

TD Optimisation Convexe

Points critiques et convexité à l'ordre $\{1, 2\}$

Guillaume TOCHON

Majeure IMAGE

Points critiques

Exercice : Points critiques 1

On rappelle qu'un point critique x^* d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un point tel que $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$, et que le lieu critique d'une fonction f est l'ensemble de ses points critiques. Déterminer les lieux critiques et la nature des points critiques correspondants des fonctions suivantes :

1. $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2$
2. $f : (x_1, x_2) \mapsto \cos(x_1 x_2)$
3. $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 x_2)^3$

Exercice : Points critiques 2

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée symétrique, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne et $c \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de \mathbf{A} et \mathbf{b} , les lieux critiques des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$
2. $f : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$
3. $f : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$

Convexité et matrice hessienne

Exercice : Matrice hessienne 1

Calculer les matrices hessiennes en tout point des fonctions suivantes. Ces fonctions sont-elles convexes ?

1. $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2 x_3$
2. $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - 4x_1 x_2 + 5x_2^2 - \ln(x_1 x_2)$ pour $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

Exercice : Matrice hessienne 2

Calculer les matrices hessiennes des fonctions suivantes. Sous quelles conditions sont-elles convexes ?

1. $f : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée (pas nécessairement symétrique), $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$
2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$