浙江工业大学之江学院

时间序列第一课

主讲教师：williamzju@yahoo.com

理学院，柯桥校区

目录
Contents

Outline

基本概念 I

设随机过程 X_t.

1. 均值 $\mu_t = E(X_t)$;
2. 自协方差 $\gamma_{t,s} = Cov(X_t, X_s)$, 方差 $\gamma_t = Var(X_t)$;
3. 自相关函数 $\rho_{t,s} = Cor(X_t, X_s)$.

例 1

随机游动过程（Brown 运动），$B(t+1) = B(t) + e_t, e_t \sim N(0,1)$, 其中 e_t 相互独立.

1. 均值 $\mu_t = 0$;
2. 自协方差 $\gamma_{t,s} = t$, 方差 $\gamma_{t,t} = t$;
3. 自相关函数 $\rho_{t,s} = \sqrt{\frac{t}{s}}, t \leq s$.

基本概念 II

例 2

独立同分布序列，分布均值和方差分别为 μ, γ.

1. 均值 $\mu_t = \mu$;
2. 自协方差 $\gamma_{t,s} = 0, t \neq s$, 方差 $\gamma_{t,t} = \gamma$;
3. 自相关函数 $\rho_{t,s} = \delta_{ts}$.

平稳性

定义 3 (严平稳)

$X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}$ 与 $X_{t_1-k}, \cdots, X_{t_n-k}$ 的联合分布相同，即统计规律不随时间变化.

定义 4 (弱平稳)

μ_t 为常数, 恒有 $\gamma_{t,s} = \gamma_{t-k,s-k} (= \gamma_{0,s-t})$. （特别地, γ_{tt} 也为常数）

独立同分布序列显然是平稳过程; Brown 运动不是平稳过程, 但它的一阶差分 $X_{t+1} - X_t$ 显然是平稳过程.

Outline

滑动平均过程 MA I

设 $\{e_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, X_t 平稳.

定义 5 (一般线性过程)

$X_t = e_t + \sum_k \psi_k e_{t-k}$.

定义 6 (q 阶滑动平均过程 $MA(q)$)

$X_t = e_t - \sum_{k=1}^{q} \theta_k e_{t-k}$.

1. 均值 $\mu_t = 0$;
2. 自相关函数 $\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & k = 1, \cdots, q \\ 0 & k > q. \end{cases}$.

自回归过程

定义 7 (p 阶滑动平均过程 $AR(p)$)

$X_t = e_t + \sum_{k=1}^{p} \phi_k X_{t-k}$.

1. 均值 $\mu_t = 0$;
2. 令 $X_t = e_t + \phi_1 e_{t-1}$, 自相关函数 $\rho_k = \sigma^2 \phi_1^{|h|}/(1-\phi_1^2)$.

自回归滑动平均模型 I

定义 8 (滑动平均自回归过程 $ARMA(p,q)$)

$X_t - \sum_{k=1}^{p} \phi_k X_{t-k} = e_t + \sum_{k=1}^{q} \theta_k e_{t-k}$. 即 $\phi(B)X_t = \theta(B)e_t$

引理 9 (逆级数引理)

设 $\phi(z) \in \mathbb{C}[z] \neq 0 \forall |z| \leq 1$, 则
$\exists \xi \in \mathbb{C}^1[[z]], \xi(z) = \frac{1}{\phi(z)}, |z| < 1 + \epsilon.$

自回归滑动平均模型 II

性质	定义	充要条件	构造
因果性	$\exists\{\psi_j\} \in \ell^1, X_t = \sum_j \psi_j e_{t-j}$	$\phi(z) \neq 0 \forall \lvert z\rvert \leq 1$	$\psi = \frac{\theta}{\phi}$
可逆性	$\exists\{\psi_j\} \in \ell^1, e_t = \sum_j \pi_j X_{t-j}$	$\theta(z) \neq 0 \forall \lvert z\rvert \leq 1$	$\psi = \frac{\phi}{\theta}$
可逆性 2	$\exists\{\psi_j\} \in \ell^1, e_t \in \overline{\mathrm{span}}\{X_s, s \leq t\}$	$\theta(z) \neq 0 \forall \lvert z\rvert < 1$	$\psi = \frac{\phi}{\theta}$

表: 因果性与可逆性, 假定 ϕ, θ 无公共零点

定理 10

设 $\phi(z) \neq 0, |z| = 1$, 则 $\exists! X_t = \sum_j \psi_j e_{t-j} \sim ARMA(\phi, \theta)$, 其中 $\psi = \frac{\phi}{\theta}$.

Yule-Walker 方程

$$\begin{cases} \Gamma_p \phi = \gamma_p, & (R_p \phi = \rho_p) \\ \sigma^2 = \gamma(0) - \phi' \gamma_p & (= \gamma(0)(1 - \phi' R_p \phi)). \end{cases} \tag{1}$$

偏自相关函数 I

定义 11 (定义 1)

$$\alpha(k) = \begin{cases} \rho(1), & k=1 \\ \mathrm{corr}(X_{k+1} - P_{1,X_2,\cdots,X_k}X_{k+1}, X_1 - P_{1,X_2,\cdots,X_k}X_1), & k=2,\cdots \end{cases}$$

例 12

设 $X_t \sim MA(1)$, $\alpha(k) = -\frac{(-\theta)^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}$.

定义 13 (定义 2)

$$\alpha(k) = \phi_{kk}$$

偏自相关函数 II

例 14

设 $X_t \sim MA(1)$, $\alpha(k) = -\frac{(-\theta)^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}$.

预测

预测 $\hat{X}_{n+1} = \sum_j \phi_{nj} X_{n+1-j}, b \geq 1$. Durbin-Levinson 算法计算 ϕ. (Y-W eq 的解)

定理 15 (Durbin-Levinson 算法)

设 $\gamma(0) > 0, \gamma(h) \to 0, m = 1, \cdots, n-1$.

$$\begin{cases} \phi_{mm} = \frac{1}{v_{m-1}}(\gamma(m) - \sum_{j=1}^{m-1} \phi_{m-1,j}\gamma(m-j)), \\ \phi_{mj} = \phi_{m-1,j} - \phi_{mm}\phi_{m-1,m-j}, j = 1, \cdots, m-1, \\ v_m = \hat{v}_{m-1}(1 - \hat{\phi}_{mm}^2). \end{cases} \tag{2}$$

特别地，$\phi_{11} = \gamma_1/\gamma_0, v_0 = \gamma_0$.

Outline

渐进估计

定理 16

$X\sim$ 因果性 $AR(p)$, $Z\sim iid(0,\sigma^2)$, 则

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}-\phi)\to N(0,\sigma^2\Gamma_p^{-1}), \hat{\sigma^2}\to\sigma.$$

定理 17

$X\sim$ 因果性 $AR(p)$, $Z\sim iid(0,\sigma^2)$, 则

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_m-\phi_m)\to N(0,\sigma^2\Gamma_m^{-1}), \hat{\sigma^2}\to\sigma, m>p.$$

参数估计

预测 $\hat{X}_{n+1} = \sum_j \phi_{nj} X_{n+1-j}, b \geq 1$. Durbin-Levinson 算法计算 ϕ, σ. (Y-W 估计)

定理 18 (Durbin-Levinson 算法)

设 $\hat{\gamma}(0) > 0, \hat{\gamma}(h) \to 0, m = 1, \cdots, n-1$.

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{mm} = \frac{1}{\hat{v}_{m-1}}(\gamma(m) - \sum_{j=1}^{m-1} \phi_{m-1,j}\hat{\gamma}(m-j)), \\ \hat{\phi}_{mj} = \hat{\phi}_{m-1,j} - \hat{\phi}_{mm}\hat{\phi}_{m-1,m-j}, j = 1, \cdots, m-1, \\ \hat{v}_m = \hat{v}_{m-1}(1 - \hat{\phi}^2_{mm}). \end{cases} \tag{3}$$

特别地，$\phi_{11} = \gamma_1/\gamma_0, v_0 = \gamma_0$.

Outline

线性代数

x_t: 内积平稳序列, 即 $\langle x_t, x_{t+h} \rangle = \gamma(h)$. x_t: 可解，$\{\gamma(i-j)\}_n$: 可逆，如果 $\gamma(0) > 0, \gamma(h) \to 0$

线性空间 I

引理 19

H: 内积空间, $\gamma(h) := \langle x_t, x_{t+h} \rangle$, $z_t = x_t - P_{M_t} x_t$, $M_t = \{x_s, s < t\}$, 则

1. $z_t : o.s.(H)$, $\|z_t\| = \sigma$,
2. $x_t \sim \{z_t, z_{t-1}, \cdots, z_{t-q}\}$, 其中 $\gamma(h) = 0, |h| > q$.

线性空间 II

引理 20

$x_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} a_j x_j$, 则
$x_{r+h} = \sum_{j=1}^{r} a_j x_{j+h-1}, h = 1, \cdots, x_n \sim \{x_1, \cdots, x_r\}$. r_1 是 Γ_r 最小特征值.

$$\lambda_1 r(0) \leq \sum_{j=1}^{r} |\gamma(n-j)|^2.$$

$\gamma(0) > 0, \gamma(h) \to 0$, 则 $x_1, \cdots, x_n$ 线性无关, $n = 1, 2, \cdots$.