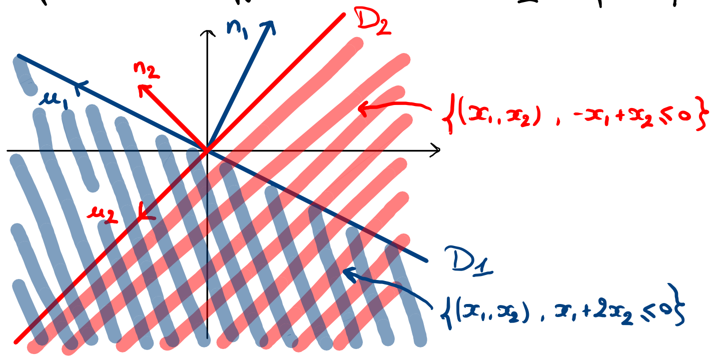
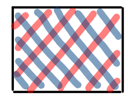
A est l'intersection de deux demi espaces $\{(x_1,x_2),\ x_1+2x_2 \leq 0\}$ et $\{(x_1,x_2),\ -x_1+x_2 \leq 0\}$, délimités respectivement par la droite $D_1 : x_1+2x_2=0$ et $D_2 : -x_1+x_2=0$

D_1 : $x_1+2x_2=0$: droite passant par le point $(0,0)$, de vecteur normal $n_1=(1,2)$ et de vecteur directeur $u_1=(-2,1)$

D_2 : $-x_1+x_2=0$: droite passant par le point $(0,0)$, de vecteur normal $n_2=(-1,1)$ et de vecteur directeur $u_2=(-1,-1)$

un vecteur normal n étant toujours orienté dans la direction du demi espace positif, A est donc l'intersection des demi espaces à l'opposés de n_1 et n_2 (puisque définis comme ≤ 0 dans les deux cas)

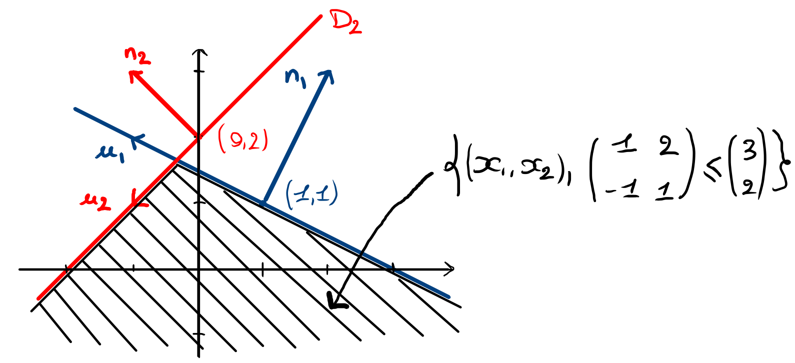


Dans ce cas, A = 

changer le second membre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ne change ni les vecteurs directeurs u_1, u_2 ni les vecteurs normaux n_1 et n_2 des droites D_1 et D_2, mais juste leur solution particulière

D_1 : $x_1+2x_2=3$ passe par le point $(1,1)$

D_2 : $-x_1+x_2=2$ passe par le point $(0,2)$



Exercice : écriture paramétrique d'un sous espace affine

Soit (D) la droite de $\mathbb{R}^2$ de vecteur directeur $u=(1,-1)$ et passant par $a=(3,2)$

$\rightarrow$ $(D) = a + \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ c'est l'ensemble des vecteurs d'origine a et colinéaires à u

$= \{a + \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2,3) + \lambda(1,-1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \underline{\{(2+\lambda,\ 3-\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$ écriture paramétrique de (D)

Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ contenant les points $a=(1,0,0)$, $b=(0,2,1)$ et $c=(-1,0,1)$

$\rightarrow$ (P) est le plan passant par a et engendré par les vecteurs ab et ac

$(P) = a + \{\lambda_1 ab + \lambda_2 ac,\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{a + \lambda_1 ab + \lambda_2 ac,\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$ avec $ab=(-1,2,1)$ et $ac=(-2,0,1)$

$= \{(1,0,0) + \lambda_1(-1,2,1) + \lambda_2(-2,0,1),\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \underline{\{(1-\lambda_1-2\lambda_2,\ 2\lambda_1,\ \lambda_1+\lambda_2),\ (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}}$ écriture paramétrique de (P)

Exercice : écriture implicite d'un sous espace affine

Soit (D) la droite de $\mathbb{R}^2$ de vecteur normal $n=(2,1)$ et passant par $a=(1,-2)$

(D) est l'ensemble des vecteurs $x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ d'origine a et orthogonaux à n

$D = \{x \in \mathbb{R}^2,\ \langle x-a, n\rangle = (x-a)^T n = 0\}$

Avec $x-a=(x_1-1, x_2+2)$ et $n=(2,1)$, donc $(x-a)^T n = 2(x_1-1)+(x_2+2) = 2x_1-2+x_2+2 = 2x_1+x_2$

Donc $\underline{(\mathcal{D}) = \{ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 ,\ 2x_1+x_2=0\}}$ écriture implicite de $(\mathcal{D})$

Soit $(\mathcal{P})$ le plan de $\mathbb{R}^3$ contenant les points $a=(1,0,0)$, $b=(0,2,1)$ et $c=(-1,0,1)$

Soit $n=(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{R}^3$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$: n est donc orthogonal au vecteur $ab=(-1,2,1)$ et au vecteur $ac=(-2,0,1)$: $\langle n, ab\rangle=0$ et $\langle n, ac\rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^T ab = 0 \\ n^T ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -n_1+2n_2+n_3=0 \\ -2n_1 \quad\ \ + n_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_3 = 2n_1 \\ n_1+2n_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_3=2n_1 \\ n_2 = -\frac{1}{2}n_1\end{cases}$$

En prenant (par exemple) $n_1=2$, on a donc $n_2=-1$ et $n_3=4$, d'où $\underline{n=(2,-1,4) \text{ est un vecteur normal à } (\mathcal{P})}$

Ne reste plus qu'à définir $(\mathcal{P})$ comme l'ensemble des points $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ d'origine a (mais ça pourrait aussi être d'origine b ou c) et orthogonaux à n :

$(\mathcal{P}) = \{ x\in\mathbb{R}^3 , \langle x-a, n\rangle = (x-a)^T n = 0\}$

Avec $(x-a) = (x_1-1, x_2, x_3)$ et $n=(2,-1,4)$ donc $(x-a)^T n = 2(x_1-1)-x_2+4x_3 = 2x_1-x_2+4x_3-2$

Donc $\underline{(\mathcal{P}) = \{ x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ 2x_1-x_2+4x_3-2=0\}}$ écriture implicite de $(\mathcal{P})$

Exercice : d'une écriture implicite vers une écriture paramétrique

Soit $(\mathcal{P})$ le plan de $\mathbb{R}^3$ donné par l'écriture implicite $x_1+x_2+x_3=2$ (donc de vecteur normal $n=(1,1,1)$)

Pour déterminer une écriture paramétrique de $(\mathcal{P})$, il suffit de déterminer trois points $a,b,c\in(\mathcal{P})$ à partir de l'écriture implicite

→ par exemple $a=(2,0,0)$, $b=(0,2,0)$ et $c=(0,0,2)$

Il suffit ensuite d'écrire $(\mathcal{P}) = a+\{\lambda_1 ab+\lambda_2 ac,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\}$ avec $ab=(-2,2,0)$ et $ac=(-2,0,2)$

(cf exercice "écriture paramétrique d'un sous espace affine")

Au final $\underline{(\mathcal{P}) = \{ (2-2\lambda_1-2\lambda_2, 2\lambda_1, 2\lambda_2), (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\}}$ écriture paramétrique de $(\mathcal{P})$

Soit $(\mathcal{D})$ la droite de $\mathbb{R}^3$ décrite comme l'intersection de deux plans $P_1: x_1+x_2-2x_3=1$ et $P_2: 3x_1-2x_2+x_3=0$

(P_1) a comme vecteur normal $n_1=(1,1,-2)$ et (P_2) a comme vecteur normal $n_2=(3,-2,1)$

→ n_1 et n_2 sont tous les deux orthogonaux à la droite $(\mathcal{D})$: si $u=(u_1,u_2,u_3)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$, alors $\langle u, n_1\rangle = u^T n_1 = 0$ et $\langle u, n_2\rangle = u^T n_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^T n_1 = 0 \\ u^T n_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2-2u_3=0 \quad (e_1) \\ 3u_1-2u_2+u_3=0 \quad (e_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(e_1)+(e_2) \quad 5u_1-3u_3=0 \\ (e_2)-3(e_1) \quad -5u_2+7u_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{5}u_3 \\ u_2 = \frac{7}{5}u_3\end{cases}$$

En prenant $u_3=5$, on a donc $u_1=3$ et $u_2=7$ → $u=(3,7,5)$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$

Ne reste plus qu'à déterminer une solution particulière : $a=(a_1,a_2,a_3)\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow a\in(P_1)$ et $a\in(P_2)$

Donc a doit vérifier : $\begin{cases} a_1+a_2-2a_3=1 \\ 3a_1-2a_2+a_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a_1-3a_2=1 \\ 5a_1-3a_3=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2=\frac{1}{3}(7a_1-1) \\ a_3=\frac{1}{3}(5a_1-2)\end{cases}$