Examen

Durée : 2 heures

Mardi 12 janvier 2021

Aucun document n'est autorisé, la calculatrice est autorisée.
Une attention toute particulière sera accordée à la présentation et à la clarté des raisonnements.

Exercice 1

1. D'après une étude, 40% des habitants de Valognes ont lu au moins une nouvelle de Barbey d'Aurevilly quand ils étaient collégiens. François a interrogé 15 Valognais et leur demande s'ils ont lu au moins une nouvelle de Barbey d'Aurevilly quand ils étaient collégiens. Notons X le nombre de ces lecteurs.
   (a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
   (b) Calculer $P(X = 0)$.
   (c) Calculer $V(X)$.
2. La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p.
   Montrer que $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
3. Montrer que la loi exponentielle est sans mémoire.
4. Soient deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
   Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes deux une loi normale centrée réduite.
   Considérons les variables aléatoires $U = 2X + 3Y$ et $V = X - Y$.
   (a) Montrer que le vecteur aléatoire $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien.
   (b) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\theta; 2\theta]$ avec $\theta > 0$.
   (a) Quelle est la densité de la variable aléatoire X ?
   (b) Quelle est son espérance ?
   (c) En déduire un estimateur du paramètre θ par la méthode des moments.
   (d) Est-il fortement convergent ? Pourquoi ?
7. Déterminer l'information de Fischer $I(\lambda)$ pour la loi de Poisson de paramètre λ.
8. La taille des habitants d'une bourgade corrézienne est distribuée suivant une loi normale de moyenne et de variance inconnues.
   François interroge 108 habitants de ce village et consigne leurs tailles dans une liste sur Python.
   Proposer un programme Python fournissant un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$ pour la taille moyenne des habitants de ce village.
9. Une variable aléatoire suit une loi normale centrée de variance inconnue. Nous voulons tester l'hypothèse $H_0 : \sigma^2 = 1$ contre $H_1 : \sigma^2 \neq 1$.
   Pour ce faire, nous disposons de 10 observations.
   Déterminer la région critique de ce test pour $\alpha = 10\%$.

Exercice 2

La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la région critique du test de Neyman-Pearson pour les hypothèses simples $H_0 : \lambda = 1$ contre $H_1 : \lambda = 3$ pour un risque de première espèce α donné.

Exercice 3

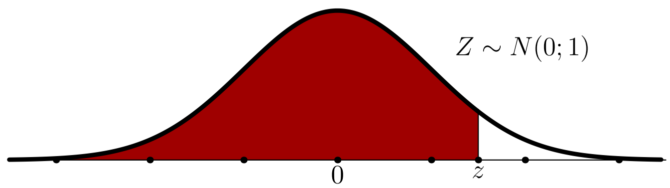
Selon une étude, la durée des smartphones de la marque *Pomme* suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ avec $\theta > 0$ inconnu. Considérons un échantillon de taille n que nous noterons $(X_1, \dots X_n)$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'un smartphone de cette marque ?
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.
3. (a) Montrer que la fonction caractéristique de la variable aléatoire X est donnée par :
$$\Phi_X(t) = \frac{1}{1 - \theta i t}.$$
   (b) Montrer que la variable aléatoire $Y := \frac{2X}{\theta}$ suit une loi χ^2 à 2 degrés de liberté [1].
   (c) En déduire que la variable aléatoire $W := \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi χ^2 à $2n$ degrés de liberté.
4. A l'aide de la question précédente, déterminer un intervalle de confiance pour le paramètre θ au niveau de confiance $0,95$ lorsque nous disposons des observations suivantes des durées de vie (en années) de smartphones de la marque *Pomme* : $0.60, 0.19, 6.44, 1.74, 0.55, 0.25, 3.43, 1.64$.
5. Quelle durée de garantie le constructeur doit-il proposer pour ses smartphones selon vous ?

1. Rappelons qu'une variable aléatoire U_n qui suit une loi χ^2 à n degrés de liberté a pour fonction caractéristique : $\phi_{U_n}(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}$.

Tableau N [1]

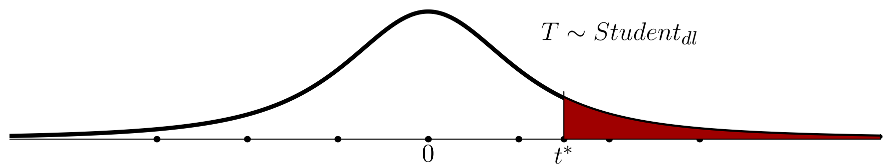
Aire sous la courbe normale à gauche de z, c'est à dire $P[Z \leq z]$, ou $Z \sim N(0;1)$.



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09

Tableau T1 [1/2]

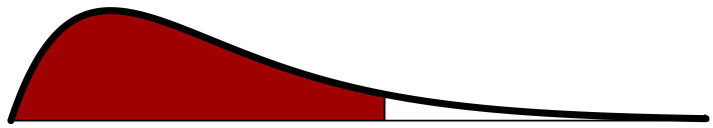
Tableau de t^* tel qu'une variable de Student à dl degrés de liberté ait probabilité p d'être supérieure à t^*



	$P[T \geq t^*] = p$											
dl	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	.8165	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	.7649	.9785	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	.7407	.9410	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.7267	.9195	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.7176	.9057	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.7111	.8960	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.7064	.8889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.7027	.8834	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.6998	.8791	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.6974	.8755	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.6955	.8726	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.6938	.8702	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.6924	.8681	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.6912	.8662	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.6901	.8647	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.6892	.8633	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.6884	.8620	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005

Tableau C [1/2]

Percentiles de la distribution du χ^2. Valeurs de χ^2_P correspondant à P



dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.2158	.3518	.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4844	.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$