Corrigés des exercices

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Étudions la série numérique $\sum nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

   Si $x = 0$, la série converge trivialement.

   Sinon on a $n^2 f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc au voisinage de l'infini, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   D'où la série numérique à termes positifs $\sum f_n(x)$ converge par comparaison.

   Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2. Remarquons tout d'abord que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

   En effet $f_n(0) = 0$ et si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Étudions à présent la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a
   $$f_n'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}$$

   On en déduit le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{2}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$	$\searrow$	0

   donc $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^+} \left|f_n(x)\right| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

   Ainsi (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

3. (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2

1. Soit $x \in [0, 1]$.

   La série numérique $\sum f_n(x)$ est alternée et vérifie le critère spécial car la suite numérique $\left(\left|f_n(x)\right|\right)$ est décroissante et converge vers 0 donc $\sum f_n(x)$ converge.

   Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

2. Pour tout $x \in [0,1]$, comme la série numérique alternée $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial, on a

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Ainsi la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Si $x = 0$, alors $\sum f_n(x) = \sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\dfrac{1}{n+n^3x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3x^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge donc la série numérique à termes positifs $\sum \dfrac{1}{n+n^3x^2}$ converge par comparaison.

Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}_+$).

2. On a immédiatement

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}_+^*} \left|f_n(x)\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\left|R_n(x)\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k+k^3x^2} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+k^3x^2}$.

Donc $\left|R_n(x)\right| \geqslant \underbrace{n}_{\text{nombre de termes}} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{2n+8n^3x^2}}_{\text{terme le plus petit}} = \dfrac{1}{2+8n^2x^2}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{10}$ donc $\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}_+^*} \left|R_n(x)\right| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.