EPITA-S_4
2022/20223

Série 4
Opérateurs d'analyse vectorielle
Outils mathématiques

Exercice 1

On considère une force $\vec{F}$ variable, de composantes exprimées en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x = x^2 + 3y \\ F_y = z^3 - 2y \\ F_z = 4x \end{pmatrix}$$

Parmi les écritures suivantes, certaines ont un sens, lesquelles ? Donner leurs expressions.

1) $\overrightarrow{grad}(\vec{F})$ 2) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(\vec{F}))$
3) $div(\vec{F})$ 4) $\overrightarrow{grad}(div(\vec{F}))$
5) $div(div(\vec{F}))$ 6) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{F}))$

Exercice 2

On considère le potentiel scalaire dans le système de coordonnées cartésiennes:

$$V(x, y, z) = E_0 \frac{x^2+y^2+z^2}{c} \; ; \qquad (E_0 \text{ et c sont des constantes}).$$

1- Parmi les opérateurs laplaciens, rotationnel, divergence et gradient, lesquels peuvent être appliqués à la fonction potentiel électrique $V(x, y, z)$.

2- Donner l'expression de $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ et ΔV

3- Parmi les opérateurs laplaciens, rotationnel, divergence et gradient, lesquels peuvent être appliqués au vecteur champ électrique $\vec{E}$.

4- Calculer $\overrightarrow{rot}(\vec{E}), div\,\vec{E}$ et $\Delta\vec{E}$.

Exercice 3

A l'aide des définitions des opérateurs en coordonnées cartésiennes, vérifier les relations suivantes pour des fonctions f, g et un vecteur $\vec{V}$quelconques.

1) $div(f\vec{V}) = f div(\vec{V}) + \vec{V}.\overrightarrow{grad}(f)$
2) $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{grad}(g) + g\Delta f$

Exercice 4

On considère un champ électrique sinusoïdal d'expression $\vec{E}(x, t) = E_0.cos(kx - \omega t)\vec{u}_z$.
(k, E_0 et ω sont des constantes).

1- Calculer $\Delta\vec{E}$ et $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ en fonction du vecteur $\vec{E}$.

2- Le champ électrique donné ci-dessus vérifie l'équation différentielle de propagation :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \qquad \text{Où } \mu_0 \text{ et } \varepsilon_0 \text{ sont des constantes.}$$

a) En déduire une relation entre le nombre d'onde k et la pulsation ω.

b) A quelle grandeur physique est homogène la constante: $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$? Calculer cette grandeur.

On donne : $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}\,S.I$, $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36.\pi}\,S.I$

A. Zellagui