拓扑学笔记

(理学院应数：宋丛威)

August 18, 2009

1 拓扑空间基本概念

$\sharp$ **定义** 拓扑空间$(X,\mathcal{T}),\mathcal{T}\subseteq\mathscr{P}(X),X\neq\emptyset$

1. $\emptyset,X\in\mathcal{T}$;
2. $A,B\in\mathcal{T}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{T}$;
3. $\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}\Rightarrow\bigcup\mathcal{T}'\in\mathcal{T}$;

定义（领域系）

$$\begin{aligned}
&\mathscr{N}_x:=\{A\supseteq X|\exists B\in\mathcal{T}.x\in B\subseteq A\};\\
&\mathscr{O}_x:=\{A\in\mathcal{T}|x\in A\};\\
&\mathscr{B}_x:=\{A\in\mathscr{B}|x\in A\},\mathscr{B}\in\mathrm{TB}(X).
\end{aligned}$$

定义（子拓扑空间）

$$\mathcal{T}_A:=\{A\cap O|O\in\mathcal{T}\}.$$

定义（拓扑基1）

$$\begin{aligned}
\mathrm{TB}(X)\ &:=\{\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}(X)|X=\bigcup\mathscr{B}\bigwedge\forall A,B\in\mathscr{B}\forall x\in A\cap B.\exists C\in\mathcal{T}.x\in C\subseteq A\cap B\};\\
&=\{\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}(X)|X=\bigcup\mathscr{B}\bigwedge\forall A,B\in\mathscr{B}.A\cap B\in(\mathscr{B})\}.
\end{aligned}$$

定义（生成拓扑）$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}(X)$

$$\begin{aligned}
(\mathscr{B})\ &:=\{A\subseteq X|\exists\mathscr{B}'\subseteq\mathscr{B}.\bigwedge A=\bigcup\mathscr{B}'\};\\
&=\{\bigcup\mathscr{B}'|\mathscr{B}'\subseteq\mathscr{B}\}=\{A\subseteq X|\forall x\in A\exists B\in\mathscr{B}.x\in\mathscr{B}\subseteq A\}.
\end{aligned}$$

基本事实（拓扑基2）$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}(X)$

$$\begin{aligned}
&(X,(\mathscr{B})):\mathrm{Top}\iff\mathscr{B}\in\mathrm{TB}(X);\\
&(X,\mathcal{T}):\mathrm{Top}\Rightarrow\mathcal{T}=(\mathcal{T})\in\mathrm{TB}(X);
\end{aligned}$$

定义$\mathrm{TB}(\mathcal{T}):=\{\mathscr{B}\in\mathrm{TB}(X)|(\mathscr{B})=\mathcal{T}\}$.

定义（基本点集与极限）X

$$A^\circ := \{x \in X | \exists U \in \mathscr{N}_x . U \subseteq A\};$$
$$A' := \{x \in X | \forall U \in \mathscr{N}_x . (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\};$$
$$\overline{A} := \{x \in X | \forall U \in \mathscr{N}_x . U \cap A \neq \emptyset\};$$
$$\partial A := \{x \in X | \forall U \in \mathscr{N}_x . U \cap A \neq \emptyset \bigwedge U \setminus A \neq \emptyset\};$$
$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall U \in \mathscr{N}_x . \mathrm{SG} n . x_n \in U.$$

基本事实$(\mathscr{B}) = \mathcal{T}$; 基本点集都可以在$\mathscr{B}$之上定义。

$$\pi(\overline{A} : A^\circ, \partial A); \pi(X : A^\circ, \partial A, A^{c\circ}); \overline{A} = A \cup A' = A \cup \partial A; \partial A = \partial A^c;$$
$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = A^\circ; A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A = \overline{A};$$
$$(X, \mathcal{T}) : \mathrm{Top} \Rightarrow \mathcal{T} = (\mathcal{T}) \in \mathrm{TB}(X);$$
$$(A \cup B)' = A' \cup B', (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B};$$
$$x_n \to x \Rightarrow x \in \overline{A}.$$

2 连续函数

定义设拓扑空间$(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2); f : X \to Y$

$$\mathrm{map}(f, x) := \forall V \in \mathscr{N}_{f(x)} . \exists U \in \mathscr{N}_x . f[U] \subseteq V \quad (U \subseteq f^{-1}[V]);$$
$$\mathrm{C}(X, Y) := \{f : X \to Y | \forall x \in X . \mathrm{map}(f, x)\};$$
$$\mathrm{H}(X, Y) := \{f : X \to Y | \mathrm{Bij}(f, X, Y); f \in \mathrm{C}(X, Y); f^{-1} \in \mathrm{C}(Y, X)\};$$
$$X \simeq Y := \exists f . \mathrm{H}(f, X, Y).$$

缩写$\mathrm{C}(X) = \mathrm{C}(X, \mathbb{C}); \Omega(X) = \mathrm{C}([0,1], X).$

连续函数基本定理 设拓扑空间$(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$;

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{C}(X, Y) \quad &\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow f^{-1}[A] \in \mathcal{T}_1 \\ &\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow f^{-1}[A] \in \mathcal{F}_1 \\ &\Longleftrightarrow \forall A \in \mathscr{B}_2 \Rightarrow f^{-1}[A] \in \mathcal{T}_1 \\ &\Longleftrightarrow \forall A \subseteq X . f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]} \\ &\Longleftrightarrow \forall B \subseteq Y . \overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\overline{B}]. \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \forall x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x).$$

$\Rightarrow \forall A \subseteq \mathcal{K}(X) \to f[A] \in \mathcal{K}(Y).$
通常谈论的拓扑空间上的映射就是连续函数，直接记为$f : X \to Y$。

3 商拓扑

满（普通的）映射$f : X \to Y$(Y只是一个集合，没有拓扑）
定义3（商拓扑的定义1）设拓扑空间$(X, \mathcal{T})$

$$\mathcal{T}_1 := \{A \subseteq Y | f^{-1}[A] \in \mathcal{T}\}.$$

$(Y, \mathcal{T}_1)$就是商空间。自然映射(粘合映射)$\pi : X \to X/\sim$是 满映射。商映射则是赋予商拓扑之后的自然映射；粘合映射的商空间被称为粘合空间。（作为映射，两者是没有区别的，只是后者和拓扑始终联系在一起。也就是说，两者只是在不同语境下的同一个数学概念）接着可以论证该拓扑的极大性。

基本事实 3.1 (拆解公式1) *粘合映射*$p : X \to X/\sim,$

$$p^{-1}[\mathscr{A}] = \bigcup \mathscr{A}; \mathscr{A} = p^{-1}[\mathscr{A}]/\sim .$$

定义 3.1 (诱导粘合) *拓扑空间上的满映射*$f : X \to Y, x \sim y = df f(x) = f(y)$

$$X/f := X/\sim; p : X \to X/f.$$
$$\tilde{f} := \lambda[x] : X/f.f(x) : X/f \simeq Y$$

定理 3.1 (拆解公式2) *满映射*$f : X \to Y,$*诱导粘合*p

$$f = \tilde{f}p; pf^{-1}[\mathscr{A}] = \tilde{f}^{-1}[\mathscr{A}]$$
$$f^{-1}[\mathscr{A}] = \bigcup \tilde{f}^{-1}[\mathscr{A}]; \tilde{f}^{-1}[\mathscr{A}] = f^{-1}[\mathscr{A}]/\sim .$$
$$\tilde{g} : X/f \to Y \iff \tilde{g}p : X \to Y$$

4 结语

参考文献