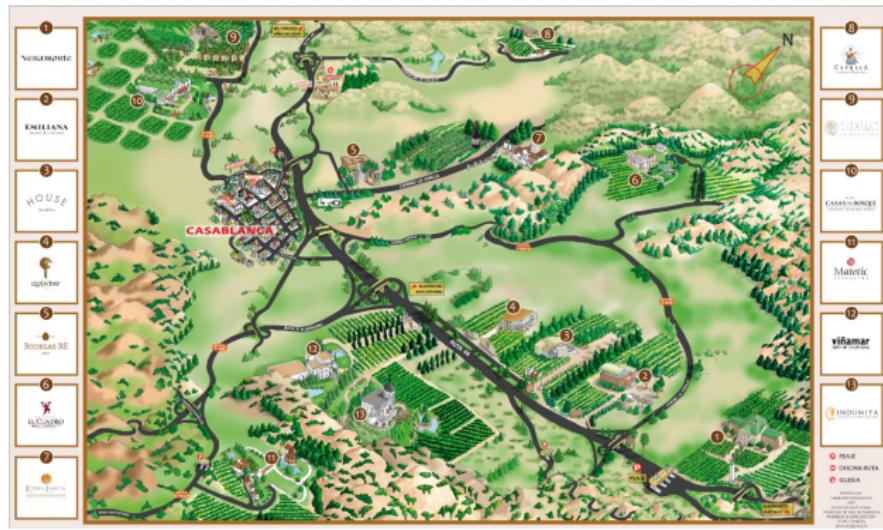
Parámetros  $v_i = \{32, 47, 18, 26, 85, 33, 45, 59\}$ : valor del objeto  $i$   
 $p_i = \{26, 48, 21, 22, 95, 43, 55, 52\}$ : peso del objeto  $i$

Restricciones  $26x_1 + 48x_2 + 21x_3 + 22x_4 + 95x_5 + 43x_6 + 55x_7 + 52x_8 \leq 101$   
 $\sum_{i=1}^8 p_i x_i \leq 101$

Función objetivo  $\max 32x_1 + 47x_2 + 18x_3 + 26x_4 + 85x_5 + 33x_6 + 45x_7 + 59x_8$   
 $\max f(X) = \sum_{i=1}^8 v_i x_i$

# Ejemplos de problemas de optimización: TSP

Un grupo de amigos interesados en el enoturismo desea recorrer en bicicleta 13 viñas del valle de Casablanca.



Encuentre la ruta mas **corta** que pasa por todas las viñas, terminando el tour en la viña inicial.

# Ejemplos de problemas de optimización: TSP

Variables  $x_i$ : indica la viña que se visita en la posición  $i$

Dominios  $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

Parámetros  $d_{ij}$ : distancia de la viña  $i$  a la viña  $j$

Restricciones  $x_i \neq x_j, i \neq j$

Función objetivo  $\text{minimizar} \quad f(X) = \sum_{i=1}^{12} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{13}, x_1)$

Los problemas pueden ser formulados de forma general:

- pero no es posible resolver un problema en forma general!

Siempre resolvemos una **instancia** de un problema

- una instancia define el número de variables, sus dominios y los valores de los parámetros del problema

# Problema vs. instancia: Mochila

## Problema

Dado un número de objetos  $n$ , sus valores  $v_i$ , sus costos  $p_i$  y un máximo de recursos disponibles  $W$ . Encontrar una selección de estos objetos tal que:

*maximizar*

$$f(X) = \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

*sujeto a:*

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq W$$

## Instancia

Dado 8 objetos, sus valores, sus costos y un máximo de recursos disponibles de 101. Encontrar una selección de estos objetos tal que:

*maximizar*

$$f(X) = 32x_1 + 47x_3 + 18x_3 + 26x_4 + 85x_5 + 33x_6 + 45x_7 + 59x_8$$

*sujeto a:*

$$26x_1 + 48x_2 + 21x_3 + 22x_4 + 95x_5 + 43x_6 + 55x_7 + 52x_8 \leq 101$$

# Problema vs. instancia: Vendedor viajero (TSP)

## Problema

Dado un grafo  $G$  con  $n$  nodos y los costos de sus arcos  $d_{i,j}$ . Encontrar una permutación  $x$  de los indices de los nodos correspondiente a un ciclo Hamiltoniano del grafo  $G$ , tal que:

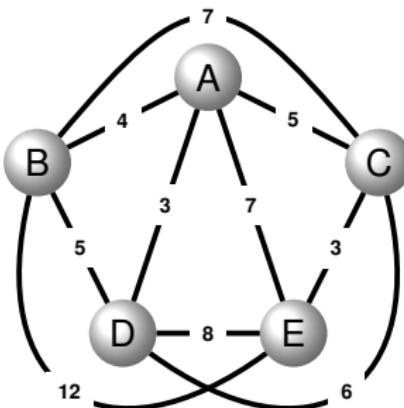
*Minimizar :*

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_n, x_1)$$

*sujeto a:*

$$x_i \neq x_j, \quad i \neq j$$

## Instancia



El **espacio de búsqueda** de un problema es el espacio de todas las posibles soluciones del problema.

Este espacio está caracterizado por los elementos del modelo:

- variables, dominios, restricciones, función objetivo

Dentro del espacio de búsqueda se pueden encontrar soluciones:

- **factibles**: soluciones que cumplen con todas las restricciones del problema
- **infactibles**: soluciones que no cumplen con todas las restricciones del problema

Tamaño espacio de búsqueda (número de soluciones):  $2^n$

- $n=8 \rightarrow 256$  soluciones
- $n=9 \rightarrow 512$  soluciones
- $n=10 \rightarrow 1\,024$  soluciones
- $n=20 \rightarrow 1\,048\,576$  soluciones
- $n=30 \rightarrow 1\,073\,741\,824$  soluciones

con 30 objetos hay mas de **1 000 millones** de soluciones!

Tamaño espacio de búsqueda (número de soluciones):  $N!$

→ Tomando en cuenta simetría:  $(N - 1)!/2$

- $n=6 \rightarrow 60$  soluciones
- $n=7 \rightarrow 360$  soluciones
- $n=8 \rightarrow 2\,520$  soluciones
- $n=9 \rightarrow 20\,160$  soluciones
- $n=10 \rightarrow 181\,440$  soluciones
- $n=20 \rightarrow 60\,822\,550\,204\,416\,000$  soluciones

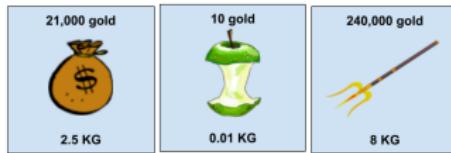
Sobre 70 ciudades superamos el **número estimado de átomos en el universo!**

# Actividad: Resolvamos un problema!

Supongamos que vamos a jugar un juego y estamos equipando a nuestro personaje:



Como equipamiento podemos elegir por ejemplo dinero, comida, herramientas, etc.



... pero nuestro personaje **no puede** llevar más de 15 kg.

# Actividad: Maximiza el valor de los objetos del personaje

50 gold 	21,000 gold 	30,000 gold 	320,000 gold 	770,000 gold 
20,000 gold 	1,000 gold 	1,000 gold 	12,000 gold 	700,000 gold 
3,990 gold 	165,000 gold 	1,000 gold 	240,000 gold 	4,000 gold 
40,000 gold 	180,000 gold 	10 gold 	2,500,000 gold 	19,000 gold 
1000 gold 	900 gold 	1000 gold 	50 gold 	70000 gold 



$W=15 \text{ kg.}$