Filtres classiques : Le laplacien
Détection de bords

- Masque pour le Laplacien
  - f''(X) = f(X+1) – 2 * f(X) + f(X-1)

-1	2	-1

Filtres classiques : Le laplacien
Détection de bords

- Masque pour le Laplacien

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

Filtres classiques : Le laplacien
Détection de bords

- Un point de contour est un passage à zéro de la dérivée seconde
  - Les contours sont repérés par un changement de signe

	A	
B	E	D
	C	

On va plutôt chercher un changement de signe (de forte amplitude)

Si $E > 0$ il faut un des A, B, C, ou $D < 0$
et inversement si $E < 0$

Filtres classiques : Le laplacien Détection de bords

- Le calcul des dérivées est approché au moyen de filtres
  - Simple et rapide
  - Inconvénients : approximation, sensibilité au bruit, en particulier le Laplacien → Nécessite de lisser le signal avant ou lors de la dérivation
- Impact du lissage
  - Robustesse au bruit
  - Délocalisation des points de contour
- Le Laplacien est sensible au bruit → sur-segmentation

Filtres classiques
Détection de bords

- Évaluation de la qualité de la détection de contours :
  - Bonne détection
  - Bonne localisation
  - Réponse unique

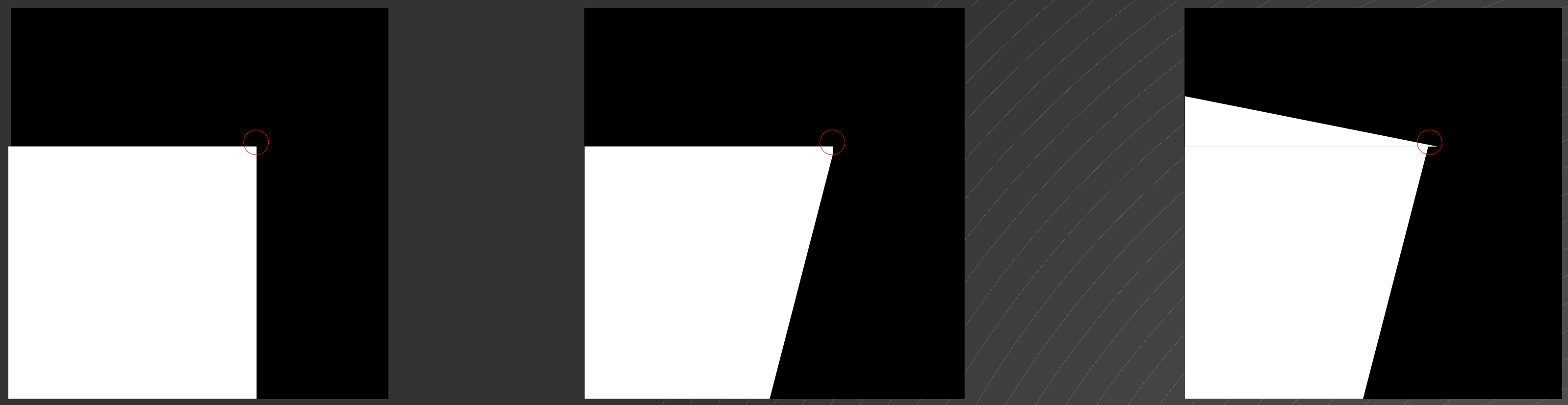
  - Cf filtre de Canny/Deriche

Filtres classiques
Détection de points d'intérêts

- Détection de coins
  - Comment se caractérise un coin ?
  - Comment trouver les coins ?
  - Pourquoi trouver les coins?

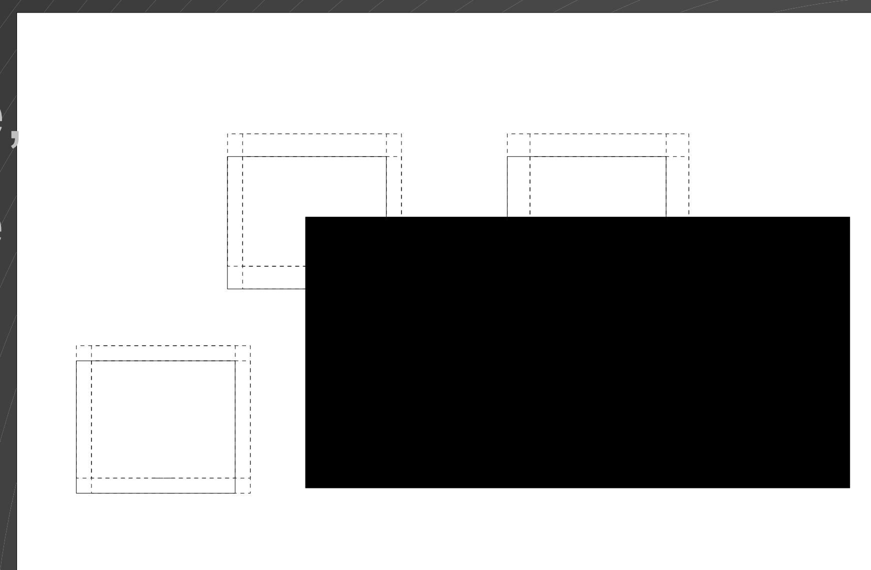
Filtres classiques
Détection de points d'intérêts

- Détection de coins
  - Coin = gradient fort dans deux directions



Filtres classiques : Moravec
Détection de points d'intérêts

- Pour chaque point
  - On fait la somme S des différences des intensités entre un voisinage centré sur le point et le voisinage décalé.
  - On réitère le calcul avec des décalages dans toutes les directions
  - Pour chaque point, on garde, parmi tous les décalages *i* le résultat de S_i qui a donné la plus faible valeur



Filtres classiques : Moravec
Détection de points d'intérêts

- Moravec
  - Calcul d'un critère sur toute l'image

$$c_{d_x,d_y}(x,y)=\sum_{i=-s\ldots+s}\sum_{j=-s\ldots+s}(I(x+i,y+j)-I(x+i+d_x,y+j+d_y))^2$$

  - On calcul un critère pour chaque point

$$c(x,y)=min_{d_x,d_y}(c_{d_x,d_y}(x,y))$$

  - Un coin est un maximum local de c(x,y)

Filtres classiques : Moravec
Détection de points d'intérêts

- Moravec
  - Sensible au bruit (des petites imperfections peuvent être prises pour des coins)
  - Contours de certaines directions peuvent être pris pour des coins (anisotrope car on considère que quelques directions)

Filtres classiques : Harris
Détection de points d'intérêts

- Révision du critère pour être plus robuste

$$c_{d_x,d_y}(x,y)=\sum_{i=-s\ldots+s}\sum_{j=-s\ldots+s} w(i,j)(I(x+i,y+j)-I(x+i+d_x,y+j+d_y))^2$$

$$I(x+d_x,y+d_y)\approx I(x,y)+d_x\left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial x}\right)+d_y\left(\frac{\partial I(x,y)}{\partial y}\right)+\ldots$$

$$c_{d_x,d_y}(x,y)=\sum_{i=-s\ldots+s}\sum_{j=-s\ldots+s} w(i,j)\left(d_x\left(\frac{\partial I(x+i,y+j)}{\partial x}\right)+d_y\left(\frac{\partial I(x+i,y+j)}{\partial y}\right)\right)^2$$

Filtres classiques : Harris
Détection de points d'intérêts

- Critère :

$$c_{d_x,d_y}(x,y)=\sum_{i=-s\ldots+s}\sum_{j=-s\ldots+s} w(i,j)\left(d_x\left(\frac{\partial I(x+i,y+j)}{\partial x}\right)+d_y\left(\frac{\partial I(x+i,y+j)}{\partial y}\right)\right)^2$$

$$\left(d_x\left(\frac{\partial I(x+i,y+j)}{\partial x}\right)+d_y\left(\frac{\partial I(x+i,y+j)}{\partial y}\right)\right)^2=\begin{pmatrix}d_x & d_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial I}{\partial x\partial y}\right)\\ \left(\frac{\partial I}{\partial x\partial y}\right) & \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_x\\ d_y\end{pmatrix}$$

- Ce qui donne :

$$Ad_x^2+2Cd_xd_y+Bd_y^2 \qquad M=\begin{pmatrix}A & C\\ C & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial I}{\partial x\partial y}\right)\\ \left(\frac{\partial I}{\partial x\partial y}\right) & \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2\end{pmatrix}$$

- Avec *w* une gaussienne

Filtres classiques : Harris
Détection de points d'intérêts

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial I}{\partial x \partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial I}{\partial x \partial y}\right) & \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

- Nouveau critère H
  - H = det(M) – α trace(M)²
  - λ1 λ2 les deux valeurs propres
    - det(M) = λ1 λ2 et trace(M) = λ1 + λ2
  - H = λ1 λ2 – α (λ1 + λ2)²
    - H < 0 contour
    - H → 0 ras
    - H >> 0 coin
  - α grand => H diminue et le détecteur est moins sensible
  - α petit => H augmente et le détecteur est plus sensible

Filtres classiques : Achard, Bigorgne, Devars
Détection de points d'intérêts

- Détection basée sur le produit vectoriel
  - Près d'un coin, la norme du produit vectoriel entre deux vecteurs gradients est grande
  - Dans une zone homogène elle est faible
    - La norme des vecteurs gradients est petite
  - Sur un contour elle est faible aussi
    - L'angle formé entre deux vecteurs gradients proches est petit

Filtres classiques : Achard, Bigorgne, Devars Détection de points d'intérêts

- Détection basée sur le produit vectoriel
  - Pour chaque point i, avec un voisinage V_i, on détermine un critère k :

$$k = \sum_{j \in V_i} \| \overrightarrow{grad\ P}_i \wedge \overrightarrow{grad\ P}_j \|^2$$

$$k = \sum_{j \in V_i} \| \overrightarrow{grad\ P}_i \|^2 \| \overrightarrow{grad\ P}_j \|^2 \sin^2 \left(\widehat{grad\ P_i, grad\ P_j} \right)$$

Filtres classiques : Achard, Bigorgne, Devars
Détection de points d'intérêts

- Détection basée sur le produit vectoriel
  - Pour chaque point i, avec un voisinage V_i, on détermine un critère k :

$$k = \sum_{j \in V_i} \|\overrightarrow{grad\,P_i}\|^2 \|\overrightarrow{grad\,P_j}\|^2 \sin^2\left(\widehat{grad\,P_i\,,\,grad\,P_j}\right)$$

$$I_x = \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right) \quad I_x = \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right) \qquad \|\overrightarrow{grad\,P}\|^2 = I_x^2 + I_y^2$$

$$\sin\left(\widehat{ox\,,\,grad\,P}\right) = \frac{I_y}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \qquad \cos\left(\widehat{ox\,,\,grad\,P}\right) = \frac{I_x}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}$$

$$k = I_x^2 \langle I_y^2 \rangle + I_y^2 \langle I_x^2 \rangle - 2\, I_x I_y \langle I_x I_y \rangle \qquad \langle I \rangle = I * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtres classiques
Détection de points d'intérêts - Résultats

- Quelques résultats (Harris)

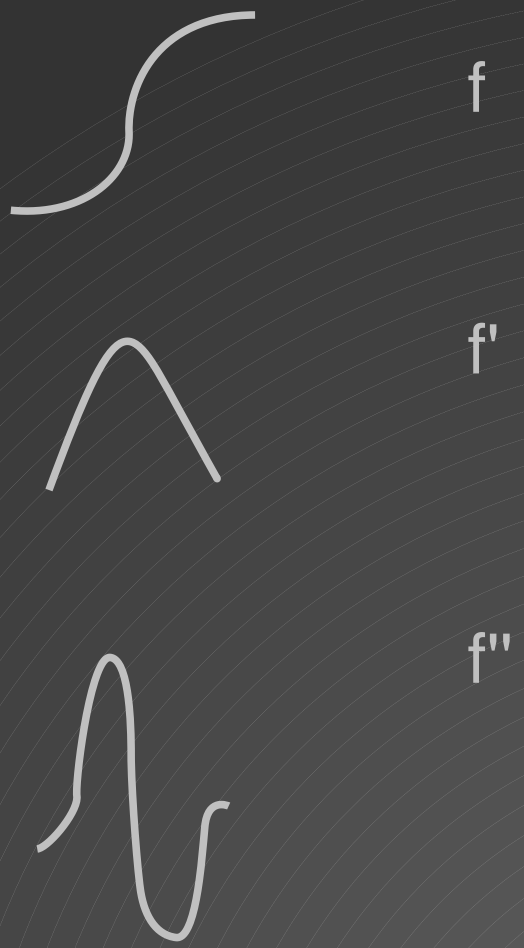
Filtres classiques
Détection de points d'intérêts - Résultats

- Quelques résultats (Achard)

Filtres classiques
Amélioration de la netteté

Filtres classiques : Laplacien
Amélioration de la netteté

- Retour sur la dérivée seconde (Laplacien)



Filtres classiques : Laplacien
Amélioration de la netteté

- Calcul du laplacien
  - $f'(x) = f(x+1) - f(x)$
  - $f''(x) = f'(x+1) - f'(x)$
  - $f''(x) = f(x+2) - f(x+1) - f(x+1) + f(x)$

  - $f''(X) = f(X+1) - 2 * f(X) + f(X-1)$

Filtres classiques : Laplacien
Amélioration de la netteté

- Masque pour le Laplacien
  - f''(X) = f(X+1) – 2 * f(X) + f(X-1)

-1	2	-1

Filtres classiques : Laplacien Amélioration de la netteté

- Masque pour le Laplacien

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

Filtres classiques : Laplacien
Amélioration de la netteté

- Renforcement de la netteté :

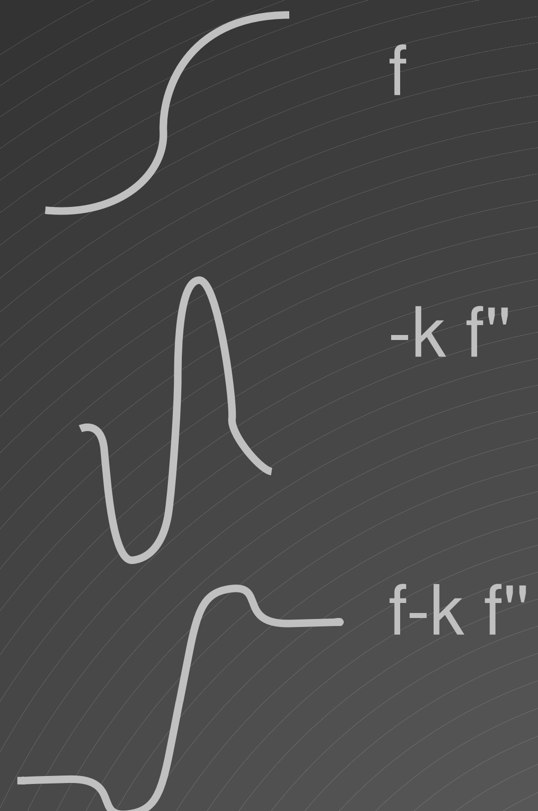
0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0

Filtres classiques : Laplacien
Amélioration de la netteté

- Masque pour le Laplacien

k

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0



Filtres classiques
Amélioration de la netteté : Résultats

- Augment la netteté
- Renforce le bruit

Filtres classiques

- Détection de bord/coin
- Lissage
- Amélioration de la netteté
- ...
  - ✔ Attention : Pensez à la correction gamma.

Signal

- Signal
  - Représentation Mathématique d'un phénomène physique
- Traitement du signal
  - Élaboration, détection et interprétation des signaux
- Classification des signaux
  - Morphologique : Continu/Discret
  - Spectrale : Bande de fréquences BF/HF
  - Énergie : Énergie finie/Puissance moyenne finie
  - Typologie : déterministe/aléatoire
  - Périodicité : non périodique/$x(t) = x(t+T)$

Signal

- Énergie
  - Énergie w_x d'un signal x

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

  - Les signaux à énergie finie vérifient la condition :

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < +\infty$$

  - Les signaux à support borné (c-a-d de durée limitée) sont à énergie finie

Signal

- Puissance
  - Puissance moyenne P du signal x

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

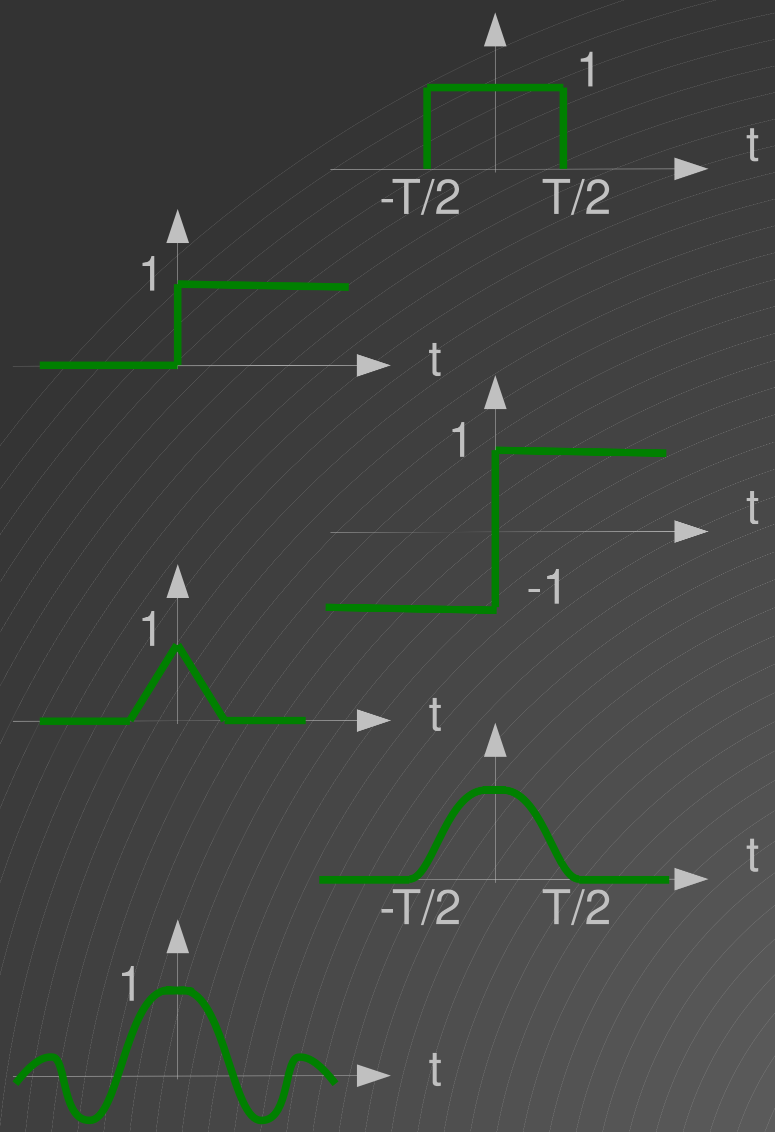
  - Énergie finie => puissance moyenne nulle
    - $W_x < \infty \Rightarrow P_x = 0$
  - Puissance moyenne finie => énergie infinie

$$0 < P_x < \infty \Rightarrow W_x \rightarrow \infty$$

    - Exemple les signaux périodiques

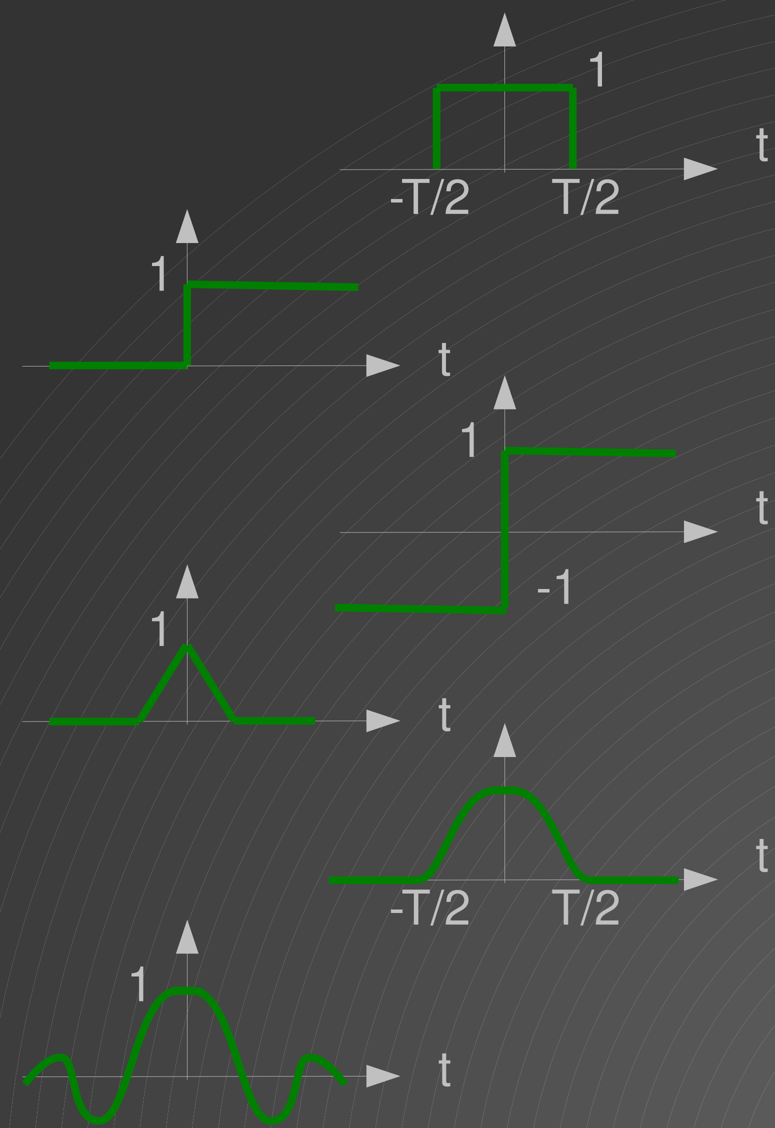
Signal

- Signaux classiques
  - Porte
  - Echelon d'Heavyside
  - Signe
  - Triangulaire
  - Gaussienne
  - Sinus cardinal



Signal

- Signaux classiques
  - Porte
    - $\Pi_{T/2}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$
  - Echelon d'Heavyside
    - $u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t >= 0 \end{cases}$
  - Signe
    - $\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t < 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$
  - Triangulaire
    - $\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1-|t|/T \text{ si } |t| < T \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$
  - Gaussienne
    - $g(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$
  - Sinus cardinal
    - $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$



Signal
Séries de Fourier

- On considère les fonctions $g_n(t)$

$$g_n(t)=e^{2j\pi\left(\frac{nt}{T}\right)}$$

- Que vaut :

$$<g_n(t), g_m(t)>=\frac{1}{T}\int_T g_n(t)\,g_m^*(t)\,dt$$

- Soit f(t) périodique de période T (T>0). Un signal 1D périodique peut être vu comme une somme de sinusoïdes.

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, g_n(t)$$

Signal
Séries de Fourier

- Harmoniques

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n g_n(t)$$

C_n : harmoniques

  - C_0 : Fréquence continue
  - C_1 : Fréquence fondamentale
  - …
  - C_n : $n^{\text{ième}}$ harmonique
  - f réel => $C_n = C_{-n}^*$ $(f(t) = f^*(t))$

Signal
Séries de Fourier

- Fréquences
  - Basses fréquences
    - Lentes variations
    - Zones presque uniformes
  - Hautes fréquences
    - Variations rapides
    - Contours/coins

Signal
Séries et transformée de Fourier

- Spectre
  - D'amplitude : $|Cn|$
  - De phase $Arg(Cn) = arctg(-bn/an)$
  - De puissance $|Cn|^2$
  - f(t) réel => spectre d'amplitude symétrique
- Relation de PARSEVAL : Il y a conservation de la puissance de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle

Signal
Séries et transformée de Fourier

- On considère jusqu'à présent des signaux périodiques
  - On peut généraliser en prenant T->+infini
- On défini TF{x(t)}

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-2j\pi ft}\,dt$$

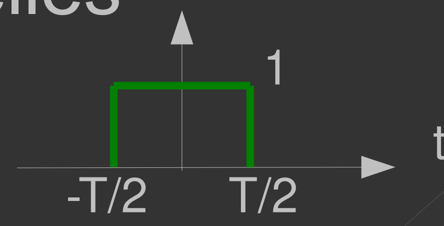
- On défini TF^{-1}{x(t)}

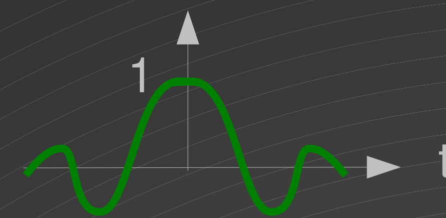
$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,e^{+2j\pi ft}\,df$$

- Toutes les infos contenues dans le signal sont contenues dans le spectre

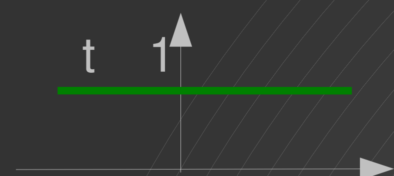
Signal
Séries et transformée de Fourier

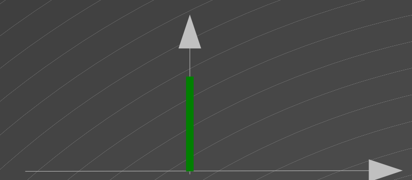
- Transformées usuelles
  - Porte



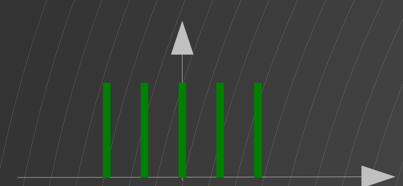


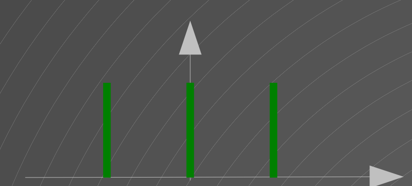
  - Constante





  - Peigne de Dirac





Signal
Séries et transformée de Fourier

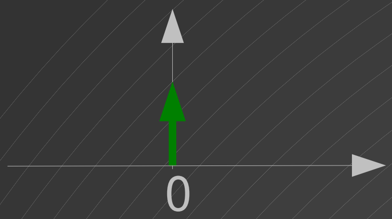
- Existence de la transformée de f(t)
  - f(t) bornée
  - Intégrale de f(t)dt existe
  - Les discontinuités de f(t) sont en nombre limité

Signal
Séries et transformée de Fourier

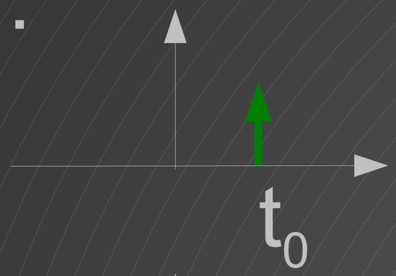
- Propriétés :
  - Linéarité :
    - K f(t) + g(t) <=> K F(t) + G(t) (K complexe)
  - Similitude : Une dilatation dans le domaine temporel correspond à une contraction dans le domaine fréquentiel
    - f(at) <=> 1/|a| F(f/a) (a réel)
  - Dérivée :
    - dx(t)/dt <=> 2iΠf X(f)
    - dX(f)/df <=> -2iΠt x(t)

Filtrage : Transformée de Fourier

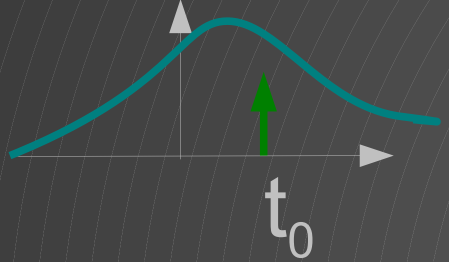
- Dans notre cas :
  - Signal borné et échantillonné
- Soit le pic de Dirac δ(t) :

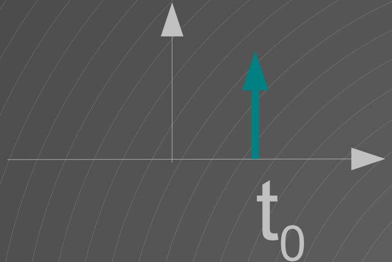


- Soit le pic de Dirac $\delta(t_0)$:
  - $\delta(t_0) = \delta(t-t_0)$



- $f(t)\,\delta(t_0) = f(t_0)$:

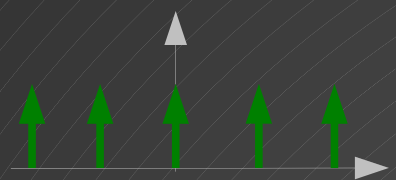




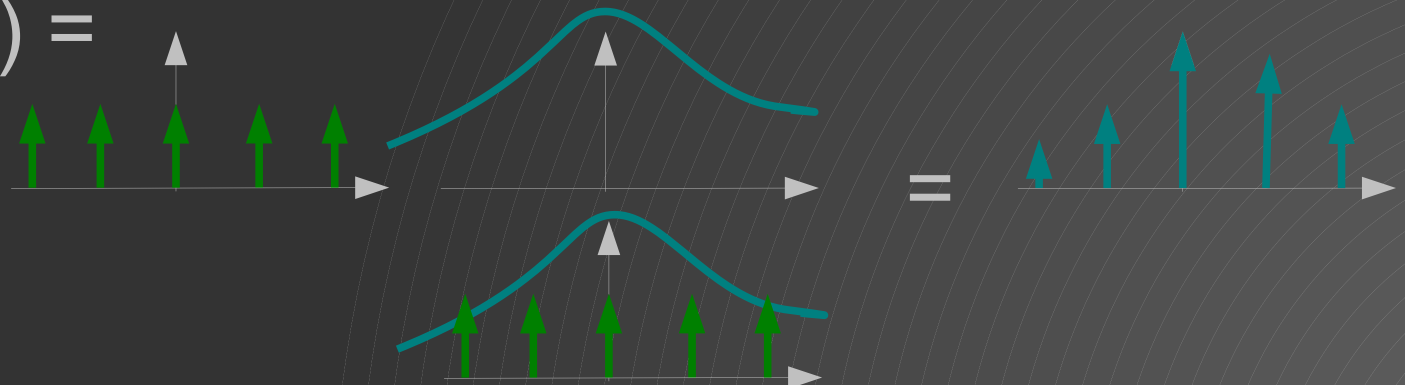
Filtrage : Transformée de Fourier

- Dans notre cas :
  - Signal borné et échantillonné
- Soit le peigne de Dirac Ш(t) :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$



- f(t) Ш(t_0) =



Filtrage : Transformée de Fourier

- Dans notre cas :
  - Signal discret (échantillonné) + support borné
    - TFD

Filtrage : Transformée de Fourier

- TFD : (Signal discret (échantillonné) + support borné)

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2j\pi ft}\, dt \qquad X(f)=\sum_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2j\pi ft}$$

$$X(l)=\sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e)\, e^{-2j\pi l f_e k T_e}$$

$$\boxed{X(l)=\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{\frac{-2j\pi kl}{N}} \qquad x(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X(l)\, e^{\frac{2j\pi lk}{N}}}$$

Filtrage : Transformée de Fourier

- TFD : (Signal discret (échantillonné) + support borné)

$$X(l)=\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{\frac{-2j\pi kl}{N}} \qquad x(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X(l)\, e^{\frac{2j\pi lk}{N}}$$

- Notes : (F_e Fréquence d’échantillonnage)
  - $X(0) \rightarrow -2F_e$ (/ 0)
  - $X(N-1) \rightarrow +2F_e$ (/ $+4F_e$)
  - Pas en fréquence : F_e/N

Filtrage : Transformée de Fourier

- Calcul rapide de la TFD
  - FFT (1965 – Cooley et Tukey)

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{\frac{-2j\pi kl}{N}}$$

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2\mathrm{k})\, e^{\frac{-2j\pi 2\mathrm{kl}}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2\mathrm{k}+1)\, e^{\frac{-2j\pi 2(k+1)l}{N}}$$

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2\mathrm{k})\, e^{\frac{-2j\pi 2\mathrm{kl}}{N}} + e^{\frac{-2j\pi l}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2\mathrm{k}+1)\, e^{\frac{-2j\pi 2\mathrm{kl}}{N}}$$

Filtrage : Transformée de Fourier

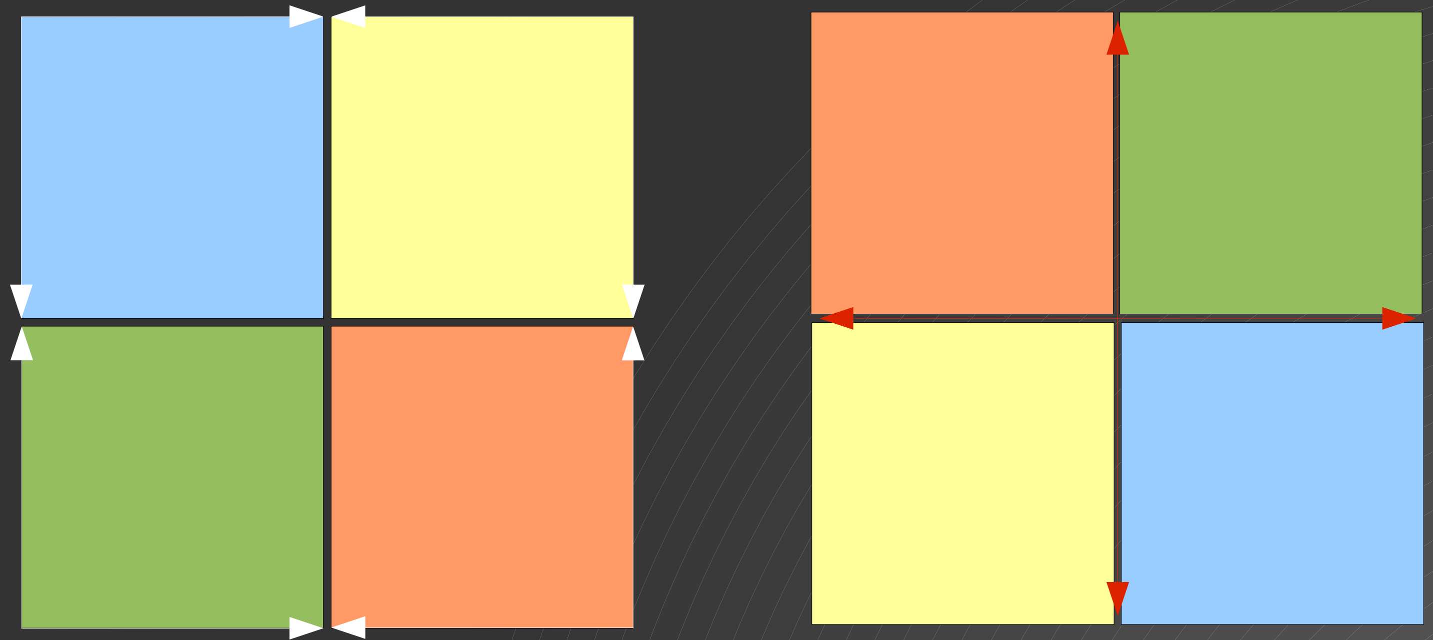
- FFT :
  - $$X(l) = \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2\mathrm{k}) e^{\frac{-2\mathrm{j}\pi 2\mathrm{kl}}{N}} + e^{\frac{-2\mathrm{j}\pi l}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2\mathrm{k}+1) e^{\frac{-2\mathrm{j}\pi 2\mathrm{kl}}{N}}$$
- Pour calculer la TFD sur un signal de taille N, on calcul la transformée de Fourier sur les coefficients pairs (N/2) et la transformée de Fourier sur les coefficients impairs (N/2) … et récursivement

Filtrage : Transformée de Fourier

- Dans notre cas (image)
  - Signal 2D : TF2D

Filtrage : Transformée de Fourier

- Visualisation du spectre :



- On interverti les cadrants. Les basses fréquences se retrouvent au centre

Filtrage : Transformée de Fourier

- Visualisation du spectre :