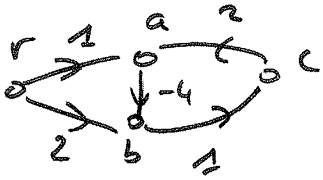
II] Poids négatifs sur les arcs (on passe en orienté...)

- Dans le cas où les longueurs sont ≥ 0, une marche de longueur minimale entre 2 sommets est un chemin 

Si on regarde attentivement les algos de p.c.c (parcours en largeur et Dijkstra), c'est cette propriété qui permet beaucoup de chose. On va étendre la résolution du problème de p.c.c. au cas où il n'y a pas de circuit de poids < 0 (ou cycle en non orienté).

- Exemple pathologique :



$\ell(rabc) = -2$
$\ell(rabcabc) = -3$
$\ell(r(abc)^k) = -1-k$

Il n'y a pas de plus courte marche de r à c !

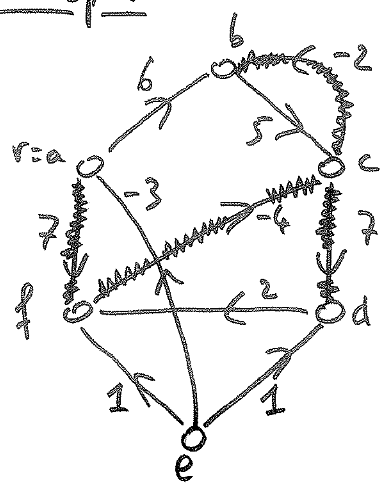
$\boxed{\text{On se place dans le cas où tout circuit a un poids } \geq 0}$

- Une plus courte marche est alors tjs un p.c.c.
- Dans ce cas, on peut toujours trouver des p.c.c grâce à l'algo de Bellman-Ford:

BELLMAN-FORD (D, ℓ, r)

```
Init.  Pour tout v ∈ V
           [ d(v) ← +∞ ;
       d(r) ← 0 ;
       père(r) ← r ;
       Pour i := 1 à n-1
           Pour tout uv ∈ A
               Si d(v) > d(u) + ℓ(uv)          // l'arc uv est-il un raccourci ?
               alors | père(v) ← u
                     | d(v) ← d(u) + ℓ(uv).
```

∘ <u>Exemple</u>



On note d/père.

i	a	b	c	d	e	f
0	0a	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	0a	6a	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	7a
2	0a	6a	3f	$+\infty$	$+\infty$	7a
3	0a	1c	3f	10c	$+\infty$	7a
4	0a	1c	3f	10c	$+\infty$	7a.
5						

↑ pas de chemin de r=a à f.

A = cd, cb, fc, ef, ea, ed, df, ~~ed~~, ~~cb~~, bc, af, ab.

<u>Analyse</u> :

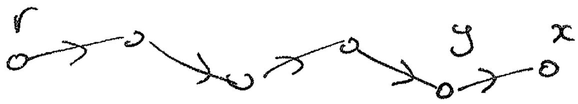
<u>Complexité</u> : $O(nm)$.

<u>Correction</u> : On montre par récurrence que :

"Après p passages dans la boucle $L_5 - L_9$, les sommets qui ont p.c.c contenant moins de p arcs depuis r ont une valeur d qui est $\leq$ à la distance depuis r".

Si $p=0$, c'est vrai pour r.

Passons de p à $p+1$: Prenons x qui admet un p.c.c depuis r qui contient $p+1$ arcs (et qui n'en n'admet pas de plus court) :



On note y son prédécesseur le long de ce chemin

A l'étape p, $d(y)$ était calculé, quand on examinera yx, on mettra à jour $d(x)$.

Inversement, montrons que $d(x)$ ne peut pas être $<$ à $dist(r,x)$:
Si c'est le cas, on considère le premier sommet x avec $d(x) < dist(r,x)$. La valeur $d(x)$ a été modifiée pour la dernière fois grâce à la relaxation d'un arc yx.
On regarde le chemin P: $y \leftarrow père(y) \leftarrow père(père(y)) \leftarrow \dots \leftarrow r$ (...)

si $x \notin P$, on a un chemin dans le graphe, de longueur $d(x)$ donc $\geq dist(r,x)$ ce qui est exclu. Donc $x \in P$.
Avant la relaxation de yx, $d(x)$ = longueur de P de r à $x \geq dist(r,x)$

$$d(y) + \ell(yx) < d(x)$$

$$\ell_P(x \rightsquigarrow y) + d(x) + \ell(yx) < d(x) \quad \text{soit} \quad \ell_P(x \rightsquigarrow y) + \ell(yx) < 0$$

On a un circuit de poids < 0, ce qui est exclu. ∎

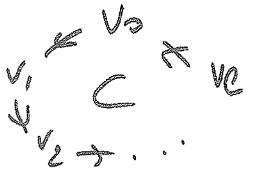
• Peut-on détecter les circuits de longueur < 0 ?

Oui, on rajoute à BELLMAN-FORD les lignes suivantes :

L10 | Pour tout $uv \in A$
L11 | | Si $d(v) > d(u) + \omega(uv)$
L12 | | | Retourner "Il existe un circuit < 0".

<u>Analyse</u> : complexité : $O(nm)$.

<u>Correction</u> : • si il existe un circuit de longueur <0



$$
\begin{aligned}
& d(v_1) - (d(v_0) + \ell(v_0 v_1)) \\
+\ & d(v_2) - (d(v_1) + \ell(v_1 v_2)) \\
+\ & \quad \vdots \\
+\ & d(v_0) - (d(v_\ell) + \ell(v_\ell v_0)) \\
\hline
& -\sum \ell(v_i v_{i+1}) = -\ell(C) > 0
\end{aligned}
$$

Donc $\exists i \; d(v_i) - (d(v_{i+1}) + \ell(v_i v_{i+1})) > 0$

L'algo retourne " il existe un circuit <0 ".

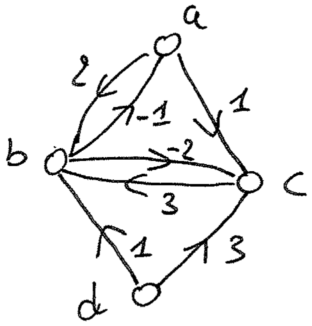
• Inversement, si il n'y a pas de circuit <0, BELLMAN-FORD calcule $d(x) = \text{dist}(r,x)\ \forall x$ et il n'y a plus de raccourcis possibles. $\blacksquare$

III) <u>P.c.c. entre tous couples de sommets.</u>

Soit $D=(V,A)$ orienté et $\ell : A \to \mathbb{R}$ sans circuit <0.

<u>Pbl</u> : Trouver, pour tout couple (x,y) un plus court chemin de x à y.

<u>Exemple</u> :



On veut :

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
\hline
a & 0 & 2 & 0 & +\infty \\
b & -1 & 0 & -2 & +\infty \\
c & 2 & 3 & 0 & +\infty \\
d & 0 & 1 & -1 & 0
\end{array}
$$

Et en plus trouver les plus courts chemins !

On peut faire n fois Bellman-Ford $\to O(n^2 m)$, mais on va faire mieux...

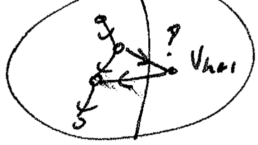
Algo de Floyd-Warshall :

Principe : programmation dynamique :

On note les sommets de D $v_1 \dots v_n$ et pour $k = 1$ à n

A l'étape k on calcule les p.c.c ds D dont les sommets internes $\in \{v_1, \dots v_k\}$

Pour traiter l'étape $k+1$, on regarde si v_{k+1} est un raccourci pour les p.c.c. calculés à l'étape k.

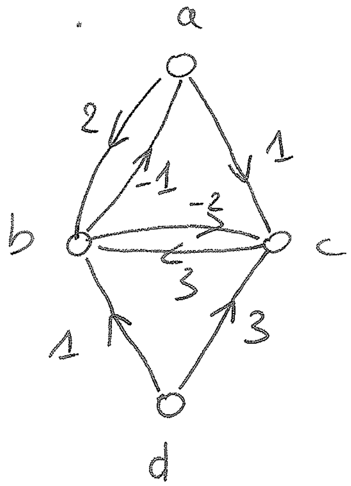


. Sommets internes d'un chemin : tous ses sommets sauf le début et la fin.

Algo : FLOYD-WARSHALL

```
Pour tout i=1..n et tout j=1..n
    dij ← l(ij)          ou +∞ si l'arc ij n'existe pas.
    Pij ← j  si ij est un arc, NUL sinon. // début d'un p.c.c. de i à j
Pour k = 1 à n           // les n étapes.
    Pour i = 1 à n       // Pour tout couple, on regarde
        Pour j = 1 à n   // si vk est un raccourci de i à j.
            Si dij > dik + dkj alors
                dij ← dik + dkj
                Pij ← Pik
```

Exemple de déroulement :



$$D: \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 2 & +\infty & +\infty \\ b & -1 & 0 & -2 & +\infty \\ c & +\infty & 3 & 0 & +\infty \\ d & +\infty & 1 & 3 & +\infty \end{array} \qquad P: \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & NUL & b & NUL & NUL \\ b & a & NUL & c & NUL \\ c & NUL & b & NUL & NUL \\ d & NUL & b & c & NUL \end{array}$$

Est ce que a peut être un raccourci ? NON!

Est ce que b ______________ ?

$$D: \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 2 & +\infty & +\infty \\ b & -1 & 0 & -2 & +\infty \\ c & +\infty & 3 & 0 & +\infty \\ d & +\infty & 1 & 3 & +\infty \end{array}$$

Oui $\ell(ab) + \ell(bc) = 0 < \ell(ac) = +\infty$.

On met à jour: D et P

$$D: \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 2 & \boxed{0} & +\infty \\ b & -1 & 0 & -2 & +\infty \\ c & \boxed{2} & 3 & 0 & +\infty \\ d & \boxed{0} & 1 & \boxed{-1} & +\infty \end{array} \qquad P: \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & NUL & b & b & NUL \\ b & a & NUL & c & NUL \\ c & b & b & NUL & NUL \\ d & b & b & b & NUL \end{array}$$

Est que c peut être un raccourci ? NON

et d ? NON.

On a fini. Comment utiliser P ?

Par exemple le p.c.c. de d à a :

$P_{d,a} = b$ Puis on regarde le premier pas d'un p.c.c de b à a

$P_{b,a} = a$

Donc, on a: d, b, a. de longueur 0.

<u>Analyse</u> :

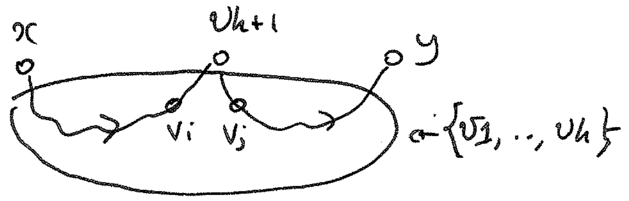
<u>Complexité</u> : $O(n^3)$.

Correction : par induction sur le nombre d'étape (k).

On suppose qu'à l'étape k, tous les p.c.c dont les sommets internes sont dans $\{v_1, .., v_k\}$ sont déjà calculés.

Prenons un p.c.c. P entre 2 sommets x et y et dont les sommets internes sont dans $\{v_1, .. v_{k+1}\}$.

- Si P ne contient pas v_{k+1}, il était bon à l'étape k, il le reste
- Si P contient v_k :



A l'étape k $P_1 : x \rightsquigarrow v_{k+1}$ et $P_2 : v_{k+1} \rightsquigarrow y$ étaient bons : $D_{xv_{k+1}} = \ell(P_1)$, $D_{v_{k+1}y} = \ell(P_2)$

A l'étape $k+1$: le teste : $D_{xy} > D_{xv_{k+1}} + D_{v_{k+1}y}$

donnera $D_{xy} \leftarrow D_{xv_{k+1}} + D_{v_{k+1}y} = \ell(P_1) + \ell(P_2)$ OK.

– Problème du jour n°7 –

. Que se passe-t-il si on autorise les circuits < 0 ?

P.C.C DANS GRAPHE QUELCONQUE

ENTRÉE : $G = (V,E)$ et $\ell : E \to \mathbb{R}$

SORTIE : d_{xy} : longueur pondérée d'un plus court chemin de x à y $\forall xy$.

<u>Résultat</u> : ce problème est NP-difficile

On va le prouver en faisant une réduction depuis CHEMIN-HAMILTONIEN.

• <u>lemme</u> : PCC DANS GRAPHE QUELCONQUE est au moins aussi dur que CHEMIN-HAMILTONIEN.

<u>Pr</u> : Supposons qu'on ait un algo A pour résoudre P.C.C GRAPHE QUELCONQUE. On va construire un algo B pour résoudre CHEMIN-HAM. :

On se donne un graphe G.

B : $\forall xy \in E(G)$ $\ell(xy) \leftarrow -1$;
lancer A sur G
$\forall x,y \in V \times V$ regarder si $d(x,y) = -(n-1)$ si oui, retourner VRAI.

Si B retourne VRAI alors $\exists x, y$ avec un chemin de longueur $n-1$ entre eux, c'est un chemin hamiltonien de G.

Si G admet un chemin hamiltonien de x à y alors A doit calculer $d(x,y) = -(n-1)$ (on ne peut pas faire moins !)

∎