Fonctions de plusieurs variables
Session 1

Edouard Marchais

EPITA

Septembre 2023

Thématiques :

- Surfaces et lignes de niveaux
- Limites et continuité
- La dérivée partielle
- Plans tangents et approximations linéaires

Surfaces et lignes de niveaux

- On peut définir une **surface 2D** dans un espace (euclidien) 3D par une équation du type

$$z = f(x, y) \qquad \text{ou} \qquad 0 = F(x, y, z)$$

- Afin d'étudier plus finement et systématiquement une telle surface on peut utiliser le concept de **ligne de niveau** définie par l'équation

$$c = f(x, y)$$

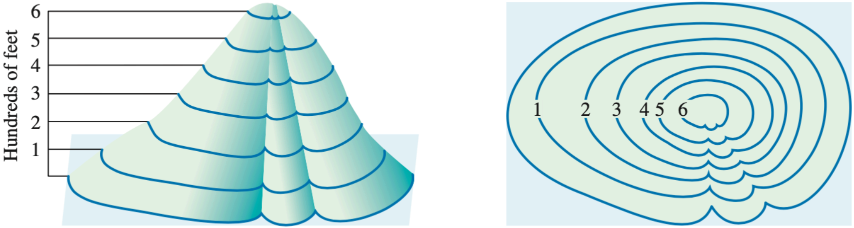


Figure – Gauche : view en perspective d'une colline. Droite : Carte isoligne de cette même colline.

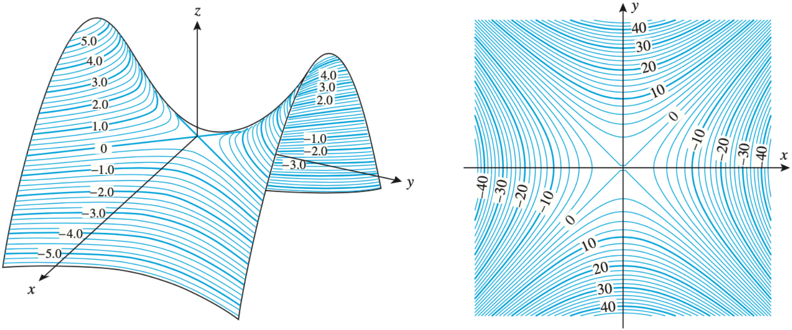


Figure – Sketch de la fonction $f(x, y) = -4x^2 + y^2$ en utilisant une perspective et sa carte isoligne.

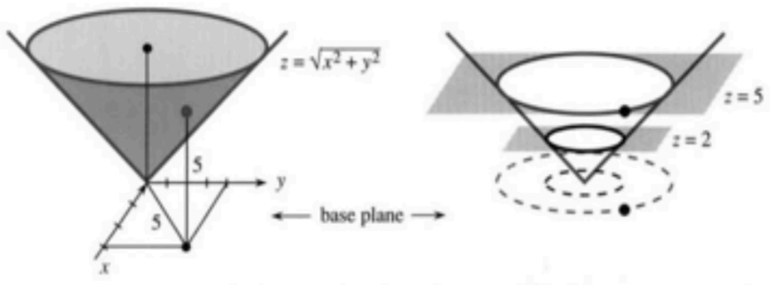


Figure – La surface pour $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est un cône. Les lignes de niveau sont des cercles.

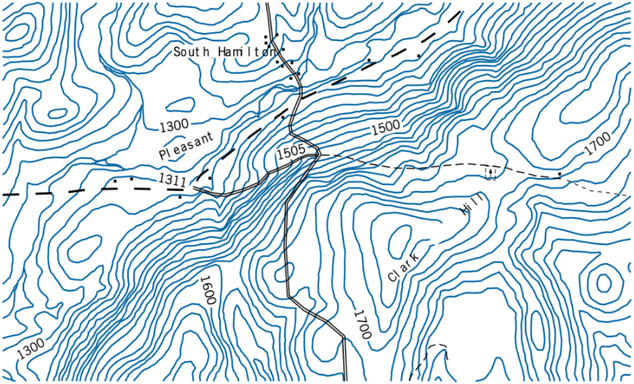


Figure – Plan topologique de la région située autour de la ville de South Hamilton, dans l'état de New York (US).

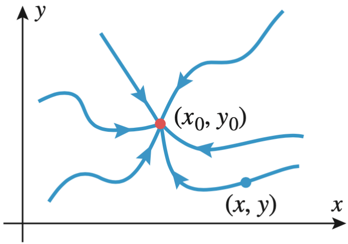
- **Limite d'une fonction de deux variables**

  - Nouveauté : On utilise la notion de **disque** δ pour définir le *voisinage* d'un point $\boldsymbol{a} = (a, b)$ correspondant à l'ensemble

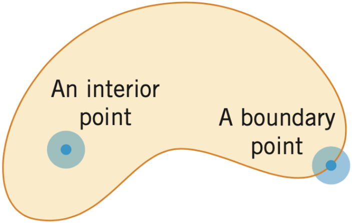
$$\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta\right\}$$

  - À partir de cela on peut établir une **première définition** de la limite permettant d'établir des **propriétés** (attendues) fondamentales (somme, multiplication, etc..).

- Une différence notable, par rapport au cas à 1D, c'est que l'on peut désormais approcher un point par **plusieurs directions ou chemins** (en fait une infinité...).



- **Points intérieurs et points du bord**



  - **Point intérieur** : il existe un disque centré autour de ce point contenu complètement dans de domaine.

  - **Point de bord** : tout un disque centré autour de ce point contient des points du domaine et en dehors.

- Problème : la notion de disque n'est **pas adaptée** lorsque l'on évalue la limite d'une fonction en un point du bord...
- En effet, certains points du disque n'appartiennent pas forcément au **domaine** de la fonction $f(x, y)$.
- Dans ce cas, on propose une **définition améliorée** afin que tous les points du disque soient dans le domaine de $f(x, y)$.

- **Continuité des fonctions de deux variables**

  - Une fois la notion de limite définie proprement, on peut facilement **généraliser** la définition de la continuité aux dimensions supérieures, à savoir, si $f(\boldsymbol{x})$ est continue en $\boldsymbol{x}_0$:

$$\textbf{(1)}\ f(\boldsymbol{x}_0) \text{ existe}$$

$$\textbf{(2)}\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \text{ existe}$$

$$\textbf{(3)}\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$$

  - Par la suite les **propriétés** attendues usuelles (somme, produit, composition) sont assurées

- **Fonctions de trois variables et plus**
  - Le passage aux dimensions supérieures s'effectue aisément en généralisation le concept de disque à celui de **boule** :

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta\}$$

    avec une norme euclidienne (par exemple) donnée par

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$$

  - Plusieurs **normes** existent et permettent de définir la « distance » entre deux éléments appartenant à un espace donné selon les besoins...
  - Les définitions et concepts qui suivent reste inchangées !

La dérivée partielle

- L'essentiel : pour une fonction $f(x, y)$, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

  en considérant les autres variables, par rapport auxquelles on ne dérive pas, comme des **constantes**.

- Comme la dérivée à une variable, les dérivées partielles donnent des informations sur les **variations** de la surface

$$z = f(x, y)$$

  dans des directions parallèles aux axes Ox et Oy.

- On peut aussi utiliser, simplement, les **fonctions partielles**

$$f(x, y_0) \qquad \text{ou} \qquad f(x_0, y)$$

afin d'étudier la surface $z = f(x, y)$ dans une direction donnée, parallèle à $x = x_0$ ou $y = y_0$.

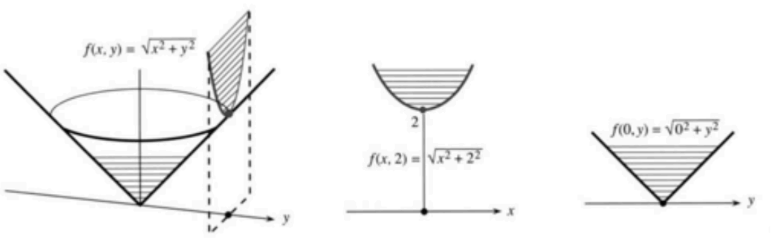


Figure – Fonctions partielles $\sqrt{x^2+y^2}$ et $\sqrt{0^2+2^2}$ de la fonction de distance $f = \sqrt{x^2+y^2}$.

- <u>Nouveauté</u> : Une configuration en **point col** est possible si

$$f_x = f_y = 0$$

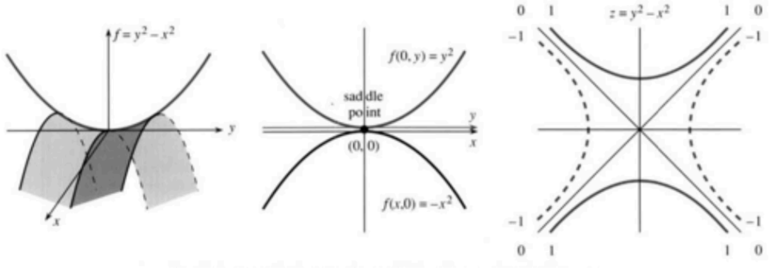


Figure – Une fonction $f = y^2 - x^2$ présentant un point col, ses fonctions partielles et ses lignes de niveau.

- Pour une fonction de deux variables $f(x, y)$ on calcule quatre(!) **dérivées secondes** partielles

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad , \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Heureusement, si les dérivées secondes sont **continues** (vrai la plupart du temps dans les applications courantes) on a

$$f_{xy} = f_{yx}$$

aussi appelée le **théorème de Schwarz**.

- La matrice des dérivées secondes est appelée la **matrice Hessienne**

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Plans tangents et approximations linéaires

- On peut approximer une surface arbitraire, d'équation $z = f(x, y)$, **localement** par un plan, en un point de base (x_0, y_0), d'équation

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

- On peut définir le **vecteur normal** à ce plan (et à la surface au point (x_0, y_0)) par

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} (f_x)_0 \\ (f_y)_0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il est dirigé **vers l'extérieur** pour une surface fermée.

- Si la surface est donnée par une équation du type $c = F(x, y, z)$, où c est une constante, alors l'équation du **plan tangent** devient

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0$$

- Le **vecteur normal** devient alors

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} (F_x)_0 \\ (F_y)_0 \\ (F_z)_0 \end{pmatrix}$$

- On remarquera qu'il suffit de poser $f = F - z$ pour retrouver les formules précédentes.

- Si on pose les équivalences (pour de petites variations)

$$z - z_0 \approx dz = df \quad , \quad y - y_0 \approx dy \quad , \quad x - x_0 \approx dx$$

dans l'équation du plan tangent à $z = f(x, y)$, on retrouve la **différentielle** de f, soit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

- Ici une **variation infinitésimale** de f est exprimée (linéairement) en fonction des variations (aussi infinitésimales) de ses paramètres x et y.

- En reprenant $df = f(x, y) - f(x_0, y_0)$, on peut construire l'**approximation linéaire** de f au point (x_0, y_0)

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

- Les termes quadratiques, i.e proportionnelles à $(x - x_0)^2$ et $(y - y_0)^2$ sont ici **négligés** car a priori **plus petit** que $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$ au voisinage de (x_0, y_0).

- L'approximation devient de plus en plus **incorrecte** au fur et à mesure que l'on s'éloigne de (x_0, y_0).