En prenant $a_1 = 1$, on a $a_2 = 2$ et $a_3 = 1$ $\Rightarrow$ la droite (D) passe par le point $a = (1,2,1)$

Donc $(D) = a + \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ (cf exercice "écriture paramétrique d'un sous espace affine")

$\underline{(D) = \{(1+3\lambda, 2+7\lambda, 1+5\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}}$ écriture paramétrique de (D)

Exercice : d'une écriture paramétrique vers une écriture implicite

Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (-3,1,0)$ et contenant le point $a = (0,2,0)$

Il faut déterminer un vecteur normal à (P). Soit $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ un tel vecteur

n est donc orthogonal à u_1 et u_2 : $\langle n, u_1 \rangle = n^T u_1 = 0$ et $\langle n, u_2 \rangle = n^T u_2 = 0$

$$\begin{cases} n^T u_1 = 0 \\ n^T u_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = 0 \\ -3n_1 + n_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4n_1 + n_3 = 0 \\ 4n_2 + n_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} n_3 = -4n_1 \\ n_3 = -4n_2 \end{cases}$$

En prenant $n_3 = -4$, on a $n_1 = n_2 = 1$, $n = (1,1,-4)$ est donc un vecteur normal à (P)

(P) est donc l'ensemble des points $x = (x_1, x_2, x_3)$ d'origine $a = (0,2,0)$ et de vecteur normal n :

$(P) = \{x \in \mathbb{R}^3, \langle x - a, n \rangle = (x-a)^T n = 0\}$ (cf exercice "écriture implicite d'un sous espace affine")

Avec $(x-a)^T n = (x_1, x_2 - 2, x_3)^T (1,1,-4) = x_1 + x_2 - 2 - 4x_3$

Donc $\underline{(P) = \{x \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 - 4x_3 - 2 = 0\}}$ écriture implicite de (P)

Soit (D) la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $u = (1,1,1)$ et passant par le point $a = (1,-1,0)$

(D) est l'intersection de deux plans (P_1) et (P_2), de vecteurs normaux n et m, contenant tous les deux le point a

Il suffit donc de déterminer deux vecteurs $n, m \in \mathbb{R}^3$, tous les deux orthogonaux à u (puisque (P_1) et (P_2) contiennent également le vecteur u), avec n et m non colinéaires entre eux.

$\rightarrow$ $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $n^T u = (n_1, n_2, n_3)^T (1,1,1) = n_1 + n_2 + n_3 = 0$

on peut donc prendre $n = (1,-1,0)$

$\rightarrow$ $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $m^T u = 0$ $\rightarrow$ idem $m_1 + m_2 + m_3 = 0$

on peut donc prendre $m = (0,1,-1)$ $\rightarrow$ m et n ne sont pas colinéaires entre eux.

Équation implicite de (P_1) : $x = (x_1, x_2, x_3) \in (P_1) \Longleftrightarrow (x-a)^T n = 0$ (cf exercice "écriture implicite d'un sous espace affine")

$$\Longleftrightarrow (x_1 - 1, x_2 + 1, x_3)^T (1,-1,0) = 0$$
$$\Longleftrightarrow x_1 - 1 - x_2 - 1 = 0$$
$$\Longleftrightarrow x_1 - x_2 = 2$$

Équation implicite de (P_2) : $x = (x_1, x_2, x_3) \in (P_2) \Longleftrightarrow (x-a)^T m = 0$

$$\Longleftrightarrow (x_1 - 1, x_2 + 1, x_3)^T (0,1,-1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow x_2 + 1 - x_3 = 0$$
$$\Longleftrightarrow x_2 - x_3 = -1$$

(D) étant l'intersection de (P_1) et (P_2), on a donc $\underline{(D) : \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}\right\}}$ écriture implicite de (D)

Exercice : positivité / negativité d'une matrice symétrique

On rappelle pour une matrice (2×2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que $\det(A) = ad - bc = \lambda_1\lambda_2$ et $tr(A) = a+d = \lambda_1 + \lambda_2$ avec λ_1, λ_2 les valeurs propres de A

* Pour $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 2 > 0 \to$ les valeurs propres sont de même signe
  $tr(A) = 5 > 0 \to$ les valeurs propres sont toutes deux strictement positives

  Donc <u>A_1 est définie positive</u>

* Pour $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 0 \to$ l'une des deux valeurs propres est nulle : $\lambda_1 = 0$
  $tr(A) = 5 > 0 \to$ la deuxième valeur propre est $\lambda_2 = 5$

  Donc <u>A_2 est positive</u> (mais non définie)

* Pour $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = -5 > 0 \to$ les valeurs propres sont non nulles et de signe opposé

  Donc <u>A_3 est ni positive, ni négative</u>

* Pour $A_4 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 5 > 0 \to$ les valeurs propres sont de même signe
  $tr(A) = -6 > 0 \to$ les valeurs propres sont toutes deux strictement négatives

  Donc <u>A_4 est définie négative</u>

* Pour $A_5 = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 4 > 0 \to$ les valeurs propres sont de même signe
  $tr(A) = -7 > 0 \to$ les valeurs propres sont toutes deux strictement négatives

  Donc <u>A_5 est définie négative</u>

* Pour $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ pour une matrice 3x3, on a toujours $\det(A_6) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ et $tr(A_6) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

  A_6 étant diagonale par bloc, on peut de plus en déduire :

  2 est valeur propre de A_6 (puisque les autres termes sur la première ligne et première colonne sont nuls)

  $\det(A_6) = 2 \times \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \times 0 = 0 \to 0$ est valeur propre de A_6

  $tr(A_6) = 7 = 2 + 0 + 5 \to$ la troisième valeur propre de A_6 est 5

  Donc $Sp(A_6) = \{0, 2, 5\} \to$ <u>A_6 est positive</u> (mais non définie)

* Pour $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad \det(A_\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$
  $tr(A_\lambda) = 2\lambda$

λ		-1		1	
$\det(A_\lambda)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Il y a donc 5 cas de figure :

$\to \lambda < -1 \quad \det(A_\lambda) > 0$ et $tr(A_\lambda) < -2 \to$ les valeurs propres sont strictement négatives

$\to$ <u>A_λ est définie négative</u>

→ $\lambda = -1$ $\det(A_\lambda) = 0$ et $tr(A_\lambda) = -1$ → une valeur propre est nulle, l'autre est strictement négative
→ <u>A_λ est négative</u> (mais non définie)

→ $-1 < \lambda < 1$ $\det(A_\lambda) < 0$ → les valeurs propres sont de signe opposé
→ <u>A_λ est ni positive, ni négative</u>

→ $\lambda = 1$ $\det(A_\lambda) = 0$ et $tr(A_\lambda) = 1$ → une valeur propre est nulle, l'autre est strictement positive
→ <u>A_λ est positive</u> (mais non définie)

→ $\lambda > 1$ $\det(A_\lambda) > 0$ et $tr(A_\lambda) > 2$ → les valeurs propres sont strictement positives
→ <u>A_λ est définie positive</u>

Exercice : lien avec le produit scalaire

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive et l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^T A y$

Montrons que φ vérifie les axiomes du produit scalaire

* symétrie : $\varphi(x,y) = x^T A y \in \mathbb{R}$ or tout scalaire c est égal à sa transposée c^T
Donc $x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x = \varphi(y, x)$ → <u>φ est bien symétrique</u>
$A^T = A$ puisque A est symétrique

* bilinéarité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\varphi(x, y + \lambda z) = x^T A(y + \lambda z) = x^T A y + x^T A(\lambda z)$
$= x^T A y + \lambda x^T A z$ par associativité et distributivité du produit matrice/vecteur
$= \varphi(x,y) + \lambda \varphi(x,z)$
→ <u>φ est bien bilinéaire</u>

Pour montrer la définition et la positivité de φ, il faut d'abord diagonaliser A : A étant symétrique définie positive, il existe une matrice U unitaire ($U^{-1} = U^T$ et $U = [u_1, \dots, u_n]$ avec $\|u_i\|_2 = 1$ $\forall i = 1, \dots, n$) et une matrice diagonale $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i > 0$ $\forall i = 1, \dots, n$ tq $A = U^{-1} \Lambda U = U^T \Lambda U$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $\varphi(x, x) = x^T A x = x^T (U^T \Lambda U) x = x^T U^T \Lambda U x = (Ux)^T \Lambda (Ux) = z^T \Lambda z$ avec $z = Ux$

* positivité : $z^T \Lambda z = z^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 \geq 0$ puisque $\forall i$, $\lambda_i > 0$ et $z_i^2 \geq 0$ donc $\varphi(x,x) \geq 0$
→ <u>φ est bien positive</u>

* définition : Supposons que $\varphi(x,x) = 0$ Puisque $\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2$ et $\lambda_i > 0$ $\forall i$, $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow z_i = 0$ $\forall i$
or $z = Ux$, donc $z = 0 \iff Ux = 0$
$\iff x \in \mathrm{Ker}(U)$ U étant unitaire, $\det(U) \in \{-1, +1\}$ donc U inversible et $\mathrm{Ker}(U) = \{0\}$
$\Rightarrow x = 0$
→ <u>φ est bien définie</u>