Corrigé du TD Calcul différentiel

Exercice : lien entre différentielle et dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2+1}$ $\qquad f$ dérivable sur $\mathbb{R}$

La différentielle d'une fonction f différentiable en x_0 est l'application linéaire df_{x_0} telle que
$f(x_0+h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + o_0(h)$ $\quad$ (DL_1 de f en x_0)
Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df_{x_0}(h) = h f'(x_0)$ $\to$ la différentielle est l'application linéaire $df_{x_0} : h \mapsto h f'(x_0)$
avec $f'(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0

Ici, $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{x^2+1}\right) = \dfrac{(x^2+1)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}$

Donc la différentielle de f en x est $\underline{df_x : h \mapsto h f'(x) = h\dfrac{(x^2+1)\cos x - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}}$ ⚠ la variable, c'est h et non x

On aurait aussi pu calculer explicitement le DL_1 de f en x en linéarisant $f(x+h)$ mais ça demande un peu plus de boulot (et de se souvenir des DL_1 usuels)

Exercice : calcul de dérivées partielles

1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2,x_3) \mapsto e^{x_1x_2}(x_1+x_2) = x_1 e^{x_1x_2} + x_2 e^{x_1x_2}$

Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la différentielle en x_0 s'exprime en fonction du gradient de f en x_0 : $df_{x_0} : h \mapsto \langle \nabla f(x_0), h\rangle = \nabla f(x_0)^T h$
Ici, soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = e^{x_1x_2} + x_1x_2 e^{x_1x_2} + x_2^2 e^{x_1x_2} = (1 + x_1x_2 + x_2^2)e^{x_1x_2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = (1 + x_1x_2 + x_1^2)e^{x_1x_2}$ $\qquad$ (par symétrie)

$\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 0$

Donc $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} (1+x_1x_2+x_2^2)e^{x_1x_2} \\ (1+x_1x_2+x_1^2)e^{x_1x_2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\to$ Les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$, donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et
$\underline{df_x : h \mapsto \nabla f(x)^T h}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1 + x_2\ln(x_3),\ x_1x_2x_3)$

Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la différentielle en x_0 s'exprime avec la matrice jacobienne de f en x_0
$df_{x_0} : h \mapsto \mathrm{Jac}f(x_0) \times h$ avec $\mathrm{Jac}f(x_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $[\mathrm{Jac}f(x_0)]_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ avec $f_1(x) = x_1 + x_2 \ln(x_3)$ et $f_2(x) = x_1 x_2 x_3$

$$\operatorname{Jac} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x), & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x), & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x), & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln(x_3) & \frac{x_2}{x_3} \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Les fonctions partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+$ donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+$ et

$df_x : h \mapsto \operatorname{Jac} f(x) \times h \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_*^+$

3) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto e^{x_1 x_2 - x_3}$ La différentielle de f s'exprime donc par son gradient

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_2 e^{x_1 x_2 - x_3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1 e^{x_1 x_2 - x_3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = -e^{x_1 x_2 - x_3}$$

Donc $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x_1 x_2 - x_3} \to$ Les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$

Donc $df_x : h \mapsto \nabla f(x)^T h$

Exercice : dérivée directionnelle

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2$

La dérivée directionnelle de f au point x_0 selon le vecteur $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ correspond à la dérivée en 0 de la fonction $\varphi : t \mapsto f(x_0 + tu)$

1) Dérivée directionnelle en $x_0 = (1,2)$ selon le vecteur $u = (1,1)$

$x_0 + tu = (1,2) + t(1,1) = (1+t, 2+t)$

Donc $\varphi(t) = f(x_0 + tu) = f(1+t, 2+t) = (1+t)^2 + 2(1+t)(2+t) - (2+t)^2$
$= 1 + 2t + t^2 + 4 + 2t + 4t + 2t^2 - 4 - 4t - t^2$
$= 2t^2 + 4t + 1$

$\to \varphi'(t) = 4t + 4$

$\to \varphi'(0) = D_u f(x_0) = 4$

2) De plus f est différentiable en x_0 puisque son gradient $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$ est continu sur $\mathbb{R}^2$, donc $df_{x_0} : h \mapsto \nabla f(x_0)^T h$ et $D_u f(x_0) = df_{x_0}(u) = \nabla f(x_0)^T u$

Avec $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on retrouve bien $D_u f(x_0) = \nabla f(x_0)^T u = (6, -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$