Puisque f_i est différentiable en x_0, $df_{i\,x_0}(h) = \langle \nabla f_i(x_0), h \rangle = \nabla f_i(x_0)^T h = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0), \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x_0) \right) h$

Et $\begin{pmatrix} df_{1\,x_0}(h) \\ \vdots \\ df_{p\,x_0}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0)^T h \\ \vdots \\ \nabla f_p(x_0)^T h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \right) h \\ \vdots \qquad \vdots \\ \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \right) h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0), \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} h$

→ produit matrice/vecteur

→ c'est une application linéaire en h.

Donc pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $df_{x_0} : h \mapsto \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots \quad \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0), \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}}_{\mathrm{Jac}\, f(x_0)} h = \mathrm{Jac}\, f(x_0)\, h$ avec $\mathrm{Jac}\, f(x_0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$

→ $\mathrm{Jac}\, f(x_0)$ s'appelle la matrice jacobienne de f en x_0

Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Jac}\, f(x_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ → $\mathrm{Jac}\, f(x_0) = \nabla f(x_0)^T$: c'est le gradient écrit comme vecteur ligne

En résumé :

* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → $df_{x_0} : h \mapsto h f'(x_0)$
* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ → $df_{x_0} : h \mapsto \nabla f(x_0)^T h$
* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ → $df_{x_0} : h \mapsto \mathrm{Jac}\, f(x_0)\, h$

Addition et composition de fonctions différentiables

* Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$

  Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ différentiable en x_0, et $d(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda df_{x_0} + \mu dg_{x_0}$

  → peut se réécrire avec les matrices jacobiennes : $\boxed{\mathrm{Jac}(\lambda f + \mu g)(x_0) = \lambda \mathrm{Jac}\, f(x_0) + \mu \mathrm{Jac}\, g(x_0)}$

* Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ différentiable en $f(x_0) \in \mathbb{R}^p$

  Alors $g \circ f$ différentiable en x_0 et $d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}$

  → avec les matrices jacobiennes : $\boxed{\mathrm{Jac}(g \circ f)(x_0) = \mathrm{Jac}\, g_{f(x_0)} \times \mathrm{Jac}\, f(x_0)}$ en explicitant les termes de ce produit matriciel, on obtient la règle de dérivation en chaîne

5) La différentielle en pratique

L'existence des dérivées partielles (ou dérivées directionnelles) ne permet pas d'assurer la différentiabilité (ni même la continuité) d'une fonction en un point donné, malgré leur relative simplicité de manipulation

La notion de différentielle est plus forte, mais plus complexe à manipuler

On peut se ramener (lorsque c'est possible) au théorème suivant :

Théorème : Si toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f est différentiable en x_0

Cela définit les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathcal{U}$

Il y a donc deux manières possibles de calculer la différentielle d'une fonction f en x_0 :

1) Se ramener à la définition, en écrivant le DL_1 de f en x_0 : $f(x_0+h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + o_0(h)$

   → on identifie le terme linéaire en h (c'est l'expression de $df_{x_0}(h)$) et on vérifie que les termes restants sont bien en $o_0(h)$

   Exemple : calculer la différentielle de $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T A x$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

2) Montrer que f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ en x_0 : on calcule les dérivées partielles et on s'assure qu'elles sont bien définies et continues en x_0

   → on peut donc écrire $df_{x_0} : h \mapsto \mathrm{Jac}\, f(x_0)\, h$ si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

   $df_{x_0} : h \mapsto \nabla f(x_0)^T h$ si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

   Exemple : calculer la différentielle de $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x_1 x_2 x_3 , x_2 (x_1^2 + 1))$