



# Fonctions de plusieurs variables

## 2. Intégrales multiples

---

**Edouard Marchais<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>EPITA, 14-16 Rue Voltaire, 94270 Le Kremlin-Bicêtre, France.

E-mail: [edouard.marchais@epita.fr](mailto:edouard.marchais@epita.fr)

**ABSTRACT:** Le concept d'intégrale multiple est présenté en détails ainsi que les méthodes pour l'évaluer. Nous commençons par le cas de l'intégrale double que nous interprétons comme des intégrales successives puis on introduit la notion de changement de coordonnées pour développer le domaine d'application de l'intégrale double. Dans une seconde partie, nous nous concentrerons sur l'intégrale triple et le calcul de volume. Les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques sont discutés en détails. Dans notre présentation nous utilisons des exemples empruntés à la géométrie ainsi qu'à la physique. Des exercices pour chaque section sont fournis en annexe.

---

## TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Intégrales doubles</b>	<b>2</b>
1.1	Limite de somme	2
1.2	Séparer une intégrale double en deux intégrales simples	4
<b>2</b>	<b>Changement de variables</b>	<b>10</b>
2.1	Changement en coordonnées polaires	11
2.2	Changement de coordonnées général	14
<b>3</b>	<b>Intégrales triples</b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Coordonnées cylindriques et sphériques</b>	<b>24</b>
4.1	Coordonnées sphériques	26
4.2	Exemple physique	28
4.3	Changement de coordonnées - facteur de déformation $J$	30
<b>A</b>	<b>Systèmes de coordonnées spatiales</b>	<b>32</b>
A.1	Coordonnées cylindriques	32
A.2	Coordonnées sphériques	32
A.3	Relations entre les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques	33
<b>B</b>	<b>Jacobiens</b>	<b>34</b>
<b>C</b>	<b>Exercices</b>	<b>37</b>
C.1	Intégrales doubles	37
C.2	Changement de variables	38
C.3	Intégrales triples	38
C.4	Coordonnées cylindriques et sphériques	39

---

# 1 INTÉGRALES DOUBLES

**OBJECTIFS.** Notre principal but est de montrer comment intégrer des fonctions de deux ou plusieurs variables. Pour cela on définit dans une premier temps l'intégrale double comme la limite d'une sommes puis, dans un deuxième temps, nous trouvons un moyen rapide de la calculer. L'idée centrale dans notre démarche est de remplacer une *intégrale double* par deux *intégrales simples* ordinaires. Pour être plus précis, lorsque l'on veut évaluer l'intégrale  $\iint f(x, y) dy dx$ , on commence par évaluer  $\int f(x, y) dy$ . On intègre par rapport à  $y$  et  $x$  est considéré comme un paramètre fixe, le résultat est donc une fonction de  $x$ . Maintenant, on intègre à nouveau, cette fois par rapport à  $x$ . Dans ce processus il faut faire *extrêmement* attention aux limites des intégrales successives. Très souvent ces limites sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ , et leur interprétation correcte constitue la partie la plus difficile du calcul intégral à plusieurs variables. Dans ce sens, nous prenons un soin tout particulier dans notre présentation à décrire et interpréter géométriquement les domaines d'intégration qui sont directement liés à ces limites.

**APPROCHE.** Afin d'introduire des intégrales multiples, on fait habituellement usage aux notions de somme et de limite et ceci pour deux raisons principales. Tout d'abord on doit avoir une définition et une méthode de calcul sur lesquels se reposent lorsque ces intégrales deviennent difficiles voir impossibles à effectuer analytiquement, c'est-à-dire à la main. Ensuite, et c'est important, il faut garder à l'esprit que les *intégrales multiples* représentent plus que des surfaces et des volumes. Ces notions qui les accompagnent sont les plus faciles à comprendre et on peut presque voir le volume comme une « somme de tranches » ou une « double somme de petits bâtons ». Cependant, dans la pratique, ces images ne sont que des étapes intermédiaires afin de construire une intégrale multiple. Ces figures géométriques seront systématiquement additionnées et l'intégrale sera définie formellement comme la *limite de cette somme* lorsque certaines des dimensions de ces figures tendront vers zéro. Il faut donc garder un peu de recul, et faire la distinction, entre la manière dont nous allons définir une intégrale en deux et trois dimensions, et les applications que nous en ferons. À présent, on commence donc par discuter du calcul d'*aire* et de *volume* par l'intermédiaire d'intégrales doubles.

## 1.1 Limite de somme

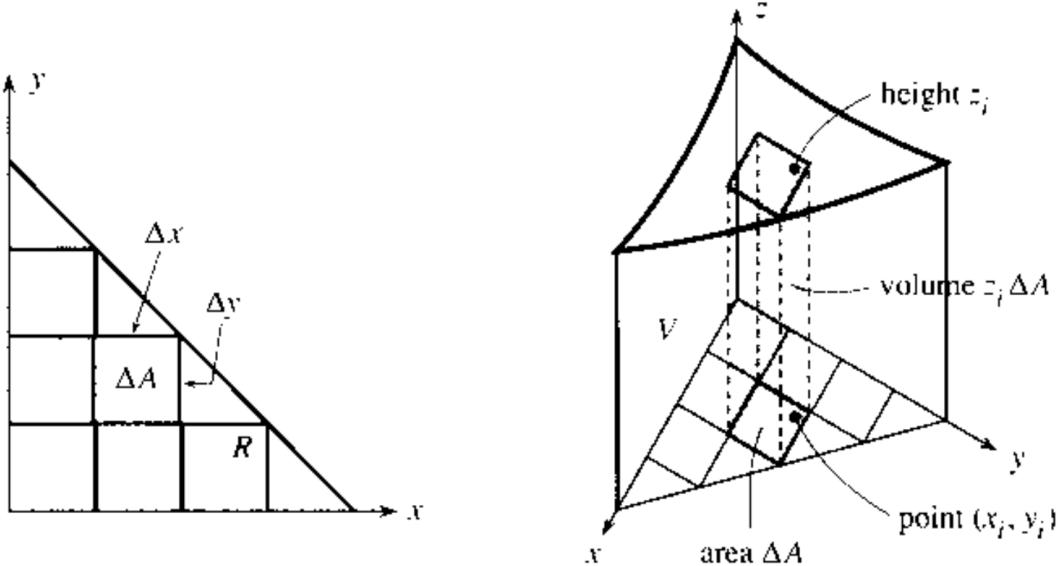
**INTRODUCTION GÉOMÉTRIQUE.** Le graphique de  $z = f(x, y)$  est une surface courbe au-dessus du plan  $xy$  et pour un point  $(x, y)$  du plan on peut lui associer la hauteur  $z$  de cette surface en ce point. La surface est naturellement située au-dessus du plan  $xy$  lorsque  $z$  est positif. De plus, les volumes (géométriques) situés sous le plan sont accompagnés de signes moins, comme les aires situées sous l'axe des  $x$  dans le cas à une variable. Nous commençons par choisir une fonction  $f$  strictement positive pour tout valeur de  $x$  et  $y$ , par exemple  $z = 1 + x^2 + y^2$ . On considère ensuite un « solide » dont la base forme une région  $R$  dans le plan  $xy$ . Cette région sera découpée en petits rectangles élémentaires de côtés  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . Si  $R$  correspond à un rectangle défini par  $0 < x < 1$  et  $0 < y < 2$  alors les rectangles élémentaires s'ajustent parfaitement. Par contre, si le domaine  $R$  correspond à un triangle ou à un cercle, les rectangles élémentaires manquent une partie du domaine  $R$ . Cependant, dans la limite où la taille de ces rectangles élémentaires est prise infiniment petite, ceux-ci permettent de couvrir toute la région  $R$  en supposant la frontière de celle-ci est « lisse<sup>1</sup> » (*smooth*) par morceaux.

**INTERPRÉTATION DU VOLUME GÉOMÉTRIQUE.** On en arrive maintenant à la question centrale, *quel est le volume situé au-dessus de la surface  $R$  et en dessous du graphique de  $z = f(x, y)$*

---

<sup>1</sup>c'est-à-dire de classe  $C^\infty$  ou « infiniment dérivable ».

? C'est précisément une intégrale double, l'intégrale de  $f(x, y)$  sur de domaine  $R$  et pour l'évaluer, nous allons la considérer comme une somme, comme suggéré par **Figure 1 (gauche)**.



**Figure 1:** Base  $R$  coupée en petits morceaux  $\Delta A$ .  $v$  solide coupé en bâtonnets minces  $\Delta V = z\Delta A$ .

On se rappelle que, dans le cas d'une intégrale simple, l'intervalle  $[a, b]$  est divisé en petits segments infinitésimaux de longueur  $\Delta x$ . De manière analogue, pour une intégrale double, nous avons divisé  $R$  en rectangles élémentaires d'aire  $\Delta A = (\Delta x)(\Delta y)$  et au-dessus du  $i$ -ème rectangle on identifie une « petite colonne rectangulaire » de hauteur  $z_i$  avec un volume associé. Ce volume est simplement la surface de base  $\Delta A$  fois la hauteur au-dessus, sauf que cette hauteur  $z = f(x, y)$  varie d'un point à l'autre et donc d'un rectangle à l'autre. Par conséquent, nous sélectionnons un point  $(x_i, y_i)$  dans le  $i$ -ème rectangle, et calculons le volume à partir de la hauteur  $z_i = f(x_i, y_i)$  au-dessus de ce point. On a alors

$$\text{Volume de toutes les colonnes} = \sum \text{Volume d'une colonne} = \sum_i f(x_i, y_i) \Delta A$$

**PASSAGE À LA LIMITÉ.** L'étape précédente est cruciale pour toute intégrale, c'est-à-dire la regarder comme une somme de petits éléments. On prend maintenant les limites  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta y \rightarrow 0$  et dans ce cas la hauteur  $z = f(x, y)$  est presque constante sur chaque rectangle (nous supposons que  $f$  est une fonction continue). La somme se rapproche alors d'une limite qui ne dépend que de la base  $R$  et de la surface au-dessus. Cette limite est le volume du solide et c'est l'*intégrale double* de  $f(x, y)$  sur  $R$ . On écrit alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_i f(x_i, y_i) \Delta A \quad (1.1)$$

La limite est la même pour tous les choix de rectangles et de points  $(x_i, y_i)$ . Les rectangles ne rentreront pas exactement dans  $R$ , si l'aire de base est courbe par exemple. De même les hauteurs ne sont pas exactes si la surface  $z = f(x, y)$  est également courbe. Mais ces erreurs sur les côtés et la hauteur d'une colonne, c'est-à-dire là où la base d'une colonne et sa hauteur ne correspondent pas exactement au volume que l'on cherche à couvrir, s'approchent de zéro dans la limite. On peut

également visualiser ces erreurs comme le volume d'une « couche » entourant le solide, qui s'amincit lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta y \rightarrow 0$ . Une démonstration plus soigneuse demande beaucoup de temps et ses bénéfices du point de vue pratique ne sont pas évident, nous nous limitons donc à cette discussion pour la construction de l'intégrale double. L'essentiel est que la formule (1.1) permet de vérifier les propriétés fondamentales de l'intégrale double qui jouent un rôle central dans le calcul pratique.

**PROPRIÉTÉS.** Soit  $f(x, y)$  une fonction continue par morceaux sur un domaine  $R$  appartenant au plan  $xy$ . Dans ce cas on définit l'intégrale double de  $f$  sur  $R$  par l'expression (1.1) et les deux propriétés suivantes sont vérifiées.

- (1) L'intégrale double est *linéaire*, c'est-à-dire que si  $g(x, y)$  est une fonction continue par morceau et  $\alpha, \beta$  sont deux nombres réels alors

$$\iint_R (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \iint_R f dA + \beta \iint_R g dA$$

- (2) Si on peut diviser la région  $R$  en deux parties  $S$  et  $T$  adjacentes et distinctes, c'est-à-dire si  $R = S \cup T$  et  $S \cap T = \emptyset$  excepté à la frontière de  $S$  et  $T$ , alors

$$\iint_R f dA = \iint_S f dA + \iint_T f dA$$

- (3) Si  $g(x, y)$  est une fonction continue par morceau et  $f(x, y) \geq g(x, y)$  sur  $R$  alors

$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

- (4) Soient  $m$  et  $M$  des nombres réels et  $\mathcal{A}$  est l'aire de la région  $R$ . Dans ce cas, si  $m \leq f(x, y) \leq M$  sur  $R$  alors

$$m \cdot \mathcal{A} \leq \iint_R f(x, y) dA \leq M \cdot \mathcal{A}$$

- (5) Si  $f(x, y) = g(x)h(y)$  sur la région  $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$  alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \left[ \int_a^b g(x) dx \right] \times \left[ \int_c^d h(y) dy \right]$$

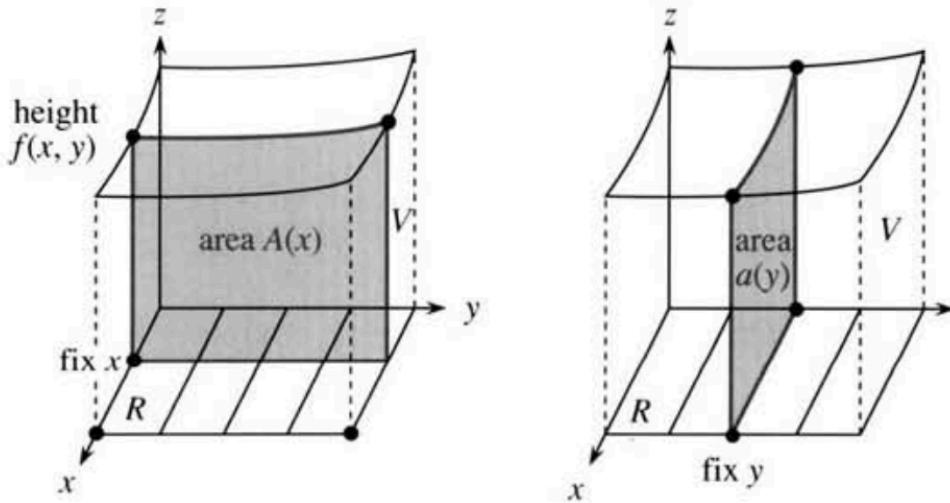
L'écriture générale  $dA$  pour la mesure d'intégration indique que d'autres formes que des rectangles sont possibles pour couvrir la région  $R$ . Par exemple, les *coordonnées polaires* produisent un facteur supplémentaire  $r$ , par rapport aux coordonnées cartésiennes, dans  $dA = r dr d\theta$ . Cependant, pour le moment, nous utilisons  $dA = dx dy$  afin de faciliter le « découpage » des régions sur lesquelles nous allons intégrer. Le problème de changement de coordonnées sera abordé par la suite.

## 1.2 SÉPARER UNE INTÉGRALE DOUBLE EN DEUX INTÉGRALES SIMPLES

**INTÉGRATION SUCCESSIVES.** On va maintenant considérer l'intégrale double  $\iint f(x, y) dy dx$  comme la succession d'intégrales simples en  $y$  puis en  $x$ . On peut également avoir l'ordre inverse en écrivant  $\iint f(x, y) dx dy$  auquel cas l'intégration à d'abord lieu sur  $x$  puis sur  $y$ . Dans un cas comme dans l'autre, on devra d'abord évaluer l'aire d'une tranche, ce qui correspond à une seule intégrale simple. Puis vient ensuite une deuxième intégrale qui va additionner, ou sommer, les tranches afin de construire un volume. La géométrie des tranches dépendra de cette du volume solide que l'on cherche à couvrir. Pour un volume dont la frontière est courbe on pourra utiliser des disques en guise de tranche d'intégration.

**APPROCHE GÉOMÉTRIQUE.** On considère à présent une fonction  $f(x, y)$  dont la surface est indiquée sur la **Figure 2 (gauche)** et on identifie une tranche d'aire  $A(x)$  sur le volume situé en dessous de la surface  $z = f(x, y)$ . Elle coupe le solide à une valeur fixe de  $x$ . La coupure commence à  $y = c$  d'un côté de  $R$  et se termine à  $y = d$  de l'autre côté. Par exemple, si  $R$  est un rectangle avec  $0 \leq y \leq 2$  alors on aurait  $c = 0$  et  $d = 2$ . L'aire d'une tranche est l'intégrale par rapport à  $y$  de  $f(x, y)$ . Comme  $x$  est fixe et que  $y$  varie de  $c$  à  $d$  on peut écrire que

$$A(x) = \text{aire de la tranche} = \int_c^d f(x, y) dy$$



**Figure 2:** Une tranche de  $v$  à un  $x$  fixe possède une aire de  $A(x) = \int f(x, y) dy$ .

**Exemple 1.** On considère l'intégrale simple suivante

$$I = \int_{y=0}^2 (1 + x^2 + y^2) dy = \left[ y + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} = 2 + 2x^2 + \frac{8}{3}$$

C'est l'inverse d'une dérivée partielle! L'intégrale de  $x^2 dy$ , avec  $x$  constant, est  $x^2 y$ . Cette «intégrale partielle» est en fait appelée *intégrale interne*. Après avoir substitué les limites  $y = 2$  et  $y = 0$  et soustrait, nous avons l'aire  $A(x) = 2 + 2x^2 + 8/3$ . Maintenant, l'*intégrale externe* ajoute ces tranches pour trouver le volume  $\int A(x) dx$ . La réponse finale est un *nombre* correspondant au volume (géométrique) entre la surface  $z = f(x, y)$  et le plan  $xy$ . On a

$$\text{volume} = \int_{x=0}^1 \left( y + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) dx = \left[ 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}x \right]_0^1 = 2 + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Pour compléter cet exemple, on peut recalculer le volume lorsque l'intégrale par rapport à  $x$  vient en premier, voir la **Figure 2 (droite)**. Cela donne

$$\text{intégrale interne} = \int_{x=0}^1 (1 + x^2 + y^2) dx = \left[ x + \frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3} + y^2$$

$$\text{intégrale externe} = \int_{y=0}^2 \left( \frac{4}{3} + y^2 \right) dy = \left[ \frac{4}{3}y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

**THÉORÈME DE FUBINI.** Le fait que les intégrales doubles puissent être divisées en intégrales simples se résume en fait en terme d'un théorème précis, connu sous le nom de *Théorème de Fubini*. Si  $f(x, y)$  est continue sur un *domaine rectangulaire*  $R$  appartenant au plan  $xy$ , alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (1.2)$$

Dans ce contexte, les intégrales internes sont vues comme les aires transversales  $A(x)$  et  $a(y)$ , voir la **Figure 2**. Les intégrales externes additionnent (ou somment) les volumes  $A(x) dx$  et  $a(y) dy$ . Notez bien l'inversion des limites. Normalement les crochets dans la formule (1.2) sont omis. Lorsque l'intégrale sur  $y$  est la première,  $dy$  est écrit à gauche de  $dx$ . Il faut bien faire attention à ce que *les limites sur  $y$  soient aussi à l'intérieur*. Il est recommandé de calculer l'intégrale interne sur une ligne et l'intégrale externe sur une autre ligne *séparée*.

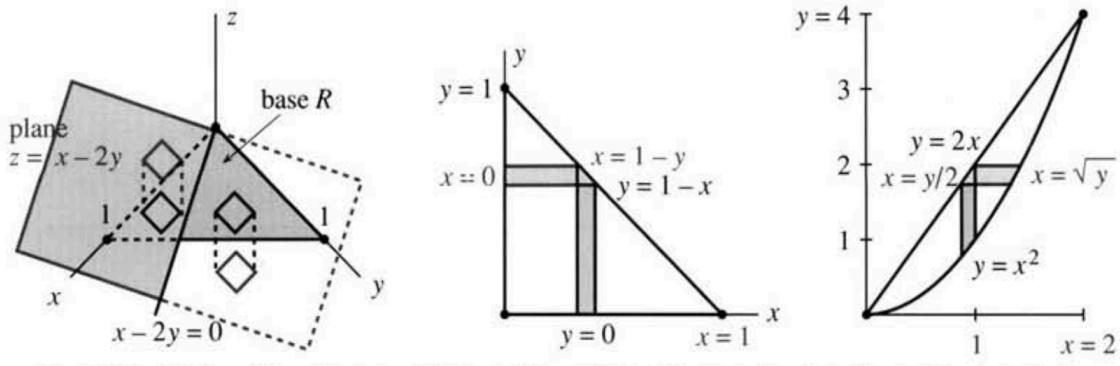


Figure 3: Figures pour à l'Exemples 1.2.

### Exemple 2.

- (1) On veut trouver le volume sous le plan  $z = x - 2y$  et au-dessus du triangle de base  $R$ . Pour cela on remarque d'abord que le triangle  $R$  possède des côtés sur les axes  $x$  et  $y$  et la ligne  $x + y = 1$  (voir la **Figure 3 (gauche)**). Les bandes dans la direction  $y$  ont des longueurs variables (les bandes dans la direction  $x$  également). C'est le but principal de cet exemple, c'est-à-dire que la base n'est pas un rectangle. La limite supérieure de l'intégrale interne change à mesure que  $x$  change. *Le haut du triangle est en  $y = 1 - x$* . La **Figure 3 (milieu)** montre les bandes. La région doit toujours être dessinée (sauf pour les rectangles). Sans figure, les limites sont difficiles à trouver. Un croquis de  $R$  facilite les choses. En suivant le dessin on a

$$y \text{ passe de } c = 0 \text{ à } d = 1 - x \text{ puis } x \text{ passe de } a = 0 \text{ à } b = 1$$

L'intégrale interne a des *limites variables* et l'intégrale externe a des *limites constantes*, soit

$$\text{intérieur : } \int_{y=0}^{y=1-x} (x - 2y) dy = [xy - y^2]_{y=0}^{y=1-x} = x(1-x) - (1-x)^2 = -1 + 3x - 2x^2$$

$$\text{extérieur : } \int_{x=0}^1 (-1 + 3x - 2x^2) dx = \left[ -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = -1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

Le volume est négatif donc la plupart du solide est en dessous du plan  $xy$ . Pour vérifier la réponse  $-1/6$ , on effectue d'abord l'intégrale par rapport à  $x$ , dans ce cas  $x$  passe de  $0$  à  $1-y$ , puis  $y$  passe de  $0$  à  $1$ . Alors on écrit

$$\text{intérieur : } \int_{x=0}^{x=1-y} (x - 2y) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - 2xy \right]_{x=0}^{x=1-y} = \frac{1}{2}(1-y)^2 - 2(1-y)y = \frac{1}{2} - 3y + \frac{5}{2}y^2$$

$$\text{extérieur : } \int_{y=0}^1 \left( \frac{1}{2} - 3y + \frac{5}{2}y^2 \right) dy = \left[ \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{6}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

La réponse est identique et donc probablement juste. Dans l'exemple suivant on calcule l'aire de  $R$  donnée par l'intégrale  $\iint dxdy$  sur ce domaine.

- (2) La superficie de région  $R$  de la **Figure 3 (milieu)** est donnée par l'intégrale

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} dy dx \quad \text{ou} \quad \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} dy dx$$

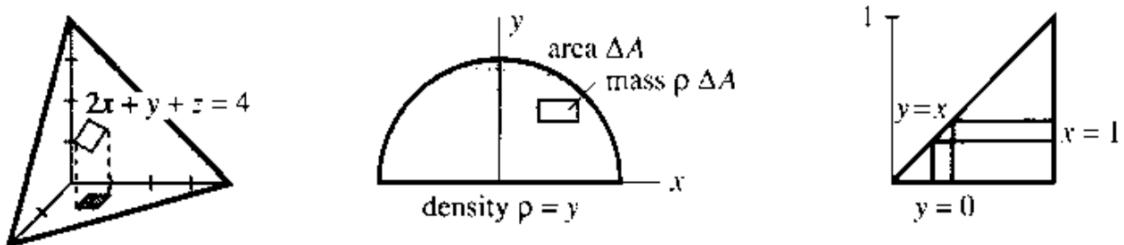
La première intégrale correspond à des bandes verticales avec une intégrale interne est égale à  $1-x$ . Ensuite l'intégrale externe (de  $1-x$ ) a les limites  $0$  et  $1$ , et donc l'aire est  $1/2$ . D'un certain point de vue, la situation est similaire à une intégrale indéfinie à l'intérieur d'une intégrale définie.

- (3) Afin d'inverser l'ordre d'intégration dans

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^{2x} x^3 dy dx$$

il faut dessiner une figure (voir la **Figure 3 (droite)**). Pour l'intégrale donnée, l'intégrale interne va de la parabole  $y = x^2$  jusqu'à la droite  $y = 2x$ , cela correspond à des bandes verticales et ces bandes sont côté à côté entre  $x = 0$  et  $x = 2$ . Elles s'arrêtent là où  $2x$  équivaut à  $x^2$  c'est-à-dire là où la ligne rencontre la parabole. Sin on inverse l'ordre d'intégration, le problème est alors de mettre en premier l'intégrale par rapport à  $x$ . Celle-ci correspond à des bandes horizontales le long desquelles  $y$  est constant et nous avons besoin de la *valeur d'entrée* ainsi que de la *valeur de sortie* de  $x$ . D'après la **Figure 3 (droite)**,  $x$  passe de  $y/2$  à  $\sqrt{y}$ . Telles sont les limites intérieures. Il faut faire également attention aux limites extérieures, car elles s'appliquent désormais à  $y$ . La région commence à  $y = 0$  et se termine à  $y = 4$ . Aucun changement dans l'intégrand  $x^3$  qui est la hauteur du solide. On conclut donc que

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=x^2}^{2x} x^3 dy dx \quad \text{est inversé en} \quad \int_{y=0}^4 \int_{x=y/2}^{\sqrt{y}} x^3 dy dx$$



**Figure 4:** Figures pour l'**Exemple 1.2**.

### Exemple 3.

- (1) On veut trouver le volume délimité par les quatre plans d'équation

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 2x + y + z = 4$$

Pour cela on considère un solide de la forme d'un *tétrahèdre* (à quatre côtés), voir la **Figure 4 (gauche)**. Il va de  $z = 0$  (le plan  $xy$ ) au plan  $2x + y + z = 4$ . Sur ce plan  $z = 4 - 2x - y$ . C'est la fonction de hauteur  $f(x, y)$  à intégrer. La **Figure 4 (droite)** montre la base  $R$ . Pour trouver ses côtés, on pose  $z = 0$ . Les côtés de  $R$  sont alors les lignes  $x = 0$  et  $y = 0$  et  $2x + y = 4$ . En prenant des bandes verticales,  $dy$  est intérieur et on écrit

$$\begin{aligned} \text{intérieur : } & \int_{y=0}^{y=4-2x} (4 - 2x - y) dy = \left[ (4 - 2x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{4-2x} = \frac{1}{2}(4 - 2x)^2 \\ \text{extérieur : } & \int_{x=0}^2 \frac{1}{2} (4 - 2x)^2 dx = \left[ -\frac{(4 - 2x)^3}{2 \cdot 3 \cdot 2} \right]_0^2 = \frac{4^3}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Quelle est la signification de l'intégrale interne  $\frac{1}{2}(4 - 2x)^2$ ? Puis de  $\frac{16}{3}$ ? L'intégrale interne correspond à  $A(x)$ , l'aire de la tranche et  $\frac{16}{3}$  est le volume du tétraèdre. Que se passe-t-il si l'intégrale interne  $\int f(x, y) dy$  possède des limites qui dépendent de  $y$ ? Ce n'est pas possible, ces limites doivent être erronées, on doit les retrouver.

- (2) On veut trouver la masse  $M$  d'un demi-cercle défini par  $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$  et dont la densité est donnée par la fonction  $\rho = y$ . Il s'agit d'une nouvelle application de l'intégrale double. Dans l'esprit de notre démarche initiale, définissant l'intégrale double, la masse totale est vue comme une somme de petites masses ( $\rho$  fois  $\Delta A$ ) dans des rectangles d'aire  $\Delta A$ . Les rectangles ne s'intègrent pas parfaitement dans le demi-cercle  $R$ , et la densité n'est pas constante dans chaque rectangle, mais ces problèmes disparaissent dans la limite. On obtient alors le résultat utile suivant

$$M = \iint_R \rho dA = \iint_R \rho(x, y) dx dy$$

On pose  $\rho = y$  et on utilise la **Figure 4 (milieu)** afin de déterminer les limites d'intégration sur  $x$  et  $y$  (on considère les deux ordres possibles  $dy dx$  et  $dx dy$ ), cela donne

$$M = \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx \quad \text{et} \quad M = \int_{y=0}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y dx dy$$

La première intégrale interne est  $\frac{1}{2}y^2$  puis la substitution des limites donne  $\frac{1}{2}(1 - x^2)$ . L'intégrale externe de  $\frac{1}{2}(1 - x^2)$  donne ensuite la masse totale  $M = 2/3$ . La deuxième intégrale intérieure est  $xy$ . Substituer les limites sur  $x$  donne \_\_\_\_\_. Alors l'intégrale externe est  $-\frac{2}{3}(1 - y^2)^{3/2}$ . Remplacer par  $y = 1$  et  $y = 0$  donne  $M = _____$ .

**REMARQUES.** Ce même calcul produit également le *moment*<sup>2</sup> autour de l'axe des  $x$ , lorsque la densité est  $\rho = 1$ . Le facteur  $y$  est la distance à l'axe des  $x$ . Les *moment par rapport à l'axe des  $x$  et  $y$* , notés respectivement  $m_x$  et  $m_y$ , sont par définition donnés par les intégrales doubles

$$m_x = \iint y dA \quad \text{et} \quad m_y = \iint x dA$$

et ici on trouve  $m_x = 2/3$  et  $m_y = 0$  par symétrie. La division par l'aire du demi-cercle (qui est  $\pi/2$ ) permet de calculer les coordonnées du centre de gravité de coordonnées notées  $(\bar{x}, \bar{y})$ . En effet

<sup>2</sup>Le moment correspond à une masse multipliée par une distance. Cette quantité est essentielle pour déterminer la position du *centre de masse* d'un objet de densité  $\rho$ .

la hauteur  $\bar{y}$  du centre de gravité est, par définition, donnée par

$$\bar{y} = \frac{m_x}{aire} = \frac{2/3}{\pi/2} = \frac{4}{3\pi}$$

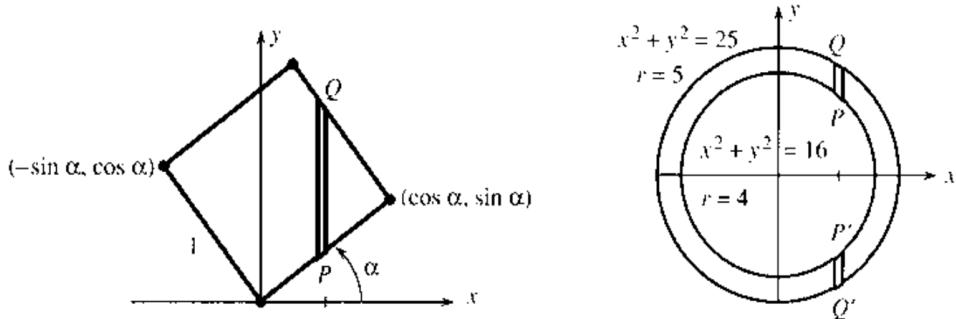
C'est la « hauteur moyenne » des points à l'intérieur du demi-cercle et on a  $\bar{x} = m_y / aire = 0$ .

**Exemple 4.** On veut effectuer l'intégrale suivante en évitant de devoir évaluer  $\int \cos x^2 dx$ .

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} \cos x^2 dx dy$$

C'est un exemple bien connu où l'inversion de l'ordre rend le calcul possible. La base  $R$  est le triangle dans la **Figure 4 (droite)** (notez que  $x$  passe de  $y$  à 1). Dans l'*ordre inverse*,  $y$  passe de 0 à  $x$ . Alors  $\int \cos x^2 dy = x \cos x^2$  contient le facteur  $x$  dont nous avons besoin, soit

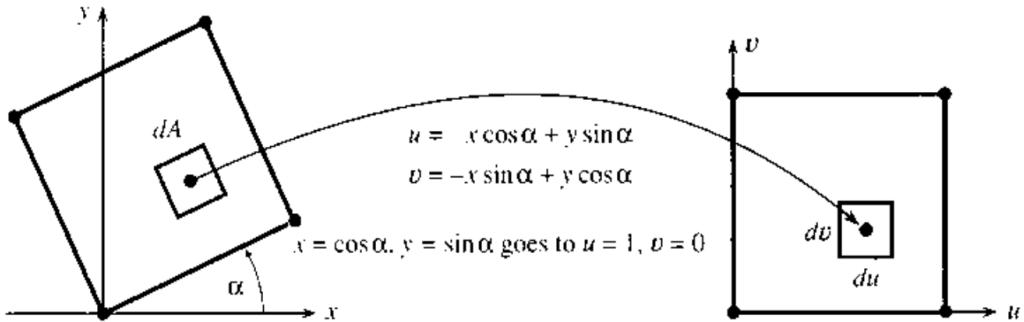
$$\text{intégrale externe : } \int_0^1 x \cos x^2 dx = \left[ \frac{1}{2} \sin x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \sin 1$$



**Figure 5:** Carré unitaire tourné de l'angle  $\alpha$ . Anneau avec rayons 4 et 5.

## 2 CHANGEMENT DE VARIABLES

**UN EXEMPLE SIMPLE.** Lors d'évaluation d'intégrales doubles, on rencontre rapidement la nécessité de changer les variables. De nombreuses régions ne correspondent tout simplement pas à la symétrie cartésienne imposée par les axes  $x$  et  $y$ . Deux exemples sont donnés dans la **Figure 5**, un carré incliné et un anneau. Ce sont des formes classiques et utiles mais à conditions d'utiliser les *bonnes coordonnées*. En pratique, le choix des bonnes coordonnées est induit par la nécessité de calculs pratiques pour des grandeurs comme l'aire  $\iint dA$ , le moment  $\iint x dA$  ou encore le moment d'inertie  $\iint x^2 dA$ . Afin de bien comprendre le problème posé par un changement de variables d'intégration, il est fondamental de bien comprendre et interpréter la *mesure d'intégration*  $dA$  qui correspond en fait à une *aire élémentaire*. Lorsque nous changeons de variables, nous quittons en quelque sorte «l'univers cartésien» des variables  $x$  et  $y$  où  $dA = dx dy$ . La raison pratique pour ce changement est que les limites de l'intégration dans les directions  $y$  ou  $x$  sont inutilement compliquées et difficiles à déterminer, même à partir d'une figure. D'un certain point de vue, le changement de variable a pour but de nous éviter une telle situation. En pratique, pour chaque  $x$ , on a besoin d'un point d'entrée  $P$  pour une ligne  $x = \text{constante}$  et d'un point de sortie  $Q$ . Les hauteurs de  $P$  et  $Q$  sont les limites de  $\int dy$ , l'intégrale interne. Dans ce sens, on voit bien que la géométrie du carré et de l'anneau est totalement manquée dans cette procédure, si l'on s'en tient strictement à des déplacements parallèles aux axes des  $x$  et des  $y$ . Quelles coordonnées sont les meilleures? On conviendrait facilement que l'aire du carré incliné est de 1. Dans ce cas, il suffit de le «tourner» et l'aire est évidente. Faut-il encore que nous sachions comment effectuer ce virage, pour passer d'un ancien système de coordonnées à un nouveau.



**Figure 6:** Changement de coordonnées - axes tournés par  $\alpha$ . Pour la notation  $dA$  est  $du dv$ .

**NOUVELLES COORDONNÉES.** On définit de nouvelles coordonnées  $u$  et  $v$ , qui sont des fonctions des anciennes coordonnées, et celles-ci sont illustrées sur la **Figure 6**. Les limites d'intégration sur  $v$  sont 0 et 1. Il en est de même pour les limites de  $u$ . *Mais lorsque on modifie des variables, on ne modifie pas uniquement les limites.* Deux autres changements interviennent

- (1) La petite aire, ou *aire infinitésimale*,  $dA = dx dy$  devient  $dA = \underline{\hspace{2cm}} du dv$ <sup>3</sup>.
- (2) L'intégrale de  $x$  devient l'intégrale de  $\underline{\hspace{2cm}}$ <sup>4</sup>

La démarche est totalement similaire à la substitution  $u = \sqrt{x}$  dans une intégrale simple sur  $x$ , nous apportons les mêmes changements. Les limites  $x = 0$  et  $x = 4$  deviennent  $u = 0$  et  $u = 2$

<sup>3</sup>  $ap np = Vp$   
<sup>4</sup>  $u \cos \alpha - a \sin \alpha$

puis  $x = u^2$  et  $dx = 2u du$ . Pour une intégrale simple le but du changement est de trouver une primitive, pour les intégrales doubles, un but additionnel est d'améliorer les limites. On en revient à notre exemple. Pour tourner le carré, il existe des formules reliant  $x$  et  $y$  à  $u$  et  $v$ . La géométrie est claire, il faut faire *pivoter* les axes d'un angle  $\alpha$ , voir la **Figure 6**, et ceci conduit aux formules suivantes de changement de coordonnées

$$\begin{cases} u = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad \text{et inversement} \quad \begin{cases} x = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ y = u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases} \quad (2.1)$$

Au fur et à mesure que les points bougent, le carré entier tourne. Une bonne façon de se souvenir de l'équation (2.1) est de suivre les coins lorsqu'ils deviennent  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ . Le changement de  $\iint x dA$  à  $\iint \underline{\quad} du dv$  est en partie décidé par l'équation (2.1). Il donne  $x$  en fonction de  $u$  et  $v$ . Nous avons également besoin de  $dA$ . Pour une rotation pure, notre intuition est correcte, l'aire  $dx dy$  est égale à l'aire  $du dv$ . Cependant, cela est *faux* pour la plupart des changements de variable. La formule générale de  $dA$  vient après les exemples suivants.

**Exemple 5.** On veut trouver  $\iint dA$ ,  $\iint x dA$ ,  $x$  et  $\iint x^2 dA$  pour le carré incliné de la **Figure 6**. Sur la figure de droite on voit immédiatement que l'aire du carré est  $\int_0^1 \int_0^1 du dv = 1$ . On remarque les bonnes limites. Puis

$$\iint x dA = \int_0^1 \int_0^1 (u \cos \alpha - v \sin \alpha) dv du = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

C'est le *moment par rapport à l'axe y*. Les facteurs  $\frac{1}{2}$  proviennent de  $\frac{1}{2}u^2$  et  $\frac{1}{2}v^2$ . La coordonnée  $x$  du centre de gravité est

$$\bar{x} = \frac{\iint x dA}{\iint dA} = \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha}{1}$$

De même, la double intégrale de  $y$  conduit à  $\bar{y}$ . La réponse n'est pas un mystère, le point  $(\bar{x}, \bar{y})$  est au centre du carré. Le remplacement  $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha$  rend l'expression  $x dA$  compliquée, mais les limites 0 et 1 sont bien meilleures. Le *moment d'inertie*  $I_y$  autour de l'axe  $y$  est également simplifié puisque

$$I_y = \iint x^2 dA = \int_0^1 \int_0^1 (u \cos \alpha - v \sin \alpha)^2 dv du = \frac{\cos^2 \alpha}{3} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{3} \quad (2.2)$$

Le fait suivant est connu mais nous l'écrivons quand même, *le résultat ne contiennent ni u ni v*. Ce sont des variables factices comme  $x$  et  $y$ . Le résultat contient  $\alpha$  car le carré a tourné de cet angle (l'aire est restée égale à 1). Le moment d'inertie  $I_x = \iint y^2 dA$  est le même que l'équation (2.2) mais avec que des signes plus. La somme  $I_x + I_y$ , se simplifie pour donner la constante 2/3. Pourquoi il n'y pas de dépendance par rapport à  $\alpha$ ? La somme des moments d'inertie  $I_x + I_y$  donne  $I_0$ , le moment d'inertie autour du point  $(0, 0)$  qui est inchangé par rotation. En effet, nous avons tourner le carré autour de l'un de ses coins.

## 2.1 CHANGEMENT EN COORDONNÉES POLAIRES

**AIRE ÉLÉMENTAIRE.** Les *coordonnées polaires*  $r$  et  $\theta$  sont définis dans le plan par les relations

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} = \tan \theta$$

La mesure d'intégration, qui correspond à une *aire élémentaire*, devient  $dA = r dr d\theta$  (mais pas  $dr d\theta$ ). Cette aire provient toujours de la multiplication de deux longueurs cependant on sait que  $d\theta$  n'est pas une longueur mais un angle. La **Figure 7** montre la région cruciale, un «rectangle polaire» délimitée par des rayons et des cercles. L'aire élémentaire, que l'on peut noté aussi  $\Delta A$ , peut se trouver de deux manières, les deux conduisant à  $r dr d\theta$ .

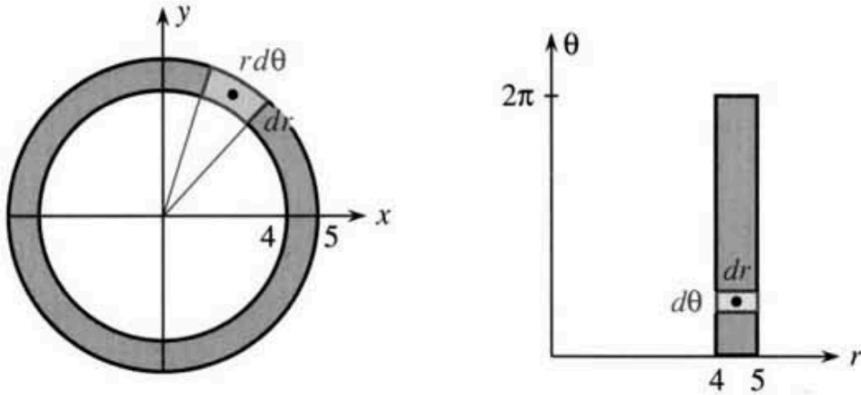
- *Approche approximative.* Les côtés droits sont de longueur  $\Delta r$  et les arcs de cercle sont approximativement égal à  $r \Delta\theta$ . Les angles sont de  $90^\circ$ , donc

$$\Delta A \simeq (\Delta r)(r \Delta\theta)$$

- *Approche exacte.* Une part d'angle  $\Delta\theta$  et de coté  $r$  possède une aire de  $\frac{1}{2}r^2 \Delta\theta$ . La différence entre les aires des parts  $r + \Delta r/2$  et  $r - \Delta r/2$  est  $\Delta A$ , donc

$$\Delta A = \frac{1}{2} \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} \left( r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta\theta = r \Delta r \Delta\theta$$

La méthode exacte place  $r$  en plein centre (voir la **Figure 7 (gauche)**). L'approximation oublie le changement dans  $r \Delta\theta$  lorsqu'on se déplace vers l'extérieur, c'est-à-dire que l'on conserve uniquement les termes du premier ordre. Il existe une troisième méthode qui ne nécessite aucune image et aucune géométrie. C'est le changement de variables  $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$  que l'on pourra utiliser avec la formule générale de changement de variable pour  $dA$  et on retrouvera l'aire  $r dr d\theta$ .



**Figure 7:** Anneau et rectangle polaire en  $xy$  et  $r\theta$ , avec un facteur de déformation  $r = 4.5$

**Exemple 6.** On veut trouver l'aire et le centre de gravité de l'anneau sur la **Figure 7 (gauche)**. On veut également calculer  $\iint x^2 dA$  sur la même région. On note d'abord que les limites sur  $r$  sont 4 et 5 et pour  $\theta$  elles sont 0 et  $2\pi$ . *Les coordonnées polaires sont parfaites pour un anneau.* Par rapport à des limites comme  $x = \sqrt{25 - y^2}$ , le changement en  $r dr d\theta$  est un petit prix à payer. On écrit

$$\text{aire} = \int_0^{2\pi} \int_4^5 r dr d\theta = 2\pi \left[ \frac{1}{2}r^2 \right]_4^5 = \pi \times 5^2 - \pi \times 4^2 = 9\pi$$

L'intégrale sur  $\theta$  est  $2\pi$  (cercle complet). En fait, l'anneau est un rectangle polaire géant. on a pu utiliser la formule exacte  $r \Delta r \Delta\theta$ , avec  $\Delta\theta = 2\pi$  et  $\Delta r = 5 - 4$ . Lorsque le rayon  $r$  est centré en 4.5, le produit  $r \Delta r \Delta\theta$  est  $(4.5)(1)(2\pi) = 9\pi$  comme ci-dessus. Puisque l'anneau est symétrique autour de  $(0, 0)$ , l'intégrale de  $x dA$  doit être nulle. En effet, on trouve

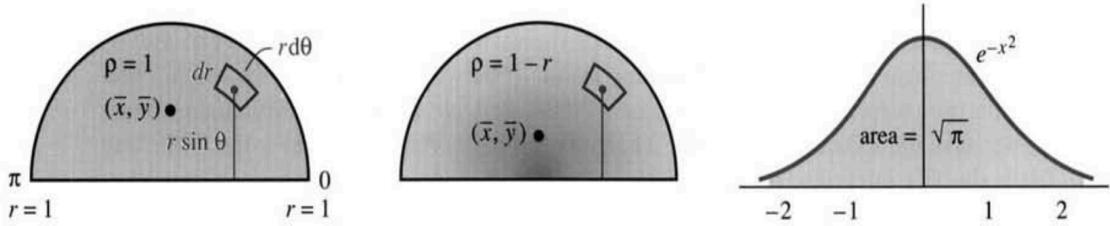
$$\iint_R x dA = \int_0^{2\pi} \int_4^5 (r \cos\theta) r dr d\theta = \left[ \frac{1}{3}r^3 \right]_4^5 [\sin\theta]_0^{2\pi} = 0$$

On note que  $r \cos \theta$  provient de  $x$  et que l'autre  $r$  vient de  $dA$ . Le moment d'inertie est

$$\iint_R x^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_4^5 r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_4^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} (5^4 - 4^4) \pi$$

Cette intégrale sur  $\theta$  donne  $\pi$  et non pas  $2\pi$ , car la moyenne de  $\cos^2 \theta$  est  $1/2$  et non pas  $1$ . Pour référence voici les moments d'inertie pour une densité arbitraire  $\rho(x, y)$ .

$$I_y = \iint x^2 \rho dA \quad I_x = \iint y^2 \rho dA \quad I_0 = \iint r^2 \rho dA = \text{moment polaire} = I_x + I_y$$



**Figure 8:** (Gauche et milieu) Demi-cercles avec densité empilés au-dessus d'eux. (Droite) Courbe en forme de cloche.

**Exemple 7.** On veut trouver les masses et moments pour les plaques semi-circulaires définies par  $\rho = 1$  et  $\rho = 1 - r$ . Les demi-cercles sur la **Figure 8** ont  $\rho = 1$ . L'angle va de  $0$  à  $\pi$  (le demi-cercle supérieur). Les coordonnées polaires sont les plus adaptées. La masse est l'intégrale de la densité  $\rho$ , soit

$$M = \int_0^\pi \int_0^1 r dr d\theta = \frac{1}{2}\pi \quad \text{et} \quad M = \int_0^\pi \int_0^1 (1-r) r dr d\theta = \frac{1}{6}\pi$$

La première masse  $\pi/2$  est égale à l'aire (car  $\rho = 1$ ). La deuxième masse  $\pi/6$  est plus petite (car  $\rho < 1$ ). Intégrer  $\rho = 1$  revient à trouver un volume lorsque la hauteur est  $z = 1$  (partie d'un cylindre). Intégrer  $\rho = 1 - r$  équivaut à trouver un volume lorsque la hauteur est  $z = 1 - r$  (partie d'un cône). Les volumes de cônes ont un facteur supplémentaire de  $1/3$ . Le *centre de gravité* implique un moment par rapport à l'axe des  $x$  de la forme  $m_x = \iint y \rho dA$  où intervient la distance à l'axe des  $x$ , c'est-à-dire  $y$ , et la masse de l'aire élémentaire  $\rho dA$ . Ensuite on intègre pour ajouter la masse fois la distance afin de calculer un moment. Les coordonnées polaires sont encore les plus adaptées, avec  $y = r \sin \theta$  et, encore une fois  $\rho = 1$  et  $\rho = 1 - r$ , donc

$$\begin{aligned} \iint y dA &= \int_0^\pi \int_0^1 r \sin \theta r dr d\theta = \frac{2}{3} \\ \iint y(1-r) dA &= \int_0^\pi \int_0^1 r \sin \theta (1-r) r dr d\theta = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

La hauteur du centre de gravité est  $\bar{y} = m_x/M = \text{moment divisé par la masse}$ , on a donc

$$\bar{y} = \frac{2/3}{\pi/2} = \frac{4}{3\pi} \quad \text{quand } \rho = 1 \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1/6}{\pi/6} = \frac{1}{\pi} \quad \text{quand } \rho = 1 - r$$

Si on calcule  $\bar{y}$  pour des valeurs de  $\rho \neq 1$ , on obtient toujours  $\bar{y} = \frac{4}{3\pi}$ . Par contre on remarque que pour  $\rho = 1 - r$ , le demi-cercle est dense autour de  $r = 0$  et  $\bar{y}$  descend à  $1/\pi$ .

**REMARQUE.** Comment  $\bar{y} = \frac{4}{3\pi}$  est-il lié à la « moyenne » de  $y$  dans le demi-cercle? Elles sont en fait identiques et c'est là toute l'utilité de  $\bar{y}$ . En effet la *valeur moyenne* d'une fonction de deux variables  $f(x, y)$ , notée  $\langle f \rangle$  ou  $\bar{f}$ , est donnée par

$$\langle f \rangle = \frac{\iint f(x, y) dA}{\iint dA} \quad (2.3)$$

L'intégrale de  $f$  est divisée par l'intégrale de 1 (c'est-à-dire l'aire). En une dimension on divise  $\int_a^b v(x) dx$  par  $\int_a^b 1 dx$  (la longueur  $b - a$ ). Cela donne la valeur moyenne de  $v(x)$ . L'équation (2.3) est la même idée pour  $f(x, y)$ .

### Exemple 8.

- (1) Il s'agit d'un exemple *très* important. On veut évaluer l'*intégrale Gaussienne*

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Malheureusement, il n'existe pas de primitive pour la fonction  $e^{-x^2}$ . En effet, il n'y a pas de facteur  $2x$  présent, car intégrer  $2xe^{-x^2}$  donnerait  $-e^{-x^2}$ , mais intégrer  $e^{-x^2}$  est impossible, sauf approximativement par une méthode numérique. Ici  $A$  correspond à l'aire sous une « *courbe en forme de cloche* », on parle également de « *gaussienne* » (voir la **Figure 8**). Comment pouvons-nous espérer évaluer exactement  $A$ ? L'astuce consiste en fait à évaluer  $A^2$ , au lieu de  $A$ . En effet, on peut écrire que

$$A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

C'est inhabituel (et difficile à aimer), mais la fin justifie les moyens puisque

$$A^2 = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy dx = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

Le domaine d'intégration correspond donc à l'ensemble du plan. Le  $r^2$  vient de  $x^2 + y^2$ , et le facteur clé  $r$  apparaît en coordonnées polaires. Il est maintenant possible de faire la substitution  $u = r^2$ . L'intégrale sur  $r$  donne alors  $\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} du = 1/2$ . L'intégrale sur  $\theta$  donne  $2\pi$ . L'intégrale double vaut donc  $(1/2)(2\pi)$ . Donc  $A^2 = \pi$  et le résultat de l'intégrale simple est finalement  $A = \sqrt{\pi}$ .

- (2) On veut appliquer la technique précédente à l'intégrale de la *distribution normale*  $p(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ , particulièrement importante en *probabilités*. En particulier, on voudrait vérifier que  $\int p(x) dx = 1$ . Pour cela on pose  $x = \sqrt{2}y$  et on utilise directement le résultat précédent. On a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1$$

Le facteur 2 dans  $p(x)$  entraîne que la *variance* donne le résultat commode  $\int x^2 p(x) dx = 1$ .

## 2.2 CHANGEMENT DE COORDONNÉES GÉNÉRAL

**FACTEUR DE DÉFORMATION OU JACOBIEN.** Une troisième méthode était promise, pour trouver  $r dr d\theta$  sans image et sans géométrie. La méthode fonctionne directement à partir de  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Elle permet également de trouver le facteur 1 dans  $du dv$ , après une rotation des axes. Plus important encore, cette nouvelle méthode introduit un facteur  $J$  dans l'aire infinitésimale  $dA = J du dv$ , pour tout changement de variables de  $xy$  à  $uv$ . Pour les intégrales simples, le « facteur de déformation » (*stretching factor*) est  $J = dx/du$  où  $u$  est la nouvelle variable d'intégration. Cela

vient du simple fait que  $dx = (dx/du) du$  ou encore  $du = (du/dx) dx$ . C'est l'idée des *méthodes de substitution* qui sont le principal moyen afin de simplifier les intégrales. Pour les intégrales doubles, le facteur de déformation  $J(u, v)$  apparaît dans l'aire élémentaire  $dA$  et est une fonction des nouvelles variables. En effet, on a la relation fondamentale

$$dx dy = |J(u, v)| du dv \quad (2.4)$$

où les anciennes variables peuvent être vues comme des fonctions des nouvelles, soit  $x = x(u, v)$  et  $y = y(u, v)$ . À travers une telle transformation *bijective*, chaque point dans les coordonnées  $u$  et  $v$  provient d'un point dans coordonnées  $x$  et  $y$ . De même, à une région  $S$  dans le plan  $uv$ , on peut faire correspondre, point par point, une région  $R$  dans le plan  $xy$ . Ainsi, l'aire élémentaire  $|J| du dv$  est issue de la transformation de l'aire  $dx dy$ . La formule pour  $J$  est une version en deux dimensions de  $dx/du$

**DÉFINITION.** Le facteur de déformation pour l'aire est le *déterminant Jacobien*  $J(u, v)$  définit par

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (2.5)$$

Une intégrale sur  $R$  dans le plan  $xy$  devient alors une intégrale sur  $S$  dans le plan  $uv$ , soit

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv \quad (2.6)$$

Le déterminant  $J$  s'écrit souvent  $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ , pour rappeler que ce facteur de déformation est comme  $dx/du$ . Pour tout changement de variables il est essentiel de s'assurer que

$$J \neq 0$$

Cela maintient l'étirement et le rétrécissement *sous contrôle*. La raison de la présence de la valeur absolue dans  $dx dy = |J| du dv$  réside dans les limites de l'intégration. En effet, en une dimension, l'intégrale simple  $\int_0^1 dx$  devient  $\int_0^{-1} (-du)$  si on pose  $x = -u$ . On voit que le signe  $-$  compense le fait que l'on intègre «en arrière» de 0 à  $-1$ . Dans le cas des intégrales doubles, par convention, on intègre toujours de gauche à droite et de bas en haut. On ne doit pas avoir de signe  $-$  qui doit provenir de  $J$ , d'où l'utilisation de la valeur absolue. On pourra consulter l'**Appendice B** pour une présentation plus détaillée et technique sur l'origine des formules (2.5) et (2.6).

#### Exemple 9.

- (1) En utilisant les coordonnées polaires on a  $x = u \cos v = r \cos \theta$  et  $y = u \sin v = r \sin \theta$  et donc, sans géométrie, on obtient l'expression suivante pour le Jacobien de la transformation

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

- (2) On veut déterminer le Jacobien  $J$  de la « transformation linéaire » donnée par les relations

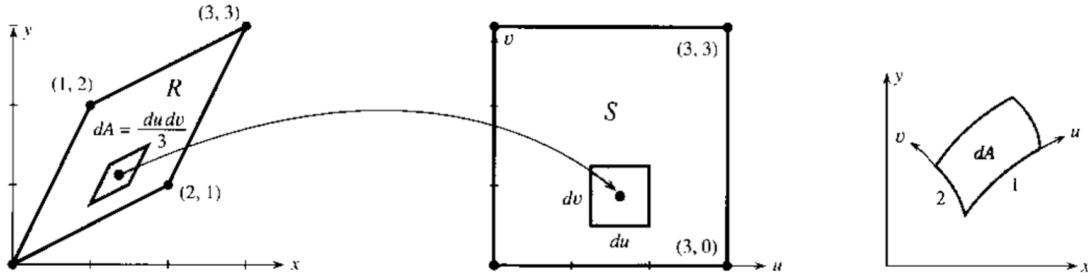
$x = au + bv$  et  $y = cu + dv$ . Le calcul du déterminant donne

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (2.7)$$

**REMARQUE.** On peut se poser la question pourquoi faire ce simple changement, dans lequel  $a, b, c, d$  sont tous constants? Si on se réfère à la **Figure 9** (c'est une figure typique et utile), on s'aperçoit que cette transformation « redresse » en fait les parallélogrammes en carrés. Précédemment la géométrie indiquait  $J = 1$  pour une rotation pure, c'est-à-dire aucun changement d'aire. Maintenant on sait que  $J = 1$  provient des équations (2.1) et (2.7), car

$$ad - bc = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

En pratique, les rectangles  $xy$  se transforment généralement en rectangles  $uv$ . Les côtés peuvent être courbes (comme dans le cas des rectangles polaires) mais les angles sont souvent de  $90^\circ$ . Le changement est alors qualifié d'« orthogonal ». Dans l'exemple suivant les angles ne sont pas de  $90^\circ$  et  $J$  fournit toujours la (bonne) réponse.



**Figure 9:** Passer de  $xy$  à  $uv$  correspond à  $J = 1/3$  (gauche et milieu). Les zones courbes sont également  $dA = |J| du dv$  (à droite).

**Exemple 10.** On veut trouver l'aire de  $R$  dans la Figure **Figure 9** (à gauche) et évaluer  $\iint_R e^x dx dy$ . D'après la **Figure 9** on a les relations

$$u = 2x + y \quad \text{et} \quad v = 2y + x$$

En résolvant le système pour  $x$  et  $y$ , on trouve les relations « inverses » suivantes

$$x = \frac{2}{3}u - \frac{1}{3}v \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{3}v - \frac{1}{3}u$$

Le calcul du déterminant Jacobien donne alors

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

L'aire du parallélogramme  $xy$  devient une intégrale sur le carré  $uv$ , soit

$$\iint_R dx dy = \iint_S |J| du dv = \int_0^3 \int_0^3 \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 = 3$$

Le carré possède une aire de 9 et le parallélogramme possède une aire de 3. Cependant nous ne savons pas si  $J = 1/3$  est un facteur d'*étirement* ou de *rétrécissement*. Une autre intégrale à considérer est  $\iint e^x dx dy$  qui, en utilisant la même transformation linéaire, donne

$$\int_0^3 \int_0^3 e^{2u/3-v/3} \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{2} e^{2u/3} \right]_0^3 \left[ -3e^{-v/3} \right]_0^3 = \frac{3}{2} (e^2 - 1) (1 - e^{-1})$$

Le point principal est que le changement de  $u$  et  $v$  rend les limites faciles (juste 0 et 3).

**INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.** Au point où nous en sommes une question légitime est pourquoi le facteur de déformation  $J$  est-il un déterminant ? Cela provient du fait que l'aire d'un parallélogramme est un déterminant et, en première approximation, on peut assimiler localement une aire avec des cotés courbes à un parallélogramme (voir la **Figure 9 (droite)**). Dans ce sens, un changement  $du$  correspond au côté 1 de la **Figure 9 (droite)**, soit  $(\frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j})du$ . Le changement  $dv$  correspond au côté 2 de la **Figure 9 (droite)**, soit  $(\frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j})dv$ . Les contributions venant des dérivées seconde, et donc de la courbure, sont négligeables localement. En effectuant le produit vectoriel entre les cotés on trouve alors que l'aire est bien  $|J| du dv$ .

**INVERSION.** En dernier lieu nous pouvons facilement considérer le changement dans le sens inverse. C'est-à-dire que le rectangle de départ est en  $xy$  et le parallélogramme d'arriver est en  $uv$ . Dans ce cas il suffit d'échanger  $x$  avec  $u$  et  $y$  avec  $v$  dans les formules précédentes, soit

$$nouveau J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{ancien J}$$

C'est exactement comme  $du/dx = 1/(dx/du)$ , c'est la dérivée de la fonction inverse. Le produit des pentes est 1, car on a un étirement puis un rétrécissement. De  $xy$  à  $uv$ , nous avons des matrices  $2 \times 2$ , et la matrice d'identité  $I$  prend la place de 1, c'est-à-dire

$$\frac{dx}{du} \frac{du}{dx} = 1 \quad \text{devient} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La première ligne multipliée par la première colonne donne  $\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$ . La première ligne multipliée par la deuxième colonne donne  $\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$ . Ces matrices sont inverses l'une de l'autre. Les déterminants d'une matrice et son inverse obéissent à notre règle, on a donc  $ancien J \times nouveau J = 1$ . Ces  $J$  ne peuvent pas être nuls, tout comme  $\frac{dx}{du}$  et  $\frac{du}{dx}$  n'étaient pas nuls (les fonctions inverses augmentent régulièrement ou diminuent régulièrement). En deux dimensions, cela signifie que l'on peut passer de  $dx dy$  à  $J du dv$  puis revenir à  $dx dy$ .

### 3 INTÉGRALES TRIPLES

**INTRODUCTION.** À ce stade, on peut deviner à quoi ressemblent les intégrales triples. Au lieu d'un petit intervalle ou d'un petit rectangle, on a une «petite boîte» ou *volume élémentaire*. Dans ce sens, au lieu de la longueur  $dx$  ou de l'aire  $dx dy$ , ce volume élémentaire est simplement  $dV = dx dy dz$ . En termes géométrique c'est la longueur multipliée par la largeur fois la hauteur. Le but est donc d'assembler, c'est-à-dire de sommer, ces petites boîtes par intégration. En pratique, le problème principal sera toujours de déterminer les limites d'intégration correctes sur  $x, y, z$  en fonction de la région sur laquelle on veut intégrer une fonction donnée.

**VOLUMES CLASSIQUES.** En trois dimensions il est facile d'imaginer des régions ou volume d'intégration compliquées. Mais, la plupart du temps, cela empêche de voir clairement comment appliquer les méthodes que nous avons utilisées précédemment. Dans un premier temps il semble donc plus sage de se concentrer sur les six formes géométriques importantes suivantes

*boîte*      *prisme*      *cylindre*      *cone*      *tétraèdre*      *sphère*

La boîte est la plus simple et la sphère peut être la plus dure (mais pas de problème dans le système de coordonnées sphériques). Les cylindres circulaires et les cônes se situent à mi-chemin, où les coordonnées  $xyz$  sont possibles mais le système  $r\theta z$  est meilleur. Nous commençons par la boîte et le prisme dans les coordonnées  $xyz$ .

**Exemple 11.** Par triple intégration, on veut déterminer le volume d'une boîte et d'un prisme, voir la ([Figure 10](#)). En s'aidant de la figure on peut écrire

$$\iiint_{\text{box}} dV = \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^3 \int_{x=0}^2 dx dy dz \quad \text{et} \quad \iiint_{\text{prisme}} dV = \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^{3-3z} \int_{x=0}^2 dx dy dz$$

L'intégrale interne pour les deux est  $\int dx = 2$  ce qui correspond à des segments dans la direction  $x$  de longueur 2, traversant la boîte et le prisme. Les intégrales du milieu montrent les limites sur  $y$  (puisque  $dy$  vient en second dans les mesures d'intégration), on a alors

$$\int_{y=0}^3 2 dy = 6 \quad \text{et} \quad \int_{y=0}^{3-3z} 2 dy = 6 - 6z$$

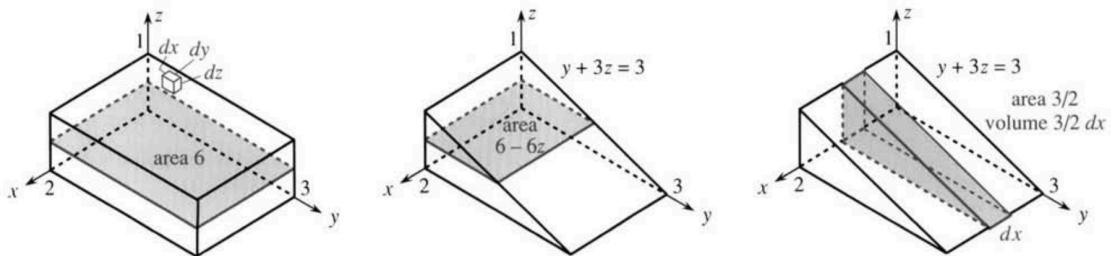
Après deux intégrations, les résultats (intermédiaires) que nous obtenons correspondent donc à des *aires*. La première aire de 6 est pour une section plane à travers la boîte. La deuxième aire  $6 - 6z$  est une section du le prisme parallèle au plan  $xy$ . Le rectangle ombré va de  $y = 0$  à  $y = 3 - 3z$ . Pour trouver la limite supérieure d'intégration sur  $y$ , nous avons utilisé l'équation  $y + 3z = 3$ . *À ce stade,  $z$  est toujours constant!* Mais l'aire dépend de  $z$ , car le prisme s'amincit en montant ( $z$  joue le rôle d'un paramètre extérieur). L'aire de base, dans le plan  $xy$ , correspond à  $6 - 6z = 6$  tandis que l'aire supérieure est  $6 - 6z = 0$ . L'intégrale externe multiplie ces zones par  $dz$ , pour donner le volume des tranches. Ce sont des tranches horizontales car  $z$  est arrivé en dernier. L'intégration somme les tranches pour trouver le volume total pour les deux volumes en question. On a

$$\text{Volume de la boîte} = \int_{z=0}^3 6 dz = 6$$

$$\text{Volume de prisme} = \int_{z=0}^3 (6 - 6z) dz = [6z - 3^2]_0^1 = 3$$

Le volume de la boîte, qui est en fait  $2 \times 3 \times 1$ , n'avait pas besoin de calcul intégral. Le prisme est la moitié de la boîte, donc son volume était certainement de 3 cependant il est satisfaisant de voir

comment  $6z - 3z^2$  donne la réponse correcte. À travers cet exemple pédagogique, notre objectif ici est d'établir un raisonnement susceptible d'être appliqué dans des situations plus complexes, où le résultat est difficilement accessible par d'autres méthodes.



**Figure 10:** Boîte avec 2,3,1. Le prisme est la moitié de la boîte: volume  $\int(6 - 6z)dz$  ou  $\int(3/2)dx$ .

**ALTERNATIVE.** En relisant l'exemple précédent un question simple peut venir à l'esprit, *quel est le volume du prisme si l'ordre d'intégration<sup>5</sup> est  $dz dy dx$ ?* En utilisant le schéma de droite sur la **Figure 10**, et l'interprétant correctement, on obtient l'intégrale suivante dans l'ordre d'intégration indiqué

$$\int_0^2 \int_0^3 \int_0^{(3-y)/3} dz dy dx = \int_0^2 \int_0^3 \left(\frac{3-y}{3}\right) dy dx = \int_0^2 \frac{3}{2} dx = 3$$

Pour trouver ces limites sur l'intégrale par rapport à  $z$ , on suit une ligne dans la direction  $z$ . Celle-ci entre dans le prisme en  $z = 0$  et en sort par la face inclinée  $y + 3z = 3$ . Cela donne la limite supérieure  $z = (3 - y)/3$ . Cela correspond à la hauteur d'une «petite colonne», comme discuté dans la **Section 1**. Dans notre exemple, nous avons commencé par l'intégrale  $\int dz$  pour la hauteur, cependant une solution plus rapide est possible permettant de démarrer le calcul au niveau d'une intégrale simple directement. Pour voir cela il faut revenir sur le nombre  $3/2$  dans la dernière intégrale. Ce nombre correspond en fait à l'*aire d'une tranche verticale*, parallèle au plan  $yz$ , voir la **Figure 10 (droite)**. L'intégrale externe somme ces tranches, avec un peu d'entraînement et une explication claire, on aurait donc pu écrire directement le volume du prisme sous la forme  $\int_0^2 \frac{3}{2} dx$ .

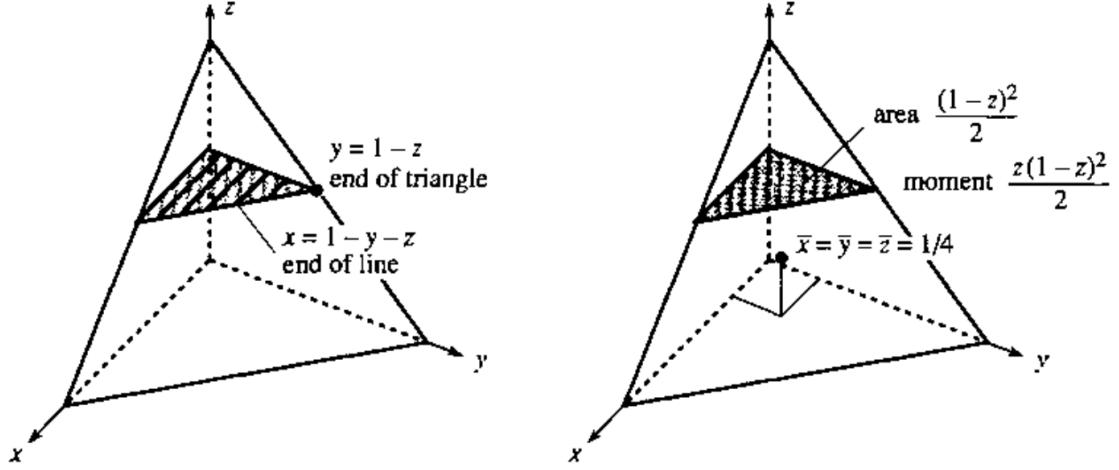
**REMARQUE.** À ce niveau de notre discussion, il est intéressant de revenir sur les étapes de calcul d'une intégrale triple, telles nous venons de les présenter sur des exemples simples, et de les analyser à partir de la définition d'une intégrale comme la limite d'une somme. On peut résumer le calcul d'un intégrale triple, en faisant des raccourcis, par la proposition suivante

$$\iiint f(x, y, z) dV \text{ est calculé à partir de trois intégrales simples } \int \left[ \int \left[ \int f dx \right] dy \right] dz$$

Cette étape cependant nécessite quelques commentaires car quelques calculs et raisonnements de base sont en effet à faire. L'intégrale triple est la limite de  $\sum f_i \Delta V$ , une somme sur de petites boîtes de volume  $\Delta V$ . Ici le coefficient  $f_i$  correspond à la valeur prise par  $f(x, y, z)$  dans la  $i$ -ème boîte (dans la limite, ces boîtes peuvent «remplir» une région avec des frontières courbes). Maintenant, on peut prendre ces boîtes *dans un certain ordre*. On peut en effet les mettre en

<sup>5</sup>six ordres sont possibles

lignes dans la direction des  $x$  et placez ces lignes de boîtes pour former des plans. Les lignes correspondent à l'intégrale interne sur  $x$ , dont la réponse dépend de  $y$  et  $z$ . Puis, l'intégrale sur  $y$  combine, ou somme, ces lignes (de boîtes) afin de former des plans. Enfin, l'intégrale externe permet d'additionner tous les plans et donc toutes les boîtes. L'**Exemple 3** suivant est important car il affiche plus de possibilités intéressantes, en termes d'ordre d'intégration, qu'une boîte ou qu'un prisme.



**Figure 11:** Les lignes se terminent au plan  $x + y + z = 1$ . Les triangles se terminent au bord  $y + z = 1$ . La hauteur moyenne est  $\bar{z} = \iiint z dV / \iiint dV$ .

**Exemple 12.** On veut trouver le volume d'un *tétrahèdre* (pyramide à 4 côtés) et localisez son centre de gravité dont la position est notée  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  dont la densité est simplement  $\rho = 1$ . On note tout d'abord qu'un tétraèdre possède quatre faces planes, toutes triangulaires. La quatrième face de la **Figure 11** est situé dans le plan d'équation  $x + y + z = 1$ . Une ligne dans la direction des  $x$  entre en  $x = 0$  et sort en  $x = 1 - y - z$  (la longueur dépend de  $y$  et  $z$  et l'équation du plan donne la limite supérieure pour l'intégrale sur  $x$ ). Ensuite, ces lignes sont organisées en tranches planes par l'intégrale sur  $y$ , soit

$$\int_{y=0}^{1-z} \int_{x=0}^{1-y-z} dx dy = \int_{y=0}^{1-z} (1 - y - z) dy = \left[ y - \frac{1}{2}y^2 - zy \right]_0^{1-z} = \frac{1}{2}(1-z)^2$$

À quoi correspond la quantité  $\frac{1}{2}(1-z)^2$ ? Il s'agit de l'aire à la hauteur  $z$ . Le plan à cette hauteur découpe un triangle rectangle, dont les cotés adjacents et opposé sont de longueur  $1-z$ . L'aire  $(1-z)^2/2$  est donc correcte, mais examinons d'un peu plus près les limites de l'intégration. Si  $x$  va vers  $1-y-z$ , pourquoi  $y$  va vers  $1-z$ ? La raison est que nous assemblons des lignes, pas des points. D'ailleurs la figure montre une ligne pour chaque valeur de  $y$  quand celui-ci varie de 0 à  $1-z$ . Ensuite, la sommation des tranches donne le volume, on écrit donc

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)^2 dz = \left[ \frac{1}{6}(z-1)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Cela correspond bien à la formule classique *base*  $\times$  *hauteur* pour le volume d'une pyramide. Passons à présent au calcul de la position du *centre de gravité*. La hauteur  $\bar{z}$  du centre de gravité est notée «  $z_{\text{moyen}}$  » et pour déterminer celle-ci on doit évaluer l'intégrale  $\iiint z dV$  (correspondant en fait au *moment d'inertie*<sup>a</sup> du prisme par rapport à l'axe des  $z$ ) puis on divise le résultat par le volume

$\iiint dV$  calculé précédemment. Chaque tranche horizontale est multipliée par sa hauteur  $z$ , et les limites d'intégration ne changent pas, on a donc

$$\iiint z \, dV = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-yz} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \frac{z(1-z)^2}{2} \, dz = \frac{1}{24}$$

C'est rapide car  $z$  est constant dans les intégrales sur  $x$  et  $y$ . Chaque tranche triangulaire contribue  $z$  fois sa surface  $\frac{1}{2}(1-z)^2$  fois  $dz$ . L'intégrale sur  $z$  donne alors le *moment*  $1/24$ . Pour trouver la hauteur moyenne, on divise ce moment par le volume, soit

$$\bar{z} = \text{hauteur du centre de gravité} = \frac{\iiint z \, dV}{\iiint dV} = \frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$$

Par symétrie on a donc  $\bar{x} = \frac{1}{4}$  et  $\bar{y} = \frac{1}{4}$  également. Le centre de gravité est donc le point de coordonnées  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ .

---

<sup>a</sup>De manière simple, un *moment d'inertie* est une grandeur physique scalaire (un nombre) qui apparaît comme un coefficient de proportionnalité entre le *moment cinétique* et la *vitesse angulaire* d'un solide en rotation.

On peut comparer cela avec le centre de gravité du triangle rectangle standard. On peut aussi comparer avec  $1/2$ , le centre de l'intervalle unitaire (c'est-à-dire de longueur 1). Par induction, il doit exister une région à cinq côtés dans un espace à quatre dimensions centrée autour du point  $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ . On note une certaine régularité dans ces résultats. La longueur de l'intervalle « standard » est de 1, l'aire d'un triangle « standard » est de  $1/2$ , le volume d'un tétraèdre « standard » est  $1/6$ , donc un *hypervolume* en quatre dimensions doit être \_\_\_\_\_. L'intervalle atteint le point  $x = 1$ , le triangle atteint la ligne  $x + y = 1$ , le tétraèdre atteint le plan  $x + y + z = 1$ . La région à quatre dimensions devrait donc s'arrêter à l'hyperplan \_\_\_\_\_ = 1.

**Exemple 13.** On veut trouver le volume  $\iiint dx \, dy \, dz$  de la sphère unitaire  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Pour cela, on se pose d'abord la question *quelles sont les limites sur  $x$ ?* Si une « aiguille » traverse la sphère dans la direction  $x$ , où entre-t-elle et d'où sort-elle? En se déplaçant dans la direction  $x$ , les nombres  $y$  et  $z$  restent constants, ce qui correspond à l'intégrale interne ne traite que de  $x$ . Le plus petit et le plus grand  $x$  sont sur la surface de la sphère où  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . En résolvant cette équation pour  $x$  on trouve les deux valeurs de  $x$  recherché, soit  $x = \pm\sqrt{1 - y^2 - z^2}$ . On peut donc écrire

$$\text{volume de sphère} = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 2\sqrt{1-y^2-z^2} \, dy \, dz$$

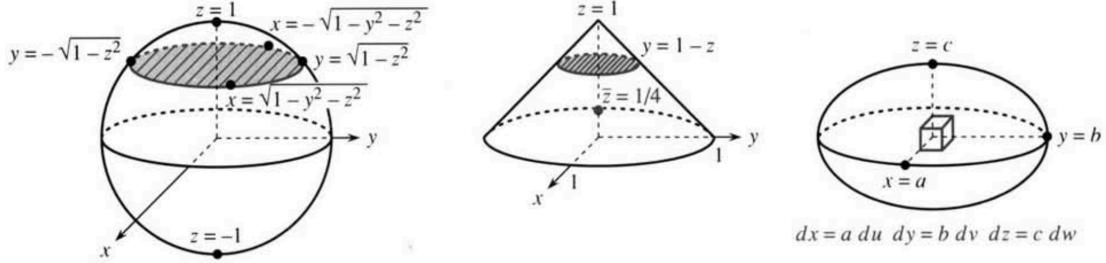
Les limites sur  $y$  sont  $-\sqrt{1-z^2}$  et  $+\sqrt{1-z^2}$ . On trouve ces valeurs en résolvant l'équation aux limites  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  et en considérant les valeurs limites  $x = \pm 1$ , donc le  $x$  disparaît au final. Nous voulons le plus petit et le plus grand  $y$ , pour chaque  $z$ . Pour cela, il est très utile de dessiner le plan à la hauteur  $z$ , en découplant la sphère dans la **Figure 12**. La tranche est un cercle de rayon  $r = \sqrt{1-z^2}$  donc son aire est  $\pi r^2$  et l'intégrale sur  $y$  doit donner ce résultat que nous avons obtenu par la géométrie. On peut donc écrire

$$\int 2\sqrt{1-y^2-z^2} \, dy = \text{aire de la tranche} = \pi(1-z^2)$$

Nous n'avons pas vraiment besoin d'intégrer pour obtenir ce résultat, on peut utiliser simplement la formule  $\pi r^2$ . Les mathématiques sont déjà assez difficiles comme ça et nous n'avons pas à nous forcer à travailler les yeux bandés. Le but est de comprendre et si vous connaissez une aire, utilisez-la. Bien sûr, l'intégrale de  $\sqrt{1-y^2-z^2}$  peut être faite si nécessaire. L'intégrale triple est maintenant réduite à une seule intégrale. Nous sommes passés d'une aiguille à un cercle d'aiguilles et maintenant

à une sphère d'aiguilles. Le volume est une somme de tranches de zone  $\pi(1 - z^2)$ . Le pôle Sud est en  $z = -1$ , le pôle Nord est en  $z = +1$ , et on sait que l'intégrale est le volume  $4\pi/3$  de la sphère unitaire. Par intégration, on trouve en effet

$$\int_{-1}^1 \pi(1 - z^2) dz = \left[ \pi \left( z - \frac{1}{3} z^3 \right) \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}\pi - \left( -\frac{2}{3}\pi \right) = \frac{4}{3}\pi$$



**Figure 12:**  $\int dx$  = longueur de l'aiguille,  $\iint dx dy$  = zone de la tranche. L'ellipsoïde est une sphère étirée.

**AUTRES APPLICATIONS.** On peut essayer d'exporter notre méthode et notre raisonnement pour le calcul de solide possédant des points communs avec la sphère au niveau géométrique. Par exemple, un cône possède également des tranches circulaires. Comment la dernière intégrale est-elle modifiée ? Les tranches d'un cône ont un rayon  $1 - z$ , il suffit donc d'intégrer  $(1 - z)^2$  et non par  $\sqrt{(1 - z)^2}$ . Comment cela se compare-t-il à un cylindre circulaire (de hauteur 1 et rayon 1) ? Dans ce cas toutes les tranches sont de rayon 1. Le cylindre, la demi-sphère et le cône ont tous une partie de leur volume situé au dessus de  $z = 0$ . Pour ces solides, à surface égale, c'est la sphère qui possède le plus grand volume. Enfin, la hauteur moyenne  $\bar{z}$  dans le cône, dans la demi-sphère et dans le cylindre est donnée respectivement par

$$\bar{z} = \frac{\int z(\text{aire de la tranche}) dz}{\int (\text{aire de la tranche}) dz} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}$$

**Exemple 14.** On veut trouver le volume  $\iiint dx dy dz$  à l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation  $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ . Comparativement à l'exemple précédent, les limites de  $x$  sont maintenant  $\pm\sqrt{1 - y^2/b^2 - z^2/c^2}$ . L'expression semble compliquée cependant on note que toutes les tranches sont des ellipses, un *changement de variable* semble donc nécessaire. Un choix raisonnable et naturel pour de nouvelles variables, basé sur la forme de l'équation pour une ellipsoïde, est

$$u = \frac{x}{a} \quad v = \frac{y}{b} \quad w = \frac{z}{c}$$

La limite extérieure devient alors  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ . Avec ces nouvelles variables, on ramène l'ellipsoïde à une sphère dans le système de coordonnées  $uvw$ . Dès lors on peut exploiter notre résultat précédent, c'est-à-dire que l'intégrale triple pour une sphère, dans  $uvw$ , est  $\iiint du dv dw = 4\pi/3$ . Cependant ce n'est pas le résultat final. On doit en effet calculer  $\iiint dV$  avec  $dV = dx dy dz$ , il

nous fait donc exprimer  $dV$  en fonction de  $du$ ,  $dv$  et  $dw$ . On peut poser ce problème de la manière suivante, quel volume  $dV$  dans l'espace  $xyz$  correspond à une petite boîte avec les côtés  $du$  et  $dv$  et  $dw$ ? Chaque boîte  $uvw$  provient d'une boîte  $xyz$ . La boîte est étirée sans se plier ni se tordre. Puisque  $u$  est  $x/a$ , la longueur  $dx$  est  $a du$  alors  $dy = b dv$  et  $dz = c dw$ . Le volume de la boîte  $xyz$  (**Figure 12**) est donc  $dx dy dz = (abc) du dv dw$  et le facteur de déformation  $J = abc$  est une constante. En exploitant le résultat sur le volume d'une sphère unité on peut écrire que le volume de l'ellipsoïde est

$$\underset{\text{ellipsoïde}}{\iiint \text{mauvaises limites} dx dy dz} = \underset{\text{sphère}}{\iiint \text{meilleures limites} (abc) du dv dw} = \frac{4\pi}{3} abc$$

On se rend compte que c'est un cas spécial, en effet d'autres volumes peuvent être beaucoup plus compliqués. Dans ce sens on note que la sphère et l'ellipsoïde sont des solides « courbes », mais les petites boîtes  $xyz$  sont « droites ». Il est donc opportun que l'on présente dans la prochain section les coordonnées sphériques afin que nous puissions écrire explicitement les « bonnes limites » ce qui fera appel à un  $J$  différent.

## 4 COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES

**INTRODUCTION.** Les coordonnées cylindriques sont appropriées, comme on peut le deviner, pour décrire les solides présentant une *symétrie autour d'un axe*. Ces coordonnées sont notées  $r, \theta, z$  où  $r$  est la *distance à l'axe z* donnée par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'angle  $\theta$  quant à lui correspond à une *rotation autour de l'axe z* telle que

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

Enfin la *hauteur z* reste inchangée par rapport au système cartésien. De fait, il s'agit d'une extension des coordonnées polaires  $r\theta$  dans le plan, plus  $z$  vers le haut. Il n'est pas difficile de travailler avec  $r\theta z$ . Par exemple, pour un cylindre solide de hauteur 3, d'axe  $z$  et avec sa base dans le plan  $xy$ , on a

$$0 < r < 1 \quad , \quad 0 \leq z \leq 3 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Pour un *demi-cylindre* il suffit de prendre  $0 \leq \theta \leq \pi$ . le volume de ce demi-cylindre est de la forme  $\int_0^3 \int_0^\pi \int_0^1 J(r, \theta, z) dr d\theta dz$ . Les limites de  $r, \theta, z$  sont particulièrement simples. Le cône et la sphère sont deux autres exemples de solides à symétrie axiale possédant des équations particulièrement simple en coordonnées cylindrique. En effet

$$\text{cône} : r + z = 1 \quad \text{sphère} : r^2 + z^2 = R^2$$

Naturellement, nous n'utiliserons pas de coordonnées cylindriques pour décrire une boîte ou un tétraèdre. Afin de pouvoir effectuer une intégrale triple en coordonnées cylindriques nous avons besoin de déterminer le volume (inifinitésimal)  $dV$  dans ce système. Les mouvements  $dr$  et  $d\theta$  et  $dz$  donnent une « boîte courbe » dans l'espace  $xyz$ , dessiné dans la **Figure 13 (droite)**. La base est un *rectangle polaire*, d'aire  $r dr d\theta$ . La nouvelle partie est de hauteur  $dz$ , le volume élémentaire de la boîte courbe est donc  $dV = r dr d\theta dz$ . La variable  $r$  apparaît donc comme un intégrant (ce que l'on intègre) de l'intégrale triple. Ce facteur correspond en fait au facteur de déformation (ou *Jacobien*), c'est-à-dire  $J = r$ . Il y a six ordres d'intégration possibles, par exemple on peut écrire (nous n'en donnons que deux ici)

$$\text{volume} = \int_z \int_\theta \int_r r dr d\theta dz = \int_\theta \int_z \int_r r dr dz d\theta$$

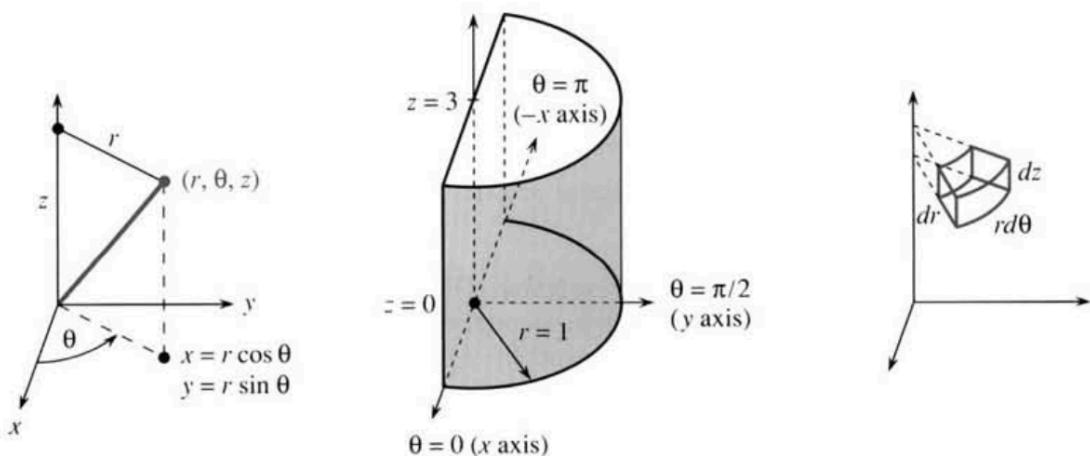
### Exemple 15.

- (1) On veut calculer le volume du demi-cylindre de hauteur 1. L'intégrale de  $r dr$  de 0 à 1 donne  $1/2$  puis l'intégrale sur  $\theta$  donne  $\pi$  et enfin l'intégrale sur  $z$  donne 3. Le volume est donc  $3\pi/2$ .
- (2) On veut déterminer le volume  $\mathcal{V}$  d'un cône dont la surface est d'équation  $r = 1 - z$ , voir la **Figure 14**. Nous proposons trois approches pour évaluer  $\mathcal{V} = \iiint dV$ .
  - On pose  $dV = r dr d\theta dz$ . En premier lieu, puisque  $r$  va de 0 jusqu'à  $1 - z$ , l'intégrale de  $r dr$  est  $\frac{1}{2}(1 - z)^2$ . L'intégrale sur  $\theta$  donne un facteur  $2\pi$  (une rotation complète).

Jusqu'ici nous avons donc obtenu  $\iint r dr d\theta = \frac{1}{2}(1-z)^2 2\pi$ . C'est l'aire d'une tranche à la hauteur  $z$ , voir la **Figure 14 (gauche)**. La tranche est un cercle et son rayon est  $1-z$ , sa surface est donc  $\pi(1-z)^2$ . L'intégrale sur  $z$  somme ces tranches pour donner finalement  $\pi/3$ .

- On pose  $dV = r dz d\theta dr$ . On procède donc d'abord aux intégrales sur  $z$  et  $\theta$ . Puisque  $z$  va de 0 jusqu'à  $1-r$ , et  $\theta$  de 0 jusqu'à  $2\pi$ , ces intégrations produisent  $\iint r dz d\theta = r(1-r) 2\pi$ . Comme précédemment, cela doit correspondre à l'aire de quelque chose. De fait, après les intégrales sur  $z$  et  $\theta$ , nous avons un *cylindre vide de rayon  $r$*  (partie grise sur la **Figure 14 (milieu)**) et de hauteur  $1-r$  (les cylindres extérieurs sont plus courts). Cette hauteur multipliée par  $2\pi r$  donne l'aire de la surface de ce cylindre. Le choix entre « cylindre » ou « tranches » est à notre guise. Le volume d'un cylindre d'épaisseur  $dr$  est sa surface multipliée cette épaisseur  $dr$ . Le volume du cône complet est finalement l'intégrale (c'est-à-dire la « somme ») sur  $r$  du volume des couches soit  $\int_0^1 r(1-r) 2\pi dr = \pi/3$ .
- On pose  $dV = r dr dz d\theta$ . L'intégration sur  $r$  et  $z$  donnent  $\iint r dr dz = 1/6$ . L'intégrale sur  $\theta$  est alors  $\int \frac{1}{6} d\theta$ , ce qui donne  $\frac{1}{6}$  fois  $2\pi$  soit  $\pi/3$ . On se pose la même question que dans les deux démarches précédentes, comment interpréter  $\frac{1}{6} d\theta$  ? En fait le troisième cône est découpé en « part » triangulaire (voir la **Figure 14 (droite)**). Le volume d'une part est  $\frac{1}{6} d\theta$ . Il est assez courant de faire l'intégrale sur  $\theta$  en dernier, surtout quand elle n'apporte qu'un facteur multiplicatif  $2\pi$ . Ce dernier découpage en forme de « parts » est le moins courant des trois présentés.

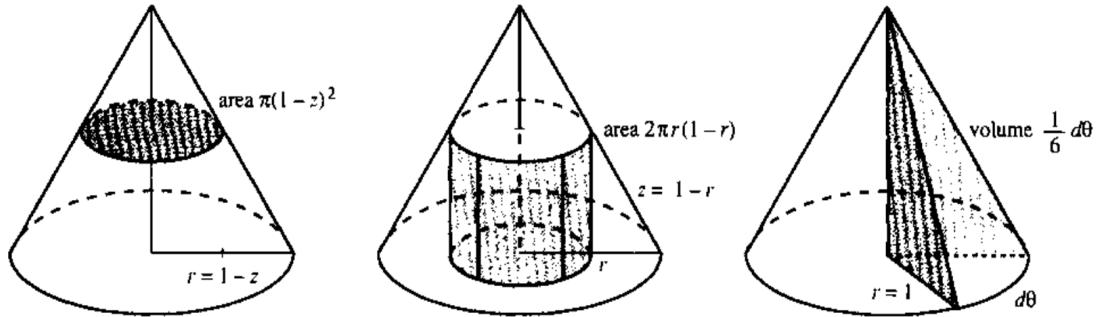
La remarque fondamentale à retenir de cette exemple, au-delà du calcul du volume d'un cône, est que *différents ordres d'intégration donnent différentes manières de découper le solide*. Ceci peut être bien évidemment exploité afin de simplifier l'évaluation d'intégrales multiples en général.



**Figure 13:** Coordonnées cylindriques pour un point et un demi-cylindre. Petit volume  $r dr d\theta dz$ .

**REMARQUES.** Il est à noter que le volume  $\frac{1}{6} d\theta$  n'est pas égal à une aire  $\frac{1}{6}$  fois une « épaisseur »  $d\theta$ . En effet, le triangle dans le troisième cône possède une aire de  $1/2$  et non  $1/6$ . Donc  $1/6$  ne correspond pas à une aire. Ensuite une épaisseur est une longueur, elle ne peut donc correspondre à un

angle  $d\theta$  qui, par définition, n'a pas de dimension. Comme nous l'avons mentionné précédemment, le cône est typique d'un *solide de révolution*. L'axe est dans la direction des  $z$  et l'intégrale sur  $\theta$  donne  $2\pi$ , qu'elle vienne en premier, deuxième ou troisième. L'intégrale sur  $r$  va jusqu'à un rayon donné de manière générale par une fonction  $f(z)$ , qui vaut 1 pour dans le cas d'un cylindre et  $1-z$  pour un cône de hauteur 1. L'intégrale  $\iint r dr d\theta$  est donc  $\pi(f(z))^2 = \text{aire d'une tranche circulaire}$  car la fonction  $f(z)$  correspond à un rayon de cette tranche. Cela laisse donc une intégrale sur  $z$  de la forme  $\int \pi(f(z))^2 dz$ . On peut imaginer d'autre fonction  $f(z)$  décrivant d'autre solide à symétrie axiale. Par exemple pour un cône de hauteur 2 on aurait  $f(z) = 2 - z$ . Le rayon de la base de ce cône est également de 2.



**Figure 14:** Un cône coupé de trois manières: tranche à la hauteur  $z$ , coque au rayon  $R$ , coin à l'angle  $\theta$ .

#### Exemple 16.

- (1) Le *moment d'inertie* autour de l'axe des  $z$  est  $\iiint r^3 dr d\theta dz$ . Le  $r^2$  supplémentaire est (*distance à l'axe*)<sup>2</sup>. Pour le cône, cette triple intégrale est  $\pi/10$ .
- (2) Le *moment* autour de l'axe des  $z$  est  $\iiint r^2 dr d\theta dz$ . Pour le cône, c'est  $\pi/6$ . La *distance moyenne*  $\bar{r}$  est  $(\text{moment}) / (\text{volume}) = (\pi/6)/(\pi/3) = 1/2$ .
- (3) Une sphère de rayon  $R$  a pour frontière le cercle d'équation  $r^2 + z^2 = R^2$ , en coordonnées cylindriques. La limite externe de l'intégrale sur  $r$  est donc  $\sqrt{R^2 - z^2}$  car  $r$  est strictement positif. Le calcul devient alors difficile à effectuer avec un tel résultat intermédiaire à intégrer. Pour éviter cela, nous passons maintenant à des *coordonnées naturelles pour une sphère*.

## 4.1 COORDONNÉES SPHÉRIQUES

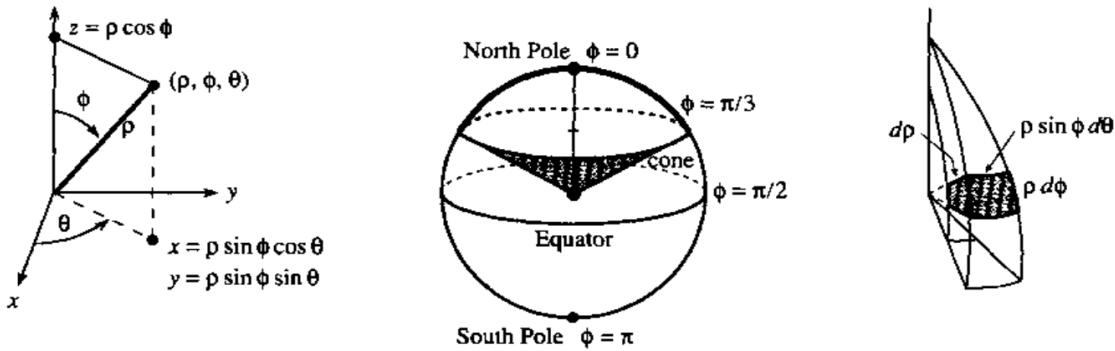
**INTRODUCTION.** La Terre est (approximativement) une sphère solide. Sur sa surface, nous utilisons deux coordonnées que sont la latitude et la longitude. Pour creuser vers l'intérieur ou voler vers l'extérieur, on a besoin d'une troisième coordonnée, soit la *distance  $\rho$  par rapport au centre*. Cette lettre grecque  $\rho$  remplace  $r$  pour éviter toute confusion avec les coordonnées cylindriques. Tandis  $r$  est mesuré à partir de l'axe  $z$ ,  $\rho$  est lui mesuré à partir de l'origine. Ainsi on a les relations fondamentales

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

L'angle  $\theta$  est le même que précédemment. Il va de 0 à  $2\pi$ . C'est la longitude, qui augmente à mesure que l'on se déplace vers l'est le long de l'équateur. L'angle  $\phi$  est nouveau. Il vaut 0 au pôle Nord et  $\pi$  (et non  $2\pi$ ) au pôle Sud. C'est l'*angle polaire*, mesuré à partir de l'axe des  $z$ , voir la

**Figure 15 (gauche).** L'équateur correspond à une latitude de 0 mais un angle polaire de  $\pi/2$  (à mi-chemin). Voici quelques formes typiques

- sphère solide (ou boule) :  $0 \leq \rho \leq R$
- demi-sphère supérieure :  $0 \leq \phi \leq \pi/2$
- surface de la sphère :  $\rho = R$
- demi-sphère à l'est:  $0 \leq \theta \leq \pi$



**Figure 15:** Coordonnées sphériques  $\rho\phi\theta$ . Le volume  $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$  d'une boîte sphérique.

**CAS SIMPLE.** L'angle  $\phi$  est constant sur un cône depuis l'origine. Il coupe la surface en un cercle, voir la **Figure 15 (milieu)**, dont le rayon est inférieur ou égal à celui de la sphère. L'angle  $\theta$  est constant le long d'un demi-cercle de pôle à pôle. La distance  $\rho$  est constante sur chaque sphère intérieure, en commençant au centre  $\rho = 0$  jusqu'à  $\rho = R$ . En coordonnées sphériques, un volume  $\mathcal{V}$  est donnée par l'intégrale

$$\mathcal{V} = \iiint dV = \iiint dx dy dz = \iiint \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

Pour expliquer le facteur (d'étirement) surprenant  $J = \rho^2 \sin \phi$ , on considère les relations  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . En coordonnées sphériques, la coordonnée cylindrique  $r$  est  $\rho \sin \theta$  et  $z$  est  $\rho \cos \theta$ , voir le triangle sur la **Figure 15 (gauche)**. On peut donc remplacer  $\rho \sin \phi$  par  $r$ , soit

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad , \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad , \quad z = \rho \cos \phi$$

Ces étapes sont importantes à retenir, le passage de  $\rho\phi\theta$  à  $r\theta z$  à  $xyz$ . On vérifie que  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

$$\rho^2 (\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi) = \rho^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \rho^2$$

L'intégrale de volume est expliquée par la **Figure 15 (droite)**. Celle-ci montre une « boîte sphérique » avec des angles droits et des bords courbes. Deux arêtes du volume élémentaire sont  $d\rho$  et  $\rho d\theta$  et le troisième bord est horizontal. Le  $r d\theta$  habituel devient  $\rho \sin \theta d\theta$ . Multiplier ces longueurs donne bien le volume de la boîte élémentaire en coordonnées sphériques soit  $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$ . La dimension de  $dV$  est la même que celle de  $\rho^2 d\rho$ , c'est donc bien une distance au cube ( $d\phi d\theta$  est sans dimension).

### Exemple 17.

(1) Une boule solide de rayon  $R$  a un volume connu  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . En effet on a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^R [-\cos \phi]_0^\pi [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi$$

(2) Le volume au-dessus du cône dans la **Figure 15 (milieu)** est donné par

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^R \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{1}{3} R^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

(3) La surface d'une sphère est  $A = 4\pi R^2$ . Il suffit d'ignorer l'intégrale sur  $\rho$ , soit

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \phi d\phi d\theta = R^2 [-\cos \phi]_0^\pi [\theta]_0^{2\pi} = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi$$

## 4.2 EXEMPLE PHYSIQUE

**NOTE.** Cette section constitue une digression par rapport à notre présentation, il n'est donc pas requis de la lire. Néanmoins celle-ci présente un raisonnement alternatif, plus physique, pour l'évaluation d'une intégrale triple. À ce titre, il s'agit donc d'une lecture instructive pour de futurs ingénieurs.

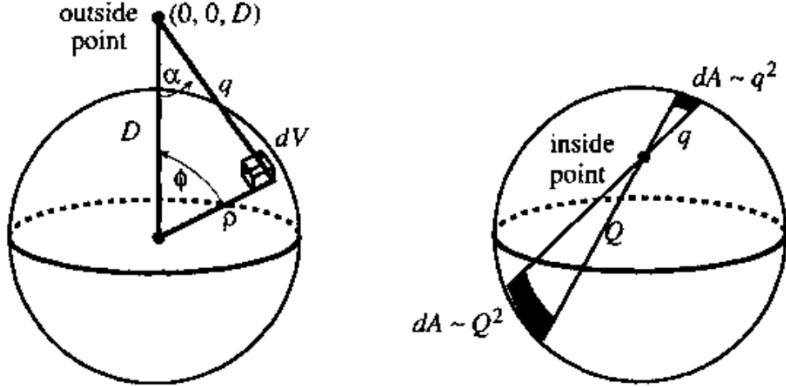
**INTRODUCTION.** Après ces exemples issus de la géométrie, on aborde ici des problèmes plus réalistes mais également plus difficiles. Nous voulons calculer l'une des intégrales triples les plus importantes en physique, celle-ci intervient dans le calcul de « l'attraction gravitationnelle due à une sphère solide ». Sans que l'on sache pourquoi, **ISAAC NEWTON** rencontra des problèmes avec ce calcul particulier faisant intervenir une intégrale triple. Il a refusé de publier son chef-d'oeuvre sur l'astronomie, « *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* », jusqu'à ce que ce problème soit résolu. Il n'a probablement pas utilisé de coordonnées sphériques cependant l'intégrale demeure difficile, même avec ces coordonnées. La réponse que Newton a finalement obtenue est remarquable. *La sphère agit comme si toute sa masse était concentrée au centre.* En un point extérieur de coordonnées  $(0, 0, D)$  (voir la **Figure 16 (gauche)**), la force de gravité est proportionnelle à  $1/D^2$ . La force exercée par la masse d'une sphère solide uniforme est donc égale à la force due à une masse ponctuelle, en chaque point  $P$  extérieur à la sphère. C'est ce que Newton voulait démontrer afin d'expliquer la dynamique du système solaire et prouver les lois de Kepler.

**LE PROBLÈME.** Voici la difficulté. Certaines parties de la sphère sont plus proches que  $D$  d'un point  $P$ , et certaines autres parties sont plus éloignées. La distance réelle  $q$ , du point extérieur  $P$  à un point intérieur typique, est indiquée sur la **Figure 16**. La distance moyenne  $\bar{q}$  à tous les points de la sphère n'est pas malheureusement pas  $D$ . Mais ce dont Newton avait besoin était une moyenne différente et par chance, ou à cause d'une divine inspiration, *la moyenne de  $1/q$  est  $1/D$* . Cela permet d'exprimer l'énergie potentielle (gravitationnelle) par l'intégrale triple suivante

$$\text{le potentiel au point } P = \iiint_{\text{sphère}} \frac{1}{q} dV = \frac{\text{volume de la sphère}}{D} \quad (4.1)$$

Un petit volume  $dV$  à la distance  $q$  apporte une  $dV/q$  au potentiel. L'intégrale ajoute les contributions de toute la sphère. L'équation (4.1) indique que le potentiel en  $r = D$  n'est pas changé lorsque la sphère est compressée vers le centre. Le potentiel est égal au volume total divisé par la

distance unique  $D$ . Une remarque importante, la moyenne de  $1/q$  est  $1/D$  et non pas  $1/\bar{q}$ . De la même manière que la moyenne de  $1/2$  et  $1/4$  n'est pas  $1/3$ . Une remarque moins importante, nous avons écrit « sphère » où on a dû écrire en fait « boule ». En effet la sphère est ici solide, on a donc:  $0 \leq \rho \leq R$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .



**Figure 16:** Distance  $q$  du point extérieur au point intérieur. Distance  $q$  et  $q$  à la surface.

**CALCUL DE LA FORCE.** Qu'en est-il de la force? Pour le petit volume  $dV$ , elle est proportionnel à  $dV/q^2$  (c'est la loi du carré inverse). Mais la *force est un vecteur*, tirant le point extérieur vers le volume  $dV$  et non pas vers le centre de la sphère. La **Figure 16** montre la géométrie et la symétrie du problème. Nous voulons la composante  $z$  de la force (par symétrie les composantes globales  $x$  et  $y$  sont nulles). L'angle entre le vecteur de force et l'axe des  $z$  est  $\alpha$ , donc pour la composante selon  $z$  nous multiplions par  $\cos \alpha$ . La force totale provient de l'intégrale

$$\text{la force au point } P = \iiint_{\text{sphère}} \frac{\cos \alpha}{q^2} dV = \frac{\text{volume de la sphère}}{D^2} \quad (4.2)$$

Nous calculerons l'intégrale (4.1) mais on laisse au lecteur le privilège d'évaluer (4.2) comme exercice et cela doit être pris au sérieux. Si vous êtes arrivé jusqu'ici, vous méritez le plaisir de faire ce que seul Isaac Newton pouvait faire à un moment donné. La **Question (1)** de l'**Exercice 30** propose une suggestion (utilisant la loi des cosinus) mais l'intégrale est vôtre. La loi des cosinus aide également avec (4.1). Pour le triangle de la **Figure 16**, cela donne  $q^2 = D^2 - 2\rho D \cos \phi + \rho^2$ . on pose  $u = q^2$  puis on effectue d'abord l'intégrale de surface ( $d\phi$  et  $d\theta$  avec  $\rho$  fixe). On a  $q > 0$  donc  $q = \sqrt{u}$  et  $du = 2\rho D \sin \phi d\phi$ , ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin \phi d\phi d\theta}{q} = \int \frac{2\pi \rho^2}{2\rho D} \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[ \frac{2\pi \rho}{D} \sqrt{u} \right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} \quad (4.3)$$

Le facteur  $2\pi$  provient de l'intégrale sur  $\theta$ . L'intégrale de  $du/\sqrt{u}$  est  $2\sqrt{u}$ . Puisque  $\cos \phi = -1$  à la borne supérieure,  $u$  est  $D^2 + 2\rho D + \rho^2$ . La racine carrée de  $u$  est  $D + \rho$ . À la borne inférieure on a  $\cos \phi = +1$  et  $u = D^2 - 2\rho D + \rho^2$ . C'est un autre carré parfait, sa racine carrée est donc  $D - \rho$ . L'intégrale de surface (4.3) avec  $\rho$  fixe est alors

$$\iint \frac{dA}{q} = \frac{2\pi \rho}{D} [(D + \rho) - (D - \rho)] = \frac{4\pi \rho^2}{D} \quad (4.4)$$

En dernier vient l'intégrale sur  $\rho$ , soit

$$\frac{1}{D} \int_0^R 4\pi \rho^2 d\rho = \frac{1}{D} \frac{4}{3} \pi R^3$$

Cela prouve la formule (4.1) donc *le potentiel est égal au volume de la sphère divisé par D.*

**REMARQUES ET CONCLUSION** Les physiciens sont heureux avec l'équation (4.4). La moyenne de  $1/q$  est  $1/D$  non seulement sur la sphère solide mais sur chaque couche sphérique de surface  $4\pi\rho^2$ . Les couches peuvent avoir des densités différentes, comme elles le font sur Terre, et le résultat Newton est toujours correct. Ceci s'applique également à l'intégrale de force (4.2), en effet *chaque couche séparée agit comme si sa masse était concentrée au centre*. L'intégrale finale sur  $\rho$  donne alors cette propriété pour la sphère solide. De plus, les physiciens savent aussi que la force est moins la dérivée, c'est-à-dire le gradient en dimension trois, du potentiel ( $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$  où  $V$  est le potentiel). La dérivée de (4.1) par rapport à  $D$  doit donc produire l'intégrale de force (4.2). La **Question (2)** dans l'**Exercice 30** explique ce raccourci vers l'équation (4.2).

**Exemple 18.** *Partout dans une sphère creuse, la force de gravité est nulle.* En effet, lorsque  $D$  est plus petit que  $\rho$ , la borne inférieure  $\sqrt{u}$  dans l'intégrale (4.3) passe de  $D - \rho$  à  $\rho - D$ . De cette façon, la racine carrée reste positive. Cela change la réponse dans (4.4) en  $4\pi\rho^2/\rho$ , donc le potentiel ne dépend plus de  $D$ . *Le potentiel est donc constant à l'intérieur de la sphère creuse.* Puisque la force provient de sa dérivée, la force est nulle.

Une preuve plus intuitive se trouve dans la **Figure 16 (droite)**. Les aires infinitésimales de la surface sont proportionnelles à  $q^2$  et  $Q^2$ . Mais les distances à ces zones sont  $q$  et  $Q$ , donc les forces impliquent  $1/q^2$  et  $1/Q^2$  (la loi des carrés inverse). Par conséquent, les deux zones exercent des forces égales et opposées sur le point intérieur, et elles s'annulent. La force totale de la sphère creuse est donc nulle. Cette intégrale nulle est la raison pour laquelle l'intérieur d'une voiture est à l'abri de la foudre. Bien sûr, une voiture n'est pas une sphère. Mais la charge électrique se distribue pour maintenir la surface à un potentiel constant. Le potentiel reste constant à l'intérieur, donc il n'y a pas de force. Les pneus aident à empêcher la conduction du courant (et l'électrocution du conducteur). Noter bien qu'il ne faut pas que vous sortiez simplement de la voiture. Laissez une chaîne métallique conduire la charge vers le sol. Sinon, vous pourriez être le conducteur (de la foudre).

### 4.3 CHANGEMENT DE COORDONNÉES - FACTEUR DE DÉFORMATION $J$

**INTRODUCTION.** Une fois de plus, nous recherchons une formule. Nous avons besoin du volume d'une petite boîte courbe dans n'importe quel système de coordonnées  $uvw$ . Les boîtes  $r\theta z$  et  $\rho\phi\theta$  ont des angles droits, et leurs volumes ont été lus à partir de la géométrie (les facteurs d'étirement étaient  $J = r$  et  $J = \rho^2 \sin \phi$  dans les **Figures 13 et 15**). Maintenant, nous passons de  $xyz$  à d'autres coordonnées  $uvw$ , que l'on adapte en fonction du problème posé. En passant de  $xy$  à  $uv$ , l'aire  $dA = J du dv$  était un déterminant  $2 \times 2$ . En trois dimensions, le déterminant est donc de taille  $3 \times 3$ . La matrice est toujours la « *matrice jacobienne* » contenant les premières dérivées. Il y avait quatre dérivés de  $xy$  à  $uv$ , maintenant il y en a neuf pour un passage des coordonnées  $xyz$  aux coordonnées  $uvw$ .

**JACOBIEN EN TROIS DIMENSIONS.** Supposons que  $x, y, z$  soient donnés en fonction de  $u, v, w$ . Alors une petite boîte dans l'espace  $uvw$  (de côtés  $du, dv, dw$ ) provient d'un volume  $dV = J du dv dw$

dans l'espace  $xyz$ , on écrit alors le *Jacobien* de cette transformation de la manière suivante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \text{facteur de déformation } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \quad (4.5)$$

L'intégrale de volume  $dx dy dz$  devient  $\iiint |J| du dv dw$ , avec des limites sur  $uvw$ . Au passage, il ne faut pas oublier qu'un déterminant  $3 \times 3$  est la somme de six termes. Un terme dans  $J$  est  $(\frac{\partial x}{\partial u})(\frac{\partial y}{\partial v})(\frac{\partial z}{\partial w})$ , provenant de la diagonale principale. Ce terme correspond en fait à un *étirement pur* tandis que les cinq autres termes dans  $J$  correspondent à une *rotation*. Il est relativement simple d'écrire le Jacobien pour les coordonnées sphériques, car les neuf dérivées sont faciles à évaluer, cependant évaluer le déterminant lui-même n'est pas évident. On pourra consulter l'**Appendice B** pour une présentation plus détaillée et technique sur l'origine de la formule (4.5).

**Exemple 19.** On veut trouver le facteur  $J$  pour  $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = \rho \cos \theta$ .

On calcule:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

On observe que le déterminant possède au plus six termes, mais deux sont nuls à cause du zéro en bas à droite. Les quatre autres termes sont

$$\rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi \sin^2 \theta, \quad \rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta, \quad \rho^2 \sin^3 \phi \sin^2 \theta, \quad \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta$$

Ajoutez les deux premiers (notez  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ ) et ajoutez séparément les deux seconds. Ajoutez ensuite les sommes pour obtenir  $J = \rho^2 \sin \phi$ . On rappelle que la géométrie a déjà donné cette réponse. Pour la plupart des changements de variables en dimension multiples, il est fortement recommandé de passer par l'évaluation du Jacobien  $J$ .

## A SYSTÈMES DE COORDONNÉES SPATIALES

### A.1 COORDONNÉES CYLINDRIQUES

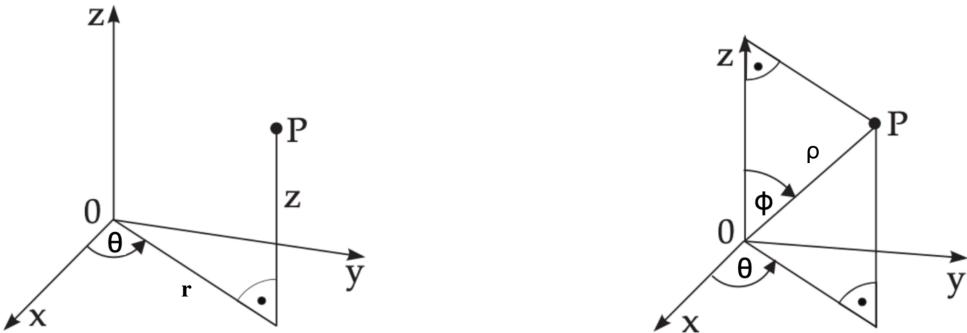
Ces coordonnées, voir la **Figure 17 (gauche)** sont constituées de

- les coordonnées  $\rho$  et  $\theta$  issus de la projection orthogonale du point  $P$  sur le plan  $xy$
- la hauteur  $z$  du point  $P$

Les *surfaces de coordonnées* pour le système de coordonnées cylindrique sont

- Les surfaces du cylindre de rayon  $\rho = \text{const}$ , et l'axe des  $z$  comme axe du cylindre
- les demi-plans partant de l'axe des  $z$  d'équation  $\theta = \text{const}$
- les plans étant perpendiculaires à l'axe des  $z$  d'équation  $z = \text{const}$

Les courbes à l'intersection de ces surfaces sont parfois appelées des *courbes de coordonnées*.



**Figure 17:** Coordonnées cylindriques (à droite) et sphériques (à droite)

### A.2 COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Ces coordonnées, voir la **Figure 17 (droite)**, sont constituées de

- la longueur  $\rho$  du vecteur rayon  $\overrightarrow{OP}$
- l'angle  $\theta$  entre l'axe des  $z$  et le vecteur rayon  $\overrightarrow{OP}$
- l'angle  $\phi$  entre l'axe des  $x$  et la projection de  $\overrightarrow{OP}$  sur le plan  $xy$

Les *directions positives* sont ici pour  $\overrightarrow{OP}$  de l'origine au point  $P$ , pour  $\theta$  de l'axe des  $z$  à  $\overrightarrow{OP}$ , et pour  $\phi$  de l'axe des  $x$  à la projection de  $\overrightarrow{OP}$  sur le plan  $xy$ . Avec les valeurs  $0 \leq r \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $-\pi < \phi \leq \pi$  chaque point de l'espace peut être décrit. Les *surfaces de coordonnées* sont

- des sphères avec l'origine  $O$  comme centre et avec un rayon  $\rho = \text{const}$
- des cônes circulaires avec  $\theta = \text{const}$ , avec un sommet à l'origine, et l'axe des  $z$  comme axe
- des demi-plans fermés commençant à l'axe des  $z$  avec  $\phi = \text{const}$

### A.3 RELATIONS ENTRE LES COORDONNÉES CARTÉSIENNES, CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES

Le tableau suivant résume les expressions de chaque système de coordonnées en fonction des autres.

Cartésien	=	Cylindrique	=	Sphérique
$x$	=	$r \cos \theta$	=	$\rho \sin \phi \cos \theta$
$y$	=	$r \sin \theta$	=	$\rho \sin \phi \sin \theta$
$z$	=	$z$	=	$\rho \cos \phi$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	=	$r$	=	$\rho \sin \phi$
$\arctan(y/x)$	=	$\theta$	=	$\theta$
$z$	=	$z$	=	$\rho \cos \phi$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	=	$\sqrt{r^2 + z^2}$	=	$\rho$
$\arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/x)$	=	$\arctan(r/z)$	=	$\phi$
$\arctan(y/x)$	=	$\theta$	=	$\theta$

L'angle  $\theta$  vu comme une fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  est une fonction multivaluée pour laquelle la formule  $\theta = \arctan(y/x)$  n'est valide que si  $x > 0$ . Pour d'autres valeurs on a

$$\theta = \begin{cases} \pi + \arctan(y/x) & \text{si } x < 0 \\ \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \text{pas définie} & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

Les mêmes relations s'appliquent à  $\phi = \arctan(r/z) = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/x)$ .

## B JACOBIENS

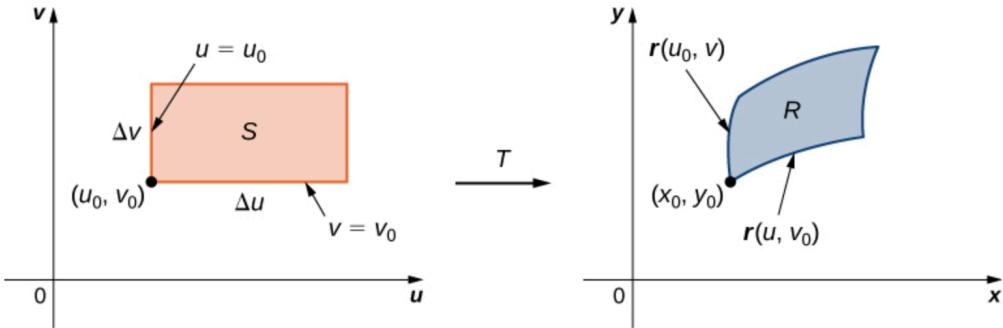
**DEUX DIMENSIONS.** On considère le changement de variable donné par les fonctions suivantes

$$x = g(u, v) \quad \text{et} \quad y = h(u, v)$$

où les fonctions  $g$  et  $h$  sont a priori arbitraires à ceci près que leurs dérivées (partielles) premières  $g_u, g_v, h_u, h_v$  existent et doivent être *continues*. Un tel changement peut être vu comme une transformation géométrique  $T$  associant à un unique point  $(x, y)$  (dans le plan  $xy$ ) un autre point (unique) de coordonnées  $(u, v)$  (dans le plan  $uv$ ) tels que

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

On voudrait maintenant décrire la transformation d'une région élémentaire, et non plus d'un point seulement, rectangulaire  $S$  du plan  $uv$  (d'aire  $\Delta u \Delta v$ ) en une région «courbe»  $R$  du plan  $xy$  (d'aire  $\Delta A$ ), voir la **Figure 18**.



**Figure 18:** Un petit rectangle  $S$  dans le plan  $uv$  est transformé en une région  $R$  dans le plan  $xy$ .

Pour ce faire on considère le «vecteur position»  $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  dans le plan  $xy$ , muni du repère orthonormé  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ , que l'on peut exprimer en fonction des coordonnées  $u, v$  selon

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\mathbf{i} + h(u, v)\mathbf{j}$$

De plus on note que, en suivant la notation, le point de coordonnées  $(u_0, v_0)$ , situé dans le coin inférieur gauche de la région  $S$ , est transformé selon  $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$ . De la même manière, toujours en s'aidant de la **Figure 18**, on remarque que l'image du côté inférieur du rectangle  $S$  d'équation  $v = v_0$  est la courbe décrite par le vecteur  $\mathbf{r}(u, v_0)$  dans le plan  $xy$ . Dans ce sens le vecteur tangent au point  $(x_0, y_0)$  à cette courbe est donné par

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = g_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}$$

De manière similaire l'image du côté (rectiligne) gauche de la région  $S$  d'équation  $u = u_0$  est donnée par le même côté (courbe) de la région  $R$  décrit par le vecteur  $\mathbf{r}(u_0, v)$ , voir la **Figure 18**. Le vecteur tangent en  $(x_0, y_0)$  à ce côté courbe est donc

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = g_v(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}$$

Si on en revient maintenant à la définition, pour la «fonction vectorielle»  $\mathbf{r}(u, v)$ , on a les expressions

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta v}$$

On en conclut donc que

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \mathbf{r}_u \quad \text{et} \quad \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \mathbf{r}_v$$

Cela nous permet d'estimer l'aire infinitésimale  $\Delta A$  de la « région image »  $R$  en calculant l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs  $\Delta u \mathbf{r}_u$  et  $\Delta v \mathbf{r}_v$ . Cette aire est donnée par le module du *produit vectoriel* de ces deux vecteurs qui peut lui-même se formuler en terme de déterminant. On a

$$\Delta A = \|\Delta u \mathbf{r}_u \wedge \Delta v \mathbf{r}_v\| = \Delta u \Delta v \|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\|$$

où le vecteur  $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$  est proportionnel au vecteur  $\mathbf{k}$  appartenant au repère orthonormé  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Le module de ce vecteur s'exprime le plus simplement en terme de déterminant selon

$$\|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v\| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

En tenant compte du fait que  $x, y$  sont vues comme des fonctions des variables  $u, v$ , il est intéressant d'introduire la notation suivante

$$J(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right|$$

où  $J$  est appelé le « Jacobien » de la transformation considérée. On a donc

$$\Delta A = |J(u, v)| \Delta u \Delta v$$

où la valeur absolue assure que le facteur  $J$ , issu du module de  $\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$  (par définition positif ou nul), reste positif ou nul. En se rappelant que  $\Delta A = \Delta x \Delta y = dx dy$  et que  $\Delta u \Delta v = du dv$ , dans la limite de petites variations, on retrouve bien l'expression (2.4), soit

$$dx dy = |J(u, v)| du dv$$

**TROIS DIMENSIONS.** En reproduisant la stratégie précédente on peut retrouver la formule (4.5) en posant le changement de variables suivant

$$x = g(u, v, w) \quad , \quad y = h(u, v, w) \quad , \quad z = f(u, v, w)$$

caractérisant la transformation géométrique  $T(u, v, w) = (g(u, v, w), h(u, v, w), f(u, v, w))$  d'une région élémentaire « rectangulaire »  $S$  située dans l'espace  $uvw$  en une région « courbe »  $R$  située dans l'espace  $xyz$ . Le vecteur position est donc de la forme

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v, w) \mathbf{i} + h(u, v, w) \mathbf{j} + f(u, v, w) \mathbf{k}$$

À partir de cela on peut rapidement calculer que

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0, w_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0, w_0)}{\Delta u} \\ \mathbf{r}_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v, w_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0, w_0)}{\Delta v} \\ \mathbf{r}_w = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_0, v_0, w_0 + \Delta w) - \mathbf{r}(u_0, v_0, w_0)}{\Delta w} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0, w_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0, w_0) \approx \Delta u \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v, w_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0, w_0) \approx \Delta v \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}(u_0, v_0, w_0 + \Delta w) - \mathbf{r}(u_0, v_0, w_0) \approx \Delta w \mathbf{r}_w \end{cases}$$

Maintenant on utilise le fait que le volume infinitésimal  $\Delta V$  de la région  $R$  s'exprime (lui aussi) comme la valeur absolue d'un *produit mixte* selon la formule

$$\Delta V = |(\Delta u \mathbf{r}_u \wedge \Delta v \mathbf{r}_v) \cdot \Delta w \mathbf{r}_w| = \Delta u \Delta v \Delta w \ |(\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w|$$

À son tour ce produit mixte s'exprime simplement en terme de déterminant selon la formule

$$(\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_w = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = J(u, v, w)$$

où on a défini le Jacobien  $J$  associé au changement de variable  $xyz \rightarrow uvw$ . On a donc  $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V = |J(u, v, w)| \Delta u \Delta v \Delta w$  et en se rappelant, comme précédemment, que  $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$  dans la limite des petites variations, on obtient bien la formule fondamentale

$$dx dy dz = |J(u, v, w)| du dv dw$$

**DIMENSIONS SUPÉRIEURES.** À partir des exemples précédents il est dorénavant simple de généraliser la démarche afin de construire une formule traduisant le changement d'un ensemble de  $n$  variables  $x_i$  à un ensemble de  $n$  variables  $u_i$  tel que

$$x_i = f_i(u_1, \dots, u_n)$$

où  $i$  et  $n$  sont des entiers tels que  $1 \leq i \leq n$  et  $n \geq 2$ . Pour décrire la transformation d'un *hypervolume*  $S$  en un *hypervolume*  $R$  en dimension  $n$ , on introduit le vecteur position

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n f_i(u_1, \dots, u_n) \mathbf{e}_i$$

où  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  est une base orthonormée de l'espace  $x_1 x_2 \cdots x_n$ . Par la suite, on peut construire la dérivée partielle de  $\mathbf{r}(u_1, \dots, u_n)$  au point  $(u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$ , où les  $u_i^0$  sont des valeurs fixes (attention le « 0 » n'est ici qu'un indice, pas une puissance), dans les différentes directions  $u_i$  de l'espace  $u_1 u_2 \cdots u_n$ . En généralisant les formules précédentes on obtient simplement

$$\mathbf{r}_{u_i} = \lim_{\Delta u_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(u_1^0, \dots, u_i^0 + \Delta u_i, \dots, u_n^0) - \mathbf{r}(u_1^0, \dots, u_n^0)}{\Delta u_i}$$

valide pour  $1 \leq i \leq n$ , ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{r}(u_1^0, \dots, u_i^0 + \Delta u_i, \dots, u_n^0) - \mathbf{r}(u_1^0, \dots, u_n^0) \approx \Delta u_i \mathbf{r}_{u_i}$$

On peut maintenant exprimer directement l'hypervolume élémentaire  $\Delta V$  par la valeur absolue du déterminant de la matrice formée des vecteurs  $\Delta u_i \mathbf{r}_{u_i}$ . On écrit

$$\begin{aligned} \Delta V &= |\det(\Delta u_1 \mathbf{r}_{u_1}, \dots, \Delta u_i \mathbf{r}_{u_i}, \dots, \Delta u_n \mathbf{r}_{u_n})| \\ &= \Delta u_1 \cdots \Delta u_i \cdots \Delta u_n |\det(\mathbf{r}_{u_1}, \dots, \mathbf{r}_{u_i}, \dots, \mathbf{r}_{u_n})| = \prod_{i=1}^n \Delta u_i |\det(\mathbf{r}_{u_1}, \dots, \mathbf{r}_{u_i}, \dots, \mathbf{r}_{u_n})| \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés algébriques du déterminant. Maintenant on peut définir le Jacobien de notre changement de variable en dimension arbitraire selon

$$J(u_1, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

En prenant  $\Delta x_i = dx_i$  et  $\Delta u_i = du_i$  dans la limite des petites variations, et avec  $\Delta V = \Delta x_1 \cdots \Delta_n$ , on arrive alors à la formule générale

$$dx_1 \cdots dx_n = |J(u_1, \dots, u_n)| du_1 \cdots du_n$$

On notera au passage que le volume d'un *parallélépipède* dans un espace euclidien de dimension finie est donné, de manière générale, par la valeur absolue du déterminant de la matrice des vecteurs formant les cotés du parallélépipède.

## C EXERCICES

### C.1 INTÉGRALES DOUBLES

**Exercice 1.** Calculez les intégrales doubles suivantes par deux intégrations.

$$(1) \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^2 x^2 dx dy \text{ et } \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^2 y^2 dx dy \quad (3) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \sin(x+y) dx dy \text{ et } \int_1^2 \int_0^2 \frac{dx dy}{(x+y)^2}$$

$$(2) \int_{y=2}^{2e} \int_{x=1}^e 2xy dx dy \text{ et } \int_{y=2}^{2e} \int_{x=1}^e \frac{dx dy}{xy} \quad (4) \int_0^1 \int_1^2 y e^{xy} dx dy \text{ et } \int_{-1}^1 \int_0^3 \frac{dy dx}{\sqrt{3+2x+y}}$$

**Exercice 2.** Dessinez la région et calculez la surface. Ensuite, inversez l'ordre de l'intégrale (et trouvez les nouvelles limites) et calculez à nouveau l'aire.

$$(1) \int_{x=1}^2 \int_{y=1}^{2x} dy dx \quad (3) \int_0^\infty \int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} dy dx \quad (5) \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 dx dy$$

$$(2) \int_0^1 \int_{x^3}^x dy dx \quad (4) \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{1-x^2} dy dx \quad (6) \int_{-1}^1 \int_{x=y}^{|y|} dx dy$$

**Exercice 3.** Évaluez les intégrales suivantes

$$(1) \int_0^b \int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy \quad (2) \int_0^b \int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$$

**Exercice 4.** Divisez un carré unitaire  $R$  en triangles  $S$  et  $T$  puis vérifiez la relation  $\iint_R f dA = \iint_S f dA + \iint_T f dA$ .

$$(1) f(x, y) = 2x - 3y + 1 \quad (2) f(x, y) = x e^y - y e^x$$

**Exercice 5.** On considère un rectangle avec des coins de coordonnées  $(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)$  et qui a une densité  $\rho(x, y) = x^2$ . Les moments sont  $m_y = \iint x \rho dA$  et  $m_x = \iint y \rho dA$ . Trouver

$$(1) \text{ la masse} \quad (2) \text{ le centre de gravité}$$

**Exercice 6.** Écrire un programme pour calculer  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$  par la méthode du point milieu<sup>6</sup> (points milieux de petits carrés  $n^2$ ). Quel sont les  $f(x, y)$  intégré exactement par votre programme?

**Exercice 7.** Appliquez le code du point milieu pour intégrer  $x^2$  et  $xy$  et  $y^2$ . L'erreur décroît comme quelle puissance de  $\Delta x = \Delta y = 1/n$  ?

**Exercice 8.** On considère une région qui est un morceau de disque de rayon 1 entre les lignes  $y = x$  et  $y = -x$ . Trouver alors

$$(1) \text{ l'aire} \quad (2) \text{ le centroïde } (\bar{x}, \bar{y}).$$

**Exercice 9.** Une cité localisée dans un cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 100$  possède une densité de population de  $\rho(x, y) = 10(100 - x^2 - y^2)$ . Intégrer pour trouver sa population.

**Exercice 10.** On veut trouver le volume entre les plans  $x = 0, y = 0, z = 0$  et  $ax + by + cz = 1$ .

---

<sup>6</sup> *The Midpoint Rule* en anglais

## C.2 CHANGEMENT DE VARIABLES

**Exercice 11.** Le domaine  $R$  est une partie de disque avec :  $0 \leq r \leq 1$  et  $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ .

- (1) Quelle est l'aire de  $R$ ? Vérifier par intégration en coordonnées polaires.
- (2) Trouver des limites sur  $\iint dy dx$  pour obtenir l'aire de  $R$ , et intégrer. Extra: Trouvez les limites sur  $\iint dx dy$ .
- (3) L'équation (2.1) avec  $\alpha = \pi/4$  fait pivoter  $R$  dans la région  $uv$ . On a alors  $S = \underline{\hspace{2cm}}$ . Trouvez des limites sur  $\iint du dv$ .
- (4) Calculer la hauteur du centre de gravité  $\bar{y}$  de  $R$  en changeant  $\iint y dx dy$  en coordonnées polaires. Divisez par l'aire de  $R$ .
- (5) La région  $R$  est caractérisée par  $\bar{x} = 0$  car  $\underline{\hspace{2cm}}$ . Après la rotation de  $\alpha = \pi/4$ , le centre de gravité  $(\bar{x}, \bar{y})$  de  $R$  devient le centre de gravité situé en  $\underline{\hspace{2cm}}$  de  $S$ .
- (6) Trouvez le centre de n'importe quel coin  $0 \leq r \leq A, 0 \leq \theta \leq b$ .

**Exercice 12.** Remplacez les régions à quatre côtés par des carrés.

- (1) La région  $R$  a des côtés droits  $y = 2x, x = 1, y = 1 + 2x, x = 0$ . Localisez ses quatre coins et dessinez  $R$ . Trouvez sa superficie par géométrie.
- (2) Choisissez  $a, b, c, d$  pour que le changement  $x = au + bv, y = cu + dv$  transforme la région  $R$  précédente en région  $S$  correspondante à un carré unitaire  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ . À partir du facteur de déformation  $J = ad - bc$ , On veut trouver l'aire de  $R$ .

**Exercice 13.** En utilisant les coordonnées polaires, trouvez le volume sous la surface d'équation  $z = x^2 + y^2$  au-dessus du disque unitaire  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Exercice 14.** Dans l'[Exemple 3](#) on intègre  $e^{-x^2}$  de 0 à  $\infty$  (réponse:  $\sqrt{\pi}$ ). Également,  $B = \int_0^1 e^{-x^2} dx$  conduit à  $B^2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx \int_0^1 e^{-y^2} dy$ . Changez cette intégrale double sur le carré unité pour les coordonnées  $r$  et  $\theta$ , et trouvez les limites sur  $r$  rendant l'intégration exacte impossible.

**Exercice 15.** Dessinez la région  $R$ :  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \infty$  et décrivez la en coordonnées polaires (donnez les limites sur  $r$  et  $\theta$ ). Intégrez  $\iint_R (x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy$  en coordonnées polaires.

**Exercice 16.** On veut trouver la masse du carré incliné dans l'[Exemple 2.1](#) si la densité est  $\rho = xy$ .

**Exercice 17.** On veut trouver la masse de l'anneau dans l'[Exemple 2.2](#) si la densité est  $\rho = x^2 + y^2$ . Ce résultat est égal à quel moment d'inertie avec quelle densité?

**Exercice 18.** Dans le carré défini par  $-1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1$ , où pourriez-vous distribuer une masse unitaire (c'est-à-dire avec  $\iint \rho dx dy = 1$ ) afin de maximiser les intégrales suivantes

$$(1) \iint x^2 \rho dA \quad (2) \iint y^2 \rho dA \quad (3) \iint r^2 \rho dA$$

## C.3 INTÉGRALES TRIPLES

**Exercice 19.** Trouvez les limites de l'intégrale  $\iiint dx dy dz$  et le volume dans les cas suivants. On peut dessiner un schéma pour s'aider.

- (1) Un cube de côté 2 centré en  $(0, 0, 0)$

(2) La moitié du cube précédent, la partie supérieure au plan  $xy$ .

**Exercice 20.**

(1) Pour la région solide  $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ , trouvez les limites dans  $\iiint dx dy dz$  et calculez le volume.

(2) Inversez l'ordre d'intégration dans la question précédente en  $\iiint dz dy dx$  et trouvez les limites de l'intégration. Les quatre faces de ce tétraèdre sont les plans  $x = 0$  et  $y = x$  et \_\_\_\_\_.

**Exercice 21.** On veut trouver les limites dans  $\iiint dx dy dz$  ou  $\iiint dz dy dx$ . Calculez le volume.

(1) Un cylindre circulaire de hauteur 6 et de base  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

(2) La partie de ce même cylindre située sous le plan  $z = x$ . Regardez la base. Dessinez une image.

**Exercice 22.**

(1) Trouvez le volume et le centre de gravité de la région délimitée par  $x = 0, y = 0, z = 0$  et  $x/a + y/b + z/c = 1$ .

(2) D'après le texte, quel est le volume à l'intérieur de  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$ ? Quel est « l'hypervolume » de la pyramide à 4 dimensions qui s'arrête à  $x + y + z + w = 1$ ?

**Exercice 23.** On veut trouver les dérivées partielles  $\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z}$  de

$$(1) \quad I = \int_0^z \int_0^y dx dy$$

$$(2) \quad I = \int_0^z \int_0^y \int_0^x f(x', y', z') dx' dy' dz'$$

**Exercice 24.** Définir la valeur moyenne de  $f(x, y, z)$  dans un volume  $V$ .

**Exercice 25.** Donnez les limites supérieures afin de produire le volume d'un cube unité à partir de petit cube dans la triple somme :  $\sum_{i=1} \sum_{j=1} \sum_{k=1} (\Delta x)^3 = 1$ .

**Exercice 26.** On veut trouver la limite lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$  de  $\sum_{i=1}^{3/\Delta x} \sum_{j=1}^{2/\Delta x} \sum_{k=1}^j (\Delta x)^3$ .

#### C.4 COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES

**Exercice 27.** Convertissez les coordonnées  $xyz$  en coordonnées cylindriques  $r\theta z$  et sphériques  $\rho\phi\theta$  (faites attention à  $\theta$  dans le troisième cas).

$$(1) \quad (D, 0, 0)$$

$$(2) \quad (0, -D, 0)$$

$$(3) \quad (0, 0, D)$$

$$(4) \quad (3, 4, 5)$$

**Exercice 28.** A partir des limites d'intégration, décrivez chaque région et trouvez son volume. L'intégrale intérieure a les limites intérieures.

$$(1) \quad \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1/\sqrt{2}} \int_{z=r}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta$$

$$(4) \quad \int_{\theta=0}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} r d\theta dr dz$$

$$(2) \quad \int_{\theta=0}^{\pi} \int_0^1 \int_0^{1+r^2} r dz dr d\theta$$

$$(5) \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$(3) \quad \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 \int_{r=0}^{2-z} r dr dz d\theta$$

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \phi}^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$(7) \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{\sin \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$(8) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^3 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$(9) \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$(10) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

**Exercice 29.** Exemple ?? a donné l'intégrale de volume pour une sphère en coordonnées  $r\theta z$ . Quelle est l'aire de la tranche circulaire à la hauteur  $z$ ? Quelle est l'aire de la couche latérale cylindrique de rayon  $r$ ? Intégrez sur les tranches ( $dz$ ) et sur les couches ( $dr$ ) pour obtenir  $4\pi R^3/3$ .

**Exercice 30.** Les problèmes suivants concernent l'attraction gravitationnelle d'une sphère, utilisez Figure 16 et la loi des cosinus  $q^2 = D^2 - 2\rho D \cos \phi + \rho^2 = u$ .

- (1) (Succès de Newton) Montrer que  $\iiint (\cos \alpha) dV/q^2$  est égal à volume/ $D^2$ . Un seul indice: Trouvez  $\cos \alpha$  à partir d'une deuxième loi des cosinus  $\rho^2 = D^2 - 2qD \cos \alpha + q^2$ . L'intégrale sur  $\phi$  devrait impliquer  $1/q$  et  $1/q^3$ , l'équation (4.1) intègre  $1/q$ , laissant  $\iiint dV/q^3$  à faire.
- (2) Calculer  $\partial q/\partial D$  dans la première loi du cosinus et montrer à partir de la Figure 16 que cela vaut  $\cos \alpha$ . Alors la dérivée de l'équation (4.1) par rapport à  $D$  est un raccourci vers l'équation de Newton (4.2).