17/02/2025

Rappels sur les probabilités univariées

Exercice 1

Décrire trois expériences aléatoires puis trois expériences de Bernoulli.

Exercice 2

Une pièce équilibrée est lancée trois fois de suite.
Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

Exercice 3

Déterminer la loi $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 4

Démontrer les propriétés suivantes dans le cas discret: Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace Ω et λ un nombre réel.

1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,
2. $E(\lambda X) = \lambda E(X)$.

Ces propriétés sont des propriétés de *linéarité* de l'espérance mathématique. Elles seront vraies dans le cas discret et dans le cas continu. continu et sont à connaître.

Exercice 5

Démontrer la formule de Bayes.

Exercice 6

Considérons une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre 3.

1. Calculer $P(X = 10)$.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7

Montrer que la loi de Poisson définit bien une loi de probabilités sur $\mathbb{N}$.

Exercice 8

Le nombre de courriels que reçoit François peut être modélisé par une loi de Poisson. Il reçoit 0,2 courriel par minute en moyenne.
Quelle est la probabilité:

1. qu'il ne reçoive aucun courriel dans un intervalle cinq minutes?
2. qu'il reçoive sept courriels dans un intervalle de dix minutes?

Exercice 9

Dans une fabrication en série, 7% des produits présentent un défaut. 40 articles sont contrôlés.

1. Que vaut la probabilité que 4 articles présentent un défaut?
2. Que vaut la probabilité que moins de 4 articles présentent un défaut?

Exercice 10

Dans un atelier, le nombre d'accidents au cours d'une année peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre 5. Calculer la probabilité:

1. qu'il y ait 5 accidents au cours d'une année,
2. qu'il n'y ait pas d'accident au cours d'une année,
3. qu'il y ait plus de cinq accidents au cours d'une année.

Exercice 11

La variable aléatoire U suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2; 5]$.
Calculer $P(U \in [2; 3])$ puis $E(U)$.

Exercice 12

Le temps nécessaire pour réparer un réfrigérateur suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

1. Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures?
2. Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins dix heures sachant que la durée excède neuf heures?

Exercice 13

Soient α un réel strictement positif et X une variable aléatoire dont la densité est définie par:
$f_X(x) = \alpha x^{-\alpha-1}$ pour $x \geq 1$ et $f_X(x) = 0$ sinon.

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition associée.
2. Calculer $P(0 < X \leq 2)$,
3. Pour quelles valeurs de α, la variable aléatoire X admet-elle une espérance? La calculer quand elle existe.

Dans cet exercice, nous avons étudié la loi de Pareto de paramètre α.

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
Montrer que: $P(X > n+k \mid X > k) = P(X > n)$ pour tous entiers naturels k et n.
Nous dirons que la loi géométrique est *sans mémoire*.

Exercice 15

Les œufs pondus par une poule ont une longueur pouvant être modélisée à l'aide d'une loi normale d'espérance 6 et d'écart-type 1,4. Quelle est la probabilité de trouver un œuf:

1. d'une longueur supérieure à 8cm?
2. d'une longueur inférieure à 5cm?

Exercice 16

Les composants d'un autoradio ont une durée de vie pouvant être modélisée par une loi normale d'espérance 2400 (heures d'utilisation) et d'écart-type 300. Un autoradio est utilisé, en moyenne, 1000 heures par an. Quelle est la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 3 ans?

Exercice 17

La durée d'attente à une caisse de supermarché est modélisée par une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$.

1. Combien de temps, en moyenne, attend un client en caisse?
2. Quelle est la probabilité d'attendre moins de trois minutes en caisse?
3. Quelle est la probabilité d'attendre plus de vingt minutes?

Exercice 18

1. Déterminer la fonction de survie associée à la loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$.
2. Montrer que toute fonction de répartition est croissante.
   Justifier qu'elle n'est pas nécessairement strictement croissante.

Exercice 19

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Exercice 20

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y = 2X$.