Examen

	Sujet de partiel
Intitulé	**EPITA_ING2_S8_Promo 2023**
MAJEURES	IMAGE/SCIA
Code cours	PRST
Intervenant	Noé Biheng
Durée	2h
Droit ou pas aux documents	Aucun document n'est autorisé. Calculatrice non programmable autorisée.

Exercice 1

1. Déterminer la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli.
2. La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   Montrer que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
3. Montrer que la loi exponentielle est sans mémoire.
4. Soient deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
   Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes deux une loi normale centrée réduite.
   Considérons les variables aléatoires $U = X + 2Y$ et $V = X - Y$.
   (a) Montrer que le vecteur aléatoire $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien.
   (b) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
6. Déterminer l'information de Fischer $I(p)$ pour la loi géométrique de paramètre p.

7. Considérons les observations suivantes issues d'un échantillon d'une loi normale de moyenne m et de variance 2 dont nous connaissons les observations suivantes : 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 1.
   En détaillant précisément les calculs, déterminer un intervalle de confiance au niveau 0,90 pour la moyenne m.
8. Supposons maintenant que les observations de la question précédente sont issues d'un échantillon d'une loi normale de moyenne et de variance inconnues.
   En détaillant précisément les calculs, déterminer un intervalle de confiance au niveau 0,95 pour la variance σ^2.
9. La loi de Skellam est définie sur $\mathbb{N}$ comme la différence de deux variables aléatoires **indépendantes** suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ avec $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$.
   Soient N_1 et N_2 des variables aléatoires **indépendantes** suivant respectivement des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$.
   Par définition, la variable aléatoire $X := N_1 - N_2$ suit une loi de Skellam de paramètres λ_1 et λ_2.
   (a) Montrer que $E(X) = \lambda_1 - \lambda_2$ et $V(X) = \lambda_1 + \lambda_2$.
   (b) Considérons un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la loi de Skellam de paramètres λ_1 et λ_2.
   Déterminer, à l'aide de la méthode des moments, des estimateurs fortement convergents des paramètres λ_1 et λ_2.

Exercice 2

La variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne 5000 et d'**écart-type** 200.

1. Déterminer les probabilités suivantes à l'aide de résultats du cours :
   (a) $\mathbb{P}(Y \leq 5000)$,
   (b) $\mathbb{P}(Y = 6000)$,
   (c) $\mathbb{P}(4800 \leq Y \leq 5000)$.
2. Déterminer les probabilités suivantes à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite :
   (a) $\mathbb{P}(Y \geq 5300)$,
   (b) $\mathbb{P}(Y \leq 4900)$.

Exercice 3

Considérons n variables aléatoires indépendantes X_i suivant la loi de densité :

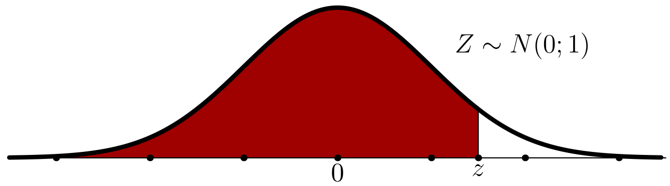
$$f(x,\theta) = \frac{3}{\theta} x^2 \exp\left(-\frac{x^3}{\theta}\right)$$

avec $\theta > 0$ et $x \geq 0$.
Nous souhaitons estimer le paramètre θ à l'aide d'observations $x_1, \ldots, x_n$ issues de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Justifier que, pour tout $\theta > 0$, $f(., \theta)$ définit bien une densité sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$.
3. A l'aide de la formule du changement de variables, vérifier que la variable aléatoire $Y_i = \dfrac{2}{\theta} X_i^3$ suit une loi χ^2 à deux degrés de liberté pour tout entier i compris entre 1 et n.
   Rappels :
   - La densité de la loi Khi-deux à k degrés de liberté est :
     $g(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}$ pour $x \geq 0$,
   - $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(k+1) = k!$ pour tout entier naturel $k \geq 1$.
4. En déduire la loi de la variable aléatoire $\dfrac{2n}{\theta}\hat{\theta}$.
5. A l'aide des questions précédentes, pour un niveau de confiance $1 - \alpha$, déterminer deux variables aléatoires $a(X_1, \ldots, X_n)$ et $b(X_1, \ldots, X_n)$ tels que :
   $$\mathbb{P}\left(\theta \in [a; b]\right) = 1 - \alpha$$
   Indication : il pourrait être opportun d'exprimer $a(X_1, \ldots, X_n)$ et $b(X_1, \ldots, X_n)$ en fonction de l'estimateur $\hat{\theta}$.
6. En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.
7. Application numérique : nous utiliserons les données suivantes : $n = 5$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$ et $x_5 = 2$.
   Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,90$ (autrement dit $\alpha = 0,10$) du paramètre θ.

Tableau N [1]

Aire sous la courbe normale à gauche de z, c'est à dire $P[Z \leq z]$, ou $Z \sim N(0;1)$.

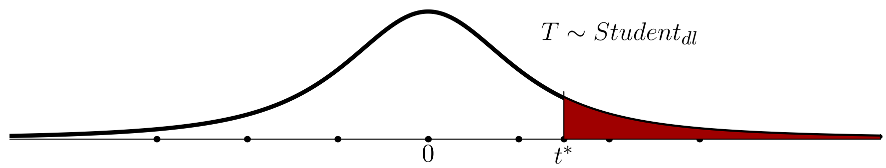


	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09

F.L. 2006 © Tableau construit avec SAS, Metapost et ConTEX

Tableau T1 [1/2]

Tableau de t^* tel qu'une variable de Student à dl degrés de liberté ait probabilité p d'être supérieure à t^*

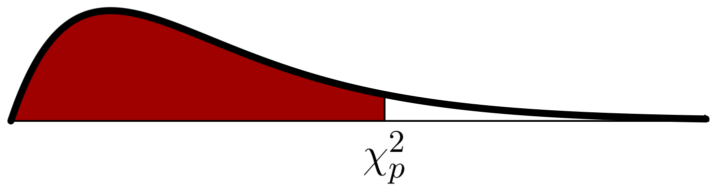


	$P[T \geq t^*] = p$											
dl	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	.8165	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	.7649	.9785	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	.7407	.9410	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.7267	.9195	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.7176	.9057	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.7111	.8960	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.7064	.8889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.7027	.8834	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.6998	.8791	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.6974	.8755	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.6955	.8726	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.6938	.8702	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.6924	.8681	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.6912	.8662	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.6901	.8647	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.6892	.8633	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.6884	.8620	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005

F.L. 2006 © Tableau construit avec SAS, Metapost et ConTEXt

Tableau C [1/2]

Percentiles de la distribution du χ^2. Valeurs de χ^2_P correspondant à P



dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.2158	.3518	.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4844	.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$

F.L. 2006 © Tableau construit avec SAS, Metapost et ConTEX