Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Étudions la série numérique $\sum nx^2e^{-x\sqrt{n}}$

Si x = 0, la série converge trivialement.

Sinon on a $n^2 f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc au voisinage de l'infini, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'où la série numérique à termes positifs $\sum f_n(x)$ converge par comparaison.

Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .

2. Remarquons tout d'abord que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ .

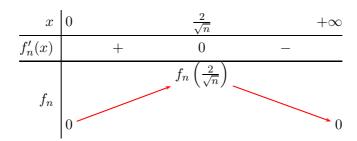
En effet
$$f_n(0) = 0$$
 et si $x \in \mathbb{R}^*_+, f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

Étudions à présent la convergence uniforme de (f_n) sur \mathbb{R}_+ .

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$f_n'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}$$

On en déduit le tableau de variations suivant



donc
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ .

3. (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 2

1. Soit $x \in [0, 1]$.

La série numérique $\sum f_n(x)$ est alternée et vérifie le critère spécial car la suite numérique $(|f_n(x)|)$ est décroissante et converge vers 0 donc $\sum f_n(x)$ converge.

Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur [0,1].

2. Pour tout $x \in [0,1]$, comme la série numérique alternée $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial, on a

$$\left| R_n(x) \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur [0,1].

Ainsi la série $\sum f_n$ converge uniformément sur [0,1].

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Si
$$x = 0$$
, alors $\sum f_n(x) = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

Si
$$x \in \mathbb{R}_+^*$$
, alors $\frac{1}{n+n^3x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2}$.

Or
$$\sum \frac{1}{n^3}$$
 converge donc la série numérique à termes positifs $\sum \frac{1}{n+n^3x^2}$ converge par comparaison.

Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* (mais ne converge pas simplement sur \mathbb{R}_+).

2. On a immédiatement

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_{+}^{*}} \left| f_{n}(x) \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+^* .

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors
$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k + k^3 x^2} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k + k^3 x^2}$$
.

Donc
$$|R_n(x)| \ge \underbrace{n}_{\text{nombre de termes}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2n + 8n^3x^2}}_{\text{terme le plus pet it}} = \frac{1}{2 + 8n^2x^2}$$

Ainsi pour tout
$$n \in \mathbb{N}^*$$
, $R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{10}$ donc $\sup_{x \in \mathbb{R}^*_+} |R_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* .