

Examen de rattrapage

| | |
|-----------------------------------|--|
| | Sujet de partiel |
| Intitulé | EPITA_ING2_S8_Promo 2024 |
| MAJEURES | IMAGE/SCIA |
| Code cours | PRST |
| Intervenant | Noé Biheng |
| Durée | 1h |
| Droit ou pas aux documents | Aucun document n'est autorisé. Calculatrice non programmable autorisée. |

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale.

Exercice 1

1. La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .
Montrer que $E(X) = p$.
2. Montrer que la loi géométrique est sans mémoire.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes deux une loi normale centrée réduite.
Considérons les variables aléatoires $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
 - (a) Montrer que le vecteur aléatoire $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien.
 - (b) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Déterminer la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli de paramètre p .

Exercice 3

Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ , rappelons que $E(X) = \lambda$.
A l'aide de la méthode des moments, déterminer un estimateur fortement convergent et sans biais du paramètre λ pour la loi de Poisson.

Exercice 4

Considérons l'échantillon de 8 observations extraites d'une loi normale de moyenne et de variance 1 : -2 ; 0 ; 7 ; 6 ; 4 ; 8 ; 5 et 9.
Déterminer un intervalle de confiance au niveau 0,95 pour la moyenne m .

Exercice 5

Nous disposons de n observations issues de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Rappelons que la densité de la loi exponentielle est :

$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ .

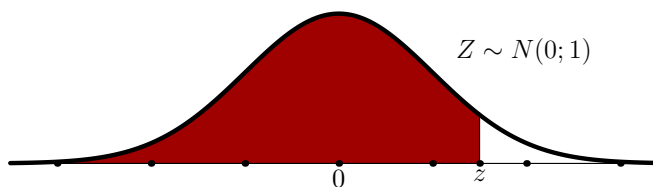
Exercice 6

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-1; 1]$.

1. Quelle est la densité de la variable aléatoire X ?
2. Quelle est son espérance ?
3. Que vaut $\mathbb{P}(X = 1)$?

Tableau N [1]

Aire sous la courbe normale
à gauche de z , c'est à dire
 $P[Z \leq z]$, ou $Z \sim N(0; 1)$.

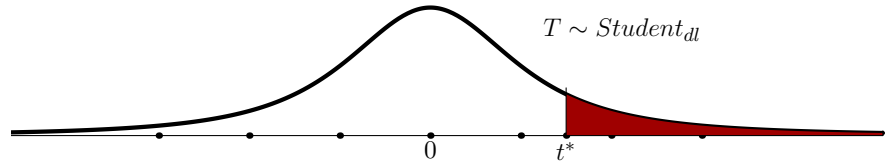


| | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| .00 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| .10 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| .20 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| .30 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| .40 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| .50 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| .60 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| .70 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| .80 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| .90 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |

F.L. 2006 © Tableau construit avec SAS, Metapost et ConTeX

Tableau T1 [1/2]

Tableau de t^* tel qu'une variable de Student à dl degrés de liberté ait probabilité p d'être supérieure à t^*

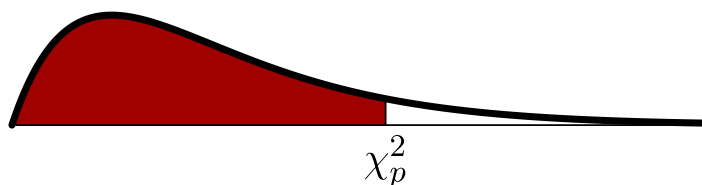


| | $P[T \geq t^*] = p$ | | | | | | | | | | | |
|------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|--------|
| dl | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.02 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.001 | 0.0005 |
| 1 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 15.89 | 31.82 | 63.66 | 127.3 | 318.3 | 636.6 |
| 2 | .8165 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 4.849 | 6.965 | 9.925 | 14.09 | 22.33 | 31.60 |
| 3 | .7649 | .9785 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 3.482 | 4.541 | 5.841 | 7.453 | 10.21 | 12.92 |
| 4 | .7407 | .9410 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 2.999 | 3.747 | 4.604 | 5.598 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | .7267 | .9195 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 2.757 | 3.365 | 4.032 | 4.773 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | .7176 | .9057 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 2.612 | 3.143 | 3.707 | 4.317 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | .7111 | .8960 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.517 | 2.998 | 3.499 | 4.029 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | .7064 | .8889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.449 | 2.896 | 3.355 | 3.833 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | .7027 | .8834 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.398 | 2.821 | 3.250 | 3.690 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | .6998 | .8791 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.359 | 2.764 | 3.169 | 3.581 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | .6974 | .8755 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.328 | 2.718 | 3.106 | 3.497 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | .6955 | .8726 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.303 | 2.681 | 3.055 | 3.428 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | .6938 | .8702 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.282 | 2.650 | 3.012 | 3.372 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | .6924 | .8681 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.264 | 2.624 | 2.977 | 3.326 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | .6912 | .8662 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.249 | 2.602 | 2.947 | 3.286 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | .6901 | .8647 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.235 | 2.583 | 2.921 | 3.252 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | .6892 | .8633 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.224 | 2.567 | 2.898 | 3.222 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | .6884 | .8620 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.214 | 2.552 | 2.878 | 3.197 | 3.610 | 3.922 |
| | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.02 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.001 | 0.0005 |

F.L. 2006 © Tableau construit avec SAS, Metapost et ConTeX

Tableau C [1/2]

Percentiles de la distribution du χ^2 . Valeurs de χ_P^2 correspondant à P



| dl | $\chi_{0.005}^2$ | $\chi_{0.01}^2$ | $\chi_{0.025}^2$ | $\chi_{0.05}^2$ | $\chi_{0.1}^2$ | $\chi_{0.9}^2$ | $\chi_{0.95}^2$ | $\chi_{0.975}^2$ | $\chi_{0.99}^2$ | $\chi_{0.995}^2$ |
|------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|----------------|----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| 1 | .0000 | .0002 | .0010 | .0039 | .0158 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | .0100 | .0201 | .0506 | .1026 | .2107 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.60 |
| 3 | .0717 | .1148 | .2158 | .3518 | .5844 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | .2070 | .2971 | .4844 | .7107 | 1.064 | 7.779 | 9.488 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | .4117 | .5543 | .8312 | 1.145 | 1.610 | 9.236 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | .6757 | .8721 | 1.237 | 1.635 | 2.204 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | .9893 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.344 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.603 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 5.578 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 6.304 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 7.042 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 7.790 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 8.547 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 9.312 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| dl | $\chi_{0.005}^2$ | $\chi_{0.01}^2$ | $\chi_{0.025}^2$ | $\chi_{0.05}^2$ | $\chi_{0.1}^2$ | $\chi_{0.9}^2$ | $\chi_{0.95}^2$ | $\chi_{0.975}^2$ | $\chi_{0.99}^2$ | $\chi_{0.995}^2$ |

F.L. 2006 © Tableau construit avec SAS, Metapost et ConTeX