Intégrales généralisées

Chapître 1 : Définition et propriétés

Nasko Karamanov

4 septembre 2023

ÉCOLE D'INGENIEURS EN INFORMATIQUE

Dans ce cours ...

C'est quoi une intégrale généralisée ?

Dans ce cours

- On va introduire et étudier les intégrales généralisées

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour l'instant garder en tête la borne $+\infty$

- On va introduire et étudier les intégrales à paramètres

$$\int_{a}^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

- On va décider de la convergence de suites telles d'intégrales

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Acquis d'apprentissages visés

Dans le contexte d'application directe du cours :

- décider de la bonne définition d'une intégrale généralisée
- décider de la convergence d'une suite d'intégrales et d'en exhiber (si possible) la limite.
- identifier les propriétés dont peut jouir une intégrale à paramètres spécifiques dans les cas les plus usuels (Transformée de Fourier ou de Laplace)
- simplifier des expressions impliquant des limites de suites d'intégrales ou des intégrales à paramètres.
- valider un raisonnement impliquant des questions de convergences de suites d'intégrales ou des intégrales à paramètres.

Dans le cadre des questions de modélisation en Mathématiques du Signal, Probabilités et Automatiques :

- calculer les moments et grandeurs probabilistes liées à une variable aléatoire à densité
- reconnaître les hypothèses et arguments utilisés dans les preuves de convergences en probabilités
- calculer la transformée de Fourier, de Laplace d'une fonction.

Dans ce cours ...

C'est quoi une intégrale généralisée ?

C'est quoi une intégrale généralisée ?

Type 1 : ce qui se passe à l'infini

Definition

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge*** si la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.

Dans ce cas on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est quoi une intégrale généralisée ?

Type 1 : ce qui se passe à l'infini

Definition

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge*** si la limite

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.

Dans ce cas on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Example

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x}) = 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ CV et vaut 1

C'est quoi une intégrale généralisée

Type 2 : ce qui se passe dans une des bornes finie

Definition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où f n'est pas continue/définie en b.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge*** si la limite

$\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.

Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est quoi une intégrale généralisée

Type 2 : ce qui se passe dans une des bornes finie

Definition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où f n'est pas continue/définie en b.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge*** si la limite

$\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.

Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Example

$\displaystyle\lim_{x\to 4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{4-t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 4}[-2\sqrt{4-t}]_0^x = \lim_{x\to 4}(4-2\sqrt{4-t}) = 4$ donc $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-t}}\,\mathrm{d}t$ CV et vaut 4

Résumé

Si $-\infty < b <= +\infty$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

A retenir

Intégrale généralisée = limite (Intégrales de Riemann)

Résumé

Si $-\infty < b <= +\infty$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

A retenir

Intégrale généralisée = limite $\big(\underbrace{\text{Intégrales de Riemann}}_{\text{vous savez le faire}}\big)$

Résumé

Si $-\infty < b <= +\infty$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

A retenir

$$\text{Intégrale généralisée} = \underbrace{\text{limite}\left(\underbrace{\text{Intégrales de Riemann}}_{\text{vous savez le faire}}\right)}_{\text{vous savez le faire}}$$

Résumé

Si $-\infty < b <= +\infty$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

A retenir

$$\text{Intégrale généralisée} = \underbrace{\text{limite}\ (\underbrace{\text{Intégrales de Riemann}}_{\text{vous savez le faire}})}_{\text{vous savez le faire}}$$

Remarque : on traite de la même manière les intégrales avec une borne impropre en a.

Dans cette RMD

- Deux bornes impropres
- Relations de Chasles
- Théorèmes de comparaison
- Intégration par parties
- Changement de variables

Pour s'échauffer ...

Wooclap[1-2]

Quelques propriétés : Relation de Chasles

Proposition

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue avec $-\infty < a < c < b \leq +\infty$.

Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Dans le cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Quelques propriétés : Relation de Chasles

Proposition

Soit $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ continue avec $-\infty<a<c<b\leq+\infty$.

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Dans le cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration.

Pour tout x tel que $a<c<x<+\infty$ on a la relation de Chasles pour les intégrales de Riemann

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction f étant continue sur $[a,c]$ l'intégrale au milieu est finie. La résultat suit en passant à la limite. $\square$

Quelques propriétés : linéarité

Proposition

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t$ converge aussi et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent alors $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t$ converge aussi et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration.

Conséquence de la même propriété pour les intégrales classiques de Riemann + passage à la limite. $\square$

Intégrale sur $]-\infty,+\infty[$

Wooclap[3]

Intégrale à deux bornes impropres $]a, b[$

S'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***convergent*** alors on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge***. Dans le cas de convergence

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

La définition ne dépend pas de c (conséquence de la relation de Chasles).

Intégrale à deux bornes impropres $]a,b[$

S'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***convergent*** alors on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge***. Dans le cas de convergence

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

La définition ne dépend pas de c (conséquence de la relation de Chasles).

Example

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x : \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Intégrales de référence : Riemann

Wooclap[4]

Intégrale de référence : Riemann

Theorem

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \text{ converge ssi } \alpha > 1$$
- $$\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \text{ converge ssi } \alpha < 1$$

Intégrale de référence : Riemann

Theorem

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge ssi } \alpha > 1$$
- $$\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge ssi } \alpha < 1$$

Aide mémoire : Série de Riemann

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Intégrales de référence : Riemann

Wooclap[5]

Intégrale de référence : exponentielle (en TD)

Theorem

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

- $$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge ssi } \alpha < 0$$
- $$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge ssi } \alpha > 0$$

Dans ce cours ...

C'est quoi une intégrale généralisée ?

Comment décider d'une convergence ?

Question

Comment faire quand l'intégrale de Riemann est compliquée à calculer (par exemple pas de primitive ...) ?

Comment décider d'une convergence ?

Question

Comment faire quand l'intégrale de Riemann est compliquée à calculer (par exemple pas de primitive ...) ?

Réponse

On va comparer f avec une autre fonction g (à déterminer suivant le cas) pour laquelle la convergence de l'intégrale est plus façile à décider.

Comparaison

Proposition

Si f est continue et **positive** [a] sur $[a, b[$ alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ majorée } \Leftrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

a. il suffit que f soit positive au ***voisinage*** de b, c'est-à-dire sur un intervalle $]A, b[$

Proposition

Si f est continue et **positive** [a] sur $[a, b[$ alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ majorée } \Leftrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

a. il suffit que f soit positive au ***voisinage*** de b, c'est-à-dire sur un intervalle $]A, b[$

Wooclap[6]

Comparaison

Proposition

Si f et g sont positives sur $[a, b[$ et $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}^{a}$$

a. Que implique la contraposée ?

Comparaison

Proposition

Si f et g sont positives sur $[a,b[$ et $0 \leq f \leq g$ sur $[a,b[$

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}^a$$

---

a. Que implique la contraposée ?

Démonstration.

Pour tout $x \in [a,b[$ on a $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Donc

$$0 \leq \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée et on utilise la proposition précédente. $\square$

Comparaison

Proposition

Si f et g sont positives sur $[a,b[$ et $0 \leq f \leq g$ sur $[a,b[$

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}^a$$

a. Que implique la contraposée ?

Démonstration.

Pour tout $x \in [a,b[$ on a $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Donc

$$0 \leq \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée et on utilise la proposition précédente. $\square$

Comparaison

Proposition

- Si f et g sont positives sur $[a, b[$ et $f \underset{b}{=} O(g)$ ou $f \underset{b}{=} o(g)$ alors

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}^a$$

Comparaison

Proposition

- Si f et g sont positives sur $[a, b[$ et $f \underset{b}{=} O(g)$ ou $f \underset{b}{=} o(g)$ alors

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}^{a}$$

- Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}$$

---

a. Que implique la contraposée ?

Rappel

Si $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions et g ne s'annule pas au voisinage de b

$$f \underset{b}{=} O(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } b$$

$$f \underset{b}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f \underset{b}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Exemples

Question

Quelle est la nature de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$?

Exemples

Question

Quelle est la nature de $\int_0^1 \ln(t)\,dt$?

Par croissances comparées pour tout $\alpha > 0$ on a

$$t^\alpha \ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a

$$t^{\frac{1}{2}} \ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\ln(t) = O(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}})$ (on peut aussi dire qu'au voisinage de 0 $\ln(t) < \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt$ converge.

Comparaison

Proposition *Convergence absolue*

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Comparaison

Proposition ***Convergence absolue***

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Aide mémoire

Retrouver les propriétés équivalentes pour les séries ....

Proposition ***Convergence absolue***

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| \mathrm{d}t \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t \text{ converge}$$

Aide mémoire

Retrouver les propriétés équivalentes pour les séries ....

Wooclap[7-9]

Dans ce cours ...

C'est quoi une intégrale généralisée ?

IPP

Proposition

Si $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée (u et v de classe C^1) et si l'expression

$$[u(t)v(t)]_a^b = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - \lim_{x\to a} u(x)v(x)$$

a un sens (les limites sont finies) alors les intégrales $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Dans le cas de convergence

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : Il faut toujours commencer par vérifier si $[u(t)v(t)]_a^b$ a un sens.

IPP : exemple

Wooclap[10]

Changement de variables

Proposition

Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée et $\varphi : I =]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijective de classe C^1 telle que

$$\lim_{t\to\alpha} \varphi(t) = a \text{ et } \lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$$

Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Dans le cas de convergence les intégrales ont la même valeur.

Proposition

Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée et $\varphi : I =]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijective de classe C^1 telle que

$$\lim_{t\to\alpha} \varphi(t) = a \text{ et } \lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$$

Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Dans le cas de convergence les intégrales ont la même valeur.

Wooclap[11]

A retenir

- Intégrale généralisée = limite (Intégrales de Riemann)
- On retrouve les mêmes propriétés et techniques d'intégration : linéarité, Chasles, IPP, changement de variables
- A faire attention à la convergence avant de commencer les calculs.

A retenir

- Intégrale généralisée = limite (Intégrales de Riemann)
- On retrouve les mêmes propriétés et techniques d'intégration : linéarité, Chasles, IPP, changement de variables
- A faire attention à la convergence avant de commencer les calculs.

A suivre :

- Suite d'intégrales, théorème de convergence dominée
- Intégrale à paramètre