26/02/2024

*Chapitre 1*

**Exercice 1**

Le couple $(X, Y)$ suit une loi uniforme sur $\{1; \ldots; n\}^2$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires $X$, $Y$ et $X + Y$.
2. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 2**

1. Montrer que toute matrice de covariance est semi-définie positive.
2. En déduire qu'elle est diagonalisable. Que pouvons nous dire de ses valeurs propres ?

**Exercice 3**

1. Déterminer la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli de paramètre $p$.
2. Déterminer la fonction caractéristique de la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

**Exercice 4**

Montrer que la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

**Exercice 5**

Soient deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale
$\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

**Exercice 6**

Soient deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$.
Montrer que la variable aléatoire $\min(X_1; X_2)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

**Exercice 7**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Montrer que, lorsque $\lambda$ tend vers l'infini, $\dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

**Exercice 8**

A l'aide de la fonction génératrice des moments, déterminer l'espérance et la variance de la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

**Exercice 9**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$. Calculer $P(X > Y)$.

**Exercice 10**

Etablir l'**inégalité de Bienaymé-Tchebichev** :

$$P(\mid X - m \mid \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

pour une variable aléatoire $X$ dont l'espérance est notée $m$ et la variance est notée $\sigma^2$.

**Exercice 11**(Une loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires $L^2$, centrées et deux à deux non corrélées.
Notons, pour $n \geq 1$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ et notons $\sigma_n^2$ la variance de la variable aléatoire $X_n$.
Supposons que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ tend vers zéro.
Montrer que la suite $\dfrac{S_n}{n}$ converge vers 0 en moyenne quadratique.

**Exercice 12**

Déterminer la fonction génératrice de la fonction géométrique.

**Exercice 13** *Loi de l'espérance politico-stratégique du Général Poirier*

« *Une entreprise politico-stratégique est rationnelle si l'espérance de gain attachée à un projet est, au moment de la décision, et demeure, durant l'exécution supérieure aux risques consécutifs aux oppositions qu'elle rencontrera nécessairement dans le champ de la compétition, de la concurrence, voire du conflit armé.* »

1. Proposer un modèle probabiliste traduisant mathématiquement cette loi.
2. Proposer un programme sur Python permettant à un gouvernant de décider, à partir de données judicieusement choisies, si son pays doit s'engager ou non dans une entreprise politico-stratégique suivant cette loi.

**Exercice 14**

Considérons une variable aléatoire $X$ suivant une normale centrée réduite et une variable aléatoire $\varepsilon$ indépendante de la variable aléatoire $X$ telle : $P(\varepsilon = -1) = P(\varepsilon = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Considérons la variable aléatoire $Y := \varepsilon X$.

1. Montrer que la variable aléatoire $Y$ suit une loi normale centrée réduite.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.
4. En déduire que le vecteur aléatoire $(X, Y)^T$ n'est pas un vecteur gaussien.

**Exercice 15**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes deux une loi normale centrée réduite.
Considérons les variables aléatoires $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Montrer que le vecteur aléatoire $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien.
2. Montrer que les variables aléatoires $U$ et $V$ sont indépendantes.

**Exercice 16**

Soit $(X, Y, Z)^T$ un vecteur gaussien.
Considérons les variables aléatoires $U = X + Y + Z$ et $V = X - Y$.

1. Montrer que $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien.
2. Sous quelle condition sur la matrice de covariance $(X, Y, Z)$, les variables aléatoires $U$ et $V$ sont indépendantes ?

**Exercice 17**

Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$, $f_n(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f_n(x) = n^2 x \exp\left(-\dfrac{n^2x^2}{2}\right)$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $f_n$ définit une fonction de densité sur $\mathbb{R}$.
2. Considérons une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ de densité $f_n$ pour tout entier $n \geq 1$.
   Montrer que la suite $(X_n)$ converge en probabilité. Quelle est sa limite ?

**Exercice 18**

Soit $X$ une variable aléatoire discrète de support $\mathbb{N}^\star$ telle que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$P(X = k) = \frac{\alpha}{k!}$$

pour un certain réel $\alpha$.

1. Déterminer le réel $\alpha$.
2. Calculer $E(X)$ puis $E(X(X-1))$. En déduire $V(X)$.

**Exercice 19**

Soit $(U_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.
On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $M_n := \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $X_n = n(1-M_n)$.

1. Soit $n \geq 1$. Déterminer la fonction de répartition de $M_n$ puis celle de $X_n$.
2. Montrer que la suite $(X_n)$ converge en loi.