TD Optimisation Convexe
Préliminaires géométriques

Guillaume TOCHON

Majeure IMAGE

Produit scalaire et norme

Exercice : Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$
Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, représentés par deux points dans le plan euclidien. On note θ l'angle orienté (dans le sens direct) entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, ϕ (respectivement ψ l'angle entre $\mathbf{x}$ (respectivement $\mathbf{y}$) et la partie positive de l'axe des abscisses.

1. Exprimer les coordonnées de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ en fonction de leurs normes respectives et des angles ϕ et ψ.
2. Retrouver l'expression du produit scalaire de $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ en fonction de θ et des normes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

Exercice : Norme découlant d'un produit scalaire
On rappelle que chaque produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ induit une norme $\| \cdot \|$ par la relation $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

1. Vérifier que la norme induite par le produit scalaire (peu importe sa définition) vérifie bien les trois propriétés de séparation, homogénéité et inégalité triangulaire.

Exercice : Inégalité triangulaire inversée
On rappelle l'inégalité triangulaire inversée : $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\big| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \big| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

1. Démontrer cette relation en vous servant de l'inégalité triangulaire classique.

Au risque d'enfoncer des portes ouvertes, on rappelle la relation $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{y}$, quelques soient les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$...

Exercice : Normes équivalentes
On rappelle que deux normes $\| \cdot \|_\alpha$ et $\| \cdot \|_\beta$ sont dites *équivalentes* s'il existe des constantes $A, B > 0$ telles que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A\|\mathbf{x}\|_\beta \leq \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq B\|\mathbf{x}\|_\beta$, et que toutes les normes définies sur $\mathbb{R}^n$ [1] sont équivalentes.

1. Montrer que les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes.

Écriture paramétrique et écriture implicite

Exerice : Décrire un lieu de $\mathbb{R}^2$

1. Déterminer et tracer le lieu de $\mathbb{R}^2$ donné par la relation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Même question, mais avec $\big(3, 2\big)^T$ comme second membre au lieu de $\big(0, 0\big)^T$
3. Quel lieu obtient-on si on inverse l'inégalité ?

1. Et plus généralement, sur n'importe quel espace vectoriel de dimension finie

Exerice : Écriture paramétrique d'un sous espace affine
Écrire paramétriquement :

1. La droite de $\mathbb{R}^2$ de vecteur directeur $\mathbf{u} = \big(1, -1\big)^T$ et passant par le point $\mathbf{a} = \big(2, 3\big)^T$
2. Le plan de $\mathbb{R}^3$ contenant les points $\mathbf{a} = \big(1, 0, 0\big)^T, \mathbf{b} = \big(0, 2, 1\big)^T$ et $\mathbf{c} = \big(-1, 0, 1\big)^T$

Exerice : Écriture implicite d'un sous espace affine
Écrire implicitement :

1. La droite de $\mathbb{R}^2$ de vecteur normal $\mathbf{n} = \big(2, 1\big)^T$ et passant par le point $\mathbf{a} = \big(1, -2\big)^T$
2. Le plan de $\mathbb{R}^3$ contenant les points $\mathbf{a} = \big(1, 0, 0\big)^T, \mathbf{b} = \big(0, 2, 1\big)^T$ et $\mathbf{c} = \big(-1, 0, 1\big)^T$

Exerice : D'une écriture implicite vers une écriture paramétrique
Déterminer l'écriture paramétrique :

1. du plan de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
2. de la droite de $\mathbb{R}^3$ décrite comme l'intersection de deux plans d'équations $x + y - 2z = 1$ et $3x - 2y + z = 0$

Exerice : D'une écriture paramétrique vers une écriture implicite
Déterminer l'écriture implicite :

1. du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\mathbf{u}_1 = \big(1, 2, 3\big)^T$ et $\mathbf{u}_2 = \big(-3, 1, 0\big)^T$ et contenant le point $\mathbf{a} = \big(0, 2, 0\big)^T$
2. de la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $\mathbf{u} = \big(1, 1, 1\big)^T$ et passant par le point $\mathbf{a} = \big(1, -1, 0\big)^T$

À propos des matrices symétriques

Exercice : Positivité/négativité d'une matrice symétrique
On rappelle qu'une matrice symétrique $\mathbf{A}$ de spectre $Sp(\mathbf{A})$ est positive (respectivement définie positive, négative, définie négative) si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$ (respectivement $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+_*$, $Sp(A) \subset \mathbb{R}^-$, $Sp(A) \subset \mathbb{R}^-_*$)

1. Déterminer si les matrices suivantes sont positives ; définies positives ; négatives ; définies négatives ; ni positive ni négative.
$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Déterminer, en fonction de la valeure de $\lambda \in \mathbb{R}$, si la matrice $\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ est positive ; définie positive ; négative ; définie négative ; ni positive ni négative.

Exercice : Lien avec le produit scalaire
Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. On rappelle que si $\mathbf{A}$ est définie positive ($A \succ 0$), alors l'application $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ définit un produit scalaire.

1. Vérifier que l'application $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ vérifie bien les propriétés de symétrie, bilinéarité, définition et positivité d'un produit scalaire si $\mathbf{A} \succ 0$.