1 Définition

Définition 1

Soient $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que (f_n) *converge uniformément* vers f sur I si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \left(n \geqslant N \Longrightarrow \forall x \in I \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\right)$$

2 Caractérisation de la convergence uniforme

Proposition 1

Soient $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathbb{R}^I$. Alors (f_n) converge uniformément vers f sur I ssi

- il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que dès que $n \geqslant N$, $\operatorname*{Sup}_{x \in I} \left|f_n(x) - f(x)\right|$ existe
- $\operatorname*{Sup}_{x \in I} \left|f_n(x) - f(x)\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Exemple

Soit (f_n) la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$ par $f_n(x) = x^n$.

Alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1[$.

Or $\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1[} \left|f_n(x) - 0\right| = \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1[} \left|f_n(x)\right| = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Ainsi (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1[$.

Proposition 2

Soit $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $f \in \mathbb{R}^I$ sur I.

Alors (f_n) converge simplement vers f sur I.