Corrigé du TD Caractérisation à l'ordre 0 de la convexité

Exercice : courbes de niveau et lieux de sous niveau

1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + 4x_2^2$

La courbe de niveau 1 de f est $\mathcal{C}_1(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 = 1\}$

$\to$ C'est l'équation d'une ellipse

<u>Rappel</u> : l'équation d'une ellipse s'écrit $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ avec

$\to$ le demi grand axe a et le demi petit axe b si $a > b$

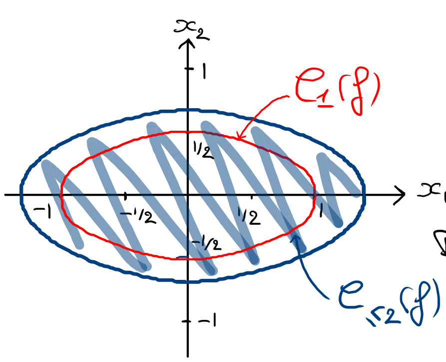
$\to$ le demi petit axe a et le demi grand axe b si $a < b$

$\to$ $x_1^2 + 4x_2^2 = 1 \iff \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ avec $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$

Donc <u>$\mathcal{C}_1(f)$ est une ellipse de demi grand axe 1 et demi petit axe $\frac{1}{2}$</u>

Le lieu de sous niveau 2 de f est $\mathcal{C}_{\leq 2}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 \leq 2\}$

$\to$ C'est l'intérieur d'une ellipse d'équation $x_1^2 + 4x_2^2 = 2 \iff \frac{x_1^2}{2} + 2x_2^2 = 1$



$\iff \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ avec $a^2 = 2 \to a = \sqrt{2}$

$b^2 = \frac{1}{2} \to b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc <u>$\mathcal{C}_{\leq 2}(f)$ est l'intérieur de l'ellipse de demi grand axe $a = \sqrt{2}$ et demi petit axe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$</u>

2) On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 x_2$

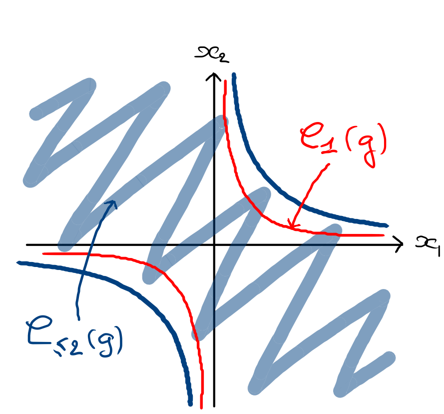
La courbe de niveau 1 de g est $\mathcal{C}_1(g) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ g(x_1,x_2) = x_1 x_2 = 1\}$

$x_1 x_2 = 1 \iff x_2 = \frac{1}{x_1}$ $\to$ C'est l'équation d'une hyperbole

Donc <u>$\mathcal{C}_1(g)$ est l'hyperbole d'équation $x_2 = \frac{1}{x_1}$</u>

Idem pour le lieu de sous niveau 2 : $\mathcal{C}_{\leq 2}(g) = \{(x_1, x_2),\ g(x_1,x_2) = x_1 x_2 \leq 2\}$

$\to$ $x_2 \leq \frac{2}{x_1}$ $\to$ <u>$\mathcal{C}_{\leq 2}(g)$ est l'intérieur des branches de l'hyperbole $x_2 = \frac{2}{x_1}$</u>



Exercice : ensemble convexe

Soient A et B deux ensembles convexes, avec $A \cap B \neq \emptyset$

Soient $x, y \in A \cap B$ et $t \in [0,1]$

→ $x, y \in A$ et A convexe, donc $tx + (1-t)y \in A$

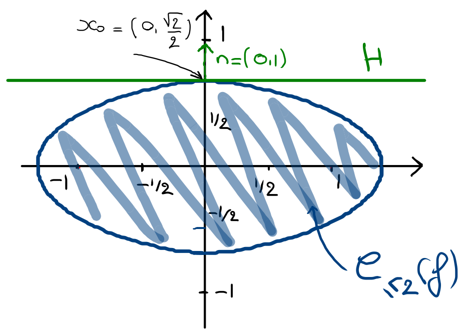
→ $x, y \in B$ et B convexe, donc $tx + (1-t)y \in B$

Donc $tx + (1-t)y \in A \cap B$ peu importe $x, y \in A \cap B$ et $t \in [0,1]$

Donc $\underline{A \cap B \text{ est convexe}}$

Exercice : hyperplan d'appui

1) On reprend le lieu de sous niveau 2 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 4x_2^2$ (cf exercice précédent)



$\mathcal{C}_{\leq 2}(f)$ est une ellipse de demi grand axe $a = \sqrt{2}$ et demi petit axe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

→ le point $x_0 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ est donc un point du bord de $\mathcal{C}_{\leq 2}(f)$

et $n = (0,1)$ est un vecteur normal

$$H = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \langle n, x - x_0 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

→ $\underline{H = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \}}$ est l'équation de l'hyperplan d'appui en x_0

2) Le lieu de sous niveau 1 $\mathcal{C}_{\leq 1}(g)$ de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ (la zone entre les deux branches de l'hyperbole d'équation $x_2 = \frac{1}{x_1}$) n'admet en revanche aucun hyperplan d'appui en aucun point de son bord

Exercice : caractérisation à l'ordre 0 de la convexité

1) Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Si f vérifie la caractérisation à l'ordre 0 de la convexité, alors $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

→ Prenons $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$ et étudions le signe de $t f(x) + (1-t) f(y) - f(tx + (1-t) f(y))$

$$\begin{aligned}
t f(x) + (1-t) f(y) - f(tx + (1-t) f(y)) &= tx^2 + (1-t) y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \\
&= tx^2 + (1-t) y^2 - (t^2 x^2 + 2tx(1-t)y + (1-t)^2 y^2) \\
&= tx^2 - t^2 x^2 + (1-t) y^2 - (1-t)^2 y^2 - 2t(1-t) xy \\
&= t(1-t) x^2 + (1-t)(1 - (1-t)) y^2 - 2t(1-t) xy \\
&= t(1-t) x^2 + t(1-t) y^2 - 2t(1-t) xy \\
&= t(1-t)(x^2 + y^2 - 2xy) \\
&= t(1-t)(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in [0,1]
\end{aligned}$$

Donc $t f(x) + (1-t) f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$ pour $f : x \mapsto x^2$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in [0,1]$

→ $\underline{f \text{ vérifie donc bien la caractérisation à l'ordre 0 de la convexité}}$

2) Inégalité de Jensen : Soit f une fonction convexe, $x_1, \dots, x_p \in D_f$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ tq $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

Alors $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$

→ Preuve par récurrence

* Pour $p=2$; $x_1, x_2 \in D_f$, $\lambda_1+\lambda_2=1 \to \lambda_2 = 1-\lambda_1$

Et $f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2)$ est la caractérisation à l'ordre 0 de la convexité, qui est vraie puisque f est convexe par hypothèse

Donc la propriété est vraie pour $p=2$

* Supposons la propriété vraie pour un certain $p \geq 2$

Soient $x_1, \dots x_{p+1} \in D_f$ et $\lambda_1, \dots \lambda_p, \lambda_{p+1} \geq 0$ tq $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$

La propriété à démontrer est donc $f(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i)$

→ Si $\lambda_{p+1} = 0$ alors la propriété est vraie par hypothèse de récurrence

→ Si $\lambda_{p+1} \neq 0$ alors on ne peut pas appliquer la propriété de récurrence sur $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ car $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1-\lambda_{p+1} \neq 1$

Posons $\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}$ pour $i = 1, \dots p \to \lambda_i = (1-\lambda_{p+1})\lambda_i'$ $i = 1, \dots, p$

Et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i' = \frac{1}{1-\lambda_{p+1}} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

$$\to f(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i) = f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \lambda_{p+1} x_{p+1})$$

$$= f((1-\lambda_{p+1})\sum_{i=1}^{p} \lambda_i' x_i + \lambda_{p+1} x_{p+1})$$

$$\to f(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i) \leq (1-\lambda_{p+1}) f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i' x_i) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1})$$ (caractérisation à l'ordre 0 pour $p=2$)

Et d'après l'hypothèse de récurrence : $f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i' x_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' f(x_i)$

$$\to f(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i) \leq (1-\lambda_{p+1}) \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' f(x_i) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1})$$ puisque $\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}$

$$\leq \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i)$$ Donc la propriété est vraie au rang $p+1$

<u>Donc, par récurrence, l'inégalité de Jensen est vraie pour tout $p \geq 2$</u>

<u>Exercice</u>: Combinaison de fonctions convexes

Soient $f_1, \dots f_p$ des fonctions convexes

1) La somme pondérée, de poids positifs, de fonctions convexes est une fonction convexe

<u>Preuve</u>: Soit $f = \sum_{i=1}^{p} \omega_i f_i$ avec $\omega_i \geq 0$ et f_i convexes

$D_f = \bigcap_{i=1}^{p} D_{f_i}$ et D_{f_i} convexe → D_f est aussi convexe

Soient $x, y \in D_f$ et $t \in [0,1]$ → $x, y \in D_{f_i}$ $\forall i$

$$f(tx+(1-t)y) = \sum_{i=1}^{p} \omega_i f_i(tx+(1-t)y) \quad \text{par définition de } f$$
$$\leq \sum_{i=1}^{p} \omega_i \left(t f_i(x) + (1-t) f_i(y)\right) \quad \text{car les } f_i \text{ sont convexes}$$
$$\leq t \sum_{i=1}^{p} \omega_i f_i(x) + (1-t) \sum_{i=1}^{p} \omega_i f_i(y)$$
$$\leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

Donc <u>f est bien convexe</u>

2) Le maximum $\max_i f_i$ de fonctions convexes est une fonction convexe

<u>Preuve:</u> Soit $f = \max_i f_i$

$D_f = \bigcap_{i=1}^{p} D_{f_i}$ et D_{f_i} convexe $\rightarrow$ D_f est aussi convexe

Soient $x, y \in D_f$ et $t \in [0,1]$ $\rightarrow$ $x, y \in D_{f_i}\ \forall i$

$$\rightarrow f_i(tx+(1-t)y) \leq t \underbrace{f_i(x)}_{\leq \max_i f_i(x)} + (1-t) \underbrace{f_i(y)}_{\leq \max_i f_i(y)} \quad \text{car les } f_i \text{ sont convexes}$$

$$\rightarrow f_i(tx+(1-t)y) \leq t \max_i f_i(x) + (1-t) \max_i f_i(y) \quad \forall i$$

L'inégalité précédente est vraie $\forall i = 1, \dots, p$, donc en particulier pour celui où le max est atteint (le i^* tq $f_{i^*}(tx+(1-t)y) = \max_i f_i(tx+(1-t)y)$)

$$\rightarrow \max_i f_i(tx+(1-t)y) \leq t \max_i f_i(x) + (1-t) \max_i f_i(y)$$

$$\rightarrow f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

Donc <u>f est bien convexe</u>

3) Toute fonction sous linéaire est convexe

<u>Preuve:</u> Soit f une fonction sous linéaire ($f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda > 0$)

Soient $x, y \in D_f$ et $t \in [0,1]$

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(tx) + f((1-t)y) \quad \text{par sous linéarité}$$

$$\leq t f(x) + (1-t) f(y) \quad \text{par sous linéarité (puisque } t>0 \text{ et } (1-t)>0)$$

Donc <u>f est bien convexe</u>