26/03/2025

Statistiques

Exercice 1

Considérons un échantillon de taille n issu de la loi de exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ.

Exercice 2

La variable aléatoire X suit une loi de densité :

$$f(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1} \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

où le paramètre θ est strictement positif.
En d'autres termes, $f(x, \theta) = 0$ si $x \notin [0; 1]$ et $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}$ si $x \in [0; 1]$.

1. Justifier que, pour tout $\theta > 0$, $f(., \theta)$ définit bien une densité sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $E_\theta(X)$ pour $\theta > 0$.
3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ du paramètre θ.

Exercice 3

Proposer un intervalle de confiance au niveau 0,90 pour la moyenne m pour une variable aléatoire gaussienne de variance 2 dont nous connaissons les observations suivantes : 3,1 ; 2,4 ; 5 ; 7 et 2,8.

Exercice 4

Considérons l'échantillon de 6 observations extraites d'une loi normale de moyenne et de variance inconnues : 7, 6, 4, 8, 5 et 9.
Déterminer un intervalle de confiance au niveau 0,95 pour la moyenne m.

Exercice 5

Considérons l'échantillon de 8 observations extraites d'une loi normale de moyenne 2 et de variance inconnue : 3, 1, 5, 8, 5, 10, 12 et 9.
Déterminer un intervalle de confiance au niveau 0,90 pour la variance σ^2.

Exercice 6

Considérons l'échantillon de 8 observations extraites d'une loi normale de moyenne et de variance inconnues : 3, 1, 5, 8, 5, 10, 12 et 9.
Déterminer un intervalle de confiance au niveau 0,90 pour la variance σ^2.

Exercice 7

François prélève 300 serpents dans une forêt et constate que 70 d'entre eux sont venimeux.
Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour la proportion de serpents venimeux dans cette forêt au niveau de confiance $0,95$.

Exercice 8

Rappelons que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Soit U_n une variable aléatoire suivant une loi $\chi^2(n)$ $(n \geq 1)$.
Sa densité est définie par : $f_{U_n}(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que f_{U_n} définit bien une densité sur $]0;+\infty[$.
2. En admettant que $\phi_{U_n}(t) = \dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}$ est sa fonction caractéristique, montrer que : $E(U_n) = n$ et $V(U_n) = 2n$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\chi^2(m)$ et $\chi^2(n)$.
   Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ suit une loi $\chi^2(m+n)$.

Exercice 9

Soient α un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire dont la densité est définie par :
$f(x,\alpha) = \alpha x^{-\alpha-1}$ pour $x \geq 1$.
La variable aléatoire X suit une loi de Pareto de de paramètre α.
Déterminer la borne de Fréchet pour le paramètre α.

Exercice 10

Considérons un échantillon $(X_1, \ldots, X_k)$ de la loi binomiale de paramètres n(connu et fixé) et p.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p.
2. Déterminer la borne de Fréchet dans ce modèle.
3. L'estimateur trouvé dans la première question est-il efficace ?

Exercice 11

Considérons un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ issu de la loi normale de paramètres m et σ^2.
Montrer que la moyenne empirique est un estimateur efficace du paramètre m.

Exercice 12

Une loi de probabilité $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$, de densité $f(x,\theta)$ est dite *appartenir à la famille exponentielle* s'il existe des fonctions $\alpha_j(\theta)$, $T_j(x)$, $c(\theta)$ et $h(x)$ avec $h(x) > 0$ (réciproquement $\beta(\theta)$ et $b(x)$) telles que :

$$f(x,\theta) = c(\theta)h(x)\exp\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\theta)T_j(x)\right)$$

ou encore

$$\log f(x,\theta) = \beta(\theta) + b(x) + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\theta)T_j(x)$$

Par exemple pour la loi de Poisson, pour $x \in \mathbb{N}$,

$$f(x, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \times \frac{1}{x!} \times \exp(x \log \lambda)$$

en posant $c(\lambda) = e^{-\lambda}$, $h(x) = \dfrac{1}{x!}$, $\alpha_1(\lambda) = \log \lambda$ et $T_1(x) = x$, nous obtenons que la loi de Poisson appartient à la famille exponentielle.

1. Montrer que la loi normale appartient à la famille exponentielle.
2. Montrer que la loi binomiale appartient à la famille exponentielle.
3. Montrer que la loi Gamma appartient à la famille exponentielle.
4. Citer une loi qui n'appartient pas à la famille exponentielle.