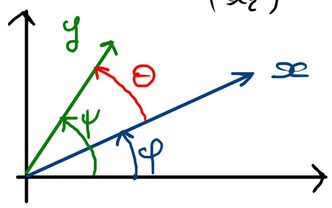
Corrigé du TD préliminaires géométriques

Exercice : le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$

Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ s'écrit en coordonnées polaires $x = (\|x\|, \varphi)$. Idem $y = (\|y\|, \psi)$ en coordonnées polaires.

$\longrightarrow$ donc $x_1 = \|x\| \cos\varphi$ et $x_2 = \|x\| \sin\varphi$

$\longrightarrow$ et $y_1 = \|y\| \cos\psi$ et $y_2 = \|y\| \sin\psi$

$$
\begin{aligned}
\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 &= \|x\| \cos\varphi \, \|y\| \cos\psi + \|x\| \sin\varphi \, \|y\| \sin\psi \\
&= \|x\| . \|y\| \cos\varphi \cos\psi + \|x\| \|y\| \sin\varphi \sin\psi \\
&= \|x\| . \|y\| (\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi) \\
&= \|x\| \, \|y\| \cos(\underbrace{\psi - \varphi}_{\theta})
\end{aligned}
$$

rappel : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$= \underline{\|x\| . \|y\| \cos(\theta)}$ avec θ l'angle entre x et y

Remarque : l'orientation de θ n'a pas d'importance puisque $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

Exercice : norme découlant d'un produit scalaire

Soit $\langle \, , \rangle$ un produit scalaire et $\| . \|$ la norme induite : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Vérifions les axiomes de la norme

* Séparation : $\|x\| = 0 \iff x = 0$

  Supposons que $\|x\| = 0$. Alors $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ (axiome de définition du produit scalaire)

  Supposons maintenant que $x = 0$. Alors trivialement $\langle x, x \rangle = 0 \implies \|x\| = 0$

  $\longrightarrow$ l'axiome de séparation est bien vérifié

* homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

  Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \, \|x\|$

  axiomes de symétrie et bilinéarité du produit scalaire

  $\longrightarrow$ l'axiome d'homogénéité est bien vérifié

* inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

  Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Partons de $\|x + y\|^2$:

$$
\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \quad (\text{Symétrie du produit scalaire}) \\
&= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2
\end{aligned}
$$

inégalité de Cauchy-Schwartz

Et $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \implies \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \|x\| . \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

Les quantités $\|x+y\|$ et $\|x\|+\|y\|$ étant nécessairement positives, on a donc $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

$\to$ l'axiome d'inégalité triangulaire est bien vérifié

Exercice : inégalité triangulaire inversée

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$

On peut écrire $x = x-y+y$. Donc $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire classique)

$$\Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

De manière similaire : $y = y-x+x$. Donc $\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\|$

$$\Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$$

Donc $\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$ et $\|x-y\| \geq \|y\| - \|x\|$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\|x-y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|}$ ce qui prouve l'inégalité triangulaire inversée

Exercice : normes équivalentes

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ et $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

Montrons d'abord l'équivalence de $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Or $\forall i$, $|x_i| \leq \max_i |x_i|$, donc $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n \max_i |x_i| \leq n \times \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

$\to \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$

Et $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_j| + \sum_{i \neq j} |x_i|$ avec $|x_j| = \max_i |x_i|$ (dans la somme $|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$, il y a le max + d'autres termes tous ≥ 0)

$\geq |x_j| = \max_i |x_i|$

Donc $\|x\|_1 \geq \|x\|_\infty$ $\to$ au final $\underline{\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty}$ les normes $\|\,\|_1$ et $\|\,\|_\infty$ sont bien équivalentes

Ne reste plus qu'à intercaler $\|\,\|_2$ dans l'inégalité précédente

Repartons de $\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = |x_j|$ (le max est atteint pour l'indice j)

Or $|x_j| = \sqrt{x_j^2}$, et $\sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{x_j^2 + \sum_{i \neq j} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|_2$

$\to \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

Ne reste plus qu'à comparer $\|x\|_2$ avec $\|x\|_1$: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \Leftrightarrow \|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i||x_j|$

et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \Leftrightarrow \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \|x\|_1$

$\to \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

Au final, on obtient : $\underline{\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty}$ les normes $\|\,\|_1$, $\|\,\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont bien équivalentes

Exercice : décrire un lieu de $\mathbb{R}^2$

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ le lieu $A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}\right\}$