Examen

	Sujet de partiel
Intitulé	**EPITA_ING2_S8_Promo 2025**
MAJEURES	IMAGE/SCIA
Code cours	PBS2
Intervenant	Noé Biheng
Durée	2h
Droit ou pas aux documents	Aucun document n'est autorisé. Calculatrice non programmable autorisée Calculatrice programmable en mode examen autorisée.

Les exercices suivants sont indépendants. Une attention toute particulière sera accordée à la rédaction et à la clarté des raisonnements.

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0; 2\theta]$.
   Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Montrer que la loi exponentielle est sans mémoire.
3. La variable aléatoire $U_n := \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ suit une loi du Khi-deux à n degrés de liberté notée $\chi^2(n)$.
   Rappelons que sa fonction caractéristique est : $\phi_{U_n}(t) = \dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}$.
   Montrer que :
   (a) $E(U_n) = n$,
   (b) $V(U_n) = 2n$,
   (c) En déduire deux estimateurs du paramètre n à l'aide la méthode des moments.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes deux une loi normale centrée réduite.
   Considérons les variables aléatoires $U = 3X + Y$ et $V = X - 3Y$.
   (a) Montrer que le vecteur aléatoire $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien.
   (b) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer l'information de Fischer $I(\lambda)$ pour la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
6. Considérons les observations suivantes issues d'un échantillon d'une loi normale de moyenne m et de variance inconnue dont nous connaissons les observations suivantes : 3 ; 5 ; 4 ; 10 ; 6 ; 7 ; 8 et 2.
   En détaillant précisément les calculs, déterminer un intervalle de confiance au niveau 0,90 pour la moyenne m.
7. Supposons maintenant que les observations de la question précédente sont issues d'un échantillon d'une loi normale de moyenne 6 et de variance σ^2.
   En détaillant précisément les calculs, déterminer un intervalle de confiance au niveau 0,99 pour la variance σ^2.

Exercice 2

Soient deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Exercice 3

Considérons n variables aléatoires indépendantes X_i suivant la loi de densité :

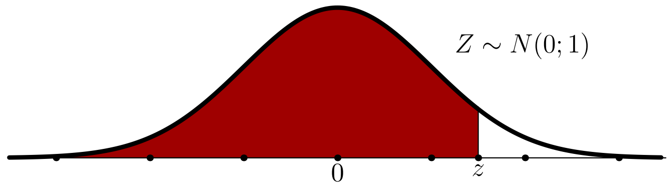
$$f(x,\theta) = \frac{5}{\theta} x^4 \exp\left(-\frac{x^5}{\theta}\right)$$

avec $\theta > 0$ et $x \geq 0$.
Nous souhaitons estimer le paramètre θ à l'aide d'observations $x_1, \ldots, x_n$ issues de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Justifier que, pour tout $\theta > 0$, $f(.,\theta)$ définit bien une densité sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$.
3. A l'aide de la formule du changement de variables, vérifier que la variable aléatoire $Y_i = \dfrac{2}{\theta} X_i^5$ suit une loi Khi-deux à deux degrés de liberté pour tout entier i compris entre 1 et n.
   Rappels :
   - La densité de la loi Khi-deux à k degrés de liberté est : $g(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}$ pour $x \geq 0$,
   - $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(k+1) = k!$ pour tout entier naturel $k \geq 1$.
4. En déduire la loi de la variable aléatoire $\dfrac{2n}{\theta}\hat{\theta}$.
5. A l'aide des questions précédentes, pour un niveau de confiance $1-\alpha$, déterminer deux variables aléatoires $a(X_1, \ldots, X_n)$ et $b(X_1, \ldots, X_n)$ tels que :
   $$\mathbb{P}\left(\theta \in [a; b]\right) = 1 - \alpha$$
   Indication : il pourrait être opportun d'exprimer $a(X_1, \ldots, X_n)$ et $b(X_1, \ldots, X_n)$ en fonction de l'estimateur $\hat{\theta}$.
6. En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre θ au niveau de confiance $1-\alpha$.
7. Application numérique : nous utiliserons les données suivantes : $n = 5$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$ et $x_5 = 2$.
   Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,90$ (autrement dit $\alpha = 0,10$) du paramètre θ.

Tableau N [1]

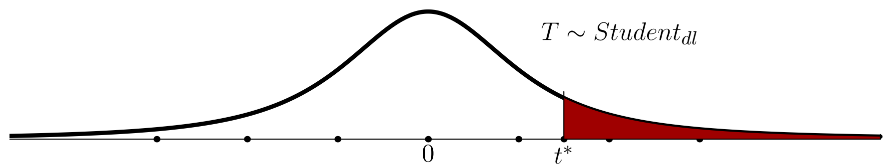
Aire sous la courbe normale à gauche de z, c'est à dire $P[Z \leq z]$, ou $Z \sim N(0;1)$.



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09

Tableau T1 [1/2]

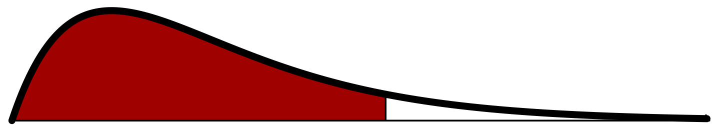
Tableau de t^* tel qu'une variable de Student à dl degrés de liberté ait probabilité p d'être supérieure à t^*



	$P[T \geq t^*] = p$											
dl	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	.8165	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	.7649	.9785	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	.7407	.9410	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.7267	.9195	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.7176	.9057	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.7111	.8960	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.7064	.8889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.7027	.8834	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.6998	.8791	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.6974	.8755	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.6955	.8726	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.6938	.8702	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.6924	.8681	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.6912	.8662	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.6901	.8647	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.6892	.8633	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.6884	.8620	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005

Tableau C [1/2]

Percentiles de la distribution du χ^2. Valeurs de χ^2_P correspondant à P



dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.2158	.3518	.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4844	.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$