→ les valeurs propres de $H_f(x^*)$ permettent d'affiner la nature de x^*

* Si 0 est valeur propre ($0 \in Sp(H_f(x^*))$), on dit que x^* est un point dégénéré

  Dans ce cas, on ne peut pas conclure directement (besoin des dérivées d'ordre supérieur à 2)

  EX : $f : x \mapsto x^3$ et $f : x \mapsto x^4$, toutes deux en 0

* Si $H_f(x^*)$ est définie positive ($Sp(H_f(x^*)) \subset \mathbb{R}_*^+ \Leftrightarrow h^T H_f(x^*) h > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), alors x^* est un minimum local

* Si $H_f(x^*)$ est définie négative ($Sp(H_f(x^*)) \subset \mathbb{R}_*^- \Leftrightarrow h^T H_f(x^*) h < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), alors x^* est un maximum local

* Si $H_f(x^*)$ a des valeurs propres positives et négatives, x^* est un point selle

Caractérisation au second ordre de la convexité

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2-fois différentiable. Alors f est convexe si et seulement si sa matrice hessienne $H_f(x)$ est semi définie positive en tout point : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \quad H_f(x) \succcurlyeq 0}$ $(\forall h \in \mathbb{R}^n,\ h^T H_f(x) h \geq 0)$

Qu'un point critique de f soit dégénéré ou pas n'a pas d'incidence pour une fonction convexe : c'est nécessairement un minimum global