TD2 : sémantique

On s'intéresse dans ce TD à **l'évaluation de formules de la logique du premier ordre** *dans un certain « monde » (c'est-à-dire selon une certaine interprétation du langage logique).*

Exercice 1

On considère le langage logique **L = ({a},{p})**, c'est-à-dire ayant pour seule constante **a** et pour seul prédicat **p**. **p** est unaire.

Q1. Trouver différentes interprétations de ce langage telles que (et si possible) :
1) la formule p(a) soit vraie et la formule ∃xp(x) soit vraie
2) la formule p(a) soit fausse et la formule ∃xp(x) soit vraie
3) la formule p(a) soit vraie et la formule ∃xp(x) soit fausse
4) les deux formules soient fausses

Q2. Pour chacune de ces interprétations, quelle est la valeur de :
$\exists x p(x) \rightarrow p(a)$
$\forall x p(x)$
Justifier votre réponse en « collant » à la définition de V(F,I), valeur d'une formule F pour une interprétation I.

Q3. Que dire de la formule $p(a) \rightarrow \exists x p(x)$? Prouvez votre réponse.

Exercice 2

On adopte les notations suivantes :
- P(x) signifie que x a réussi son examen
- Q(x,y) signifie que x a posé des questions à y *(pendant ses révisions …)*

(a) Traduire en formules les énoncés suivants :
1. Quelqu'un a raté l'examen et n'a été questionné par personne
2. Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont posé des questions à quelqu'un
3. Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont été questionnés par quelqu'un
4. Personne n'a posé de question à tous ceux qui ont réussi à l'examen
5. Tous ceux qui ont posé des questions à quelqu'un, ont posé des questions à quelqu'un qui a réussi l'examen.

(b) Soit l'interprétation ayant pour domaine {Anatoli, Boris, Catarina, Diana}. Dans cette interprétation seuls Boris et Catarina ont réussi l'examen. Les garçons (Anatoli et Boris) ont posé des questions aux filles (Catarina et Diana), Diana a posé des questions à Boris, Catarina à Diana et ce sont les seuls cas d'entraide. On demande de donner la valeur des formules construites à la question (a) dans cette interprétation.

<u>Indication</u> : pour faciliter le calcul de la valeur des formules, on suggère de dessiner l'interprétation en entourant les éléments du domaine qui ont réussi leurs examens, et en mettant une flèche de x vers y si x a posé des questions à y.

Exercice 3

On considère un langage logique avec deux prédicats unaires P et Q. Soit I une interprétation de ce langage ayant pour domaine $\{0,1\}$ et telle que $I(P) = \{0\}$ et $I(Q) = \{1\}$.
[0 *et* 1 *désignent ici les éléments du domaine, et n'ont rien à voir avec « vrai » et « faux », on aurait aussi bien pu les appeler* d1 *et* d2]

1. Évaluer dans cette interprétation les formules $\forall x P(x)$ et $\forall x(P(x)\vee Q(x))$.
Les formules $\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)$ et $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ sont-elles équivalentes (c'est-à-dire ont-elles même valeur de vérité pour toute interprétation)?
2. Évaluer dans cette interprétation les formules $\exists x P(x)$ et $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$.
Les formules$\exists x P(x)\wedge\exists x Q(x)$ et $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ sont-elles équivalentes ?
3. Évaluer dans cette interprétation les formules $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ et $\forall x P(x)\rightarrow\forall x Q(x)$.
Ces deux formules sont-elles équivalentes ?

Exercice 4

On considère un langage du premier ordre contenant deux prédicats unaires p et q, et deux formules A et B définies sur ce langage :
$A = \forall x\ (p(x) \rightarrow q(x))$
$B = \exists x\ (p(x) \rightarrow q(x))$.

On se propose de caractériser les interprétations dans lesquelles ces formules sont vraies (autrement dit les *modèles* de ces formules).
Pour I une interprétation dont le domaine est D, on note $D_1 = \{d \in D \mid d \in I(p)\}$ et $D_2 = \{d \in D \mid d \in I(q)\}$.

1. Si $D = \{1,2,3\}$ et $D_1 = \{1,2\}$, quelles valeurs peut prendre D_2 pour que I soit un modèle de A? Même question pour B.
2. On considère maintenant que D est quelconque (mais non vide car un domaine ne peut pas être vide). Quelle condition doivent vérifier D_1 et D_2 pour que I soit un modèle de A ? Même question pour B.

En apéritif au TD 3 : conséquence logique

"Si quelqu'un résout ce problème, alors tout mathématicien le résout. Cabot est mathématicien et ne résout pas ce problème."

Peut-on en conclure que personne ne résout ce problème ?