

# Le Langage Algébrique

<http://www.lirmm.fr/~poncelet/HLIN605.html>

Pascal Poncelet  
LIRMM  
Pascal.Poncelet@lirmm.fr  
<http://www.lirmm.fr/~poncelet>

## Introduction

- Introduit par CODD en 1970
- Traitement de requêtes de lecture et écriture
- Deux types d'opérateurs
  - Opérateurs ensemblistes : UNION, INTERSECTION, DIFFERENCE, PRODUIT CARTESIEN
  - Opérateurs relationnels : SELECTION, PROJECTION, JOINTURE et DIVISION
- Rem : dans les définitions, nous noterons  $t$  un tuple d'une relation et  $t(A)$  dans  $R$ , le sous tuple de  $R$  relatif à l'attribut  $A$

## Opérateurs ensemblistes

- Pour l'union, l'intersection, la différence les relations doivent être unicompatibles :
  - les relations doivent avoir même degré
  - les attributs associés deux à deux doivent être du même type syntaxique
- UNION
  - L'union de 2 relations  $R$  et  $S$ , noté  $R \cup S$  est l'ensemble des tuples qui appartiennent, soit à  $R$ , soit à  $S$ , soit à la fois à  $R$  et à  $S$  :
$$R \cup S = \{t | t \in R \text{ OU } t \in S\}$$

## Exemple d'union

| PILOTE1 | PLNUM | ADR   |
|---------|-------|-------|
|         | 100   | PARIS |
|         | 101   | PARIS |
|         | 120   | PARIS |
|         | 110   | PARIS |
| PILOTE2 | PLNUM | VD    |
|         | 130   | TOUL  |
|         | 140   | TOUL  |
|         | 150   | TOUL  |
|         | 100   | TOUL  |
|         | 120   | TOUL  |
|         | 130   | PARIS |
|         | 101   | PARIS |
|         | 140   | PARIS |
|         | 110   | PARIS |

Pilote1: ensemble des pilotes habitant PARIS  
Pilote2 : ensemble des pilotes assurant un vol au départ de Paris ou de Toulouse

## Pilote1 UNION pilote 2

| PILOTE1 UNION<br>PILOTE2 |  | PLNUM | VILLE |         |
|--------------------------|--|-------|-------|---------|
|                          |  | 100   | PARIS | Pilote1 |
|                          |  | 101   | PARIS |         |
|                          |  | 120   | PARIS |         |
|                          |  | 110   | PARIS |         |
|                          |  | 130   | TOUL  |         |
|                          |  | 140   | TOUL  | Pilote2 |
|                          |  | 150   | TOUL  |         |
|                          |  | 100   | TOUL  |         |
|                          |  | 120   | TOUL  |         |
|                          |  | 130   | TOUL  |         |
|                          |  | 130   | PARIS |         |
|                          |  | 140   | PARIS |         |

Ensemble des pilotes habitant Paris ou assurant un vol au départ de Paris ou Toulouse

Les duplicats sont éliminés. L'Union permet de traduire le OU logique et donc l'ajout de nouveaux tuples

## Intersection

- L'intersection de deux relations notée  $R \cap S$  est l'ensemble des tuples qui appartiennent à la fois à R et à S :

$$R \cap S = \{t / t \in R \text{ et } t \in S\}$$

Avec Pilote1 INTERSECTION Pilote2

| PILOTE1<br>INTERSECTION<br>PILOTE2 | PLNUM | VILLE |
|------------------------------------|-------|-------|
|                                    | 101   | PARIS |
|                                    | 110   | PARIS |

L'intersection permet de traduire le ET logique

## Différence

- La différence de deux relations notée  $R - S$  est l'ensemble des tuples qui appartiennent à R sans appartenir à S. C'est l'opérateur complémentaire de l'intersection :

$$R - S = \{t / t \in R \text{ ET } t \notin S\}$$

| PILOTE1 - PILOTE2 | PLNUM | ADR   |
|-------------------|-------|-------|
|                   | 100   | PARIS |
|                   | 120   | PARIS |

PILOTE1 - PILOTE2 représente l'ensemble des pilotes habitant PARIS et n'assurant pas de vol au départ de PARIS ou TOULOUSE

## Produit Cartésien

- Le produit cartésien de deux relations, noté  $R \otimes S$ , est l'ensemble de tous les tuples obtenus par concaténation de tuples de R et de S. C'est un ensemble de paires ordonnées :

$$R \otimes S = \{(t(r), t(s)) \text{ avec } t(r) \in R \text{ et } t(s) \in S\}$$

| PILOTE3 | PLNUM | ADR  | AVION | AVNOM  | CAP |
|---------|-------|------|-------|--------|-----|
|         | 103   | NICE |       | AIRBUS | 350 |
|         | 106   | NICE |       | CARAV  | 250 |

| Produit<br>Cartésien | PLNUM | ADR  | AVNOM  | CAP |
|----------------------|-------|------|--------|-----|
|                      | 103   | NICE | AIRBUS | 350 |
|                      | 103   | NICE | CARAV  | 250 |
|                      | 106   | NICE | AIRBUS | 350 |
|                      | 106   | NICE | CARAV  | 250 |

## Opérateurs relationnels

- Spécifiques au langage algébrique
- Deux catégories
  - unaires de restriction
  - binaires d'extension
- Les opérateurs de restrictions permettent :
  - soit un découpage horizontal d'une relation (SELECTION)
  - soit un découpage vertical d'une relation (PROJECTION)

## Selection

- Soit  $\theta$  un des comparateurs binaires  $<$ ,  $<=$ ,  $>$ ,  $>=$ ,  $\neq$  applicables à l'attribut (ou à l'ensemble d'attributs) A et au tuple c (de la relation R).
- La sélection  $R(A \theta c)$  est l'ensemble des tuples de R pour lesquels  $\theta$  est vérifié entre la (les) composante(s) A et le tuple c :  
 $R(A \theta c) = \{t/t \in R \text{ ET } tA \theta c\}$
- Le tuple c pourrait être remplacé par un attribut (ou un ensemble d'attributs) B, où A et B seraient définis sur le (les) même(s) domaine(s). Dans ce cas la qualification porterait sur les composantes de A et B situés au même niveau

## Selection

|         |       |        |       |
|---------|-------|--------|-------|
| PILOTE4 | PLNUM | PLNOM  | ADR   |
|         | 100   | JEAN   | PARIS |
|         | 101   | PIERRE | PARIS |
|         | 120   | PAUL   | PARIS |
|         | 130   | SERGE  | TOUL  |
|         | 140   | MICHEL | TOUL  |

|   |       |        |      |
|---|-------|--------|------|
| R | PLNUM | PLNOM  | ADR  |
|   | 130   | SERGE  | TOUL |
|   | 140   | MICHEL | TOUL |

- $R = \text{PILOTE4 (ADR = « TOUL »)}$

## Selection

- Notée également  $\sigma Q(R)$  où Q est le critère de qualification de la forme :  $A_i \theta \text{ Valeur}$  avec  $\theta = \{ =, <, >=, >, <=, \# \}$

| VINS | Cru      | Mill | Région     | Qualité |
|------|----------|------|------------|---------|
|      | VOLNAY   | 1983 | BOURGOGNE  | A       |
|      | VOLNAY   | 1979 | BOURGOGNE  | B       |
|      | CHENAS   | 1983 | BEAUJOLAIS | A       |
|      | JULIENAS | 1986 | BEAUJOLAIS | C       |

$\sigma_{\text{MILL} > 1983}$

| VINS | Cru      | Mill | Région     | Qualité |
|------|----------|------|------------|---------|
|      | JULIENAS | 1986 | BEAUJOLAIS | C       |

## Projection

- Soit  $R(A)$  une relation et un ensemble d'attributs  $A_1, \dots, A_n$  de  $R$  tels que  $(A_1, A_2, \dots, A_n) \subset A$ .
- La projection  $R'(A_1, A_2, \dots, A_n)$  est la relation obtenue à partir de  $R(A)$  en éliminant de  $R(A)$  les attributs autres que ceux spécifiés par  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et en supprimant les tuples dupliqués.

$R(A_1, \dots, A_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$

|     |        |     |       |
|-----|--------|-----|-------|
| 100 | AIRBUS | 350 | TOUL  |
| 101 | AIRBUS | 350 | TOUL  |
| 104 | AIRBUS | 150 | PARIS |
| 105 | CARAV  | 250 | PARIS |

| AVNOM  | CAP |
|--------|-----|
| AIRBUS | 350 |
| AIRBUS | 350 |
| AIRBUS | 150 |
| CARAV  | 250 |

## Projection

Avion1

| AVNUM | AVNOM  | CAP | LOC   |
|-------|--------|-----|-------|
| 100   | AIRBUS | 350 | TOUL  |
| 101   | AIRBUS | 350 | TOUL  |
| 104   | AIRBUS | 150 | PARIS |
| 105   | CARAV  | 250 | PARIS |

Avion1(AVNOM, CAP)

| AVNOM  | CAP |
|--------|-----|
| AIRBUS | 350 |
| AIRBUS | 350 |
| AIRBUS | 150 |
| CARAV  | 250 |

## Projection

- Notée également :  $\pi_{A_1, A_2, \dots, A_p}(R)$

| VINS | Cru      | Mill | Région     | Qualité |
|------|----------|------|------------|---------|
|      | VOLNAY   | 1983 | BOURGOGNE  | A       |
|      | VOLNAY   | 1979 | BOURGOGNE  | B       |
|      | CHENAS   | 1983 | BEAUJOLAIS | A       |
|      | JULIENAS | 1986 | BEAUJOLAIS | C       |

$\pi_{Cru, Région}$

| $\pi(VINS)$ | Cru      | Région     |
|-------------|----------|------------|
|             | VOLNAY   | BOURGOGNE  |
|             | CHENAS   | BEAUJOLAIS |
|             | JULIENAS | BEAUJOLAIS |

## Opérateurs binaires d'extension

- L'opérateur Join et Division
- JOIN
- Soient les relations  $R(A, B_1)$  et  $S(B_2, C)$  avec  $B_1$  et  $B_2$  attributs définis sur le même domaine, soit  $\theta$  un élément de l'ensemble  $\{=, >, >=, <, <=, \neq\}$  applicables aux valeurs des attributs  $B_1$  et  $B_2$ .
- Le Join de  $R$  sur  $B_1$  avec  $S$  sur  $B_2$ , noté  $R(B_1 \theta B_2) S$  est la relation dont les tuples sont ceux obtenus par concaténation des tuples de  $R$  avec ceux de  $S$  pour lesquels la relation  $\theta$  entre les composantes  $B_1$  et  $B_2$  est vérifiée.

## Opérateurs binaires d'extension

- L'opérateur Join et Division
- JOIN
- Soient les relations  $R(A, B1)$  et  $S(B2, C)$  avec  $B1$  et  $B2$  attributs définis sur le même domaine, soit  $\theta$  un élément de l'ensemble  $\{=, >, >=, <, <=, \neq\}$  applicables aux valeurs des attributs  $B1$  et  $B2$ .
- Le Join de  $R$  sur  $B1$  avec  $S$  sur  $B2$ , noté  $R (B1 \theta B2) S$  est la relation dont les tuples sont ceux obtenus par concaténation des tuples de  $R$  avec ceux de  $S$  pour lesquels la relation  $\theta$  entre les composantes  $B1$  et  $B2$  est vérifiée
- $R (B1 \theta B2) S = \{t' \mid t \in R \otimes S \text{ ET } t(B1) \theta (B2)\}$

## Opérateurs binaires d'extension

- $R (B1 \theta B2) S = \{t' \mid t \in R \otimes S \text{ ET } t(B1) \theta (B2)\}$
- Lorsque  $\theta$  est l'égalité on parle d'équijointure autrement de thétajointure
- $R (B1 = B2) S = \{t' \mid t \in R \otimes S \text{ ET } t(B1) \theta (B2)\}$
- Il est possible d'avoir des autojointures
- $R (B1 \theta B2) R = \{t' \mid t \in R \otimes R \text{ ET } t(B1) \theta (B2)\}$
- L'opérateur Join est équivalent à un produit cartésien suivi d'une sélection

## Join

| PILOTE1 | PLNUM | PLNOM  | ADR   |
|---------|-------|--------|-------|
|         | 100   | JEAN   | PARIS |
|         | 101   | PIERRE | PARIS |
|         | 120   | PAUL   | PARIS |

| VOL1 | VOLNUM | AVNUM | PLNUM |
|------|--------|-------|-------|
|      | IT500  | 110   | 100   |
|      | IT501  | 130   | 100   |
|      | IT503  | 110   | 100   |
|      | IT504  | 110   | 120   |
|      | IT506  | 120   | 120   |
|      | IT507  | 130   | 110   |

## Join

- PILOTE1 (PLNUM=PLNUM) VOL1
- ensemble des pilotes habitant Paris en service avec les numéros des vols et des avions correspondants

| PLNUM | PLNOM | ADR   | VOLNUM | AVNUM | PLNUM |
|-------|-------|-------|--------|-------|-------|
| 100   | JEAN  | PARIS | IT500  | 110   | 100   |
| 100   | JEAN  | PARIS | IT501  | 130   | 100   |
| 100   | JEAN  | PARIS | IT503  | 110   | 100   |
| 120   | PAUL  | PARIS | IT504  | 110   | 120   |
| 120   | PAUL  | PARIS | IT506  | 120   | 120   |

## Join

- PILOTE1 (PLNUM>PLNUM) VOL1
- Quels sont les pilotes les pilotes dont le numéro est supérieur à un moins un numéro de pilote dans vol (qui effectue un vol)

| PLNUM | PLNOM  | ADR   | VOLNUM | AVNUM | PLNUM |
|-------|--------|-------|--------|-------|-------|
| 101   | PIERRE | PARIS | IT500  | 110   | 100   |
| 101   | PIERRE | PARIS | IT501  | 130   | 100   |
| 101   | PIERRE | PARIS | IT503  | 110   | 100   |
| 120   | PAUL   | PARIS | IT500  | 110   | 100   |
| 120   | PAUL   | PARIS | IT501  | 130   | 100   |
| 120   | PAUL   | PARIS | IT503  | 110   | 100   |
| 120   | PAUL   | PARIS | IT507  | 130   | 110   |

} 101>100  
 } 120>100  
 } 120 > 110

## Join

- Notée également  $\bowtie$

| VINS | Cru      | Mill | Qualité |
|------|----------|------|---------|
|      | VOLNAY   | 1983 | A       |
|      | VOLNAY   | 1979 | B       |
|      | CHABLIS  | 1983 | A       |
|      | JULIENAS | 1986 | C       |



| LOCALISATION | Cru     | Région     | QualMoy |
|--------------|---------|------------|---------|
|              | VOLNAY  | Bourgogne  | A       |
|              | CHABLIS | Bourgogne  | A       |
|              | CHABLIS | Californie | B       |

| VINSREG | Cru     | Mill | Qualité | Région     | QualMoy |
|---------|---------|------|---------|------------|---------|
|         | VOLNAY  | 1983 | A       | Bourgogne  | A       |
|         | VOLNAY  | 1979 | B       | Bourgogne  | A       |
|         | CHABLIS | 1983 | A       | Bourgogne  | A       |
|         | CHABLIS | 1983 | A       | Californie | B       |

## Division

- Division d'une relation binaire par une relation unaire
- Soit :
- $R(A1 \div A2) S = \{t/t \in R[B] \text{ ET } (\{t\} \otimes S) \subseteq R\}$  avec  $R(B, A1)$  et  $S(A2)$
- ou
- $R(A1 \div A2) S = \{t/t \in R[B] \text{ ET quelquefois } s \in S, (t, s) \in R\}$
- La division de R par S est le sous-ensemble des éléments de R(B) dont le produit cartésien avec S est inclus dans R
- Exprime la notion de « tous les »

## Division

- Avions conduits par tous les pilotes VOL1 (PLNUM  $\div$  PLNUM) PIL ?

| AVNUM | PLNUM |
|-------|-------|
| 30    | 100   |
| 30    | 101   |
| 30    | 102   |
| 30    | 103   |
| 31    | 100   |
| 31    | 102   |
| 32    | 102   |
| 32    | 103   |
| 33    | 102   |

|               |       |       |
|---------------|-------|-------|
| Diviseur PIL1 | PLNUM | AVNUM |
|               | 100   | 30    |
|               |       | 31    |

|               |       |       |
|---------------|-------|-------|
| Diviseur PIL2 | PLNUM | AVNUM |
|               | 102   | 30    |
|               | 103   | 32    |

## Division

- Chaque fois que l'on aura « pour tous les x », il suffira de mettre l'attribut x dans le diviseur. Le dividende binaire doit contenir alors le même attribut (sur lequel porte la division) et l'attribut du résultat recherché

## Division

- Quels sont les noms des pilotes qui conduisent tous les avions de la compagnie ?  
 $VOL1 = VOL (AVNUM, PLNUM) <projection>$   
 $AV1 = AVION (AVNUM) <projection>$   
 $PILOTE1 = PILOTE (PLNUM, PLNOM) <projection>$   
 $PILOTE2 = VOL1 (AVNUM \div AVNUM) AV1$   
 <division pour avoir les numéros des pilotes qui conduisent tous les avions>  
 $PILOTE3 = PILOTE1 (PLNUM=PLNUM)PILOTE2$   
 <join pour avoir les noms>  
 $RES = PILOTE3(PLNOM) <projection>$

## Complétude

- L'ALGEBRE RELATIONNELLE EST COMPLETE
  - Les cinq (sept) opérations de base permettent de formaliser sous forme d'expressions toutes les questions que l'on peut poser avec la logique du premier ordre (sans fonction).
- NOM ET PRENOM DES BUVEURS DE VOLNAY 1988 ?  
 $PROJECTION (NOM, PRENOM,$   
 $SELECTION (CRU = "VOLNAY" \text{ et } MILL = 1988,$   
 $JOIN (VINS, ABUS, BUVEURS)))$

## Arbre de requêtes

Liste des noms des pilotes Parisiens :  
 $\pi_{Plnom}(\sigma_{Ville='Paris'}(Pilote))$

