TD Optimisation Convexe
La différentielle

Guillaume TOCHON

Majeure IMAGE

La différentielle par les dérivées partielles

Exercice : Lien entre différentielle et dérivée

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$.

1. Calculer la différentielle de f en tout point $x \in \mathbb{R}$. Quel est le lien avec la dérivée ?

Exercice : Calcul de dérivées partielles

Expliciter le gradient ou la jacobienne (en fonction des cas), puis la différentielle en tout point où cela fait sens, des fonctions suivantes :

1. $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto e^{x_1 x_2}(x_1 + x_2)$
2. $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \big(x_1 + x_2 \ln(x_3), x_1 x_2 x_3\big)$
3. $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto e^{x_1 x_2 - x_3}$

Exercice : Dérivée directionnelle

On rappelle que la dérivée directionnelle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et selon un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ existe si la fonction $\varphi : t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ est dérivable en 0, auquel cas $\varphi'(0) = D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0)$. Si f est différentiable en $\mathbf{x}_0$, de différentielle $df_{\mathbf{x}_0}$, on a de plus $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = df_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})$

1. Calculer la dérivée directionnelle de $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ au point $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$ selon le vecteur $\mathbf{u} = (1, 1)$ d'après la définition.
2. Vérifier que le résultat obtenu à la question précédente est bien équivalent au calcul de la dérivée directionnelle via la différentielle.

Exercice : Dérivation en chaîne

On rappelle la règle de dérivation en chaîne pour la composition de deux fonctions : $\mathcal{J}ac(g \circ f)_{\mathbf{x}_0} = \mathcal{J}ac g_{f(\mathbf{x}_0)} \times \mathcal{J}ac f_{\mathbf{x}_0}$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^m$.

1. Exprimer les dérivées partielles de $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto \big(x_1 + x_2^4, x_2 - 3x_1^2, 2x_1^2 - 3x_2\big)$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_3)$
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$, on définit $g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

La différentielle par le DL$_1$

Exercice : Calcul d'une différentielle par DL$_1$

Écrire le développement limité à l'ordre 1 des fonctions suivantes pour identifier leur différentielle, et donc leur gradient (ou matrice jacobienne en fonction des cas) :

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Qu'est ce que ça change si $\mathbf{A}$ est symétrique ?
3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
4. $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \mapsto \big(tr(\mathbf{X})\big)^2$ ou $\mathbb{R}^{n \times n}$ désigne l'espace des matrices carrées de taille $n \times n$.

Exercice : Différentielle d'un produit scalaire

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions différentiables en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors la fonction $\langle f, g\rangle$ est différentiable, et $d\langle f, g\rangle_{\mathbf{x}_0} = \langle df_{\mathbf{x}_0}, g(\mathbf{x}_0)\rangle + \langle f(\mathbf{x}_0), dg_{\mathbf{x}_0}\rangle$.
C'est le pendant pour les différentielles de la formule bien connue de la dérivée d'un produit de fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

1. Retrouver la différentielle de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ en utilisant la formule précédente

Exercice : Différentielle d'une fonction composée

On rappelle la formule de la différentielle de deux fonctions composées (dont est tirée la formule de dérivation en chaîne de l'exercice précédent) : $d(g \circ f)_{\mathbf{x}_0} = dg_{(f(\mathbf{x}_0))} \circ df_{\mathbf{x}_0}$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $f(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^m$. Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \dfrac{1}{\mathbf{x}^T\mathbf{x} + 1}$
2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \cos^2(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée symétrique