Université Montpellier II – L3
Logique 2

TD4

Les fonctions

Exercice 1 (syntaxe des termes)

Rappelons la définition inductive des termes. Soit un langage logique L = ($\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{F}$), où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des constantes, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des prédicats, et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des symboles de fonction d'arité non nulle (les constantes sont les fonctions d'arité 0).
L'ensemble des termes constructibles sur L, noté *termes(L)* est défini par induction de la façon suivante :
(base) les constantes de $\mathcal{C}$ et les variables appartiennent à *termes(L)*
(règle) si f est une fonction de $\mathcal{F}$ d'arité k ≥ 1, et $e_1 \dots e_k$ appartiennent à *termes(L)* alors f(e1, …, ek) appartient à *termes(L)*.

a - Donner tous les parenthésages possibles du terme *fgxhay* où :
- *x* et *y* sont des variables
- *a* est une constante
- *g* et *h* sont des fonctions d'arité ≥ 1.

Dans chaque cas, dessiner l'arborescence syntaxique et donner l'arité des fonctions obtenues.

Une façon de faire : voir les cas possibles si *f* est unaire, binaire, ternaire, …, puis dans chacun de ces cas, les possibilités pour *g*, puis pour *h*.

b- Utiliser la définition ci-dessus pour définir :
(a) la *profondeur* d'un terme, qui est également celle de son arborescence syntaxique.
(b) l'*ensemble des variables* apparaissant dans un terme (on s'intéresse donc aux noms de variables, et non pas à leurs occurrences).

Exercice 2 (évaluer une formule dans une interprétation)

Soient les formules :
1. ∃x P(f(x))
2. ∀x Q(x,f(x))
3. ∀x ∃y Q(f(x),y)
4. ∀x ∀y (Q(x,y) → Q(f(x),f(y)))
5. ∀x (P(x) → ∃y Q(f(y),x))

Soit I l'interprétation de domaine D = {0,1,2}, et le sens suivant pour les prédicats P et Q, et la fonction f :
- I(P) = {1,2}
- (x,y) appartient à I(Q) si et seulement si x < y. Autrement dit, I(Q) = {(0,1), (0,2), (1,2)}
- I(f) : I(f)(0) = 1, I(f)(1) = 2, I(f)(2) = 0. Autrement dit, I(f) = {(0,1), (1,2), (2,0)}

Remarque : ne pas confondre l'interprétation d'un prédicat binaire *(comme Q) qui est une* relation quelconque*, et l'interprétation d'une fonction* unaire *(comme f) qui est une* application *associant à tout élément de D un élément de D.*

Donner la valeur de chaque formule pour l'interprétation I. Pour les quatre premières formules, donner juste le résultat. Pour la dernière, détailler les calculs.

Exercice 3 (trouver un modèle d'une formule)

$\forall x\ (P(x) \leftrightarrow P(f(x))) \wedge \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ \neg P(x)$

Trouver un modèle pour cette formule ayant le plus petit domaine possible.

Exercice 4 (évaluer une formule dans une interprétation)

On définit le langage suivant : $L = (C,P,F)$ où :
$C = \{a,b\}$
$P = \{p\}$, et p est un prédicat d'arité 2
$F = \{f\}$, et f est une fonction d'arité 2

Soient les interprétations suivantes :
I_1 :
D_1 est l'ensemble des entiers naturels IN
p s'interprète par $\leq$, f par la multiplication, a par 1 et b par 2.

I_2 :
D_2 est l'ensemble des parties de IN
p s'interprète par l'inclusion (inclusion non stricte), f par l'union, a par IN et b par $\emptyset$.

Indiquer si les formules suivantes sont vraies dans I_1 et I_2 :
$A = p(f(a, b), b)$
$B = \forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow \neg\, p(y, x))$
$C = \forall x \forall y \forall z\ ((p(x, y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(f(x,y),z))$

Exercice 5 (conséquence logique)

Soit $F1 = \forall x\ \exists y\ p(x,y)$
Soit $F2 = \forall x\ p(x,f(x))$
F1 et F2 sont-elles équivalentes ? L'une est-elle conséquence de l'autre ?
Prouvez vos réponses.