金門地區第 55 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學組

組　　別：國小組

作品名稱：奇妙的 24

關 鍵 詞：24 點、四則運算（最多 3 個）

編　　號：(由主辦單位填寫)

奇妙的 24

摘要

從撲克牌中隨機抽取 4 張牌可以有 1820 種牌組，在這 1820 種牌組中，有 1362 組可經由四則運算的方式，算出 24 點，有 458 組無解。快速求解的方法有相加法、因數法、零壹法及常見的六種算式法。當數字何小於 9，四張牌出現大於 9 以上的數字，或四張牌中出現相同的大數時，容易無解。經過篩選與比對，我們發現有最多種解法的牌組是（2、4、8、10），一共有 11 種解法。而在常見的六種算式中，以(a+b−c)*d 有最多種牌組，共有 65 組。另外，雖然我們抽出的牌是整數，但在計算過程中，有時會需要用到分數或小數來化解。

壹、 研究動機

為了讓我們程式設計課程可以順利進行，老師找了一個可以訓練邏輯思考的遊戲—計算 24 點，利用下課時間和我們一起討論。首先拿一副撲克牌，洗牌之後每人發四張，再利用四則運算的規則，計算抽到的牌組，最先算出 24 的人，就是這場遊戲的贏家。一開始我們覺得很簡單，簡直是小看我們的智商，但隨著抽牌次數越多，越發覺得有挑戰性，甚至某些牌組，讓我們百思不得期解，也引發了我們的好奇心，想知道有哪些方法可以幫助我們迅速的算出 24？有哪些方法可以快速的檢驗抽到的牌組能否算出 24？抽到的牌組，是否只有一種解法？哪些牌組的解法最多？

貳、 研究目的

一、 推算 24 點遊戲的所有牌組數量。

二、 探討如何快速求解。

三、 了解無解牌組有何規律。

四、 探究哪些牌組有最多種解法。

五、 探究六種最常見解法中，哪一種解法有最多牌組。

參、 研究設備及器材：計算紙、撲克牌、筆、電腦、Google Apps、線上程式

肆、 研究過程或方法

一、 可算出「24」點的牌組共有幾種？

隨機抽四張的各種牌組：這個遊戲是將 1 到 13 的數字，不分花色都混在一起洗牌，我們從 52 張牌中隨機抽出四張牌用四則運算算出 24。過程中，我們發現抽出的數字（牌組）會出現下列幾種情形：

1. 四個數字都相同：例如（1、1、1、1）這種情形會出現 13 次。

2. 數字三同一異：例如（1、1、1、2）這種情形會出現 13*12=156 種。

3. 數字兩同兩同：例如（1、1、2、2）這種情形會出現 13*12/2=78 種。
4. 數字兩同兩異：例如（1、1、2、3）這種情形會出現 13*12*11/2=858 種。
5. 四個數字都不同：例如（1、2、3、4）這種情形會出現 13*12*11*10/24=715 種。

由以上得知，從 52 張牌中隨機抽出四張牌，不看花色只看數字，將會有 13+156+78+858+715=1820 種牌組。

二、 如何快速求解：

從撲克牌中隨機抽取四張牌，總共可以有 1820 種牌組組合，在探索階段，我們找到 306 組牌組組合，後來又利用網路上搜尋到的程式，將剩餘的牌組組合找出來。

在尋找牌組組合及計算它們是否能算出 24 的過程中，為了加速我們的計算程序，我們嘗試了下面幾種方法：

1. 全部相加：在拿到四張牌時，可以先將牌中的 4 個數字全部加起來看看，我們發現若牌組中數字的和太大（>24，但非 24 的倍數）或太小（<9）時，無解的機率相當的高。這個方法成為我們之後計算時，可以初步的判斷所拿到的牌組是否有解。
2. 全部相乘：假如 4 個數相乘，還沒辦法湊出 24 的話，無解機率很高，這個方法也成為我們之後計算時初步判斷的方法。
3. 利用 24 的因數：我們發現可以試著將數字湊成 2 個 24 的因數，接著兩數相乘就能算出 24，例如（2、3、4、5）這一組的數字中，我們先保留 2 不計算，接著把（3、4、5）這三個數字計算成 12，即 3+4+5＝12。用四則運算寫出算式，則為 2*(3+4+5)=24。因為 24 的因數有 8 個，分別是 1、2、3、4、6、8、12、24，所以除了 1 和 24 之外，只要四張牌的 4 個數字中出現這些因數，我們就可以直接使用因數相乘（2*12、3*8、6*4…）的方法來解決。若 4 個數字之中，沒有 24 的因數，我們亦可經

由數字相加或相減來湊出 24 的因數，例如把抽到的數字兩兩合併成 24 的因數，（2、4、7、10）這一組雖然有 2 和 4，但是無論是（4、7、10）還是（2、7、10）沒辦法合併成 12 和 6，這時，就可以經由兩兩計算，10-2=8，7-4=3，成為 24 的因數後，在加以相乘，3*8＝24。經過我們的檢驗，我們發現這種方法是最容易解出 24 的方式。

4. 利用 0 及 1 的特性求解：抽牌時，拿到相同的數字，尤其是超過 10 的牌，通常都不太好計算，此時可以利用將兩個數字相減為 0 或相除為 1 化解。例如：(4、6、12、12)，可以 4*6*(12/12)=24 或 4*6+(12-12)。又或者拿到數張大於 10 的牌，可利用兩數相減為 1 的方式求解，例如（4、5、11、13），可以 11*(5-4)+13=24。

5. 利用最常被使用的解法：（以 a、b、c、d 表示牌面上的四個數字）

   (1) (a-b)*(c+d)：先取兩個數湊成一個 24 的因數，再把剩下兩個數湊成 24 的另一個因數。例如：（5、7、9、11），以(11-9)*(7+5)=24 等。

   (2) (a+b)/c*d：四個數字中有一個是 24 的因數者，先將其固定，再將剩餘的三個數字湊成 24 的另一個因數。例如：(5、6、7、13)，以 (13+7)/5*6=24 等。

   (3) (a-b/c)*d：四個數字中有一個是 24 的因數者，先將其固定，再將剩餘的三個數字湊成 24 的另一個因數。例如：（3、5、10、10），以 (10-10/5)*3=24 等。

   (4) (a+b-c)*d：四個數字中有一個是 24 的因數者，先將其固定，再將剩餘的三個數字湊成 24 的另一個因數。例如：（5、6、9、10），以（5+9-10）*6＝24 等。

   (5) a*b+c-d：把四個數湊成一個被減數與一個減數，使其差為 24。先選兩個數字相乘，使其積大於 24，再努力湊後面兩個數字。例如：（1、3、10、11），以 11*3+1-10=24 等。

   (6) (a-b)*c+d：把四個數湊成 24 的兩個加數。先固定一個加數，剩餘的

三個數湊成 24 的另一個加數。例如：（1、2、6、10），先固定加數 6，再把（1、2、10）三個數湊成 18，即(10-1)*2+6＝24。

三、 無解牌組的規律：

在我們解題的過程中，某些牌組僅管絞盡腦汁，還是算不出 24，因此讓我們想到是否每種組合都有解呢？於是，我們開始蒐集可能無解的組合，並利用線上程式計算後，將得到的結果進行觀察研究。之後，我們歸納出具有下列特徵的牌組，較易無解：

1. 數字和小於 9：四個數字的和若比 9 還要小的牌組，一定無解。
2. 數字和過大：當四張牌出現大於 9 的 10、J、Q、K，容易出現無解。其中以出現「J」（有 148 組）和「K」（162 組）最容易無解。在 458 組無解牌組中，出現「J」的有 148 組，出現「K」的有 162 組。
3. 同樣的號碼：四張牌中出現相同的號碼越多，且重複的數字越大時，則越容易出現無解，如（1、1、1、2）。
4. 四個相同的數字：四個相同的組別內「1、2、7、8、9、10」皆是無解。

四、 哪些牌組有最多種解法？

為了知道哪些牌組有最多種解法，我們必須先知道有解的牌組中，各個牌組有哪些解法。由於有解牌組共有 1362 組，若要一組一組計算，又要算有哪些解法，恐怕不是短時間內可以有結果，因此我們借助線上程式的協助，幫助我們將所有可能的算法列出。

由於線上程式運算出來的解法當中，有些解法明顯相同（如 8*[1+(1＋1)]、[(1+1)+1]*8、[1+(1+1)]*8 及 8*[(1+1)+1]）。為了呈現最簡潔、不重複的解法，我們依照下面的方法進行篩選：

1. 等值算式：在線上程式運算出來的解法當中，有不少是因交換律、結合律，或者運算符號「+」與「-」及「*」與「/」的轉換所產生的各種等值算式，例如 1*2*3*4 和 4*1*2*3 與(4*3*(2*1))，(8+5-9)×6 與

[8-(9-5)]×6，(10+10)×6/5 與(10+10)/(5/6)，基本上沒有什麼差別，但前面的算式較容易閱讀，在表達上也更為簡單。

2. 值為 0 或 1：

(1) 「*1」及「/1」：由於任何數*1 及任何數/1，都會是原來的數，因此我們將「*1」及「/1」的算式，例如(13+11)/(5-4)與(13+11)*(5-4)，當作同一個算式。另外，在「*1」的算式中，我們也將(3+5)*1*3 與(3+5*1)*3 及(3*1+5)*3，當作同一個算式。

(2) 兩數相除為 1 及兩數相減為 0：我們將 12*2*13/13 與 12*2+13-13，(13+11)*7/7 與 13+11+7-7 等類似形式的算式，當作同一個算式。

經過我們的篩選與比對後，我們的發現如下表：

有幾組解	牌組數量
1	515
2	427
3	216
4	125
5	30
6	18
7	17
8	8
9	2
10	3
11	1，是（2、4、8、10）

五、 六種最常見解法中，哪一種解法有最多牌組

我們根據前面經由線上程式算出的各種解法，扣除等值重複的算式後，總共有 3017 組解法。我們透過比對的方式，得到下列表格。

解法	牌組數
(a+b)*c/d	10
(a-b)*c+d	19
(a+b-c)*d	65
(a-b)*(c+d)	40
a*b+c-d	24
(a-b/c)*d	7

伍、 研究結果

一、 玩 24 點遊戲，從撲克牌中隨機抽出四張牌，不看花色只看數字，會有 1820 種牌組，其中有解的有 1362 組，無解的有 458 組。

二、 利用四則運算計算出 24 的方法有：

1. 全部相加：在拿到四張牌時，可以先將 4 個數字全部加起來，有時運氣好，可以馬上算出 24。
2. 利用 24 的因數：因為 24 的因數有 1、2、3、4、6、12 及 24，除了 1 和 24 外，只要四張牌中出現這些因數，我們就可以嘗試使用 24 因數相乘的方法，如（2*12）、（3*8）、（6*4）來解決。
3. 利用 0 及 1 的特性求解：拿到兩張相同的數字時，可以運用相同數字「相減為 0」或「相除為 1」的特性求解；拿到兩張牌面數字相差為 1 的牌時，也可利用「相減為 1」的方式求解，便可降低相同數字或大數帶來計算上的困擾。

4. 將數字值變小：牌面數字較大，則較不好算，因此如果遇到牌面數字較大時，可以考慮將其相減，以將牌面數字變小。

5. 運用最廣泛的四則運算解法：

   (1) (a-b)*(c+d)：例如：（4、7、8、9），以(9-7)*(8+4)=24 等。

   (2) (a+b)/c*d：例如：（3、4、8、10），以(10+8)/3*4=24 等。

   (3) (a-b/c)*d：例如：（3、6、7、9），以(7-9/3)*6=24 等。

   (4) (a+b-c)*d：例如：（2、4、5、8），以(5+2-4)*8=24 等。

   (5) a*b+c-d：例如：（2、5、7、13），以 13*2+5-7=24 等。

   (6) (a-b)*c+d：例如：（3、3、6、9），以(9-3)*3+6=24 等。

三、 快速判斷：如果牌面數字較小且有解，通常能計算出更多變化的解答，且解法較多；相反的如果牌面數字較大，則較不好算。

四、 出現無解的牌組組合：

1. 數字和小於 9：四個數字的和若比 9 還要小的牌組，一定無解。

2. 數字和過大：當四張牌出現大於 9 的數字時，容易出現無解。其中以出現 K 的牌組，最容易無解。

3. 同樣的號碼：四張牌中出現相同的號碼越多，且重複的數字越大時，則越容易出現無解。

4. 四個相同的數字：四個牌相同的牌組，4 個數都是「1、2、7、8、9、10」皆是無解。

五、 有最多種解法的牌組：利用線上程式運算出來的解法當中，我們將明顯相同的解法剔除，我們發現有最多種解法的牌組是（2、4、8、10），一共有 11 種解法。

六、 六種最常見解法中，哪一種解法有最多牌組：經由比對，我們發現六種

最常見解法中，以(a+b−c)*d 的牌組數最多，有 65 組。

陸、 討論

一、 為什麼算「24」這個數字

為什麼是算 24？而不是算 23、25…等其它數字呢？其實，不論算幾點，這個遊戲都可以進行。只是因為 24 的因數有 1、2、3、4、6、8、12 及 24，以乘法來看，可以有 1*24、2*12、3*8、4*6 等 4 種組合，如果是 23 點，只有 1*23 一組，如果是 25，也只有 1*25 及 5*5 兩種。

我們列出數字 1 至 52 的因數及它們的因數個數，了解其他數字的情況：

數字	因數	個數	數字	因數	個數
1	1	1	27	1、3、9、27	4
2	1、2	2	28	1、2、4、7、14、28	6
3	1、3	2	29	1、29	2
4	1、2、4	3	30	1、2、3、5、6、10、15、30	8
5	1、5	2	31	1、31	2
6	1、2、3、6	4	32	1、2、4、8、16、32	6
7	1、7	2	33	1、3、11、33	4
8	1、2、4、8	4	34	1、2、17、34	4
9	1、9	2	35	1、5、7、35	4
10	1、2、5、10	4	36	1、2、3、4、6、9、12、18、36	9
11	1、11	2	37	1、37	2
12	1、2、3、4、6、12	6	38	1、2、19、18	4
13	1、13	2	39	1、3、13、39	4
14	1、2、7、14	4	40	1、2、4、5、8、10、20、40	8
15	1、3、5、15	4	41	1、41	2
16	1、2、4、8、16	5	42	1、2、3、6、7、14、21、42	8

17	1、17	2	43	1、43	2
18	1、2、3、6、9、18	6	44	1、2、4、11、22、44	6
19	1、19	2	45	1、3、5、9、15、45	6
20	1、2、4、5、10、20	6	46	1、2、23、46	4
21	1、3、7、21	4	47	1、47	2
22	1、2、11、22	4	48	1、2、3、4、6、8、12、16、24、48	10
23	1、23	2	49	1、7、49	3
24	1、2、3、4、6、8、12、24	8	50	1、2、5、10、25、50	6
25	1、5、25	3	51	1、3、17、51	4
26	1、2、13、26	4	52	1、2、4、13、26、52	6

從上表我們可以發現以下情形：

1. 24、30、40、42 這四個數字都擁有 8 個因數，可是 24 是擁有 8 個數的最小數字。另外，在撲克牌的數值當中，24 的所含的因數就有 1、2、3、4、6、8 及 12，共 7 個，因此我們推論使用 24 點推算出答案的機會較高，牌面的變化性也較多元。

2. 12 是有 6 個因數的最小數字，而且它的因數全在撲克牌的牌面數值中。24 是有 8 個因數的最小數字，而且它的因數，除了 24 之外，其他 7 個全在撲克牌的牌面數值中。所以我們推論，玩四張牌時算 24 變化較多，玩 3 張牌時算 12，玩 5 張牌時算 36。

二、 哪些類型的牌組較不易找出解

有 2 組以上解的牌組超過 6 成，在 515 組只有唯一一組解的牌組當中，當我們抽到大數或奇數，或者在運算過程中出現分數的情形，這些牌組也往往較具難度，不易找出解。

1. 運算過程出現分數：例如（1、5、5、5），解答是(5-1/5)*5；（2、7、7、10），解答是(10/7+2)*7。

2. 包含大數的牌組：部份牌組會包含一些較大的數字，如（4、4、10、10），解法是(10*10-4)/4；（9、11、12、12），解法是 12*11-12*9。

3. 包含奇數的牌組：如（6、9、9、10），解法是 10*9/6+9；（1、2、7、7），解法是(7*7-1)/2。

三、 為何刪除重複解

計算 24 點之所以有趣，就是比誰反應快，對數字的敏感性高，想出有解的算式多。某些情況下，透過結合律或交換律，可以將算式變化成更多算式，但這樣的結果，可能使得呈現出來的算式變得較複雜。

重複解有以下機種類型：

1. 用加法、乘法交換律所得的解

   (1) 11+7+9-3、11-3+9+7…

   (2) (1+5)*(12-8)、(12-8)*(5+1) …

   (3) 9*4*2/3、9/3*2*4…

   (4) (2*3+2)*3、3*(2+3*2)…

   (5) 6/4*10+9、6*10/4+9、10/4*6+9…

2. 用結合律所得的解

   (1) 10+9+8-3、(10-3)+(8+9)…

   (2) 9*8/6*2、9*8/(6/2)…

   (3) 4*7-8+4、4*7-(8-4) …

   (4) 8/(10-8)*6、8/[(10-8)/6]、6/[(10-8)/8] …

從第二個種重複解，我們可以知道，若要減少重複解，算式中就應該拿掉不必要存在的各種括號。

3. 因移動「*1」或「/1」所得的解

(1) (10-2)*3*1、(10-2)*3/1、(10*1-2)*3、(10-2/1)*3…

(2) 3*8*(7-6)、3/(7-6)*8…

4. 因移動「+0」或「-0」所得的解：4*[6+(5-5)]、[4-(5-5)]*6…

四、 遊戲還可以有哪些變化

1. 我們發現超過 10 以上的牌不易算出 24，所以可以在玩這個遊戲的時，將撲克牌的「J、Q、K」三張牌拿掉，這樣會比較容易計算。或者，將「J、Q、K」三張牌的值當做 10，以簡化遊戲的困難度。

2. 遊戲過程中，統一由某一人抽出四張牌，然後在時限內比誰能算出最多種解法。

3. 遊戲過程中，可以由某一人先抽出一張固定的牌，再讓大家輪流抽出剩餘的三張牌，這樣可使遊戲變得更有挑戰性。

柒、 結論

經過這次的研究，我們瞭解一個牌組中，變換數字的排列，再加上四則運算的規則，若不剔除重複解，將可以組合成數種多變化的算式。而各種牌組中，解法常常不止一種，雖然我們拿到的牌是整數，但在計算過程中，有時會需要用到分數或小數來化解。在我們看似沒有規律的數字符號，透過資料的互相比對、分析之後，還是可以找出規律。另外，在資訊科技發達的現代，善用電腦運算的能力，也可以幫助我們快速的解決記憶性、機械性的問題，剩下來的部份就由我們的腦力來解決！

捌、 參考資料及其他

http://scripts.cac.psu.edu/users/r/j/rjg5/Math24.htm

數學康軒版第七冊第七單元整數四則計算。

中華民國第四十七屆中小學科學展巧算 24 點。