1 Convergence normale

1.1 Définition

Définition 1

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur I.

On dit que $\sum f_n$ *converge normalement* sur I si $\begin{cases} \bullet \text{ pour } n \text{ assez grand } \underset{x\in I}{\operatorname{Sup}}\left|f_n(x)\right| \text{ existe} \\ \text{et} \\ \bullet \text{ la série numérique } \sum \underset{x\in I}{\operatorname{Sup}}\left|f_n(x)\right| \text{ est convergente.} \end{cases}$

Exemple

Soit la série de fonctions $\sum f_n$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$$

Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ revient à étudier la convergence de la série numérique $\sum \underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{Sup}}\left|f_n(x)\right|$.

Or $\underset{x\in\mathbb{R}}{\operatorname{Sup}}\left|f_n(x)\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ ssi $\alpha > 1$.

2 Lien entre la convergence normale et la convergence uniforme

Proposition 1

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ convergeant normalement sur I.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I.