1 Définitions

1.1 Série de fonctions

Définition 1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. *La série de terme général* f_n est la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$ par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

La série de terme général f_n est notée $\sum f_n$. Dans ce cas S_n est appelée la n^e *somme partielle* de $\sum f_n$.

Exemple

$\sum f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{cases}$

1.2 Convergence simple

Définition 2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que $\sum f_n$ *converge simplement* sur I si la suite (S_n) des sommes partielles converge simplement sur I. Autrement dit, si pour tout $x \in I$, la série *numérique* $\sum f_n(x)$ converge.

Exemple

$\sum f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{cases}$

Étudions la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudions la série numérique $\sum x^n$.

On a $\sum x^n$ converge ssi $|x| < 1$. En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } \ x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } \ x = 1 \end{cases}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k$ existe et est finie ssi $|x| < 1$.

Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers $S : \begin{cases}]-1,1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$

1.3 Convergence absolue

Définition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que $\sum f_n$ *converge absolument*sur I si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum \big|f_n(x)\big|$ converge.

1.4 Convergence uniforme

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle *suite des restes* de la série $\sum f_n$, notée (R_n), la suite de fonctions $(S - S_n)$.

On a ainsi pour tout $x \in I$,

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que $\sum f_n$ *converge uniformément* sur I si la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur I c'est-à-dire si $\operatorname{Sup}_{x\in I}\left|R_n(x)\right|$ existe et converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Propriétés de la convergence uniforme

Proposition 1

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $\left(f_n\right)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Proposition 2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur I et telle que chaque f_n est continue sur I. Alors la somme de cette série est continue sur I.

Proposition 3

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$