Apuntes de las lecturas obligatorias de DGE:

1. **Conocimiento especializado del profesorado de matemática en formación inicial acerca de los polígonos**
   - El texto es sobre comprender el conocimiento de una profesora en formación, cuando enseña polígonos. La exploración del conocimiento de la profesora es analizado con el Modelo MTSK (Mathematics Teachers Specialised Knowlegde).
   - Los resultados del modelo MTSK apuntan hacia la reflexión del docente sobre la necesidad de tener conocimiento matemático y didáctico sobre el contenido a enseñar.
   - El modelo MTSK tiene diferentes dominios:
     - **Conocimiento matemático (MK):** Contempla conocimiento matemático puramente disciplinar que el profesorado usa en cualquier actividad.
       - <u>Conocimiento de los temas (KOT):</u> Conocimiento local al contenido que se enseña, conocer conceptos, definiciones, fenómenos, procedimientos y registros de representación, propiedades matemáticas y sus fundamentos. Aquello que permite al profesor reflexionar y construir nuevos conocimientos matemáticos.
       - <u>Conocimiento de la estructura matemática (KSM):</u> Conocimiento que el profesor posee sobre las conexiones entre elementos matemáticos. Cuatro tipos de conexiones: Simplificación, complejización, auxiliares y transversales.
         - Simplificación y complejización apuntan a contenidos curricularmente previos o posteriores.
         - Auxiliares introducen conceptos, técnicas, definición y/o propiedades.
         - Conexiones transversales relacionan el contenido objeto de enseñanza y aprendizaje con elementos matemáticos.
       - <u>Conocimiento de la práctica matemática (KPM):</u> Conocimiento matemático de índole sintáctica, ligado a la construcción de un nuevo conocimiento matemático. Por ejemplo, la demostración, la heurística en resolución de problemas o practicas centradas en la construcción de teoría.
     - **Conocimiento didáctico del contenido (PCK):** Conocer la matemática desde la enseñanza y aprendizaje
       - <u>Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)</u>: Diversas técnicas, recursos y teorías que el profesor puede conocer para gestionar la enseñanza del contenido. Conocimiento del profesorado sobre el uso de GeoGebra o regletas, tambien en diversos elementos de teorías de enseñanza de la matemática.
       - <u>Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM)</u>: Conocimiento acerca de como se aprende el contenido. Conocimiento de teorías personales e institucionalizadas, como la dimensión emocional del aprendizaje y formas de interacción estudiantil con diversos contenidos matemáticos.

        - <u>Conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS):</u> Conocimiento que el profesor posee de las orientaciones dadas por autoridades, el qué debe aprender el alumnado en cierto momento. Conocimiento curricular propuesto, conocimiento de estándares de aprendizaje, conocimiento de las concreciones del currículo impuestas
    - **Dominio afectivo** (No es trabajado en el texto)

2. El legado de Piaget

- El texto muestra ideas de Piaget de cómo de estas han sido germen de estudios posteriores relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Se exponemos dos hipótesis centrales de los estudios de Piaget sobre el desarrollo la concepción del espacio en los niños.
- **El Contexto de la Didáctica de la Geometría**
    - El artículo comienza situando la Didáctica de la Matemática como una disciplina relativamente joven, que alcanzó su estatus científico a mediados de los años sesenta.
    - Se destaca que los trabajos de Jean Piaget tuvieron un papel fundamental en los inicios de la Didáctica de la Geometría.
    - Las ideas de Piaget sobre el desarrollo de la representación del espacio en los niños influyeron en la investigación y el diseño curricular, orientando el enfoque de la Geometría escolar hacia el estudio de los objetos del espacio, sus relaciones y transformaciones, así como los sistemas axiomáticos para representarlos.
    - Esto resalta la importancia del desarrollo del sentido espacial y el razonamiento en la Didáctica de la Geometría.
- **Hipótesis Centrales de Piaget sobre la Concepción del Espacio**
    - <u>Hipótesis Constructivista</u>: Esta hipótesis postula que la representación del espacio se construye progresivamente a partir de las acciones motoras y mentales de los niños, lo que conduce al desarrollo de sistemas operacionales. En otras palabras, la comprensión del espacio no es innata, sino que se desarrolla a través de la interacción activa con el entorno.
    - <u>Hipótesis de la Primacía Topológica</u>: Según esta hipótesis, el desarrollo de las ideas geométricas sigue un orden específico: primero se desarrollan las ideas topológicas (relaciones de proximidad, separación, orden, envolvimiento y continuidad), luego las relaciones proyectivas (perspectiva, puntos de vista) y finalmente las relaciones euclidianas (distancia, ángulo, forma). Piaget e Inhelder (1967) creían que este orden es más lógico que histórico.
- **Tareas Geométricas y la Perspectiva de Piaget**
    - <u>Diferenciación de figuras geométricas</u>: Piaget e Inhelder (1967) observaron que los niños inicialmente diferencian los objetos basándose en propiedades topológicas, luego proyectivas y finalmente euclidianas.

    - Representación de figuras geométricas: En experimentos donde se pedía a los niños dibujar figuras, Piaget e Inhelder (1967) encontraron que los dibujos reflejaban una progresión desde la representación de características topológicas hasta las proyectivas y euclidianas.
    - Construcción de sistemas de referencia para comparar figuras: Piaget e Inhelder (1967) argumentaron que el reconocimiento de relaciones proyectivas y euclidianas depende del desarrollo de un sistema de referencia que permita ubicar y comparar las figuras. o Desarrollo de la habilidad de justificar: Piaget (1987) propuso niveles en el desarrollo de la capacidad de los niños para hacer predicciones y justificaciones, desde un pensamiento no sistemático hasta la deducción lógica.
- **Construcción de sistemas de referencia**
    - Según Piaget, los niños no tienen una predisposición natural a organizar figuras en marcos de referencia bi o tridimensionales.
    - Investigaciones posteriores mostraron que los niños son más competentes de lo que Piaget sugería si se les proporciona un sistema de referencia claro.
- **Justificación de afirmaciones geométricas**: Piaget propuso tres niveles en el desarrollo de la justificación:
    - Nivel 1 (7-8 años): Exploración desordenada sin justificación.
    - Nivel 2 (8-12 años): Inducción empírica sin generalización formal.
    - Nivel 3 (desde 11-12 años): Deducción lógica y conciencia de la necesidad de justificar.

    Se destaca la influencia de las interacciones sociales y del conflicto cognitivo en el desarrollo del pensamiento lógico.

- **Influencia de los van Hiele**
    - Retoman la hipótesis constructivista y proponen cinco niveles de razonamiento geométrico, sin asociarlos directamente a la edad, a diferencia de Piaget.
    - Consideran que el desarrollo del razonamiento se promueve mediante la enseñanza, no solo por maduración.
- **Legado y líneas de investigación derivadas**: El trabajo de Piaget impulsó importantes líneas de investigación en didáctica de la geometría:
    - Visualización: Desde lo perceptual a lo representacional.
    - Representación y definición: Relación entre imagen conceptual y definición formal.
    - Demostración: Relación entre razonamiento empírico e inferencia deductiva.
    - Estas líneas han fortalecido el campo de estudio y desarrollo curricular en geometría escolar.

3. **Modelo Van Hiele (niveles de razonamiento geométrico)**
   - ¿Qué propone el Modelo de Van Hiele? Este modelo describe cinco niveles de razonamiento geométrico, que no dependen de la edad del estudiante, sino de la experiencia instruccional. El paso entre niveles es secuencial y gradual, no se puede saltar ninguno. Los niveles son:
     - **Nivel 1 (Reconocimiento):** Razonamiento visual. Los estudiantes identifican figuras por su forma global (“parece una puerta”, “tiene picos”), pero no consideran sus propiedades matemáticas.
     - **Nivel 2 (Análisis):** Comienzan a identificar propiedades (lados, ángulos, paralelismo), pero sin establecer relaciones lógicas entre ellas. Utilizan ejemplos concretos para “probar” propiedades.
     - **Nivel 3 (Clasificación o Deducción Informal):** Comprenden la relación entre propiedades, pueden clasificar figuras lógicamente y construir deducciones básicas. Entienden relaciones de inclusión entre figuras (como que todo cuadrado es un rectángulo).
     - **Nivel 4 (Deducción Formal):** Entienden la estructura axiomática de la geometría, hacen demostraciones formales.
     - **Nivel 5 (Rigor):** Nivel propio de matemáticos expertos. Trabajan con diferentes sistemas axiomáticos y comparan geometrías.
   - Además de los niveles, Van Hiele propuso cinco fases para enseñar geometría que promuevan el avance entre niveles, estos son:
     - **Información**: Toma de contacto con el tema. El profesor diagnostica el nivel de los estudiantes.
     - **Orientación dirigida**: Actividades guiadas para descubrir propiedades.
     - **Explicitación**: Los estudiantes verbalizan sus descubrimientos y discuten.
     - **Orientación libre**: Problemas más complejos, poca intervención del profesor.
     - **Integración**: Síntesis y organización de los conocimientos adquiridos.
   - Evaluación del Nivel de los Estudiantes: No hay test estandarizado; la mejor manera de evaluar es observar cómo los estudiantes resuelven problemas geométricos, especialmente aquellos que permiten múltiples formas de resolución. Esto revela en qué nivel se encuentra cada alumno.

4. **Errores y dificultades**
   - El propósito central es identificar, describir y clasificar los errores y dificultades más comunes que presentan los estudiantes cuando aprenden geometría, particularmente en relación con las figuras geométricas planas.
   - **Tipos de errores**:
     - Errores conceptuales: relacionados con el entendimiento incorrecto de definiciones y propiedades geométricas (por ejemplo, pensar que todo cuadrado es diferente de un rectángulo).
     - Errores de representación: aluden a la mala interpretación de figuras debido a su orientación, tamaño o apariencia visual.
     - Errores de lenguaje: uso incorrecto o impreciso del vocabulario geométrico.
     - Errores en clasificaciones jerárquicas: por ejemplo, no reconocer que un cuadrado es un tipo particular de rectángulo y de paralelogramo.
   - **Dificultades comunes**
     - Confusión entre apariencia y definición: los estudiantes juzgan por la forma visual y no por las propiedades matemáticas (por ejemplo, decir que una figura no es un triángulo porque está “acostado”).
     - Problemas con la conservación de propiedades bajo transformaciones: como la rotación o traslación de una figura.
     - Poca comprensión de las relaciones entre figuras: no entender cómo una figura puede formar parte de otra más general.
     - Errores derivados de la enseñanza recibida: en ocasiones, los errores provienen de modelos didácticos poco claros o de una enseñanza centrada en la memorización y no en la comprensión.
   - **Sugerencias didácticas**
     - Se promueva el uso del lenguaje preciso desde edades tempranas.
     - Se trabaje con diversas representaciones de una misma figura para fortalecer la comprensión de las propiedades esenciales.
     - Se fomente la exploración activa y la argumentación por parte de los estudiantes.
     - Se aborden explícitamente los errores como oportunidades de aprendizaje.
   - **Reflexión pedagógica**:
     - Reflexionen sobre su propia comprensión de las figuras geométricas.
     - Detecten y analicen los errores como parte del proceso de enseñanza.
     - Diseñen actividades que promuevan la generalización, la clasificación jerárquica y el razonamiento geométrico.

5. Como resolver problemas en geometría

Origen y evolución de los problemas geométricos

- La matemática comenzó resolviendo problemas prácticos de geometría y aritmética en Egipto y Mesopotamia.
- En Grecia, se volvió más teórica y ligada a la filosofía, destacando los trabajos de Tales, Pitágoras y Euclides.
- Los tres problemas clásicos griegos (cuadratura del círculo, duplicación del cubo, trisección del ángulo) fueron fundamentales pero irresolubles con regla y compás.

¿Qué es un problema?

- Es una situación con un objetivo a lograr y obstáculos por superar, sin conocer un método directo para resolverlo.
- Se diferencia de un ejercicio (que aplica procedimientos conocidos) y de una investigación (proceso más abierto).
- Un buen problema debe ser abordable, retador, motivador y satisfactorio al resolverlo

Heurística

- Introducida por Polya, estudia los procesos mentales en la resolución de problemas.
- Promueve actitudes, estrategias y pautas útiles, a diferencia del método deductivo clásico.
- Replica los procesos históricos del pensamiento matemático en el aprendizaje personal.

Modelos de resolución de problemas

- **Modelo de Polya**:
    - Comprender el problema:
        - Esta es una fase de preparación.
        - El objetivo es asegurarse de que se entiende completamente la situación.
        - Preguntas clave: ¿Cuáles son los datos conocidos?, ¿Cuál es la incógnita (lo que se pide)? ¿Qué condiciones se imponen?, ¿Se puede representar gráficamente o con un esquema?
        - Esta fase es fundamental. Si no se comprende bien el problema, todo lo que se haga después puede estar mal dirigido.
    - Concebir un plan:
        - Aquí se decide qué estrategia usar.
        - Se buscan conexiones entre los datos y lo que se quiere averiguar.
        - Preguntas útiles: ¿Qué se puede deducir de los datos?, ¿Hay información irrelevante o redundante?, ¿Se puede reformular el problema?
    - Ejecutar un plan:

            - Se llevan a cabo los cálculos, construcciones, razonamientos o pasos necesarios para resolver el problema según el plan diseñado.
            - Sugerencias: Comprobar cada paso, justificar que cada operación es válida, revisar si los resultados intermedios tienen sentido
    - Examinar la solución:
        - Verificar si la respuesta obtenida satisface el problema original.
        - Considerar: ¿Hay otras formas de resolverlo?, ¿Es posible generalizar el resultado?, ¿Qué se puede aprender del proceso?

- **Modelo De Mason-Burton-Stacey**
    - <u>Abordaje</u>:
        - Se trata de interiorizar el problema: leerlo con calma, pensar en lo que se pide y representar la información.
        - Implica formular preguntas como: ¿Qué sé?, ¿Qué quiero averiguar?, ¿Qué herramientas o conocimientos puedo usar?
        - Se puede usar notación, dibujos, tablas o esquemas para organizar la información.
    - <u>Ataque</u>:
        - Es la parte más intensa del proceso: aquí se prueban ideas, se conectan datos, se aplican estrategias heurísticas (dividir, explorar, experimentar, etc.).
        - Se acepta el bloqueo como parte normal del proceso y se le da valor pedagógico: "estar atascado" es señal de que se está pensando.
        - Se recomienda escribir todo lo que se intente, incluso si falla: eso ayuda a volver atrás, repensar y desbloquearse.
    - <u>Revisión</u>:
        - Una vez que se encuentra una solución, se verifica: ¿Responde realmente a lo que pedía el problema?, ¿Se justificaron bien los pasos?
        - Es importante dejar por escrito la solución final, explicando claramente qué se hizo y por qué.
- Procesos generales del pensamiento matemático:
    - <u>Particularizar</u>: Probar con ejemplos concretos para entender mejor el problema o verificar una idea.
    - <u>Generalizar</u>: Ampliar una idea observada en casos concretos a una regla o principio más general
    - <u>Inferencia</u>: Formular conjeturas basadas en patrones o regularidades observadas.
    - <u>Deducción</u>: Justificar una conjetura con razonamientos lógicos paso a paso.
    - <u>Creatividad</u>: Generar ideas nuevas o conexiones originales que lleven a soluciones innovadoras.
    - <u>Trabajo subconsciente</u>: Resolver o avanzar en un problema tras un descanso o sin pensar en él conscientemente.

- Técnicas de demostraciones matemáticas: Usar métodos como la deducción directa o la reducción al absurdo para probar afirmaciones.
- Estrategias heurísticas de la resolución de problemas geométricos
    - Codificar. Usar notación clara y adecuada para entender mejor el problema.
    - Organizar. Dibujar figuras, esquemas o tablas que ayuden a visualizar y ordenar la información.
    - Experimentar: Probar posibles soluciones, ya sea al azar, de forma sistemática o dirigida.
    - Explorar: Observar patrones y buscar regularidades que guíen hacia la solución.
    - Buscar analogías: Relacionar el problema actual con otros similares ya resueltos.
    - Dividir el problema: Separar el problema en partes más manejables.
    - Suponerlo resuelto: Imaginar que ya se resolvió y retroceder para descubrir cómo se llegó allí.
- Emociones y bloqueos: Las emociones influyen mucho: motivación, frustración, ilusión, bloqueo. Se identifican varios tipos de bloqueos:
    - Emocionales: Miedo al error, ansiedad o falta de motivación que impiden comenzar o avanzar.
    - Culturales/Ambientales: Ideas sociales que desvalorizan el esfuerzo matemático o impiden el
    - Cognoscitivos: alta de herramientas o estrategias para enfrentar el problema.
    - De percepción: Dificultad para ver el problema desde otra perspectiva; incluye suposiciones ocultas.
    - En el ataque al problema: Persistir en una vía equivocada sin explorar alternativas (ej. efecto túnel).

Reconocer y gestionar estos bloqueos es fundamental para avanzar.

6. Medios materiales en la enseñanza de la matemática

- El texto "Medios materiales en la enseñanza de la matemática" analiza la importancia del uso de materiales concretos en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente desde la influencia del constructivismo a partir de los años 70.
- Idea central: El uso de materiales concretos en la enseñanza de la matemática favorece el aprendizaje significativo, la motivación y la comprensión conceptual, siendo un puente entre la experiencia y el conocimiento abstracto.
- Contexto histórico:
    - Antes predominaba la enseñanza magistral con enfoque conductista.
    - Desde los años 70, influencias del constructivismo (Ausubel, Novak) promueven una enseñanza centrada en el alumno.
    - Se organizan congresos, se crean asociaciones y se impulsa la renovación metodológica.
- Justificación del uso de materiales
    - Facilitan la comprensión y visualización de conceptos abstractos.
    - Motivan al estudiante y promueven una actitud positiva.
    - Permiten un aprendizaje activo, gráfico, relacional e inductivo.
    - Favorecen el paso de la experiencia al concepto a través del precepto (Skemp).
- Tipos de materiales, se clasifican en:
    - Estructurados: creados específicamente para enseñar matemáticas.
    - Ambientales: objetos del entorno con potencial educativo.
    - También se consideran recursos como juegos, software educativo, videos catálogos.
- Condiciones para su uso:
    - Dependen del convencimiento del profesor, apoyo institucional y presupuesto.
    - Se recomienda una implementación progresiva y racional.
    - Idealmente, contar con un espacio fijo (armario o aula-laboratorio) para su almacenamiento y uso.
    - Usarlos requiere más tiempo, pero promueve una comprensión más profunda.
- Dilema metodológico: Se debate entre dedicar más tiempo a la comprensión del concepto o a su aplicación mediante actividades. El texto sugiere buscar un equilibrio entre ambas.