TD : manipulations syntaxiques

En utilisant le théorème des tautologies, et le théorème sur la relation entre $\leftrightarrow$ et $\equiv$, prouver la validité des formules suivantes

1. $[(\forall x\ (P(x)) \to \forall y\ (Q(y,y))) \vee R(z,t)] \leftrightarrow [R(z,t) \vee \neg \forall x\ (P(x)) \vee \forall y\ (Q(y,y))]$

2. $[(\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (Q(y) \to R(x,y)))) \to (\exists z\ Q(z) \to R(r,y,z)) \vee (\neg \exists z\ Q(z))]$
$$\leftrightarrow$$
$$[(\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (Q(y) \to R(x,y))) \to \exists z\ Q(z) \to R(r,y,z))$$
$$\vee$$
$$(\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (Q(y) \to R(x,y))) \to \neg \exists z\ Q(z))]$$

Trouver des formules logiquement équivalentes aux formules suivantes, mais où les quantificateurs sont en tête de la formule (on appelle de telles formules des formules *prenexes*).

3. $A \to \exists x\ (P(x))$

4. $A \to \forall x\ (P(x))$

5. $\forall x\ (P(x)) \to \forall x\ (Q(x))$

6. $\exists x\ (P(x)) \to \exists x\ (Q(x))$

7. $\forall x\ (P(x)) \to \exists x\ (Q(x))$

8. $\exists x\ (P(x)) \to \forall x\ (Q(x))$

9. $\forall x\ (P(x) \to \forall y\ (Q(x,y)))$

10. $\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (Q(x,y)))$

11. $\exists x\ (P(x) \to \forall y\ (Q(x,y)))$

12. $\exists x\ (P(x) \to \exists y\ (Q(x,y)))$