Devoir à rendre le 29 juin 2025

Loi de Rayleigh

Une variable aléatoire X suit une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma > 0$ si sa densité est donnée par :
$f(x,\sigma) = 0$ si $x < 0$ et $f(x,\sigma) = \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ sinon.

Partie 1

1. Justifier que la fonction $f(.,\sigma)$ définit bien une densité sur $\mathbb{R}$ pour tout $\sigma > 0$.
2. A l'aide de la formule du changement de variable, montrer que la variable aléatoire $Y = X^2$ suit une loi exponentielle.
3. Montrer que $E(X) = \sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
4. Nous admettrons que la variance de la variable aléatoire X est égale à $\dfrac{4-\pi}{2}\sigma^2$.
   Calculer $E(X^2)$.
5. Déterminer deux estimateurs du paramètre σ à l'aide de la méthode des moments.
6. En détaillant les calculs et en justifiant précisément, déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre σ.

Partie 2

1. Considérons la variable aléatoire $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

   Nous admettrons que la variable aléatoire T_n suit une loi Gamma de paramètres n et $2\sigma^2$.

   (a) Exprimer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre σ en fonction de T_n.

(b) Pourquoi est-il impossible d'utiliser directement la variable aléatoire T_n pour déterminer un intervalle de confiance pour le paramètre σ ?

2. Montrer que, si X_k suit une loi de Rayleigh de paramètre σ, alors $Y_k = \dfrac{X_k^2}{\sigma^2}$ suit une loi Khi-deux à deux degrés de liberté.
3. Déterminer la fonction caractéristique de $\dfrac{T_n}{\sigma^2}$ puis en déduire la loi de $\dfrac{T_n}{\sigma^2}$.
4. En déduire un intervalle de confiance au niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre σ (en fonction de fractiles de la loi Khi-deux dont vous préciserez le nombre de degrés de liberté).
5. *Application numérique* : $(n = 5)$
   Considérons les cinq observations suivantes issues de l'échantillon précédent : 1, 2, 3, 4 et 6.
   Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$ pour le paramètre σ.