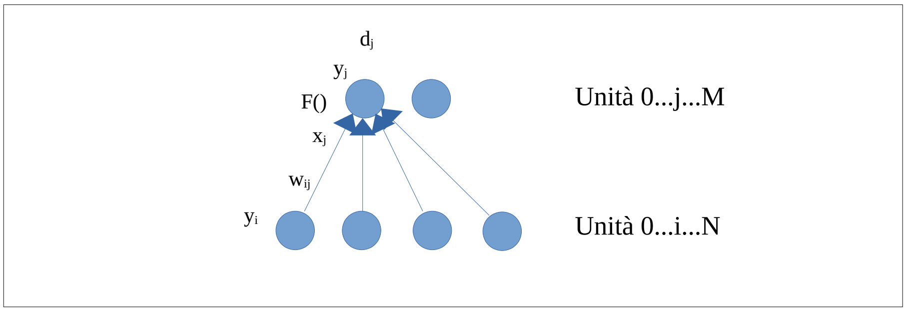
Reti neurali

Componenti della rete (a livelli)

- Unità: su livello *i* (precedente) e livello *j* (attuale)
- Attività dell'unità: y_j
- Pesi: w_{ij} del collegamento tra il nodo *j* ed i nodi *i* precedenti.



- Ingresso complessivo dell'unità *j*: $x_j = \sum_i w_{ij} \cdot y_i$ [1]
- Funzione di attivazione $F(x)$ e attività dell'unità; $y_j = F(x_j)$ [2]
- Derivata dell'attività all'ingresso complessivo; $\frac{dy_j}{dx_j} = F'(x_j)$ [3]
- Uscita desiderata: d_j [4]

Errore complessivo e dipendenze

- Errore complessivo delle unità di uscita: $E = \frac{1}{2} \cdot \sum_j (y_j - d_j)^2$ [5]
- Derivata dell'errore totale al variare dell'attività dell'unità di uscita *j*:

$$EA_j = \beta_j = \frac{\partial E}{\partial y_j} = y_j - d_j \qquad [6]$$

- Derivata dell'errore totale al variare dell'ingresso x_i dell'unità *j*, con la [6] e la [2]:

$$EI_j = \frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{dx_j} = \beta_j \cdot F'(x_j) \qquad [7]$$

- Derivata dell'errore totale al variare del peso w_{ij} del collegamento tra l'unità *j* e l'unità *i* del livello prevedente:

$$EW_{ij} = \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial w_{ij}} = \beta_j \cdot F'(x_j) \cdot y_i \qquad [8]$$

- Derivata dell'errore totale al variare dell'attività dell'unità *i* del livello precedente. L'unità *i* è connessa alle unità j del livello successivo, che contribuiscono tutte all'errore totale E. Con le [7] e [1]:

$$EA_i=\beta_i=\frac{\partial E}{\partial y_i}=\sum_j \frac{\partial E}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial y_i}=\sum_j EI_j\cdot w_{ij}=\sum_j \beta_j\cdot F'(x_j)\cdot w_{ij} \qquad [9]$$

Funzioni di attivazione

Funzioni di attivazione (https://it.wikipedia.org/wiki/Funzioni_di_attivazione), con derivate semplici

- Sigmoide: $F=\frac{1}{1+e^{-x}}$ [2a]

$$F'=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{(1+e^{-x})-1}{(1+e^{-x})^2}=(1-\frac{1}{1+e^{-x}})(\frac{1}{1+e^{-x}})=F\cdot(1-F) \qquad [3a]$$

- Tangente iperbolica: $F=\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ [2b]

$$F'=(-1)\cdot\frac{(e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}+\frac{1}{e^x+e^{-x}}\cdot(e^x-(-1)\cdot e^{-x})=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\ldots$$

$$\ldots=1-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=1-F^2 \qquad [3b]$$

- Rettificatore unità lineare ReLU: $F=max(0,x)$ [2c]

$$F'=\left\{\begin{matrix}0\ \forall\ x<0\\1\ \forall\ x>0\end{matrix}\right\} \qquad [3c]$$

Algoritmo di back-propagation

- Costante di apprendimento δ
- Finché la rete non è addestrata, ripetere le successive operazioni per ogni configurazione.
- Calcolare, dagli ingressi del primo livello in poi, le uscite y di tutti i livelli (forward-propagation), con le formule [1] e [2].
- Calcolare le β_j delle unità di uscita, con la formula [6].
- Calcolare le β di tutti i livelli (dall'ultimo al primo), con la formula [9].
- Calcolare l'influenza $\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$ di ogni peso sull'errore totale, con la formula [8].
- Correggere ogni peso del valore: $\Delta w_{ij}=-\delta\cdot\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$ [10]