EPITA / S4 Corrigé + barème Mai 2022

NOM : .... PRENOM : .... GROUPE : ....

Partiel de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

QCM ***(4 points-pas de points négatifs).***

Entourer la bonne réponse

0,5 point par question.

1- Le champ magnétique d'une onde électromagnétique qui se propage dans le vide est d'expression : $\vec{B}(x,t) = B_0\, cos(\,k.x - \omega t)\, \vec{e}_y$, tels que B_0, k et ω sont des constantes positives.
Le Laplacien appliqué au vecteur $\vec{B}$ donne :

a) $\Delta\vec{B} = -\omega k\vec{B}$ b) $\Delta\vec{B} = -k^2\vec{B}$ c) $\Delta\vec{B} = -\omega^2\vec{B}$ d) $\Delta\vec{B} = \omega^2\,\vec{B}$

2- Parmi les expressions suivantes laquelle n'a pas de sens ?

a) $div(\overrightarrow{grad}(f))$ b) $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}(\vec{U}))$ c) $\overrightarrow{rot}\,(f)$ d) $\overrightarrow{grad}(\Delta f)$

3- Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée S vérifie :

a) $\oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS} > 0$ b) $\oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = 0$ c) $\oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS} < 0$

4- L'équation locale Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\,(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ exprime le phénomène auto-induction.

a) vrai b) faux

5- Dans l'équation locale Maxwell-Ampère : $ro\vec{t}(\vec{B}) = \mu.\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, la grandeur $\vec{J}$ représente

a) le vecteur densité de courant de déplacement
b) le vecteur densité de courant stationnaire
c) le courant induit

6- La célérité des ondes électromagnétiques dans le milieu vide s'exprime par :

a) $c^2 = \mu_0\varepsilon_0$ b) $c^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ c) $c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ d) $c^2 = \mu_0 + \varepsilon_0$

7- Le champ électrique d'une onde électromagnétique sinusoïdale qui se propage dans l'air est :

$$\vec{E}(z,t) = E_0\,cos(\,k.z - \omega t)\,\vec{e}_x$$, sachant que E_0, k et ω sont des constantes positives.

La dérivée seconde par rapport au temps donne :

a) $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \omega\vec{E}$ b) $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -k^2\vec{E}$ c) $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}$ d) $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega\vec{E}$

8- Une onde électromagnétique est une onde matérielle

a) Vrai b) Faux

Exercice 1 *Partie Cours* (6 points)

Les équations locales de Maxwell dans un milieu matériel quelconque sont données par :

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (1)$$

$$div(\vec{B}) = 0 \qquad (2)$$

$$ro\vec{t}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$ro\vec{t}(\vec{B}) = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

1- a) Interpréter l'équation (2) de Maxwell.

b) Retrouver l'équation (1) à partir du théorème de Gauss. On donne : $\oiint_S \vec{U}.d\vec{S} = \iiint_\tau div(\vec{U})d\tau$

a) l'équation (2) signifie que le champs $\vec{B}$ est à flux conservatif, les lignes de $\vec{B}$ sont fermées. (1)

b) Th de Gauss : $\Phi_{S\,fermée}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \iiint_\tau \frac{\rho\, d\tau}{\varepsilon}$ ρ : densité de charge volumique.

th de Green-Ostro: $\iiint_\tau div(\vec{E})\, d\tau = \iiint_\tau \rho \frac{d\tau}{\varepsilon}$ (1)

$\iiint_\tau \left(div(\vec{E}) - \frac{\rho}{\varepsilon}\right) d\tau = 0$ ce qui donne $div\,\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$.

$div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon$.

2- a) Comment s'écrivent les grandeurs : densité de charge volumique ρ, densité de courant $\vec{J}$, perméabilité magnétique μ et permittivité diélectrique ε dans le vide.

b) Réécrire les quatre équations de Maxwell dans le vide.

2a) dans le vide : pas de charges $\Rightarrow \rho = 0$ (0,5)

(1) pas de courants $\Rightarrow \vec{J}$ = densité de courant $= \vec{0}$. (0,5)

$\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$.

(0,5) (0,5)

b) Les équations de Maxwell deviennent dans le vide :

(1) $div(\vec{E}) = 0$ (1) (3) $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

(2) $div(\vec{B}) = 0$ (4) $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

(avec $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$).

3- Utiliser l'identité remarquable: $\Delta\vec{U} = \overrightarrow{grad}(div(\vec{U})) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{U}))$ ainsi que les équations de Maxwell dans le vide pour retrouver l'équation de D'Alembert donnée par : $\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

on pose $\vec{U} = \vec{E}$ (on applique l'identité remarquable à $\vec{E}$).

$$\Delta\vec{E} = \overrightarrow{grad}(\underbrace{div\,\vec{E}}_{=0}) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})).$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{grad}(0)}_{} - \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

(2)

$$= \vec{0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{B})\right).$$

(on peut permuter $\overrightarrow{rot}$ avec $\frac{\partial}{\partial t}$ car les variables x, y, z et t sont des variables indépendantes).

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\overrightarrow{rot}(\vec{B})}_{(4) \,=}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ce qui donne : $\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ Eqt de D'Alembert

Exercises 2 (5 points)

On considère un cylindre de longueur infiniment grande L, d'axe Oz, de rayon R, chargé avec une densité volumique variable, d'expression $\rho(r) = \rho_0 \frac{r^2}{R^2}$, avec ρ_0 une constante positive.

1- Utiliser les symétries et les invariances pour trouver la direction et les variables de dépendance du champ électrique.

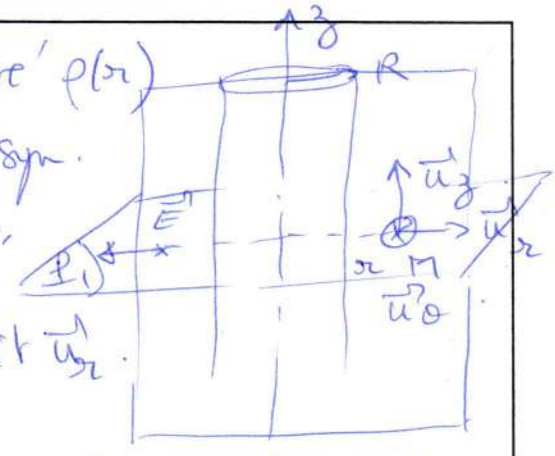
1) Longueur infinie grande, densité $\rho(r)$

(1) . P_1 : plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$: plan de sym.

. P_2 : plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$: " "

$\vec{E} \in (P_1) \cap (P_2)$; $\vec{E}$ de vect unit $\vec{u}_r$.

$\vec{E}$ est radial.

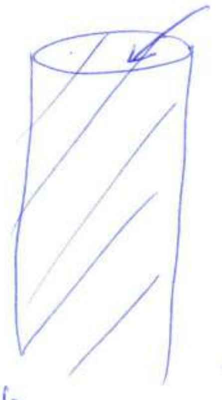


(1) Invariances : L infini, $\rho = \rho(r)$; il y a donc une invariance par translat sur $\vec{Oz}$ et par rot de θ $\Rightarrow E_r = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

2- Utiliser l'équation Maxwell-Gauss pour retrouver l'expression du champ électrique dans les régions : $r < R$ et $r > R$. Le champ électrique est continu en $r = R$.

On donne la divergence d'un vecteur $\vec{U}$ en coordonnées cylindriques : $div(\vec{U}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$.

2) $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) = \frac{\rho}{\varepsilon}$



$r < R$: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) = \rho_0 \frac{r^2}{R^2 \varepsilon}$

r : seule variable $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} = \frac{d}{dr}$.

$\Rightarrow \frac{d}{dr}(r E_r) = \rho_0 \frac{r^3}{\varepsilon R^2}$; $r E_r = \int \rho_0 \frac{r^3}{\varepsilon R^2} dr$.

$r E_r = \rho_0 \frac{r^4}{4 \varepsilon R^2} + C$ en $r = 0$ $0 . E_r = 0 + C$ (1,5)

$\Rightarrow C = 0$ d'où $\boxed{E(r) = \frac{\rho_0 r^3}{4 \varepsilon_0 R^2}}$

$r > R$: localement, à l'ext pas de charges.

$\rho = 0 \Rightarrow div(\vec{E}) = 0$.

$\frac{d}{dr}(r E_r) = 0 \Rightarrow r E_r = C'$; $E_r = \frac{C'}{r}$

Continuité en $r = R \Rightarrow \frac{C'}{R} = \rho_0 \frac{R^3}{4 \varepsilon R^2} \Rightarrow C' = \frac{\rho_0 R^2}{4 \varepsilon_0}$.

$r > R$: $\boxed{E(r) = \frac{\rho_0 R^2}{4 \varepsilon_0 \cdot r}}$ (1,5)

Exercice 3 (5 points)

Une onde électromagnétique sinusoïdale se propage dans le vide avec une célérité : $c = 3.10^8 ms^{-1}$.

Le champ électrique de cette onde est d'expression : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(k.x - \omega t)\, \vec{e}_y$; tels que E_0, k et ω sont des constantes positives.

1- a) Exprimer $\overrightarrow{rot}(\vec{E})$.

b) En déduire l'expression du vecteur champ magnétique de cette onde, en utilisant l'équation (3) de Maxwell. Les constantes d'intégrations seront nulles.

a) $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix}$

A

$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(0)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(E(x,t))}_{=0} \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(0)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(0)}_{=0} \\ \frac{\partial}{\partial x}(E_y) - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_0 k \sin(kx - wt) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -k E_0 \sin(kx - wt)\, \vec{u}_z$.

b) $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ 0 = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -k E_0 \sin(kx - wt) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$

2

$\Rightarrow \begin{cases} B_x = C(x) \Rightarrow B_x = 0 \\ B_y = C(x) \Rightarrow B_y = 0 \\ B_z = + \frac{k E_0}{w} \cos(kx - wt) + \underbrace{C}_{=0} \end{cases}$

$\vec{B} = \frac{k E_0}{w} \cos(kx - wt)\, \vec{u}_z$ avec $\frac{k E_0}{w} = B_0 = \frac{E_0}{c}$

2- a) Exprimer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{S}$ qui représente la puissance surfacique de l'onde.

On donne : $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

b) En déduire l'expression la valeur maximale S_0 du vecteur $\vec{S}$. Préciser l'unité de la grandeur S_0.

On donne : $E_0 = 3.10^6 Vm^{-1}$, $B_0 = 10^{-2}\, T$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} SI$.

2a) $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$

1 $= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} EB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} . E_0 . \frac{kE_0}{\omega} \cos^2(kx - \omega t)\, \vec{u}_x$

$\vec{S} = \frac{E_0^2 k}{\mu_0 \omega} \cos^2(kx - \omega t)\, \vec{u}_x$. avec $B_0 = \frac{k}{\omega}$

Amplitude de $\vec{S}$ = valeur max

b) $S_0 = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}$

1 A.N : $S_0 = \frac{3.10^6 . 10^{-2}}{4\pi\, 10^{-7}} \simeq 0{,}25 . 10^{11}\, W.m$
$\simeq 2{,}5 . 10^{10}\, W.m$

$\vec{S}$ représente (donné dans l'énoncé) la puissance surfacique, son unité est donc $W.m^{-2}$.

$(\pi \simeq 3)$