Algorithmique

Les graphes non orientés : biconnexité

Définitions

Biconnexité, points d'articulation et isthmes

- Un graphe non orienté est dit **k-connexe** s'il possède au moins $k+1$ sommets et si après en avoir retiré $k-1$, il reste connexe. Lorsque $k=2$, on parle de **biconnexité** (ou 2-connexité) : propriété qui vérifie le fait que si un sommet du graphe (n'importe lequel) disparait, tous les autres restent en connexion.
- Un sommet s de G est un **point d'articulation** si la suppression de s augmente le nombre de composantes connexes de G.
- Une arête $x--y$ de G est un **ithme** si la suppression de $x--y$ augmente le nombre de composantes connexes de G (un ithme a obligatoirement une de ses deux extrémités au moins qui est un point d'articulation).

Donc un graphe biconnexe ne possède pas de points d'articulations (ni ithmes).

Composantes biconnexes

- Un **bloc** est soit une arête, soit un graphe biconnexe.
- Une **composante biconnexe** d'un graphe G est un *bloc maximal* de G. C'est à dire un bloc de G qui n'est pas strictement inclus dans un autre bloc de G.
- Les composantes bi-connexes forment une partition de l'ensemble des arêtes du graphe.
- Deux composantes biconnexes :
  - soit ont en commun un point d'articulation,
  - soit sont disjointes.

Extraction des points d'articulations

L'algorithme présenté effectue un seul **parcours en profondeur** et examine les propriétés des sommets de la **forêt couvrante associée**.

Propriétés

Déterminer, lors du parcours profondeur, si x n'est pas un point d'articulation de $G \Leftrightarrow$

x est racine d'une arborescence : x a un seul fils ?
En effet, la suppression de x "coupera" l'arbre en i composantes s'il y a i fils.

x n'est pas racine : Existe-t-il une chaîne entre les descendants et les ancêtres de x dans le graphe $G - \{x\}$?
Dans la forêt couvrante, si une telle chaîne existe, elle sera formée d'arcs couvrants en dessous de x et d'un arc en arrière remontant au-dessus de x.

Principe

Pour les sommets racines des arborescences, il suffit de compter le nombre de fils.
Pour les autres sommets : durant le parcours, les sommets sont numérotés en ordre préfixe de rencontre ($prefixe(x)$ qui sert ausi de marque). Pour chaque sommet x on calcule

$$plushaut(x) = min \begin{cases} prefixe(x) & \\ plushaut(y) & \forall\ (x,y) \text{ arc couvrant} \\ prefixe(z) & \forall\ (x,z) \text{ arc retour} \end{cases}$$

À chaque remontée d'un arc couvrant (x,y), $plushaut(y) \geq prefixe(x) \Rightarrow x$ est point d'articulation (y ne peut pas atteindre les ascendants de x si x n'est plus là...).

Compléments

L'algorithme est donné en annexe pour un graphe supposé connexe.
Cet algorithme pourra être modifié pour détecter les isthmes et les composantes biconnexes.