Compléments au chapitre 1

N. Biheng

1 Fonctions caractéristiques

Certaines fonctions caractéristiques devront être connues par cœur.

Loi de Bernoulli de paramètre p

$\phi(t) = 1 - p + pe^{it}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Loi binomiale de paramètres n **et** p

$\phi(t) = (1 - p + pe^{it})^n$ pour $t \in \mathbb{R}$

Loi de Poisson de paramètre λ

$\phi(t) = \phi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$ pour $t \in \mathbb{R}$

Ce résultat n'ayant pas été prouvé en classe, démontrons-le.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
On a : $\phi(t) = E(e^{itX})$.
$\phi(t) = \sum_{k \geq 0} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = \exp(-\lambda)\exp(\lambda e^{it})$ donc

$$\boxed{\phi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))}$$

Loi géométrique de paramètre p Notons $q = 1 - p$.

$$\boxed{\phi(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}}$$

Le lecteur est fortement incité à vérifier ce résultat.

Loi exponentielle de paramètre λ

$\phi(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Loi normale centrée réduite

$\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Nous admettrons ce résultat classique en analyse de Fourier.

Loi normale de paramètres m et σ^2

$\phi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + itm}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Montrons ce résultat.Si X suit une telle loi, alors $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite. Donc $\phi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.
Or $\phi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it\frac{X}{\sigma}} e^{-it\frac{m}{\sigma}}) = e^{-itm}\phi_X(\frac{t}{\sigma})$
D'où $\phi_X(t) = \phi_Y(\sigma t)e^{itm} = \boxed{e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + itm}}$.

Exemple 1
Soient deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.
Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Déterminons la fonction caractéristique de la variable aléatoire $X_1 + X_2$. Les variables aléatoires sont indépendantes donc, d'après le cours,

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t) = e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + itm_1} e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + itm_2}$$

d'où

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2} + it(m_1+m_2)}$$

La proposition suivante sera particulièrement utile :

Proposition 1
Soit X une variable aléatoire telle que $E(|X^2|) < +\infty$.
On a : $\boxed{\phi'(0) = iE(X)}$ et $\boxed{\phi''(0) = i^2 E(X^2) = -E(X^2)}$.

Nous renvoyons le lecteur à [1] pour une démonstration.

Exemple 2
Déduisons de cette proposition l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Notons que la variable aléatoire X est de carré intégrable.
D'après ce qui précède, pour tout réel t

$$\phi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

On a :

$$\phi'(t) = i\lambda e^{it} \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

par la dérivée d'une composée.
D'où

$$\phi'(0) = i\lambda e^{i\times 0} \exp(\lambda(e^{i\times 0} - 1)) = i\lambda$$

donc

$$E(x) = \frac{\phi'(0)}{i} = \boxed{\lambda}$$

de même

$$\phi''(t) = i^2\lambda e^{it} \exp(\lambda(e^{it} - 1)) + i^2\lambda^2 e^{2it} \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

et

$$\phi''(0) = -\lambda - \lambda^2$$

D'où

$$E(X^2) = \lambda + \lambda^2$$

et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \boxed{\lambda}$$

2 Résultats complémentaires sur les convergence

Théorème 1 (Théorème de Slutsky)
Soient $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire.
Si la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire X en probabilité alors la suite $(g(X_n))$ converge en probabilité vers la variable aléatoire $g(X)$.

De même pour la convergence en loi,

Théorème 2
Soient $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire.
Si la suite (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire X alors la suite $(g(X_n))$ converge en loi vers la variable aléatoire $g(X)$.

Ces propriétés s'étendent aisément aux vecteurs aléatoires avec des fonctions $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

3 Rappels d'analyse

Le lecteur est invité à se référer à [3] pour de plus amples détails ou à consulter l'excellent [2] qui lui permettra d'envisager les différentes notions sous un angle historique.
Naturellement, ces compléments ont vocation à constituer des rappels mais l'étudiant n'est pas tenu de connaître les démonstrations des différents énoncés.
Une fonction f définie sur un intervalle $]-a;a[$ est développable en série entière s'il existe un réel $b \in]0;a]$ tel que $f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ pour tout réel $x \in]-b;b[$. La plus grande valeur de b possible sera appelé *rayon de convergence*.
Dans ces cas, le développement en série entière est **unique** et la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 2
Soit f une fonction développable en série entière telle que
pour tout $x \in]-R;R[$,
$f(x) = \displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k x^k$.
Alors

1. la fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Sa dérivée est $f'(x) = \displaystyle\sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}$.

De plus, nous disposerons du résultat suivant

Proposition 3
Soit f une fonction développable en série entière telle que
pour tout $x \in]-R;R[$, $f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$.
Alors, pour tout réel $x \in]-R;R[$.

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Ainsi, la série est somme de sa *série de Taylor*.

Exemple 3
Nous avons utilisé ce résultat dans le chapitre 1 lors de la détermination de l'espérance d'une loi géométrique.
Nous avions $f(q) = \sum_{k\geq 0} q^k = \frac{1}{1-q}$ pour $q \in]0;1[$.
Par ailleurs, $f(q) = \frac{1}{1-q}$.
La première proposition assure que, pour tout réel $q \in]-1;1[$,

$$f'(q) = \sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$$

donc

$$\sum_{k\geq 1} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Le lecteur est renvoyé au chapitre 1 pour revoir le lien avec la loi géométrique.

Exemple 4
Nous aurions pu utiliser ce résultat pour obtenir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
En effet, on sait que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f(\lambda) = e^\lambda = \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$$

pour tout réel λ.

Références

[1] Foata, D., Franchi, J. Fuchs, A. : *Calcul de probabilités*. Dunod (2012)

[2] Hairer, E., Wanner, G. : *Analysis by Its History* Springer (2008)

[3] Ramis, E., Deschamp, C., Odoux,J. : *Le cours de mathématiques T3. Topologie et éléments d'analyse*. Dunod (2017)

97)

[4] Rudin, W. : *Principes d'analyse mathématique*. Dunod (2006)

[5] Stein, E., Shakarchi, R. : *Fourier Analysis*. Princeton University Press (2003)

[6] Toulouse, P.S. : *Thèmes de probabilités et de statistiques*. Dunod (1999)