第 36 卷第 2 期 数 学 学 报 Vol.36, No. 2
1993 年 3 月 ACTA MATHEMATICA SINICA Mar., 1993

半环上集函数的可列可加性*

陈典发

(南开大学数学系，天津 300071)

摘 要

本文讨论半环上有限可加测度的可列可加性，得到一上连续有限可加测度成为可列可加的充要条件. 此外还给出了[1] 中一个基本结果的反例.

关键词: 可列可加、树、分枝、测度

§1. 无可分性随机集的一个反例

近年来，由于种种需要，很多作者试图将Choquet 的容度定理拓广到更一般场合. [1] 的定理4.1 似乎是较好结果之一. 然而该定理证明中所依赖的关键结果引理4.2 并不成立，原定理是有疑问的. 下面的例子说明[1] 引理4.2 中当$\boldsymbol{T}'$ 为$\boldsymbol{T}$ 的真子集时，其结论不真，该例同时也是那里引理4.3 的直接反例.

本节我们沿用[1] 的记号和术语.

例 设$X = R^1 = (-\infty, +\infty)$, $\mathcal{F}_1$ 和$\mathcal{V}$ 分别是X 的闭和开子集类. 显然它们满足[1] 定理4.1 中条件. 记$E = (0,1)$, $A_0 = (0, \frac{1}{3})$; 对$n \geq 1$, 令$A_n = (0, 1 - \frac{1}{n+2})$, $B_n = (0, \frac{2}{3} - \frac{1}{n+2})$. 置

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{F}_1^0 = \mathcal{F}^{A_0};\\
&\mathbb{F}_2^0 = \mathcal{F}_{A_1}^{A_0 \cup B_1}, \quad \mathbb{F}_2^1 = \mathcal{F}_E^{A_0 \cup A_1};\\
&\quad \cdots\cdots\\
&\mathbb{F}_n^0 = \mathbb{F}_{n-1}^0 \cap \mathcal{F}_{A_{n-1}}^{B_{n-1}}, \quad \mathbb{F}_n^1 = \mathbb{F}_{n-1}^0 \cap \mathcal{F}_E^{A_{n-1}},\\
&\mathbb{F}_n^i = \mathbb{F}_{n-1}^{i-1} \cap \mathcal{F}^{A_{n-1}},\\
&\quad i = 2, \cdots, n-1;\\
&\quad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

易见集族列$\{\mathbb{F}_n^i : 0 \leq i \leq n-1\}_{n \geq 1}$ 具有如下性质: 对于任意正整数n, i, j, 当$i \neq j$ 时, $\mathbb{F}_n^i \cap \mathbb{F}_n^j = \phi$, 一般有$\mathbb{F}_n^i \supset \mathbb{F}_{n+1}^j$ 或$\mathbb{F}_n^i \cap \mathbb{F}_{n+1}^j = \phi$. 因此若取反包含关系为序，集$\{\mathbb{F}_n^i : n \geq 1, 0 \leq i \leq n\}$ 形成一树. 记$\boldsymbol{T}$ 为[1] 中定义的相应分枝集，我们有: 对任意$\tau =$

* 1988 年 12 月 27 日收到，1991 年 10 月 4 日收到修改稿.

$\{\tau(n)\}_{n\geq 1}\in \boldsymbol{T}$, 若对某$n_0\geq 1$ 有$\tau(n_0)\geq 1$, 则$I\!F_m^{\tau(m)}\subset \mathcal{F}_E, m\geq n$, 因此成立 $\cap_{m=1}^{\infty} I\!F_m^{\tau(m)}\subset \mathcal{F}_E^{\cup_{n=0}^{\infty}A_n}=\mathcal{F}_{(0,1)}^{(0,1)}=\phi$; 如对一切 $n,\tau(n)=0$, 那么$\cap_{m=1}^{\infty} I\!F_m^{\tau(m)}=\mathcal{F}_{A_1,A_2,\cdots}^{A_0\cup\cup_{n=1}^{\infty}B_m}=\phi$; 即对所有$\tau\in\boldsymbol{T}, I\!F_n^{\tau(n)}\downarrow\phi$.

令

$$I\!F_n=\bigcup_{k=0}^{n-1} I\!F_n^k, \qquad n\geq 1.$$

由于上述树的每一水平都是有限的, 因此$I\!F_n\downarrow\phi$. 记$\boldsymbol{T}_E=\{\tau\in\boldsymbol{T}: 存在n\geq 1 使\tau(n)>0\}$, 对每一$\tau\in\boldsymbol{T}_E$, 以$\theta(\tau)$ 表示使$I\!F_n^{\tau(n)}\subset\mathcal{F}_E$ 成立的最小正整数n. 容易知道, 对任意$\tau,\sigma\in\boldsymbol{T}_E$, 若$\tau(k)=\sigma(k)$ 对一切$1\leq k\leq\theta(\sigma)$ 成立, 则$\tau=\sigma$, 当然$\theta(\tau)=\theta(\sigma)$. 于是集列$\{I\!F_n\}_{n\geq 1}$, $\boldsymbol{T}$ 的真子集$\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{T}_E$ 及映射θ 满足[1] 引理4.2 的条件, 但θ 的值域是无穷集$\{2,3,\cdots,n,\cdots\}$.

§2. 半环上的可列可加测度

[1] 中所讨论的本质上涉及下面更一般的经典问题: 半环上的有限可加测度何时成为可列可加的. 此问题已经有了很多充分条件, 本文将给出一个充要条件, 它适宜于处理超空间的测度, 比如[3] 中Choquet 容度的扩展, [4] 中SPRD 的构造均易由下面的推论得出. 另外若基本集合不存在较好的拓扑结构时, 使用此条件也是方便的, 见后面的例.

先引进某些记号和术语.

X 为一非空集, $\mathcal{K}$ 为X 的某子集类. 假定$\{A_{nk}:1\leq k\leq m_n, n\geq 1\}\subset\mathcal{K}$, 如果下面条件成立, 我们称序列$\{A_{n1},\cdots,A_{nm_n}\}_{n\geq 1}$ 为$\mathcal{K}$ 中的一个正规阵列:

(i) $\forall n\geq 1, m_n<+\infty$ 且或$A_{ni}\cap A_{n+1,j}=\phi$, 或$A_{ni}\supset A_{n+1j}$; 又当$i\neq j$ 时, $A_{ni}A_{nj}=\phi$.

(ii) 当$n\to+\infty$ 时$\cup_{k=1}^{m_n}A_{kk}\downarrow\phi$.

设$I\!A=\{A_{nk}:k\leq m_n\}_{n\geq 1}$ 为$\mathcal{K}$ 中一正规阵列, 取反包含关系为序, 将$I\!A$ 视为一树, 那么它的每一分枝由相应集列的第二下标决定, 于是$I\!A$ 对应一个由自然数序列(有限或无限) 构成的集$\boldsymbol{T}_{I\!A}$, 其元素用$\tau=\{\tau(n)\}_{n\geq 1}$ 表示.

假定P 为$\mathcal{K}$ 上一非负实值集函数, 称$\mathcal{K}$ 为P- 可分的, 如果对$\mathcal{K}$ 中每一正规阵列$I\!A=\{A_{nk}:1\leq k\leq m_n\}_{n\geq 1}$, 存在$\boldsymbol{T}_{I\!A}$ 的可列子集$\boldsymbol{T}_m, m=1,2,\cdots$, 使$\boldsymbol{T}_{I\!A}=\cup_{m=1}^{\infty}\boldsymbol{T}_m$, 且对每一$m\geq 1$, 当$n\to\infty$ 时有$\sum_{k=1}^{S_{nm}}P(A_{nk}^*)\to 0$, 这里$\{A_{n1}^*,\cdots,A_{nS_{nm}}^*\}=\{A_{n\tau(n)}:\tau\in\boldsymbol{T}_m\}$.

定理 设$\mathcal{C}$ 为X 上一半环, P 为$\mathcal{C}$ 上的实值有限可加测度且在ϕ 从上连续, 则P 可列可加的充要条件是存在$\mathcal{C}$ 的子集$\mathcal{K}$ 满足: (1) P 是$\mathcal{K}$ 规则的: $\forall C\in\mathcal{C}$ 和$\epsilon>0$, 存在$K\in\mathcal{K}$, 使$K\subset C$ 且$P(C)<P(K)+\epsilon$. (2) $\mathcal{K}$ 为P- 可分集.

注1 若X 可表示为$\mathcal{C}$ 中元的可列并, 定理中P 可以为$\sigma-$ 有限的, 不过此时P 的规则性和$\mathcal{K}$ 的可分性只须对测度有限的集定义.

下面的例子中, 我们通过对一个熟知结果的直接证明(不必借助勒贝格测度) 说明上述定理对某些情形的应用.

例 X 为R^1(或R^d) 中无理点全体. $\mathcal{C}=\{]a,b[X: a,b\in X, a\leq b\}$, 其中$]a,b[$ 表示以a,b 为端点的区间(开, 闭或半开半闭) , 对$\mathcal{C}$ 中任一集合$]a,b[X$, 定义$P(]a,b[X)=b-a$. 易见$\mathcal{C}$ 为半环, P 是$\mathcal{C}$ 上有限可加测度且在ϕ 处从上连续. 令$\mathcal{K}$ 为X 上的"闭区间" 全体, 显然P 在$\mathcal{C}$ 上是$\mathcal{K}$ 规则的. 又设$I\!A=\{A_{nk}:k=1,\cdots,m_n\}_{n\geq 1}$ 为$\mathcal{K}$ 中任一正规阵列, 那么对每一$\tau\in\boldsymbol{T}_{I\!A}$, 如果$\tau$ 不是有穷分枝, 那么由$\cap_{n=1}^{\infty}A_{n\tau(n)}=\downarrow\lim_{n\to\infty}A_{n\tau(n)}=\phi$ 并设

$A_{n\tau(n)}=[a_n,b_n]X$, 我们知道$\cap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{r_\tau\}$, 这里$r_\tau$ 为有理点, 对不同的无穷分枝τ 和σ, 显然$r_\tau\neq r_\sigma$, 因此$\boldsymbol{T}_{\mathbb{K}}$ 是可列集, 每一$\boldsymbol{T}_m$ 取为单点集. 由P 在ϕ 处的上连续性得知K 是P- 可分的, 于是由定理知P 是C 上的可列可加测度, 因此可唯一扩展为X 上由所有"区间" 产生的σ 代数上的测度, 这便是勒贝格测度在BX 上的限制.

注2 若$\phi\in K$ 且K 中每一具有有限交性的子类之交非空, 那么对K 上每一使$P(\phi)=0$ 的集函数P, K 都是P- 可分的, 因此时K 中每一正规阵列对应的树只有有限分枝从而可数. 于是我们得到下面的推论.

推论 设C 为半环, P 为C 上的实值有限可加测度, 若存在C 的具有注2 中所述有限交性质的子类K 使P 为K 规则的, 那么P 是C 上的测度.

现在来证明定理.

必要性是显然, 只须证明充分性, 由于P 总能扩展成C 的生成环$R(C)$ 上的有限可加测度, 故不妨设它已定义在$R(C)$, 因此只须证明P 沿$R(C)$ 在ϕ 上连续.

假设$A_n\downarrow\phi, A_n=\cup_{k=1}^{m_n}A_{nk}\in R(C)$, 其中可设$\{A_{nk}:k=1,\cdots,m_n\}_{n\geq1}$ 为C 的一正规阵列. 对任给的$\epsilon>0$, 由P 的K 规则性, 取$K_{1i}\in K$ 使$\phi\neq K_{1i}\subset A_{1i}$ 且$P(A_{1i})<P(K_{1i})+\epsilon/2m_1, i=1,\cdots,m_1$; 一般地对$n>1$, 可归纳地选取$\{K_{ni}:i=1,\cdots,m_n\}\subset K$ 使$K_{ni}\subset A_{ni}$, 且当$A_{nj}\subset A_{n-1,i}$ 时$P(K_{nj})<P(A_{nj}\cap K_{n-1i})+\epsilon/2^n m_n$, 因而$\{K_{ni}:i=1,\cdots,m_n\}_{n\geq1}$ 为K 中一正规阵列, 此外, 对任意$n>1$, 令$N_i^n=\{j:1\leq j\leq m_n, A_{nj}\subset A_{n-1i}\}$, $i=1,\cdots,m_{n-1}$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m_{n+1}}[P(A_{n+1,i})-P(K_{n+1i})]\\
=&\sum_{i=1}^{m_n}\sum_{j\in N_i^n}[P(A_{n+1j})-P(K_{n+1j})]\\
=&\sum_{i=1}^{m_n}\sum_{j=N_i^n}[(P(A_{n+1j})-P(A_{n+1j}\cap K_{ni}))+(P(A_{n+1j}\cap K_{ni})-P(K_{n+1j}))]\\
<&\sum_{i=1}^{m_n}[P(\bigcup_{j\in N_i^n}A_{n+1j})-P(\bigcup_{j\in N_i^n}A_{n+1j}\cap K_{ni})]+\sum_{j=1}^{m_{n+1}}\epsilon/2^{n+1}m_{n+1}\\
=&\sum_{i=1}^{m_n}[P(\bigcup_{j\in N_i^n}A_{n+1j}\cup K_{ni})-P(K_{ni})]+\epsilon/2^{n+1}\\
\leq&\sum_{i=1}^{m_n}[P(A_{ni})-P(K_{ni})]+\epsilon/2^{n+1}.
\end{aligned}
$$

因此知对 $\forall n\geq1$

$$P(\bigcup_{i=1}^{m_n}A_{ni})\leq P(\bigcup_{i=1}^{m_n}K_{ni})+\epsilon,$$

故只需证明$\lim_{n\to\infty}P(\cup_{i=1}^{m_n}K_{ni})=0$ 即可. 注意一个正规阵列中去掉所有空集合后若还是一无穷阵列, 它仍是正规的, 因此不失一般性可设$K_{ni}\neq\phi, \forall n\geq1, i\leq m_n$. 记$\mathbb{K}=\{K_{ni}:i=1,\cdots,m_n\}_{n\geq1}$, 任给定$\epsilon>0$. 定义$\boldsymbol{T}_{\mathbb{K}}$ 上的整值映射θ 如下:

$\theta(\tau)=\min\{n$：存在正整数m 及$\sigma\in \boldsymbol{T}_m$ 使对一切$K\le n$ 有$\tau(K)=\sigma(K)$ 且$P(\cup_{\tau'\in T_m} K_{n,\tau'(n)})<\epsilon/2^m\}$.

注意上述右方集总是非空的，因为比如σ 就可取τ，故$\theta(\tau)$ 有限.

令$N_\epsilon=\sup\{\theta(\tau):\tau\in \boldsymbol{T}_K\}$，若$N_\epsilon=+\infty$，则存在$\boldsymbol{T}_{I\!K}$ 的无穷序列$\{\tau_n\}_{n\ge1}$ 使$\theta(\tau_n)\to+\infty$. 记$a_n=\theta(\tau_n)$，那么$\{K_{a_n},\tau_n(a_n):\ n\ge1\}=I\!K_1$ 是$I\!K$ 的无穷子集. 由于$m_1<+\infty$，存在正整数$i_1\le m_1$ 及$I\!K_1$ 的无穷子集$I\!K_{11}$ 使对任意$I\!K\in I\!K_{11}$ 有$K\subset K_{1i_1}$，特别集合$M^1_{i_1}=\{K_{2j}:K_{2j}\subset K_{1i}\}$ 不空且有限，因此又存在$i_2\le m_2$ 使$K_{2i_2}\subset I\!K_{1i_1}$ 及$I\!K_{11}$ 的无穷子集$I\!K_{12}$ 使对每一$K\in I\!K_{12}$ 有$K\subset K_{2i_2}$；一般地由归纳法不难得知存在$\tau_0\in \boldsymbol{T}_{I\!K}$ 使$\tau_0(n)=i_n, n=1,\cdots$，且对每一$n$，$K_{n,\tau(n)}$ 以$I\!K_1$ 中无穷个集合为子集. 记$a_0=\theta(\tau_0)$，则存在正整数n_0 使$a_{n_0}>a_0$ 且$K_{a_{n_0},\tau_{n_0}(a_{n_\sigma})}\subsetneq K_{a_0,\tau_0(a_0)}$，但由$a_{n_0}$ 的定义这意味着$\tau_{n_0}(n)=\tau_0(n)$，$n\le a_0$. 又由a_0 的定义，存在正整数m_0 及$\sigma_0\in \boldsymbol{T}_{m_0}$，当$n\le a_0$ 时$\tau_0(n)=\sigma_0(n)$ 且$P(\cup_{\tau'\in T_{m_0}} K_{a_0,\tau'_{n_0}(a_0)})<\epsilon/2^{m_0}$；于是$\tau_{n_0}(n)=\sigma_0(n), n\le a_0$，且$P(\cup_{\tau'\in T_{m_0}} K_{a_0,\tau'(a_0)})<\epsilon/2^{m_0}$，这又说明$a_0\ge a_{n_0}$ 产生矛盾. 因此$N_\epsilon<+\infty$. 现由$\{K_{\theta(\tau),\tau(\theta(\tau))}:\tau\in \boldsymbol{T}_{I\!K}\}\subseteq\{K_{ni}:i\le m_n, n\le N_\epsilon\}$，存在$\boldsymbol{T}_{I\!K}$ 的有穷子集$\{\tau_i:i=1,\cdots,M\}$ 使

$$\{K_{\theta(\tau),\tau(\theta(\tau))}:\tau\in \boldsymbol{T}_{I\!K}\}=\{K_{\theta(\tau_i),\tau_i(\theta(\tau_i))}:i=1,\cdots,M\}$$

对每一$i\le M$，取正整数m_i 及$\sigma_i\in \boldsymbol{T}_{m_i}$ 满足$\tau_i(j)=\sigma_i(j), j=1,\cdots,\theta(\tau_i)$ 且$P(\cup_{\tau'\in T_{m_i}} K_{\theta(\tau_i),\tau_i(\theta(\tau_i))})<\epsilon/2^{m_i}$，我们还可要求$m_{i_1}\ne m_{i_2}$ 若$i_1\ne i_2$. 于是当$n\ge N_\epsilon$ 时，由$K_{n,\tau(n)}\subset K_{\theta(\tau),\tau(\theta(\tau))}$，(若$\tau$ 的长度$|\tau|\ge n$ 的话) 我们得到

$$\begin{aligned}P(\cup_{i=1}^{m_n}K_{ni}) &=P(\cup_{\tau\in T_K:|\tau|\ge n}K_{n,\tau(n)})\\ &\le P(\cup_{\tau\in T_K,|\tau|\ge n}K_{\theta(\tau),\tau(\theta(\tau))})\le P(\cup_{i=1}^{M}K_{\theta(\tau_i),\tau_i(\theta(\tau_i))})\\ &=P(\cup_{i=1}^{M}K_{\theta(\tau_i),\sigma_i(\theta(\tau_i))})\le P(\cup_{i=1}^{M}\cup_{\tau'\in T_{m_i}}K_{\theta(\tau_i),\tau'(\theta(\tau_i))})\\ &\le\sum_{i=1}^{M}P(\cup_{\tau'\in T_{m_i}}K_{\theta(\tau_i),\tau'(\theta(\tau_i))})<\sum_{i=1}^{M}\epsilon/2^{m_i}<\epsilon.\end{aligned}$$

由ϵ 的任意性得 $\lim_{n\to\infty}P(\cup_{i=1}^{m_n}K_{ni})=0$，从而定理得证.

参 考 文 献

[1] Ross,D., Random sets without seperability, *Ann. Proba.*, **14**(1986), 1064–1069.

[2] Kunen,K., Combinatorics, in Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, New York, 1978.

[3] Matheron,G., Random Sets and Integral Geometry, Wiley, New York, 1975.

[4] 陈典发，具有随机生存域的随机场，中国科学(A 辑), 3(1991), 225–236.

[5] 中山大学：测度论基础与概率，高等教育出版社，1985.

26. 我上集邮课

27. 半环上集函数的可列可加性

28. 集函数有可列可加性的充要条件

29. 灵魂(上集)

30. μ-半环和弱归纳~*-半环

31. 关于半环的2-吸收理想和2-吸收半环

32. 分配半环上的可除半环同余

33. 证据理论中证据度量函数与可加性

34. 我们的宿舍(上集)

35. 我是半环保主义者

36. 关于R—积分的区间可列可加性

37. 河北钇上集团

38. 系统评价中的可加性评价函数及其判别

39. 半环的粗糙子半环及粗糙理想

40. 抽象测度的可列可加性与概率的可列可加属性

41. 最奇妙的聚会(上集)

42. 昆虫的争论(上集)

43. Lebesgue外测度可列可加性的充要条件

44. 半环中的粗模糊子半环

45. 遇见史莱克(上集)

46. 集值积分与模糊值积分的可列可加性

47. 除半环的分配格问题

48. 难得口误(上集)

49. 选美小姐的悲剧(上集)

50. 对合K-正则半环