La synthèse d'images

- Rappels -

Jonathan Fabrizio

http://jo.fabrizio.free.fr

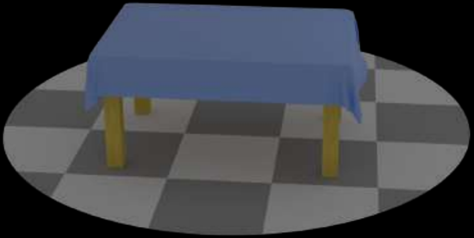
Version : Tue Feb 18 09:48:02 2025

Optique et image

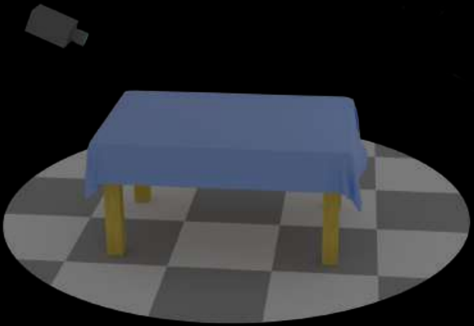
Mathématiques : géométrie euclidienne et projective

Optique et image

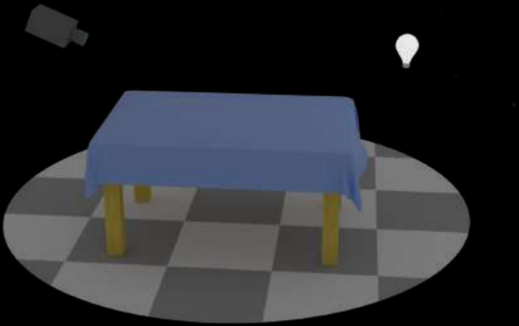
Formation de l'image

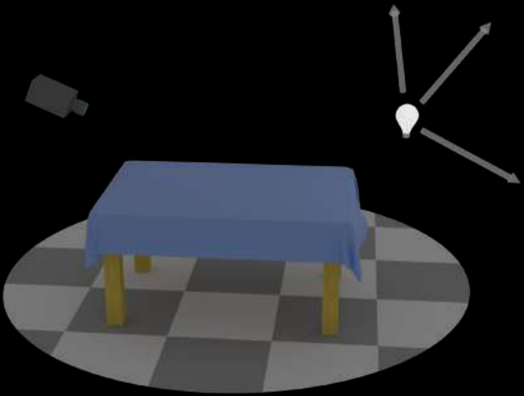


Formation de l'image

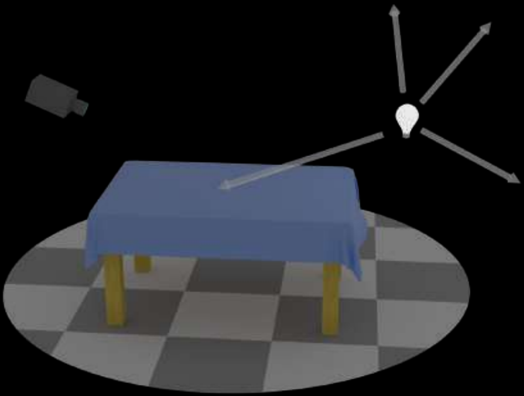


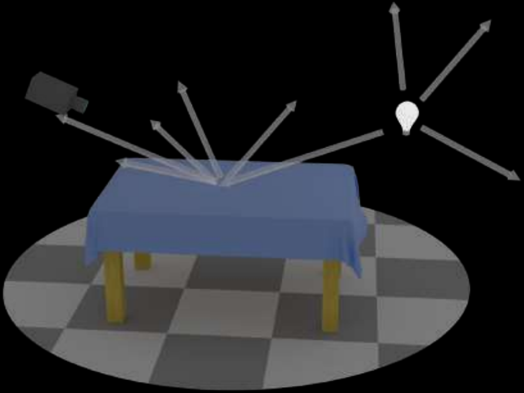
Formation de l'image



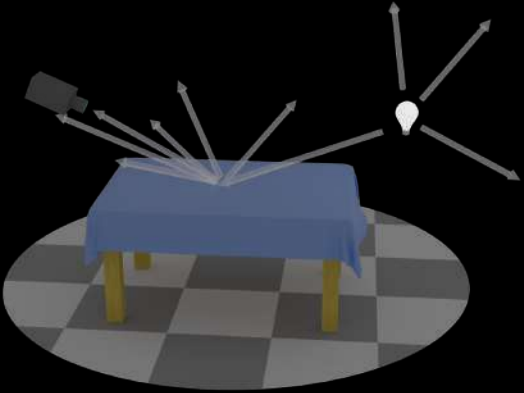


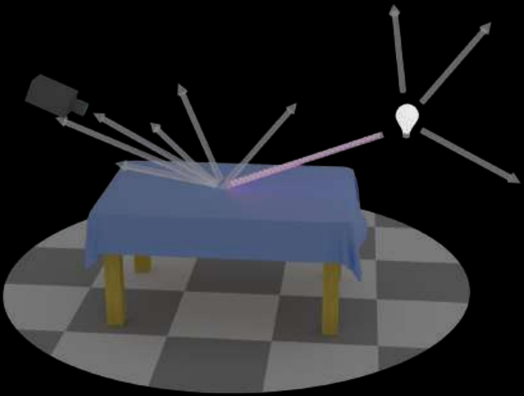
Formation de l'image

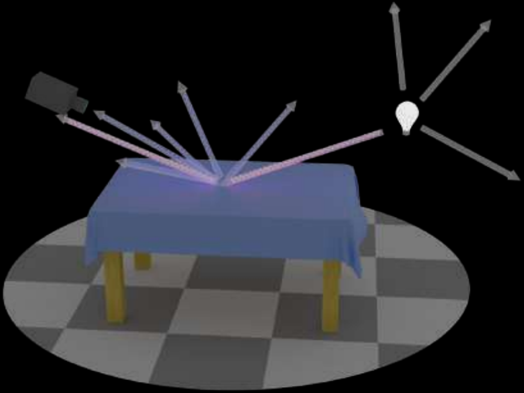


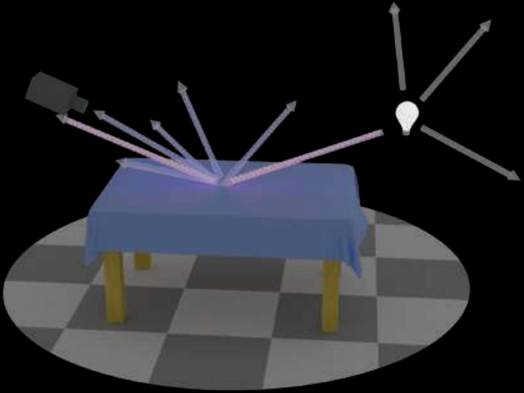


Formation de l'image



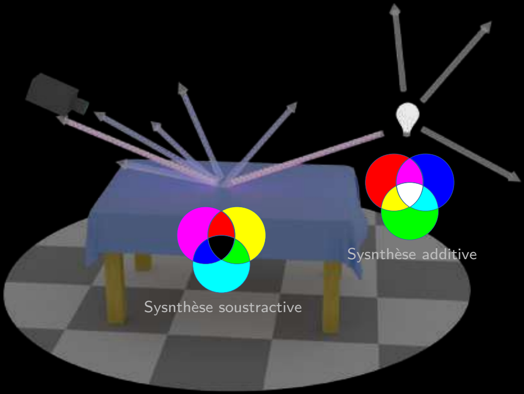


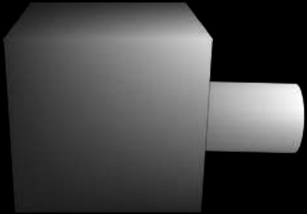


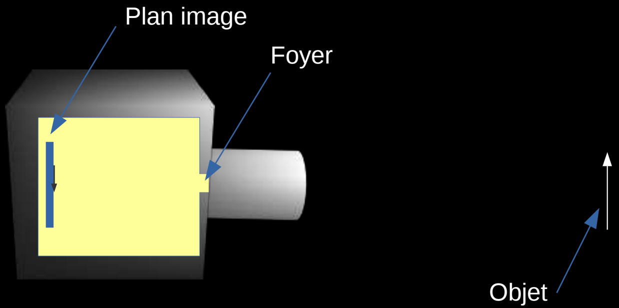


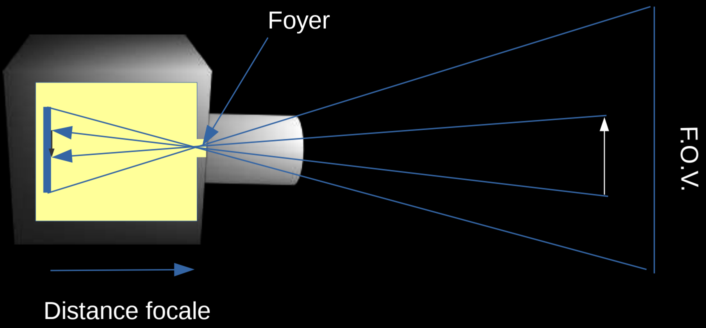
Quelles sont les couleurs primaires ?

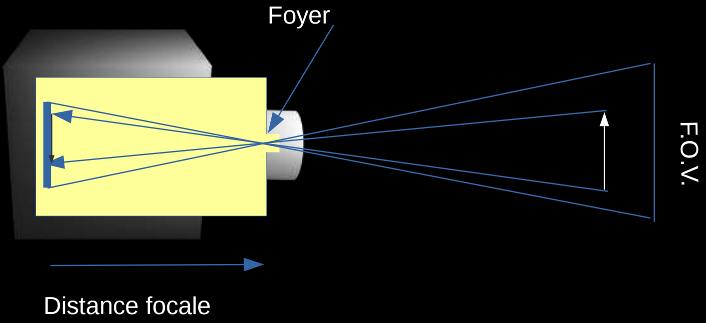
Formation de l'image

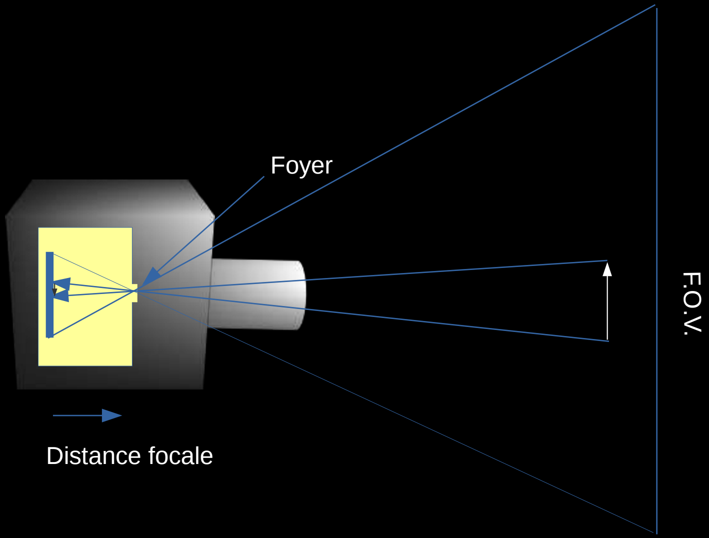


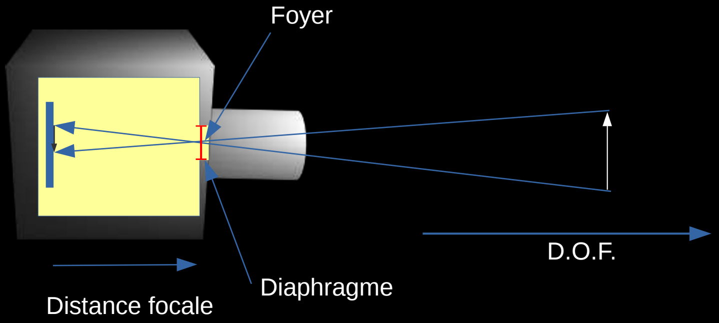


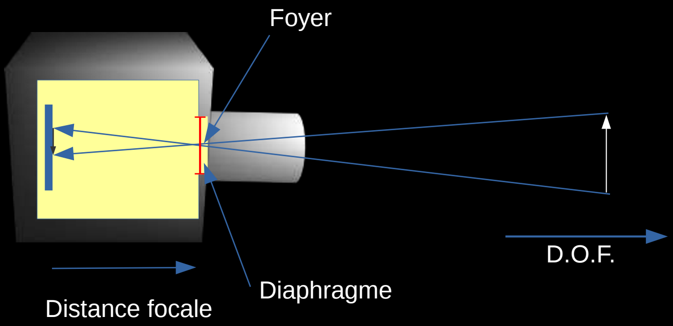

Plan image
Foyer
Objet

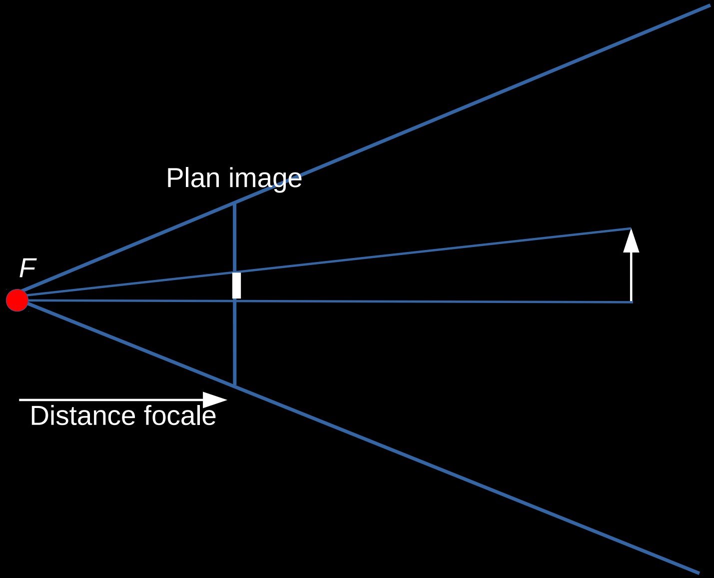

Foyer
F.O.V.
Distance focale


Foyer
F.O.V.
Distance focale

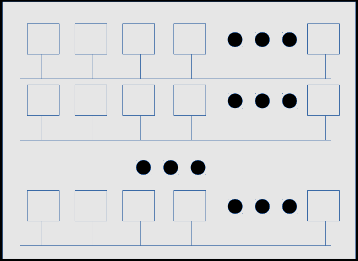

Foyer
F.O.V.
Distance focale


Foyer
D.O.F.
Diaphragme
Distance focale

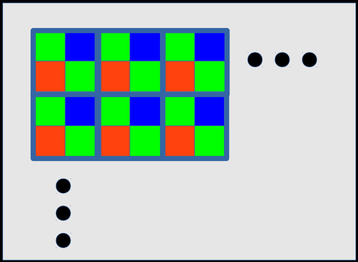

Foyer
D.O.F.
Diaphragme
Distance focale


Plan image
F
Distance focale

Capteurs : CCD, CMOS...



Niveau de gris

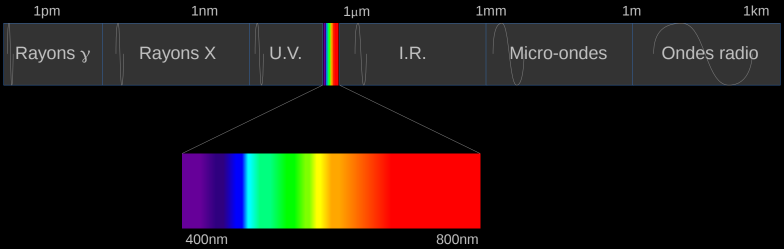


Couleur (*Bayer pattern*)

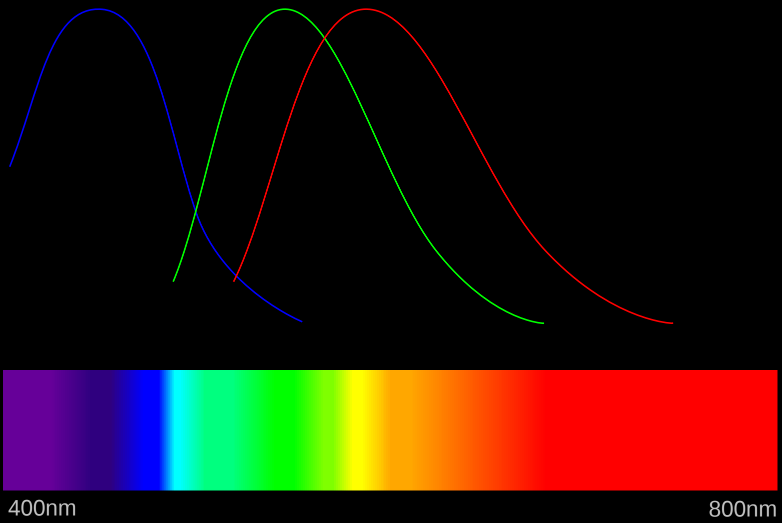
Pourquoi ces couleurs ?

Pourquoi deux fois plus de vert ?

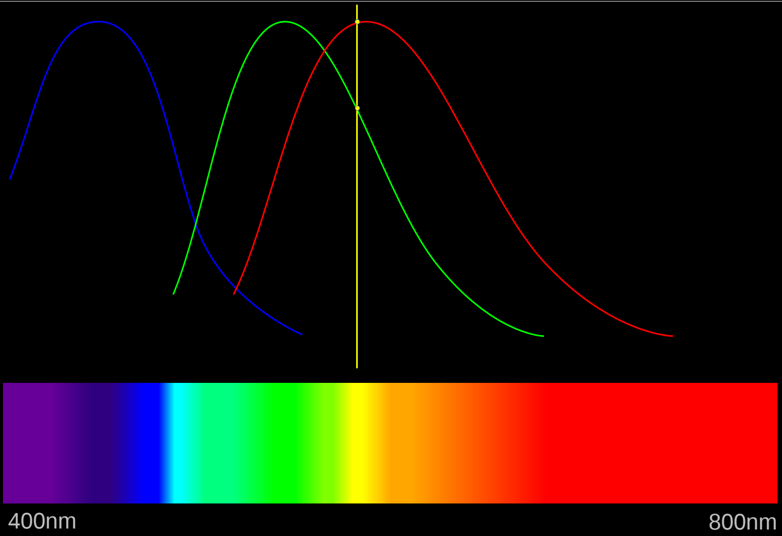
Le spectre :


1pm
1nm
1µm
1mm
1m
1km
Rayons γ
Rayons X
U.V.
I.R.
Micro-ondes
Ondes radio
400nm
800nm

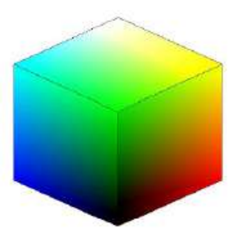
La perception humaine :



La perception humaine :

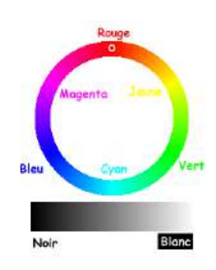


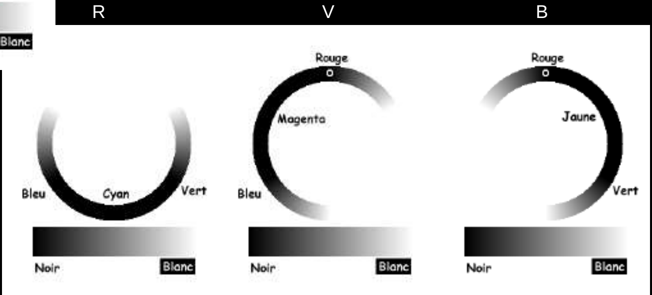
Codage de la couleur



- Modèle RGB
  - On code une couleur par la quantité de rouge, de vert et de bleu que contient cette couleur
    - Une couleur est alors un point du cube
  - Modèle directement lié à notre perception

Codage de la couleur





Génération d'une image synthétique :

- Simuler les phénomènes optiques qui conduisent à la formation de l'image

Mathématiques : géométrie euclidienne et projective

- Produit scalaire : forme bilinéaire, symétrique, définie positive
- Espace pré-hilbertien $(E, |)$ réel
  - E : R-espace vectoriel
  - $|$: produit scalaire
- Espace euclidien
  - Espace pré-hilbertien réel de dimension finie

- Espace affine $\mathcal{F}$ de E (e.v) :
  - $\mathcal{F}$ s.e.v. de E
  - Soit $A \in E, \forall x \in \mathcal{F}; A + x \in \mathcal{F}$
- Cas particuliers :
  - Dim 0 $=>$ un point
  - Dim 1 $=>$ une droite affine
  - Dim 2 $=>$ un plan affine
- Repère cartésien de $\mathcal{F}$: (O, B) avec O un point de $\mathcal{F}$ et B une famille de vecteurs de $\mathcal{F}$ formant une base de $\mathcal{F}$.

- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une norme N sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$ tel que :
  - $\forall u \in E, N(u) \geq 0$
  - $\forall u \in E, N(u) = 0 \iff u = 0$
  - $\forall (u, \lambda) \in (E \times \mathbb{R}), N(\lambda u) =\mid \lambda \mid N(u)$
  - $\forall (u, v) \in E^2, N(u + v) \leq N(u) + N(v)$
- Définition associée au produit scalaire :
  - $N(u) = \sqrt{u \mid u}$: norme euclidienne

- Produit Mixte :
  - $[u, v, w] = det(u, v, w)$
  - $= (u \times v).w$
  - Donne le volume du parallélépipède
- Produit vectoriel : le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :
  - $\vec{w}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
  - $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \left|\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right|$;
  - la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct.

  Ou par le produit mixte :
  - $\exists! x(x = u \times v); [u, v, w] = x.w$
  - $\|u \times v\|$ aire du parallélogramme
  - $\frac{1}{2}\|u \times v\|$ aire du triangle

Vecteurs et angles en euclidien

- Produit scalaire : $u.v = \|u\|\|v\|cos(u, v)$
- Produit vectoriel : $u \times v = \|u\|\|v\|sin(u, v)$
- $u.v = 0 \iff u$ et v ortho.
- $(u.v)^2 + (u \times v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$
- Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul par définition.

Équation de droites

- 2D
  - Cartésienne
  - Implicite
  - Paramétrique
- 3D
  - Cartésienne
  - Implicite
  - Paramétrique

Définitions

- 2D
- 3D

Équation d'un plan

- 3D
    - Cartésienne
    - Implicite
    - Paramétrique

Équation d'un cercle/d'une sphère

- 2D/3D
  - Cartésienne
  - Implicite
  - Paramétrique

- Utilité du déterminant :
  - Équation de droite passant par $(x1, y1)$ et $u(a, b)$
  - $\begin{vmatrix} x - x_1 & a \\ y - y_1 & b \end{vmatrix} = 0$
  - Équation de droite passant par (x1, y1) et (x2, y2)
  - $\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 \\ y - y_1 & y - y_2 \end{vmatrix} = 0$
- Idem pour l'équation d'un plan dans un espace 3D

- Intersection droite/plan
- Intersection droite/sphere

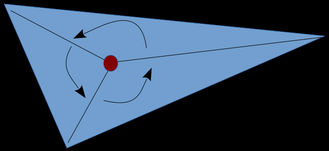
- Intersection droite/plan
- Intersection droite/sphere
  - Calcul de l'intersection dans le repère local ou global ?

Intersection droite/plan

- Droite : $P + t\vec{v}$
- Plan $ax + by + cz = d$ ou $\vec{N}.\vec{X} = d$
- $\vec{N}.(P + t\vec{v}) = d$
- $t_i = \frac{(d - \vec{N}.P)}{\vec{N}.\vec{v}}$
  - Cas particulier si d parallèle au plan ($\vec{N}.\vec{v} = 0$).
- $I = P + t_i\vec{v}$

Intersection droite/plan $\rightarrow$ droite/triangle

- Vérifier que I est dans le triangle ABC
  - Exprimer I en fonction de A, B et C.
    - Les coordonnées barycentriques doivent être toutes positives
  - Déterminer les équations de chaque coté du triangle
    - Déterminer la position de I vis à vis de chaque coté i.e. $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c > 0$
  - Avec l'algorithme de Cyrus-Beck
  - En regardant l'orientation du sens de parcours



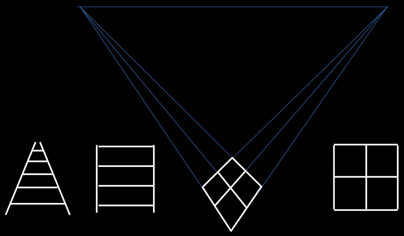
Intersection droite/sphère

- Idem que pour le plan mais avec l'équation de la sphère. 3 cas possibles :
    - Pas de solution (pas d'intersection)
    - Solution double (la droite touche la surface de la sphère)
    - Deux solutions distinctes (la droite traverse la sphère)

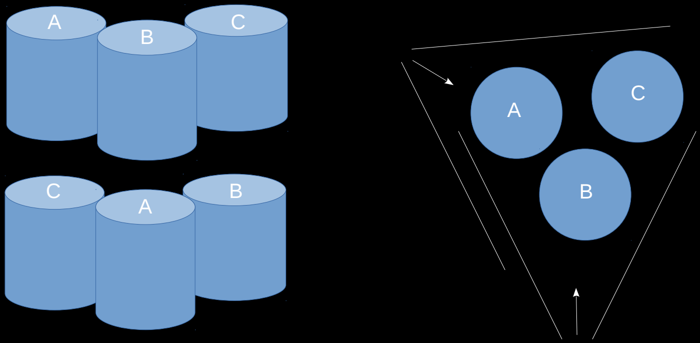
- Distance point/droite
  - $d(p, D) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$
  - $d(p, D) = \frac{|\vec{AM}.\vec{n}|}{\|n\|}$
- Distance point/plan
  - $d(p, P) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$
  - $d(p, P) = \frac{|\vec{AM}.\vec{n}|}{\|n\|}$
- Distance droite/droite $D_i(A_i, \vec{v_i})$
  - $d(D_1, D_2) = [\vec{A_1 A_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}]/\|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\|$
- Distance sphere/sphere

Géométrie projective

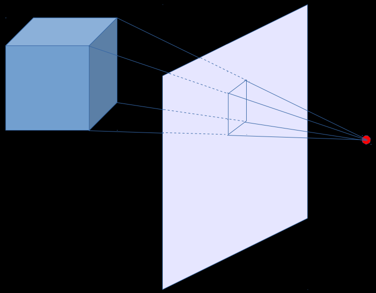
- Géométrie euclidienne :
  - Étude des formes des “objets”
  - Invariance par rotation, translation, réflexion
- Géométrie projective :
  - Étude des objets tel qu’ils sont vus
  - Perception des angles, des distances, du parallélisme distordu



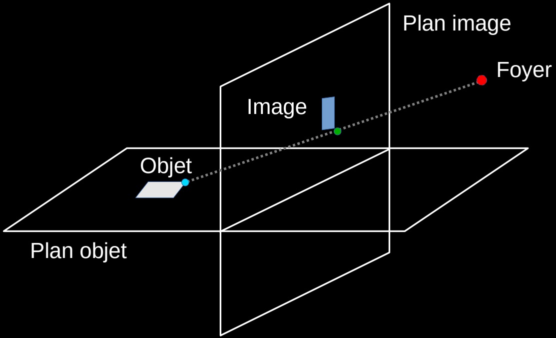
Géométrie projective



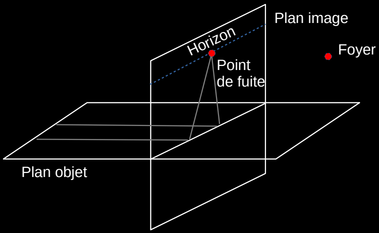
- Projection sur le plan image

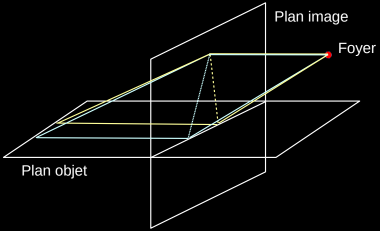


- Projection sur le plan image

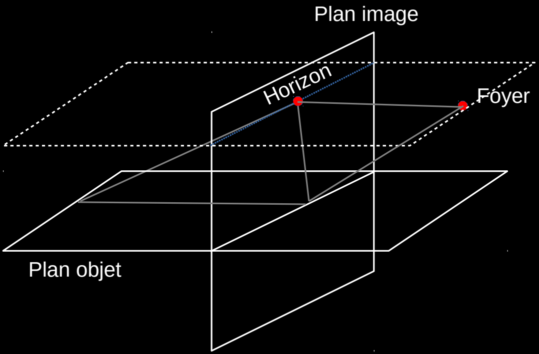


- Point de fuite

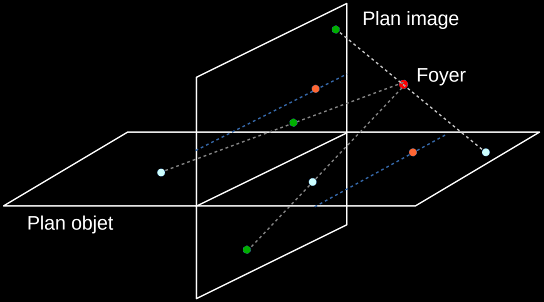




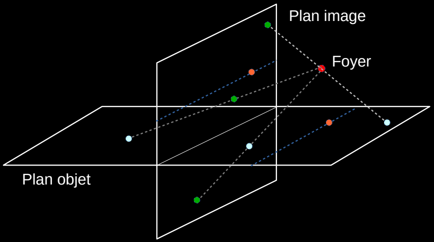
- Horizon : Intersection du plan passant par le foyer et parallèle au plan objet

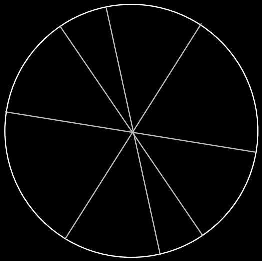


- Points à l'infini



- Points à l'infini
  - On ajoute aux plans des points à l'infini
  - Un ensemble de droites parallèles convergent vers ce point à l'infini





Dans le plan

- RP^2 est l'ensemble des triplets $[p] = [p1, p2, p3]$ avec $(p1, p2, p3)$ dans $\mathbb{R}^3$ privé de $(0, 0, 0)$
- Deux points p et q sont égaux si et seulement si il existe un k dans R^* tel que :
  - $p_1 = kq_1$ et $p_2 = kq_2$ et $p_3 = kq_3$

$[p] = [p_1, p_2, p_3]$
Deux cas :

- $p_3 = 0$ $[p_1, p_2, p_3] = [p_1, p_2, 0] \in RP^2$
- $p3 \neq 0$ $[p_1, p_2, p_3] = [p_1/p_3, p_2/p_3, 1] \in RP^2$

Homogènes : peut représenter les points euclidiens et les points idéaux
$[a, b, 0]$: (a, b) donne la direction des droites associées

Idem pour une droite projective et pour l'espace 3D

Représentation des transformations usuelles dans l'espace projectif

- Translation
- Echelle
- Rotation
- Projection

Combinaison des transformations

Translation

Translation

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mise à l'échelle

Mise à l'échelle

- $$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation

Rotation

- Suivant un axe : $\begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 & 0 \\ \sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$

Rotation

- Suivant un axe : $\begin{pmatrix} \cos & -\sin & 0 & 0 \\ \sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$
- Suivant un axe quelconque :

$$\begin{pmatrix} x^2(1-\cos)+\cos & xy(1-\cos)-z\sin & xz(1-\cos)+y\sin & 0 \\ yx(1-\cos)+z\sin & y^2(1-\cos)+\cos & yz(1-\cos)-x\sin & 0 \\ xz(1-\cos)-y\sin & yz(1-\cos)+x\sin & z^2(1-\cos)+\cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Modélisation des rotations : Attention ; L'ordre des rotations compte.

- Spécifier un ordre suivant les 3 axes O_x, O_y et O_z
- Spécifier l'axe de rotation
- Utilisation des quaternions
  - $Q = a + bi + cj + dk$
  - a, b, c, d réels $\rightarrow$ a partie réelle et (b, c, d) partie imaginaire
  - $I^2 = j^2 = k^2 = -1$
  - $i.j = k; j.k = i; k.i = j$
  - $j.i = -k; k.j = -i; i.k = -j$
  - Les quaternions unités (norme $(\mathrm{Q}) = 1$) permettent une représentation plus compacte de n'importe qu'elle rotation

Projection perspective

Combinaison des transformations