1 Définitions

1.1 Suites de fonctions

Définition 1

On appelle *suite de fonctions* de I vers $\mathbb{R}$, toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$.

Exemple

(f_n) la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ par $f_n(x) = x^n$.

1.2 Convergence simple

Définition 2

Soient $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que (f_n) *converge simplement* vers f sur I si

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

autrement dit si $\quad \forall x \in I \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \big(n \geqslant N \Longrightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\big)$

Exemple

Soit (f_n) la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ par $f_n(x) = x^n$.

Soit $x \in [0,1]$.

Alors $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$ sur $[0,1]$.

2 Propriétés de la convergence simple

Proposition 1

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ et $(g_n) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement respectivement vers $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^I$ sur I. Alors

1. $(f_n + \lambda g_n)$ converge simplement vers $f + \lambda g$ sur I.
2. $(f_n g_n)$ converge simplement vers fg sur I.

Remarques

1. La limite simple d'une suite de fonctions continues sur I n'est pas nécessairement continue sur I.
2. Si (f_n) converge simplement vers f sur $[a,b]$, où a et b sont deux réels avec $a < b$, alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ n'est pas nécessairement égale à $\displaystyle\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.