Mars 2025

Corrigé de l'exercice 14 de la feuille 2

Exercice

1. Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.
   Soit x un réel.

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\varepsilon X \leq x)$$

   d'où

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\{\varepsilon X \leq x\} \cap \{\varepsilon = -1\}) + \mathbb{P}(\{\varepsilon X \leq x\} \cap \{\varepsilon = 1\})$$

   Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\{-X \leq x\} \cap \{\varepsilon = -1\}) + \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{\varepsilon = 1\})$$

   Par conséquent,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(-X \leq x) \times \mathbb{P}(\varepsilon = -1) + \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(\varepsilon = 1)$$

   car les variables aléatoires ε et X sont indépendantes par hypothèse.

$$F_Y(x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(-X \leq x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq x)$$

   et

$$F_Y(x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

   par symétrie de la loi normale centrée réduite par rapport à 0.
   Donc X et Y ont la même loi. $\square$

2. Calculons $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   Par définition, $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
   Les variables aléatoires X et Y sont centrées donc $E(X) = E(Y) = 0$.
   D'où

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) = E(\varepsilon X^2)$$

Les variables aléatoires ε et X sont indépendantes donc les variables aléatoires ε et X^2 sont indépendantes. D'où

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(\varepsilon)E(X^2) = 0$$

car $E(\varepsilon) = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 = 0.$

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X,Y) = 0}$$

3. Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$.
   Soit $z \in \mathbb{R}$.

   $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\{Z \leq z\} \cap \{\varepsilon = -1\}) + \mathbb{P}(\{Z \leq z\} \cap \{\varepsilon = 1\})$
   d'où

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(\{0 \leq z\} \cap \{\varepsilon = -1\}) + \mathbb{P}(\{2X \leq z\} \cap \{\varepsilon = 1\})$$

   et

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(0 \leq z) \times \mathbb{P}(\varepsilon = -1) + \mathbb{P}(2X \leq z) \times \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$$

   car les variables aléatoires X et ε sont indépendantes.
   Plus subtilement, l'évènement $\{0 \leq z\} = \Omega$ si $z \geq 0$ et $\{0 \leq z\} = \emptyset$ si $z < 0$ donc est indépendant de tout événement et, en particulier, de l'événement $\{\varepsilon = -1\}$.
   Par conséquent, $\mathbb{P}(0 \leq z) = 1$ si $z \geq 0$ et $\mathbb{P}(0 \leq z) = 0$ sinon.
   En conclusion, nous obtenons :

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_{2X}(z) \text{ si } z < 0 \\ \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_{2X}(z) \text{ si } z \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

   où F_{2X} désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire $2X$ qui suit une loi $\mathcal{N}(0;4)$.

Remarque 1

Du[1] point de vue de la théorie de la mesure, nous écririons $\mu_Z = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mu_{2X}$ où δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0 et μ_{2X} la mesure de probabilité définie par la loi de la variable aléatoire $2X$.
Pour toute partie mesurable de $\mathbb{R}$, $\delta_0(A) = 1$ si $0 \in A$ et 0 sinon.
Par ailleurs, il est important de noter que la fonction de répartition n'est pas continue (donc n'est pas dérivable) et que, par conséquent, la variable aléatoire $X + Y$ n'a pas de densité[2]. Elle n'est donc pas continue.
Ceci se voit aisément car $\mathbb{P}(X + Y = 0) = \frac{1}{2}$.
Elle n'est pas discrète car $\mathbb{P}(Z \in [1; 2]) = \frac{1}{2} + \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}} dx$ et $\mathbb{P}(Z = z) = 0$ pour tout réel $z \in [1; 2]$.
Ainsi, la variable aléatoire $X + Y$ n'est ni discrète ni continue.

4. La variable aléatoire $X + Y$ n'est pas gaussienne car nous avons exhibé une combinaison linéaire des variables aléatoires X et Y qui n'est pas gaussienne.
   Par conséquent, le vecteur $(X, Y)^T$ n'est pas un vecteur gaussien.

1. La remarque est proposée à titre culturel et les considérations évoquées, ici, ne sont naturellement pas au programme de l'examen.
2. La densité est la dérivée de la fonction de répartition.