Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$

La dérivée directionnelle de f au point x_0 selon le vecteur $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ correspond à la dérivée en 0 de la fonction $\varphi : t \mapsto f(x_0 + tu)$

1) Dérivée directionnelle en $x_0 = (1,2)$ selon le vecteur $u = (1,1)$

$x_0 + tu = (1,2) + t(1,1) = (1+t, 2+t)$

Donc $\varphi(t) = f(x_0 + tu) = f(1+t, 2+t) = (1+t)^2 + 2(1+t)(2+t) - (2+t)^2$

$= 1 + 2t + t^2 + 4 + 2t + 4t + 2t^2 - 4 - 4t - t^2$

$= 2t^2 + 4t + 1$

$\to \varphi'(t) = 4t + 4$

$\to \underline{\varphi'(0) = D_u f(x_0) = 4}$

2) De plus f est différentiable en x_0 puisque son gradient $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$ est continu sur $\mathbb{R}^2$, donc $df_{x_0} : h \mapsto \nabla f(x_0)^T h$ et $D_u f(x_0) = df_{x_0}(u) = \nabla f(x_0)^T u$

Avec $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on retrouve bien $\underline{D_u f(x_0) = \nabla f(x_0)^T u = (6, -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4}$

Exercice : dérivation en chaine

La jacobienne en x_0 de $g \circ f$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en x_0 et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(x_0)$ est donnée par la formule de dérivation en chaine : $\mathrm{Jac}(g \circ f)_{x_0} = \mathrm{Jac}\, g_{f(x_0)} \times \mathrm{Jac}\, f_{x_0}$

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2^4, x_2 - 3x_1^2, 2x_1^2 - 3x_2) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ en notant $x = (x_1, x_2)$

Et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_3)$

On cherche à exprimer la jacobienne de $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$

Puisque g s'applique sur $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, on peut renommer les variables (x_1, x_2, x_3) par (f_1, f_2, f_3) dans la définition de g pour se faciliter la vie $\to g(f_1, f_2, f_3) = 2f_1f_2 - 3(f_1 + f_3)$

$\to \mathrm{Jac}(g \circ f)_x = \mathrm{Jac}\, g_{f(x)} \times \mathrm{Jac}\, f_x$ avec $\mathrm{Jac}\, f_x \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $\mathrm{Jac}\, g_{f(x)} = \nabla g(f(x))^T \in \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Jac}(g \circ f)_x = \nabla h(x)^T \in \mathbb{R}^2$

Ne reste plus qu'à calculer les jacobiennes :

$$\mathrm{Jac}\, f_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) , & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) , & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) , & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 , & 4x_2^3 \\ -6x_1 , & 1 \\ 4x_1 , & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Jac}\, g_{f(x)} = \nabla g(f(x))^T = (2f_2 - 3, 2f_1, -3)$$

Et $\text{Jac}\,h_x = \text{Jac}\,g_{f(x)} \times \text{Jac}\,f_x$

$\to \nabla h(x)^T = \nabla g(f(x))^T \times \text{Jac}\,f_x$

$\to \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \frac{\partial h}{\partial x_2}(x)\right) = \left(2f_2(x)-3,\ 2f_1(x),\ -3\right)\begin{pmatrix} 1 & 4x_2^3 \\ -6x_1 & 1 \\ 4x_1 & -3 \end{pmatrix}$

D'où $\frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = (2f_2(x)-3)\times 1 + 2f_1(x)\times(-6x_1) - 3\times 4x_1$) on remplace $f_1(x)$ et $f_2(x)$ par leur expression

$= 2(x_2 - 3x_1^2) - 3 - 12x_1(x_1 + x_2^4) - 12x_1$

$= \underline{-18x_1^2 - 12x_1(1+x_2^4) + 2x_2 - 3}$

Et $\frac{\partial h}{\partial x_2}(x) = (2f_2(x)-3)\times 4x_2^3 + 2f_1(x)\times 1 - 3\times(-3)$

$= 4x_2^3\left(2(x_2-3x_1^2)-3\right) + 2(x_1+x_2^4) + 9$

$= \underline{10x_2^4 - 12x_2^3(1+12x_1^2) + 2x_1 + 9}$

2) Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $g: \mathbb{R}^+\times[0,2\pi] \to \mathbb{R},\ (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\to g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f\circ\alpha(r,\theta)$ avec $\alpha: \mathbb{R}^+\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Si on note $\alpha(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$

$\to \nabla g(r,\theta)^T = \nabla f(x,y)^T \times \text{Jac}\,\alpha(r,\theta)$ par la règle de dérivation en chaîne

$\to \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\times\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ jacobienne $\text{Jac}\,\alpha(r,\theta)$ de α en (r,θ)

Au final:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(r,\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(r,\theta)$$

Exercice : calcul d'une différentielle par DL_1

Écriture du DL_1 dans le cas de

* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\to f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o_0(h)$ donc $df_x: h \mapsto hf'(x)$
* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\to f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T h + o_0(h)$ donc $df_x: h \mapsto \nabla f(x)^T h$
* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\to f(x+h) = f(x) + \text{Jac}\,f(x)\times h + o_0(h)$ donc $df_x: h \mapsto \text{Jac}\,f(x)\times h$

1) Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$x \mapsto Ax + b$ avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$

$f(x+h) = A(x+h) + b = Ax + Ah + b = Ax + b + Ah = f(x) + Ah$

$\to$ la différentielle est donc $\underline{df_x: h \mapsto Ah}$

$\to$ la matrice jacobienne de f est donc $\underline{\text{Jac}\,f(x) = A}$