Remarques et définitions

— Nous nous intéresserons aux chemins de longueur non nulle.

— Nous allons travailler sur des graphes orientés valués.

— Le **coût (poids ou valeur) d'un chemin** est égal à la somme des coûts des arcs qui le composent. On l'appelle aussi la **distance** du chemin.

— Le **plus court chemin** d'un sommet x vers un sommet y est le chemin de coût minimum allant de x vers y. Un tel chemin n'existe pas forcément.

— La **plus petite distance** d'un sommet x vers un sommet y est le coût du plus court chemin s'il existe.

Conditions d'existence

Considérons un chemin M allant d'un sommet x à un sommet y. Supposons que ce chemin possède un circuit T. Appelons M' le chemin obtenu en retirant T de M, on a alors la relation de coût suivante :

$$Coût(M) = Coût(M') + Coût(T)$$

— Si le $Coût(T)$ est négatif (< 0), il n'existe dans ce cas pas de plus court chemin allant de x à y. En effet, il suffit de repasser une fois de plus par le circuit T pour obtenir un meilleur résultat (chemin de coût inférieur).
Un tel circuit est appelé **circuit absorbant**.

— Si le $Coût(T)$ est nul ($=0$), M' est de coût égal à celui de M. Dans ce cas M et M' sont tous deux des plus courts chemins, mais la longueur (nombre d'arcs empruntés) de M est supérieure à celle de M'.

— Si le $Coût(T)$ est positif (> 0), M' est de coût inférieur à celui de M. Dans ce cas c'est un meilleur candidat que M au titre de plus court chemin.

S'il existe des circuits, ils sont de coût positif ou nul. Or un plus court chemin ne peut pas contenir de circuit de coût strictement positif et s'il existe des circuits de coût nul, il y a plusieurs solutions au problème de la recherche de plus court chemin. Comme le nombre de chemins élémentaires (ne passant pas plusieurs fois par un même sommet), allant d'un sommet x à un sommet y, est fini, il existe au moins un plus court chemin élémentaire allant de x vers y (note : Il peut en exister plusieurs).

En conclusion : Il existe une solution au problème de la recherche d'un plus court chemin allant de x à y s'il existe un chemin de x à y et s'il n'y a pas de circuit absorbant.

Variantes du problème

Les algorithmes que nous allons présenter fournissent, dans le cas où il n'y a pas de circuit absorbant, un plus court chemin élémentaire.

Les trois possibilités de rechercher un(des) plus court(s) chemin(s) sont :

① entre deux sommets x et y,

② d'un sommet x (une source) vers tous les autres sommets du graphe,

③ entre tous les couples de sommets x et y.

Remarque : Le ① est obtenu en meilleure solution du ②.

Il n'existe pas d'algorithme général que ce soit pour le ② ou le ③. Il faut tenir compte des propriétés des graphes manipulés et du problème posé et dès lors choisir l'algorithme le plus adapté.

Exemples d'algorithmes :

pour le problème ②
- Dijsktra
- A*
- Bellman

pour le problème ③
- Floyd
- Johnson