

## PARTIE II

# LA METHODOLOGIE DE LA VALUE-AT-RISK APPLIQUEE AU RISQUE DE CREDIT

## Introduction de la 2<sup>e</sup> partie

### II.A L'approche généralisée de la VaR :

II.A.1 les enjeux de la VaR

II.A.2 l'estimation de la VaR : définition générale

II.A.3 Les migrations de qualité du risque de crédit

### II.B Les modèles de calcul de la VaR pour les instruments du bilan:

II.B.1 La simulation historique

II.B.1.1 Principe

II.B.1.2 Mise en pratique à travers un exemple

II.B.2 L'approche de l'écart type

II.B.2.1 Cas n°1 : les actifs du portefeuille sont indépendants

II.B.2.2 Cas n°2 : les actifs du portefeuille sont corrélés

II.B.2.2.1 Introduction à "*l'estimating asset correlation*"

II.B.2.2.2 Le principe de "*l'estimating asset correlation*"

II.B.2.2.3 Le principe de "*l'asset value model*"

II.B.3 L'approche par le percentile

II.B.4 La méthode de "Monte Carlo"

### II.C La VaR et le calcul du risque de crédit généré par les instruments de hors-bilan :

II.C.1 Les instruments du hors-bilan ne dépendant pas des variables de marché:

II.C.1.1 La VaR et les *loans commitments*

II.C.1.2 La VaR et les *financial letters of credit*

II.C.2 La VaR et les instruments de hors-bilan assujettis aux variables de marché :

II.C.2.1 Etat des lieux

II.C.2.2 La Notion de risque :

II.C.2.2.1 Les hypothèses du modèle

II.C.2.2.2 Le risque potentiel encouru

II.C.2.2.3 La notion de risque de crédit maximum

II.C.2.2.4 La notion de risque de crédit moyen

II.C.2.3 Les méthodes d'analyse du risque :

II.C.2.3.1 L'approche statistique

II.C.2.3.2 La méthodologie de l'évaluation de l'option

II.C.2.3.3 La méthodologie de la simulation

Conclusion de la 2<sup>e</sup> partie

## PARTIE II

### **LA METHODOLOGIE DE LA VALUE-AT-RISK APPLIQUEE AU RISQUE DE CREDIT**

#### Introduction de la 2<sup>e</sup> partie :

L'objectif de cette section est de décrire les différentes méthodologies permettant le calcul de la VaR. Après avoir présenté la calcul général de la VaR (cf. I.A) , nous nous attarderons sur les différents modèles qui la composent (cf. I.B). L'ambition de ce mémoire est de proposer une étude détaillée sur l'utilisation pratique de la VaR de crédit pour l'ensemble des instruments. La partie II.C sera consacrée exclusivement à l'utilisation de la VaR pour les instruments de bilan. Une attention toute particulière sera apportée sur le calcul de la VaR des instruments de hors-bilan qui sont assujettis, comme nous l'avions déjà souligné dans la première partie, aux risques de crédit et aux risques de marché (cf. II.D).

#### II.A L'approche généralisée de la VaR :

##### **II.A.1 les enjeux de la VaR**

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, la Value-at-risk est un concept relativement nouveau qui permet de mesurer le risque de credit, comme le risque de marché, de façon globale et probabilistique, ce qui constitue un forme d'innovation par rapport aux techniques de mesure des risques traditionnels. Cette méthode définit les pertes potentielles maximum qu'une banque ou une institution financière peut subir dans un laps de temps donné et à un niveau de probabilité donné. A travers cet exemple, nous allons montrer pourquoi la "Value-at-Risk" (terme anglo-saxon désignant la mesure du risque, ou "Valeur à Risque") peut être décrite comme un outil de décision révolutionnaire. En effet, comment un gestionnaire peut-il rassurer un supérieur en lui montrant que l'exposition au risque de son département n'est pas de nature à pouvoir faire s'effondrer tout l'établissement.

Une première solution au problème avancé serait de décrire chaque instrument financier dans le détail ainsi que chacune de ses positions face au risque. Un second axe de recherche serait de décrire l'ensemble des sensibilités des portefeuilles face au risque. Cependant, il apparaît que des instruments ne permettent pas de décrire une situation de l'état des risques d'un portefeuille de manière claire et concise. La solution proposée se résume dans l'utilisation de la VaR.

## II.A.2 L'estimation de la VaR : définition générale

Considérons un actif "XYZ" dont la valeur à l'instant "t" est noté  $V_t$ . La perte subie par cet actif sur une période  $[0,t]$  sera notée :  $L_t = V_0 - V_t$  avec comme hypothèse sous-jacente au modèle : la valeur de l'actif évolue de manière stationnaire. La VaR peut être définie de deux façons :

- La VaR et le niveau de perte envisagé :

La VaR de l'actif "XYZ" sur l'intervalle de temps  $[0,t]$ , et de niveau de probabilité "p" se définit comme un montant noté VaR, tel que la perte encourue sur cet actif ne dépasse la VaR qu'avec une probabilité de  $(1-p)$ . Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\Pr [L_t > \text{VaR}] = 1 - p, \text{ ce qui est équivalent à } \Pr [L_t < \text{VaR}] = p.$$

Il est important de souligner dès maintenant que la VaR ne représente ni le niveau de perte maximale, ni le niveau de perte moyenne auquel on peut s'attendre. Par contre, la VaR reflète le niveau de perte qui serait dépassé pour un niveau de probabilité fixé.

- La VaR et la notion d'écart entre la perte et la perte moyenne :

Dans ce cas, la VaR de l'actif "XYZ", notée  $\text{VaR}^*$ , pour un intervalle de temps  $[0,t]$ , et de niveau de probabilité "p" se définit comme un montant tel que la perte encourue sur cet actif ne dépassera la perte moyenne  $E(L_t)$  de plus de  $\text{VaR}^*$  qu'avec une probabilité de  $(1-p)$ . Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\Pr [L_t - E(L_t) > \text{VaR}^*] = 1 - p, \text{ ce qui est équivalent à } \Pr [L_t < \text{VaR}^* + E(L_t)] = p.$$

La VaR sera alors représentée par l'équation suivante :

$$\text{VaR} = \text{VaR}^* + E(L_t)$$

Ce qui nous intéresse plus directement, c'est le cas où la variable aléatoire,  $L_t$ , suit une loi normale de moyenne  $E(L_t)$  et d'écart type  $ET(L_t)$ . Les définitions mathématiques précédentes seront modifiées et aboutiront à la forme suivante :

$$\Pr\left[\frac{L_t - E(L_t)}{ET(L_t)} < \frac{VaRp - E(L_t)}{ET(L_t)}\right] = p$$

Comme l'expression suivante représente le quantile de la distribution normale réduite,

$$\frac{VaRp - E(L_t)}{ET(L_t)}$$

La formule de la VaR sera simplifiée en l'expression mathématique suivante :

$$VaR_p = E(L_t) + Z_p ET(L_t)$$

Les valeurs de  $Z_p$  se trouvent dans les tables de la loi normale (cf. annexe 5).

Ce sera cette définition de la VaR qui sera utilisée tout au long de cet exposé.

### II.A.3 Les migrations de qualité du risque de crédit :

Le *rating* des entreprises (ou "notation des créances obligataires") consiste en une appréciation du risque de défaillance des emprunteurs. Cependant, comme tout indicateur, il n'est valable que pour l'instant " $t$ ". A " $t+1$ ", il aura certainement évolué. Cette analyse fut développée dans le cadre de CreditMetrics™ de la JP Morgan. Les trois principales entreprises de *rating* sont Moody's Investor Service, le Standard & Poor's et la KMV Corporation. Pour illustrer notre propos, voyons la matrice de migration de Standard & Poor's investor, les deux autres séries de matrices seront placées dans l'annexe 1.

**Tableau 4 : Migration potentielle des ratings**

Rating Initial	Rating % A 1an							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Défaut
AAA	93.40	5.94	0.64	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00
AA	1.61	90.55	7.46	0.26	0.09	0.01	0.00	0.02
A	0.07	2.28	92.44	4.63	0.45	0.12	0.01	0.00
BBB	0.05	0.26	5.51	88.48	4.76	0.71	0.08	0.15
BB	0.02	0.05	0.42	5.16	86.91	5.91	0.24	1.29
B	0.00	0.04	0.13	0.54	6.35	84.22	1.91	6.81
CCC	0.00	0.00	0.00	0.62	2.05	4.08	69.20	24.06

Le tableau 4 se lit comme suit : il y a d'après Standard & Poor's 86.91% de chance qu'une entreprise notée BB conserve ce niveau de *rating* d'ici la fin de l'année.

Elle a 0.02% d'être notée AAA, 5.91% de risque d'être notée B et ainsi de suite d'ici la fin de l'année.

Cependant cette technique présuppose deux conditions *sine qua non* :

- le gestionnaire doit considérer que tous les types d'entreprises, d'industries ou de sociétés d'investissements du globe sont notés suivant les mêmes conventions,
- les agences de notations ne fournissent pas des résultats biaisés sur la qualité réelle de la contrepartie (une critique à cette hypothèse sera développée dans le point III.3.6)

**Tableau 5 : Echelle de notation de Standard & Poor's**

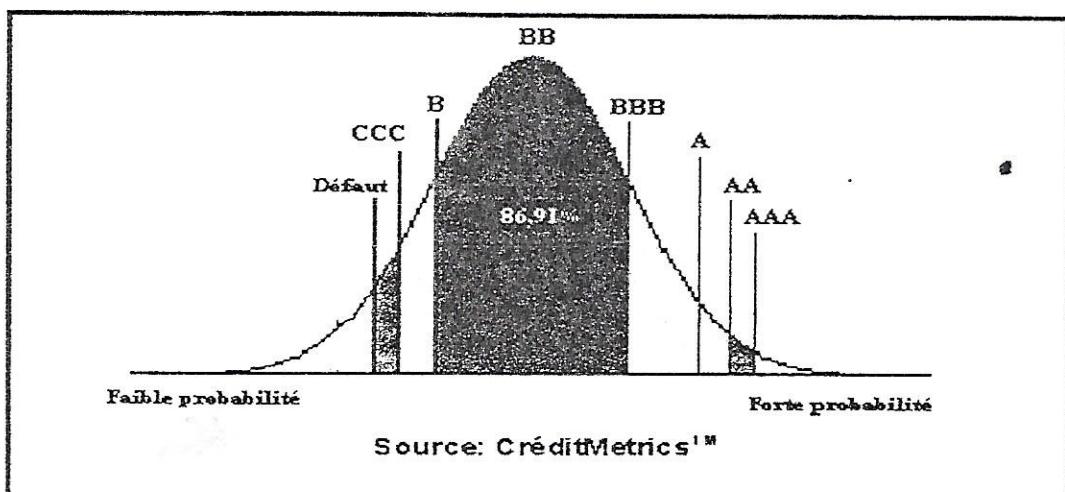
<b>AAA</b>	Situation de l'émetteur, perspectives d'activités et d'équilibre financier excellentes; aptitude sans réserve à assurer le service et l'amortissement de la dette.
<b>AA</b>	Même appréciation mais à un degré moindre.
<b>A</b>	Forte aptitude de l'émetteur à assurer de façon normale le service et le remboursement de la dette, mais sensibilité à l'environnement ou aux évolutions techniques qui peuvent introduire une légère incertitude pour l'équilibre financier à long terme, sans pour autant mettre en cause la bonne foi des créances.
<b>BBB</b>	Capacité satisfaisante de l'émetteur à assurer le service de la dette et le remboursement de la dette, mais activité s'exerçant sur un marché étroit ou instable entraînant des risques réels d'évolution négative en cas de situation économique défavorable.
<b>BB,B,CCC,CC</b>	Service et remboursement des créances comportant une incertitude croissante; créances spéculatives à des degrés croissants
<b>C</b>	Créances en défaut de paiement prévisible à court terme.
<b>D</b>	Créances en défaut de paiement.

(AAA à BBB inclus : niveau d'investissement, BB à D : niveau spéculatifs)

Source: *Vers un Management Moderne*, De Boeck Université, Paris, 1997.

L'utilisation de la loi normale centrée réduite permet de représenter les résultats précédents comme suit :

**Graphique 4 : Densité de probabilité**



- La densité de probabilité,  $f(x)$ , suit une loi de Laplace-Gauss, d'équation :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{[-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}]}$$

avec  $\sigma$ =écart type dans l'échantillon et  $\mu$ = la moyenne dans l'échantillon.

- La probabilité d'obtenir une réalisation comprise dans un intervalle  $[a,b]$  se calcule de la manière suivante :

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

## II.B Les modèles de calcul de la VaR pour les instruments du bilan

Dans cette partie, nous allons aborder l'ensemble des méthodologies propre à l'estimation de la VaR de crédit appliquée aux instruments du bilan. Bien que nous nous attarderons seulement sur l'exemple des obligations, la démonstration garde toute sa force dans le cas des *trade credits* (cf. définition I.D.1), des prêts, etc. Il faudra seulement faire correspondre chaque instrument avec ses propres tableaux de migration, taux de recouvrements et corrélations.

### II.B.1 la simulation historique

#### II.B.1.1 Le Principe :

Cette méthode consiste à calculer les variations relatives des facteurs de risque à partir d'une base de données la plus longue possible correspondant aux données historiques des *ratings* des contreparties. Ensuite, il suffit de mettre en relation ces résultats avec la valeur actuelle des facteurs de risque. Les avantages que présente cette méthode sont nombreux :

- La relative simplicité du traitement statistique à travers les instruments statistiques comme la moyenne, la médiane, le maximum, le minimum, la moyenne mobile, la variance et l'écart type.

- L'historique des pertes du passé peuvent être facilement tracée et peut servir de point de repère pour prédire des mouvements similaires dans le futur.

### II.B.1.2 Mise en pratique à travers un exemple :

Tableau 6 : Ecart types des taux de défaut à un an et à dix ans

Rating	Ecart type du taux de défaut en % pour un an	Ecart type du taux de défaut en % Pour dix ans
AAA	0.0	0.0
AA	0.1	0.9
A	0.0	0.7
BBB	0.3	1.8
BB	1.4	3.4
B	4.8	5.6
CCC	7.7	8.1

Source : Standard & Poor's Service

D'après le tableau 6, on peut en déduire que sur dix ans l'écart type des taux de défaut (i.e la dispersion entre les différentes valeurs de risque de défaut et leur moyenne) des contreparties notées BBB fut de 1.8% sur dix ans et de 0.3% sur un an.

Le tableau 7 retrace les moyennes des taux de défaut par catégories de rating sur une période de un an et dix ans, pour un secteur "XYZ".

Tableau 7 : Moyennes des taux de défaut à un an et à dix ans

Rating	Moyenne du taux de défaut en % pour un an	Moyenne du taux de défaut en % pour dix ans
AAA	0.5	0.3
AA	2.0	2.1
A	5.0	5.1
BBB	15.0	14.8
BB	10.0	10.2
B	30.0	25
CCC	38.0	43

Source : Standard & Poor's Service

Le gestionnaire pourra alors calculer les VaR correspondant à chaque seuil de risque et de chaque rating, en utilisant la formule suivante  $VaR_p = E(L_t) + Z_p \cdot ET(L_t)$ . Pour simplifier les calculs, seules les entreprises de rating AA seront retenues pour la période de dix ans. Le tableau 8 résume les résultats obtenus .

Tableau 8 : Estimation de la VaR de l'entreprise AA suivant les seuils de risque dans le cadre de la méthode historique.

	Zp	E(Lt) (dix ans)	ET(Lt) (dix ans)	VaRp (dix ans)
Risque de 1%	2.3263	2.1	0.9	4.1937
Risque de 5%	1.6449	2.1	0.9	3.5804
Risque de 10%	0.8416	2.1	0.9	2.8574

## II.B. 2 l'approche de l'écart type

Ce modèle est très souvent utilisé car sa mise en pratique et son analyse ne sont pas d'une grande complexité. De plus, il est relativement souple, ce qui permet de mesurer le risque de crédit couru au niveau d'un *desk* ou encore sur un portefeuille précis, pour un profit donné. Elle permet de mesurer la dispersion du risque autour de la valeur moyenne du portefeuille. Deux hypothèses déjà citées auparavant sous-tendent ce modèle : il faut que les distributions suivent une loi normale. De plus il faut que la combinaison des variations de facteurs de risque soit linéaire, ce qui est souvent le cas dans l'étude du risque de crédit des instruments de bilan.

### II.B.2.1 Cas n°1 : les actifs du portefeuille sont indépendants

Pour rendre notre analyse plus vivante nous proposons de prendre un exemple. Dans un souci de simplicité et de clarté nous porterons l'analyse du risque de crédit sur la seule migration de qualité des contreparties qui ne sont pas corrélées entre elles. Dans le même esprit la période choisie sera un horizon d'un an.

Considérons un portefeuille contenant deux obligations d'entreprises publiques, de deux pays distincts de l'OCDE : une entreprise française (notée BB) spécialisée dans le secteur automobile et une entreprise britannique (notée AA) diversifiée sur deux segments ; la banque et l'assurance. Nous prendrons le S & P's comme institut de notation .

Le gestionnaire peut alors évaluer les risques de migration de crédit de ses contreparties. Il n'y a que trois possibilités ou les obligations restent à leur niveau de notation initial, ou bien elles subissent des changements dans leur *rating*, ou encore les entreprises deviennent insolvables et donc les contreparties feront défaut.

**Tableau 9 : Migration de rating**

Rating initial	Rating à 1 an							Défaut
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	
BB	0,02	0,05	0,42	5,15	86,91	5,91	0,24	1,29
AA	1,61	90,55	7,46	0,26	0,09	0,01	0,00	0,02

Source: Standard &amp; Poor's

Comme nous l'avons expliqué précédemment dans le point I.A.2, la qualité de crédit des deux obligations n'est pas statique; au contraire elle évolue dans le temps. La question qui pointe alors à ce niveau est de savoir quelle sera la valeur des obligations si elles évoluent vers AAA, AA ou vers B voir CCC. Pour cela il faut donc tabuler les valeurs des obligations à chaque niveau de *rating* (cf. tableau 9) . Si nous prenons une obligation BB de nominal 250 FRF, de coupon 5 % et de maturité trois ans, ainsi qu'une obligation AA de nominal 300 FRF et de coupon 3 %. Pour faire ce calcul, il nous faut la courbe des taux zéro à un an et à deux ans pour chaque catégorie de *rating* (cf. annexe 6).

Notre objectif est de calculer quelle sera la valeur de chaque obligation dans chaque catégorie de *rating*. La première année, le coupon versé sera de 12,5 FRF pour l'obligation BB et sera de 9 FRF pour l'obligation AA. Maintenant il faut déterminer quelle sera la valeur future des coupons de ces obligations sur les deux années restantes. Pour ceci, nous utiliserons la courbe des taux d'intérêts *forward* zéro-coupon dans chaque catégorie de *rating*. Voici la formule mathématique générale permettant de calculer la valeur d'une obligation sur "n" périodes qui s'écrit :

$$VF = CF_1(1 + R_0)^1 + CF_2(1 + R_0)^2 + CF_3(1 + R_0)^3 + CF_4(1 + R_0)^4 + \dots + CF_n(1 + R_0)^n$$

VF= valeur future de l'obligation

CF1,...,n= cash flow généré par l'actif financier

Par analogie, on obtient les tableaux suivants :

**Tableau 10 : Migration de qualité**

Rating	Obligation BB		BB Probabilité %	Obligation AA		AA Probabilité %
	Valeur Future	Probabilité		Valeur Future	Probabilité	
AAA	266,4702	0,02		302,4434		1,61
AA	266,2323	0,05		302,1661		90,55
A	265,7610	0,42		301,6151		7,46
BBB	264,1066	5,16		299,6877		0,26
BB	257,8787	86,91		292,4319		0,09
B	253,4789	5,91		287,2783		0,01
CCC	221,7835	0,24		250,3898		0,00
Défaut	151,5983	1,29		168,6628		0,02

L'analyse du portefeuille est obtenue en croisant les valeurs des deux obligations. Par conséquent, nous obtenons une matrice à 64 éléments (tableau 11), montrant la migration potentielle de chaque obligation dans les différents *ratings* sur un horizon d'un an. Cette analyse pourra être dupliquée dans le cadre de "n" portefeuilles.

**Tableau 11 : Migrations potentielles des valeurs du portefeuille**

BB/AA		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Défaut
		302,4434	302,1661	301,6151	299,6877	292,4319	287,2763	250,3898	168,6628
AAA	266,4702	568,9136	568,6363	568,0853	566,1579	558,9021	553,7485	516,86	435,133
AA	266,2323	568,6757	568,3984	567,8474	565,92	558,6642	553,5106	516,6221	434,8951
A	265,761	568,2044	567,9271	567,3761	565,4487	558,1929	553,0393	516,1508	434,4238
BBB	264,1066	566,55	566,2727	565,7217	563,7943	556,5385	551,3849	514,4964	432,7694
BB	257,8787	560,3221	560,0448	559,4938	557,5664	550,3106	545,157	508,2685	426,5415
B	253,4789	555,9223	555,645	555,094	553,1666	545,9108	540,7572	503,8687	422,1417
CCC	221,7835	524,2269	523,9496	523,3986	521,4712	514,2154	509,0618	472,1733	390,4463
Défaut	151,5983	454,0417	453,7644	453,2134	451,286	444,0302	438,8766	401,9881	320,2611

Dans un deuxième temps, nous allons nous appliquer à l'estimation des migrations possibles des deux obligations formant le portefeuille, sur une période d'un an (cf. tableau 12). Le résultat s'obtient en multipliant les probabilités d'apparition de chacune de ces obligations. Comme nous l'avons précisé auparavant, on suppose que les obligations du portefeuille sont totalement indépendantes, i.e qu'il n'y a pas de risques de corrélation qui biaiserait les résultats (le problème des corrélations sera abordé en détail dans le point II.B.2.2). Cette hypothèse d'indépendance est forte mais simplificatrice. Au final, on obtient le tableau suivant :

**Tableau 12 : Probabilité de migration du portefeuille de deux obligations**

BB/AA		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Défaut
		1,60%	90,55%	7,46%	0,26	0,09	0,01	0,00	0,02
AAA	0,02%	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
AA	0,05%	0,00	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
A	0,42%	0,01	0,38	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
BBB	5,16%	0,08	4,67	0,38	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
BB	86,91%	1,39	78,70	6,48	0,23	0,08	0,01	0,00	0,02
B	5,91%	0,09	5,35	0,44	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
CCC	0,24%	0,00	0,22	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Défaut	1,29%	0,02	1,17	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Voici la matrice finale qui nous permet de calculer la VaR par la méthode de la variance.

Or la formule mathématique de la variance est de la forme :

$$\text{Variance} = \sum_{i=1}^n P_i(x_i - E(x_i))^2$$

Soit,

$$\text{Variance} = \sum_{i=1}^{64} P_i[x_i - E(X)^2] = P_1(x_1 - E(X))^2 + P_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + P_{64}(x_{64} - E(X))^2$$

Dans notre exemple, la moyenne est égale à 558.55 FRF; la variance est de 154.15 et l'écart type est égale à 12.42 FRF (détail des calculs cf. annexe 3).

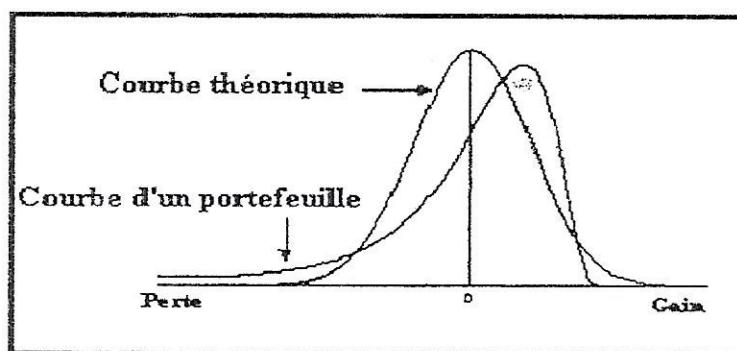
Comme pour la méthode historique, nous pouvons estimer la VaR de ce portefeuille suivant les différents seuils de risque.

Tableau 13 : Estimation de la VaR pour un portefeuille de deux obligations, dans le cadre de la méthode de l'écart type.

	Zp	E(Lt)	ET(Lt)	VaRp
Risque de 1%	2.3263	558.55	12.42	587.44
Risque de 5%	1.6449	558.55	12.42	578.98
Risque de 10%	0.8416	558.55	12.42	569.00

Nous avons supposé que le portefeuille suivait une distribution normale centrée. Cependant, les courbes issues de cas pratiques sont en général leptokurtique. Le calcul théorique nous indique qu'un écart type de 1.97 correspond à un risque associé de 2.5 %. Par conséquent le niveau de dégradation moyen serait de,  $1.97 \times 12.42$ , soit 24,46 FRF. Pour un risque théorique de 2.5 %, le portefeuille prendrait la valeur de 530.14 FRF. Cependant, la valeur de notre portefeuille ne représente pas un niveau de risque de 2.5 % mais de 2.7 %. On peut observer que l'analyse perd en précision en cas de dégradation de rating très importante.

Graphique 5 : La courbe réelle d'un portefeuille



Source: CreditMetrics™

□ Le taux de recouvrement :

Il est important d'introduire le concept de taux de recouvrement. La partie la plus délicate à estimer est sans doute le risque de défaut total de la contrepartie et donc le calcul de la valeur de l'actif financier lors du défaut. En effet, en cas de défaillance de la contrepartie, il peut se produire deux événements : a) la perte totale de la valeur future de l'actif financier ou b) une perte sèche d'une partie de la valeur de l'actif. Il faut

que l'établissement prenne en compte la possibilité de recouvrir une partie (ou la totalité) de la dette. Il lui est alors nécessaire choisir un taux de recouvrement qui correspond au *rating* de sa contrepartie et à la classe d'âge des instruments utilisés (cf. annexe 7). Bien que cette analyse se révèle nécessaire, l'analyse des effets de chaque classe d'âge sur la migration potentielle des contreparties reste jusqu'à ce jour un secteur du risque peu étudié. Les gestionnaires du risque se retrouvent souvent impuissants lorsqu'ils doivent étudier des portefeuilles très volumineux.

### II.B.2.2 Cas n°2 : les actifs du portefeuille sont corrélés

Il y a une grande différence entre une stratégie de diversification dans le cas du risque de marché et du risque de crédit. Dans le premier cas, il suffit de diversifier son portefeuille, pour éliminer le risque (excepter le cas du risque non diversifiable). Cependant la diversification s'avère être une mécanique plus périlleuse dans le second cas. En effet, il ne faudra pas oublier de diversifier son portefeuille par rapport aux types d'instruments utilisés, aux types de contreparties, aux secteurs, aux lieux géographiques, etc. La notion de corrélation des risques de crédit a été développée dans des études récentes de Gollinger et Morgan ainsi que Stevenson et Fadij. La conclusion de leur rapports se résume par "la grande difficulté à estimer les risques de corrélations". Les méthodologies que nous utiliserons dans la suite de notre développement proviennent des études menées par la JP Morgan.

Comme dans le cas de l'analyse du risque de marché d'un portefeuille, le risque d'un actif financier dépend de son propre risque et du risque couru sur les autres actifs financiers. La corrélation du risque peut se présenter sous la forme d'une matrice Variance-Covariance :

$$\begin{pmatrix} VAR(R1); COV(R1, R2); \dots; COV(R1, Ri); \dots; COV(R1, Rn) \\ COV(R2, R1); VAR(R2); \dots; COV(R2, Ri); \dots; COV(R2, Rn) \\ \vdots \\ \vdots \\ COV(Rn, R1); COV(Rn, R2); \dots; COV(Rn, Ri); \dots; VAR(Rn) \end{pmatrix}$$

R1, ..., Rn : actifs financiers du portefeuille

L'estimation des corrélations peut s'obtenir par des voies très différentes. Ce mémoire en retiendra deux plus particulièrement. L' "*asset value model*" et l' "*estimating asset correlation*".

### II.B.2.2.1 Introduction à l' "estimating asset correlation"

Cette méthode, développée par Merton (1974) et Kealhofer (1995), consiste à utiliser les informations (sur des entreprises, des secteurs, etc.) fournies par des organismes indépendants. L'intérêt consiste à alléger le système de résolution mathématique en transformant un certain nombre de variables endogènes en variables exogènes. Les informations nécessaires au gestionnaire pour établir les corrélations des contreparties à l'intérieur du portefeuille sont les suivantes :

- des indices géographiques (e.g France, Allemagne, etc.),
- des indices industriels sectoriels (e.g aéronautique, métallurgie, etc.),
- la volatilité de chaque industrie dans son secteur et son lieu géographique, etc.

### II.B.2.2.2 : Le principe de "*l'estimating asset correlation*" à travers un exemple

Il faut que le gestionnaire possède l'ensemble des indices nécessaires à la construction des corrélations de son portefeuille. L'ensemble de ces indices lui seront fournis par des sociétés de services telles que Moody's ou S & P's. Afin de comprendre la mécanique propre à ce modèle, reprenons le portefeuille étudié précédemment composé des deux entreprises : une française notée C1, et une britannique notée C2. Notre but est d'examiner la corrélation entre ces deux contreparties. Supposons que C1 se situe sur le segment de marché de "l'industrie automobile", et que la variation de ces bénéfices par action soient expliquée à 75 % par les fluctuations de l'indice "industrie automobile" en France. Les 15 % restant représentent les fluctuations spécifiques dues à l'entreprise, indépendamment du secteur. De la même façon, supposons que l'entreprise C2 soit diversifiée sur plusieurs secteurs : 60 % sur le segment de l'assurance et 40 % sur le segment bancaire. Pour finir, considérons que seuls 10 % des fluctuations sont propres à l'entreprise C2.

Tableau 14: Volatilités et corrélations entre les deux entreprises C1 et C2:

<u>Indice</u>	Volatilité	France	GB.	GB.
		/ Indus. Auto.	/ Assurance	/ Banque
France / Indus. Auto.	2.40 %	1	0.20	0.05
GB. / Assurance	2.09 %	0.20	1	0.34
GB. / Banque	1.25 %	0.05	0.34	1

Soient "e" et "ê" deux variables aléatoires normales représentants respectivement les profits standardisés générés par les fluctuations à la hausse des secteurs, et les profits standardisés propre aux entreprises C1 et C2.

- 1<sup>er</sup> étape : calcul de l'équation du profit générée par l'entreprise française

Pour cela, il faut supposer que le profit engendré suit une loi centrée réduite. Le profit générée par l'entreprise automobile française est de la forme :  $e^{c1} = (a_1 \times e) + (a_2 \times \hat{e})$ , avec  $a_1$  et  $a_2$  les coefficients de pondération correspondant respectivement à la variation expliquée des secteurs automobile français et à la variation due à l'entreprise.

$$a_1 = 75 \% = 0.75,$$

$$\text{or } a_1^2 + a_2^2 = 1 \text{ d'où } a_2 = (1 - a_1)^{1/2} = 66 \% = 0.66$$

L'équation du profit générée par C1 est de la forme :

$$e^{C1} = 0.75 \times e^{FRANCE, AUTOMOBILE} + 0.66 \times \hat{e}^{C1}$$

- 2<sup>ème</sup> étape : calcul de l'équation du profit générée par l'entreprise britannique

Le profit générée par l'entreprise britannique est de la forme :  $e^{c2} = [(b_1 + b_2) \times e] + (b_3 \times \hat{e})$ , où  $b_1$  et  $b_2$  les coefficients de pondération correspondant à la variation expliquée des secteurs banque/assurance britannique,  $b_3$  à la variation expliquée de l'entreprise britannique.

Dans ce cas, la formule de la volatilité suit la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{b_1^2 \sigma_1^2 + b_2^2 \sigma_2^2 + b_3^2 \sigma_3^2 + 2b_1 b_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + 2b_2 b_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 + 2b_1 b_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3}$$

Dans cet exemple nous obtenons :

$$\sigma = 0.015$$

D'après les hypothèses initiales, seuls 10 % des fluctuations sont propres à l'entreprise C2. Il est donc nécessaire de pondérer les volatilités des deux secteurs :

$$\omega_{GB-ASSURANCE} = (1 - f) \times \frac{b_1 \times \sigma_{GB-ASSURANCE}}{\sigma} \quad \omega_{GB-BANQUE} = (1 - f) \times \frac{b_2 \times \sigma_{GB-BANQUE}}{\sigma}$$

f : fluctuations (en pourcentage) propres à l'entreprise C2.

$\omega_{GB-ASSURANCE}$  : volatilité pondérée du secteur assurance

$\omega_{GB-BANQUE}$  : volatilité pondérée du secteur banque

Au final, le gestionnaire se trouve face à un système de deux équations à deux inconnues:

$$\frac{0.9 \times 0.6 \times \sigma_{GB\text{-ASSURANCE}}}{\sigma} = \frac{0.9 \times 0.6 \times 2.09\%}{0.015} = 0.75$$

$$\frac{0.9 \times 0.6 \times \sigma_{GB\text{-BANQUE}}}{\sigma} = \frac{0.9 \times 0.6 \times 1.25\%}{0.015} = 0.30$$

Encore une fois, il faut supposer que le profit engendré suit une loi centrée réduite :

$$\sigma_T^2 = 1$$

Par conséquent

$$\sqrt{1 - 0.9^2} = 0.19$$

Finalement, l'équation du profit généré par l'entreprise britannique est de la forme :

$$e^{C^2} = 0.75 \times e^{GB,ASSURANCE} + 0.3 \times e^{GB,BANQUE} + 0.19 e^{C^2}$$

3<sup>ème</sup> étape : calcul de la corrélation des actifs de son portefeuille :

$$\rho_{C1C2} = a_1 \times w_1 \times \rho_{FRANCE\text{-AUTOMOBILE},GB\text{-ASSURANCE}} + a_1 \times w_2 \times \rho_{FRANCE\text{-AUTOMOBILE},GB\text{-BANQUE}}$$

$$\rho_{C1C2} = (0.75 \times 0.75 \times 0.20) + (0.75 \times 0.3 \times 0.05) = 0.12$$

Au final, la corrélation dans le portefeuille sera de 0.12.

4<sup>ème</sup> étape : calcul du risque du portefeuille :

Grâce à l'estimation des corrélations, le calcul de la variance va être affiné ; il ne suivra plus la loi mathématique suivante, utilisée jusqu'alors (cf. II.B.2.1) :

$$Variance = \sum_1^{64} P_i [x_i - E(X)]^2 = P_1(x_1 - E(X))^2 + P_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + P_{64}(x_{64} - E(X))^2$$

Le risque du portefeuille (i.e sa variance) suit maintenant un modèle de la forme :

$$Variance = \alpha^2 Var(C1) + (1 - \alpha)^2 Var(C2) + 2\alpha(1 - \alpha) Cov(C1, C2)$$

$\alpha$  : coefficient de pondération entre de chaque actif dans le portefeuille, ici  $\alpha=0.5$

Or, l'équation du coefficient de corrélation est de la forme :

$$\rho_{C1,C2} = \frac{\text{Cov}(C1, C2)}{ET(C1) \times ET(C2)}$$

Soit  $\text{Cov}(C1, C2) = (0.12 \times 0.024 \times 0.015) = 4.32 \times 10^{-5}$ ,

Le résultat de la variance sera obtenu directement en utilisant la définition ci-dessus,

$\text{Variance} = (0.5 \times 0.24^2) + (0.5^2 \times 0.015^2) + (2 \times 0.5 \times 4.32 \times 10^{-5})$ , soit  $1.44 \times 10^{-4}$ .

Pour finir, il suffira de réintroduire la variance dans la formule suivante ;  $\text{VaR}_p = E(L_t) + Z_p \text{ET}(L_t)$  afin d'estimer la VaR du portefeuille au seuil de risque choisi.

#### II.B.2.2.3 Le principe de "l'asset value model"

Cette méthodologie, développée par Merton en 1974, donne tout son sens aux méthodes d'estimation dynamique du risque de crédit. Elle définit les migrations de *rating* comme étant la conséquence des fluctuations des valeurs des actifs du portefeuille. L'utilisation de cet outil statistique sera consacrée dans l'étude de la méthode de "Monte Carlo", au point II.B.4.

### II.B. 3 L'approche par le percentile

Le gestionnaire cherche à déterminer la somme des prix des deux obligations pour le cinquième percentile. (Ce n'est qu'une proposition, sachant qu'en générale les dix premiers percentiles sont utilisés pour définir un niveau de risque acceptable plus ou moins astreignant). Le tableau 9 présente les pourcentages de risque de migration de qualité de crédit pour chacune des obligations. A partir de ce tableau, il faut cumuler les pourcentages, en commençant par la dernière cellule (i.e défaut) de la colonne de l'obligation BB, jusqu'à obtention d'un résultat supérieur ou égal à 5 %. Puis, dans un deuxième temps, il faut le mettre en relation avec l'obligation AA. En les croisant on obtient la cellule comportant 5,35 %. Pour finir, il faut s'appuyer sur le tableau 13, et regarder à quel prix correspond ce pourcentage, soit 555,64 FRF. Lorsqu'on défalque ce prix au prix moyen du portefeuille, on obtient la valeur en francs correspondant au risque de crédit à 5 %, soit (558,55 - 555,64) ou encore 2,91 FRF.

## II.B. 4 La méthode de "Monte Carlo"

La simulation de "Monté Carlo" est un concept dynamique qui permet de compléter les méthodes jusqu'alors utilisées et d'en affiner les résultats. L'approche de "Monté Carlo" se décline en trois volets :

- dans un premier temps, il faut définir le *rating* de chaque débiteur dans le portefeuille
- puis, le gestionnaire doit réévaluer la valeur de son portefeuille par rapport aux différents types de migrations possibles des débiteurs en utilisant "*l'asset value model*"
- pour finir, il ne restera plus au gestionnaire qu'à générer un ensemble de scénarios qui permettront d'évaluer la valeur du portefeuille par rapport à son risque de défaut correspondant.

Pour illustrer la méthode, nous allons l'appliquer à un portefeuille fictif composé de trois actions provenant de trois entreprises différentes. Pour simplifier le raisonnement, nous supposerons que ces entreprises sont toutes les trois européennes.

- 1<sup>er</sup> étape

La première entreprise E1, sera noté BB, la seconde entreprise E2 sera une BBB et la troisième aura un *rating* A.

Comme pour les cas précédents les migrations de *rating* envisagés sont les suivants :

Tableau 15 : Tableau des migrations de crédit des trois entreprises E1, E2 et E3

<b>Rating</b>	<b>E1 (BB)</b>	<b>E2 (BBB)</b>	<b>E3 (A)</b>
<b>AAA</b>	0.02%	0.00%	0.64%
<b>AA</b>	0.09%	0.26%	7.46%
<b>A</b>	0.45%	4.63%	92.44%
<b>BBB</b>	4.76%	88.48%	5.51%
<b>BB</b>	86.91%	5.16%	0.42%
<b>B</b>	6.35%	0.54%	0.13%
<b>CCC</b>	2.05%	0.62%	0.00%

Supposons que les profits normalisés (i.e suivant une loi normale centrée réduite) soient les suivants :

Tableau 16 : Profits normalisés suivant les scénarios

Scénarios	E1 (BB)	E2 (BBB)	E3 (A)
1	-0.6605	-0.8650	-0.6732
2	-1.1070	-1.9986	0.2876
3	-0.8564	0.0559	2.6504
4	0.5325	-0.1432	-1.1532
5	0.3642	-0.5634	0.2833
6	-0.1253	-0.5432	-1.9327
7	0.6875	1.4980	-1.6503
8	1.0783	-0.6310	-1.7732
9	1.6543	2.1020	1.1532
10	0.0136	0.3965	0.3635

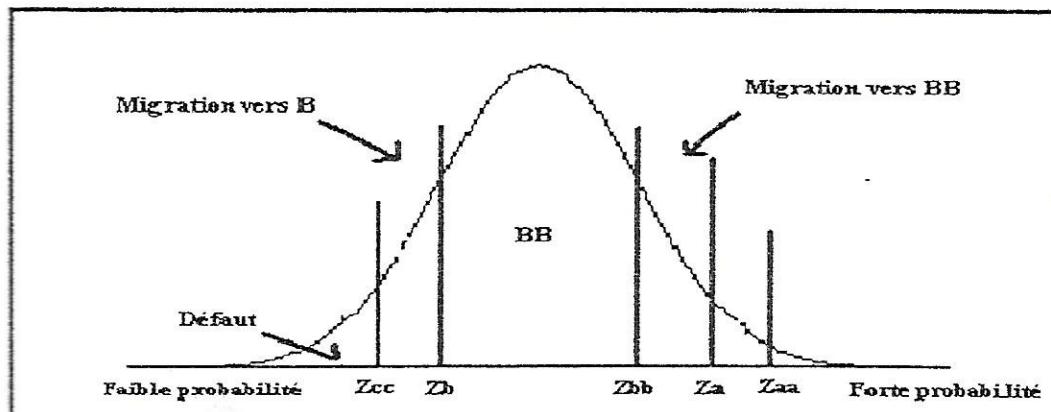
Ces résultats doivent être comparés avec la table des seuils de migrations de l'"asset value model" :

Tableau 17 : Seuils de migration

Scénarios	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Zaaa	-3.53	3.48	3.12	3.54	3.43	3.14	2.86
Zaa	-2.10	2.05	1.98	2.78	2.93	2.89	2.86
Za	-1.76	-1.59	-1.51	1.53	2.39	2.51	2.63
Zbbb	-2.13	-1.70	-2.30	-1.49	1.37	1.74	2.11
Zbb	-2.70	-2.48	-2.72	-2.18	-1.23	0.255	1.74
Zb	-2.89	-2.75	-3.19	-2.75	-2.04	-0.51	1.02
Zccc	-2.85	-3.10	-3.24	-2.91	-2.30	-1.58	-0.85

Ce tableau peut être représenté de la manière suivante :

Graphique 6 : Représentation graphique des seuils de migration



Source : CreditMetrics™

2<sup>ème</sup> étape

La seconde étape se caractérise par l'attribution des nouveaux *ratings* suivant les scénarios :

Tableau 18 : Détermination des nouveau *rating* suivant les scénarios

Scénarios	Profit			Rating		
	E1 (BB)	E2 (BBB)	E3 (A)	E1 (BB)	E2 (BBB)	E3 (A)
1	-0.6605	-0.8650	-0.6732	BBB	A	AA
2	-1.1070	-1.9986	0.2876	BBB	BBB	AA
3	-0.8564	0.0559	2.6504	BBB	A	AAA
4	0.5325	-0.1432	-1.1532	BBB	A	AA
5	0.3642	-0.5634	0.2833	BBB	A	AA
6	-0.1253	-0.5432	-1.9327	BBB	A	A
7	0.6875	1.4980	-1.6503	BBB	A	A
8	1.0783	-0.6310	-1.7732	BBB	A	A
9	1.6543	2.1020	1.1532	A	AA	AA
10	0.0136	0.3965	0.3635	BBB	A	AA

Dans un troisième temps, nous allons recalculer la valeur du portefeuille pour chaque scénario.

Tableau 19 : Calcul des valeurs du portefeuille suivant les scénarios

Scénarios	Rating			Valeur			Valeur Totale
	E1 (BB)	E2 (BBB)	E3 (A)	E1 (BB)	E2 (BBB)	E3 (A)	
1	BBB	A	AA	3.6729	2.102	1.895	7.6699
2	BBB	BBB	AA	2.2709	1.997	1.895	6.1629
3	BBB	A	AAA	3.6729	1.997	1.605	7.2749
4	BBB	A	AA	3.6729	1.997	1.895	7.5649
5	BBB	A	AA	3.6729	1.997	1.895	7.5649
6	BBB	A	A	3.6729	1.997	1.965	7.6349
7	BBB	A	A	3.6729	1.997	1.965	7.6349
8	BBB	A	A	3.6729	1.997	1.965	7.6349
9	A	AA	AA	3.8928	2.112	1.895	7.8998
10	BBB	A	AA	3.6729	1.997	1.895	7.5649

La moyenne de l'ensemble des scénarios est de 7.4607 millions de FRF et la variance est de 0.2310 millions de FRF. Le tableau 21 résume les différentes valeurs de la VaR suivant les niveaux de risques prédéfinis.

Tableau 20 : Estimation de la VaR pour un portefeuille de trois entreprises, dans le cadre de la méthode de Monté Carlo.

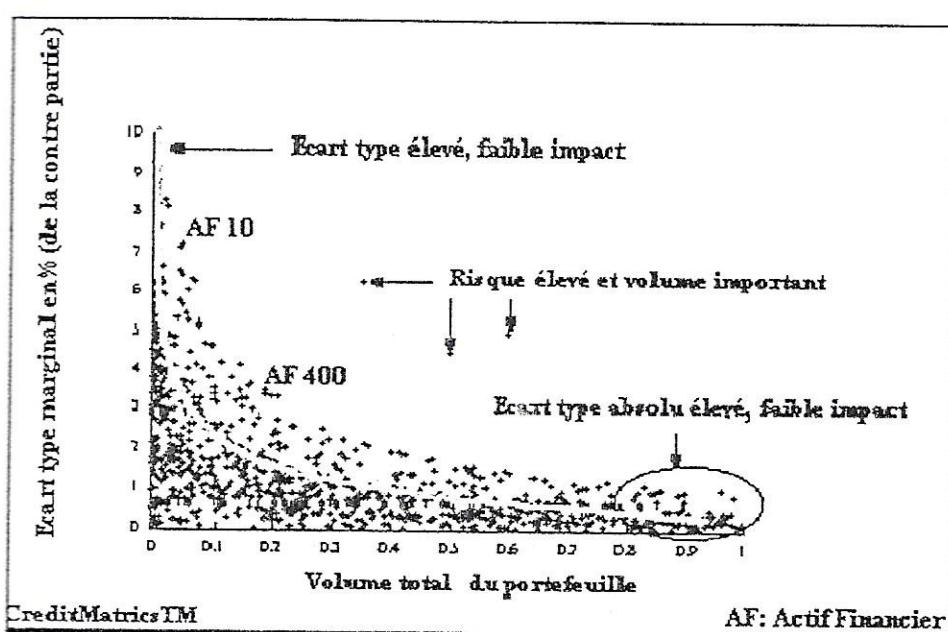
	Zp	E(Lt)	ET(Lt)	VaRp
Risque de 1%	2.3263	7.4607	0.2310	7.9981
Risque de 5%	1.6449	7.4607	0.2310	7.8407
Risque de 10%	0.8416	7.4607	0.2310	7.6551

□ Cas général d'un portefeuille à "n" actifs financiers :

Si l'on veut affiner plus l'analyse, il est possible d'estimer le risque marginal du portefeuille. Le risque marginal est représenté par la différence entre le risque total du portefeuille et le risque d'un actif financier choisi dans ce même portefeuille.

Lorsque l'on représente graphiquement l'écart type marginal par rapport au volume total du portefeuille, on obtient le graphique 7 :

Graphique 7 : Analyse du risque marginal d'un portefeuille



Voici comment il faut lire ce graphique d'aide à la prise de décision : les points qui se situent sur la partie extrême droite constituent l'ensemble des positions qui généreraient les plus grosses pertes en cas de défaut. Néanmoins, leur probabilité d'apparition est relativement faible. Les positions les plus risquées se situent dans la partie en haut et à gauche. Cependant comme elles ne constituent qu'une petite part du volume du portefeuille exposé au risque, l'apparition de ces événements, bien qu'il soit fort probable, n'affectera que faiblement la rentabilité du portefeuille. Pour finir, l'ensemble des points non cités précédemment représente l'ensemble des risques dont les probabilités d'apparition sont non négligeables et dont les impacts sur la profitabilité du portefeuille seraient importants (l'ensemble des points se situant en dessous de la courbe, cf. graphique 7). Cet ensemble de ces points est la partie la plus volatile du portefeuille.

Ce graphique permet d'arbitrer entre le niveau de risque choisi et la quantité de positions face à ce risque. En règle générale, une prise de risques importants est

tolérée lorsque le volume de risque est relativement faible, et inversement. Cependant, la réalité n'est pas statique : la qualité de crédit peut varier et amener un ensemble de positions vers des volumes et des risques plus importants que prévus.

Cette analyse permet de déterminer si les profits dégagés par les positions pourraient compenser les risques potentiels. En général, il est admis que le prix des actifs est déterminé soit par rapport aux risques courus, soit dans le cas des *capital asset pricing models* par rapport aux corrélations des autres positions. En pratique cela signifie que pour deux positions identiques (même maturité, credit rating, prix et bénéfice) gérées par deux managers possédant des structures de portefeuilles différentes, le risque des deux actifs pourra être réduit, sans que les bénéfices espérés ne soient altérés par simple échange d'actifs financiers.

Par conséquent, les *managers* peuvent quantifier le risque de chaque position, mais surtout cet outil leur permet de repérer l'influence d'un actif sur la composition de la concentration du risque. Il ne restera plus au *manager* qu'à échanger les positions trop risquées pour en obtenir d'autres moins risquées, *ceteris paribus*.

## II.C La VaR et le calcul du risque de crédit généré par les instruments du hors-bilan.

### II.C.1 Les instruments du hors-bilan ne dépendant pas des variables de marché :

#### II.C.1.1 La VAR et les *loans commitments* :

Les garanties (cautions, engagements, etc.) se subdivisent en deux parties : une partie tirée (i.e empruntée) et une partie qui n'est pas encore empruntée (la partie potentiellement tirée). Sur la première subdivision, le débiteur devra s'acquitter d'un intérêt, comme dans le cas d'un prêt. Quant à la partie non tirée, elle sera taxée d'une prime, dépendante du *rating* du débiteur, fixée lors de l'initiation du contrat (cf. annexe 8). Par conséquent, la migration de qualité de crédit du débiteur devra être prise en compte dans la capacité de remboursement de celui-ci aussi bien sur la partie empruntée que sur la partie non tirée.

Pour évaluer le risque de crédit couru dans le cas d'un portefeuille contenant des *loans commitments*, nous utiliserons une méthode développée dans CreditMetrics™ de la JP Morgan. Considérons un *loan commitment* à cinq ans pour une somme de

240 000 FRF assujettie à un taux fixe (e.g 10 %) consentie à une contrepartie notée BB. Si la contrepartie décide de conserver 65 % non tirée et 35 % en emprunt, soit respectivement 156 000 FRF et 84 000FRF. La partie bloquée sera taxée d'une prime de 0,04 %. L'analyse doit prendre en considération deux types de migration possibles : d'une part la migration de qualité de risque de crédit, puis d'autre part les variations (en volume) que peuvent subir les parties empruntées et bloquées jusqu'à maturité. Pour estimer le risque de crédit total il nous faut deux types d'information : d'une part la moyenne des défauts de la partie empruntée et la proportion de la partie non tirée empruntée en cas de défaut.

Tableau 21 : Moyenne des défauts (en %) de la partie empruntée et proportion de la partie non tirée, empruntée en cas de défaut suivant les catégories de rating

<b>Rating</b>	<b>Moyenne des défauts (en %) de la part empruntée</b>	<b>Part de la partie non tirée empruntée en cas de défaut</b>
AAA	0.1%	69%
AA	1.6%	73%
A	4.6%	71%
BBB	20.0%	65%
BB	46.8%	52%
B	63.7%	48%
CCC	75.0%	44%

Source: Asarnow & Marker, 1995

Grâce à cette table, nous pouvons maintenant estimer quelle serait la part débloquée par notre contrepartie, dans l'éventualité où elle ne pourrait pas honorer son contrat. En cas de défaut, BB devrait débloquer 52 % de 156 000 FRF soit 81 120 FRF. Si l'on ajoute cette somme au 35 % déjà utilisé, on obtient (84 000 + 81 120), soit 16 5120 FRF.

Comme nous l'avons souligné auparavant, il va y avoir une migration dans la qualité de crédit de la contrepartie. Voici la méthode proposée par la CreditMetrics™ : si l'on suppose que notre contrepartie passe de BB à CCC, alors la position empruntée passe de 46,8 % à 75,0 %. En d'autres termes, la position non tirée migre de 53,2 % à 25 %, elle a donc subit une réduction de  $[(53,2\% - 25\%) / 53,2\%] \times 100$ , soit 53,00 %. Donc  $(53,00\% \times 75,00\%)$ , soit 37,50 % d'emprunt supplémentaire devront être nécessaire en cas de migration vers CCC. Nous pouvons initialiser le mode opératoire pour calculer le pourcentage d'emprunt supplémentaire qu'il faudrait que la contrepartie AA s'acquitte dans chacune des migrations de crédit possibles.

Tableau 22 : Niveau de l'emprunt à terme suivant la migration

Moyenne absence de défaut sur l'emprunt initial	Emprunt Initial	Pourcentage de migration de quantité non tirée vers tirée	Valeur à bloquer (-) ou à emprunter (+)	Emprunt Final
AAA	99,90%	156000	-88%	-136939,85
AA	98,40%	156000	-85%	-132541,353
A	95,40%	156000	-79%	-123744,361
BBB	80,00%	156000	-50%	-78586,4662
BB	53,20%	156000	0%	0,00
B	36,30%	156000	32%	49556,391
CCC	25,00%	156000	53%	82691,7293
				238691,729

Ce tableau se lit comme suit, en cas de migration de qualité de crédit de BB vers AAA, l'emprunt de la contrepartie se verra réduit à 19 060,15 FRF, en cas de migration vers CCC alors il devra s'acquitter d'un emprunt supplémentaire totalisant 238 691,73 FRF. Il nous reste à traiter le changement de la valeur de la prime perçue sur la partie non empruntée. Dans notre exemple la migration de qualité de BB à CCC a fait augmenter le taux de prélèvement moyen de la partie non tirée de 0.18 % à 1.20 % (cf. annexe 8).

### II.C.1.2 La VaR et les *financial letters of credit* :

Ce document donne le droit (mais pas l'obligation) à un établissement d'emprunter des capitaux à n'importe quel moment, et quelque soit sa notation auprès d'une contrepartie (e.g banque). Le risque généré par cet instrument peut être comparé et analysé comme celui des obligations. Le contrôleur de gestion devra suivre les mêmes démarches que celles présentées dans le point II.C.1, en utilisant cette fois les *spreads* de crédit et les taux de recouvrements utilisés pour des prêts.

### II.C.2 Les instruments du hors-bilan assujettis aux variables de marchés :

#### II.C.2.1 Etat des lieux :

Grâce à ces nouveaux instruments, les banques, les compagnies d'assurances, les mutuelles, etc. ont la possibilité de réduire la concentration de risque dans leurs portefeuilles. Les gestionnaires de trésorerie peuvent créer des actifs "synthétiques" (i.e les produits dérivés) sur mesure qui leur permettent d'atteindre des objectifs définis *a priori*. Les swaps sont des instruments flexibles qui permettent d'exploiter ces possibilités de transfert de risque de la partie hors-bilan.

A l'inverse de l'achat de titres de créances émis par des établissements, comme les titres de créances négociables, les obligations ou autres certificats de dépôts, lorsque les gestionnaires font intervenir les swaps, ils ne peuvent pas chiffrer précisément le risque de crédit lors de l'initiation de la transaction. En effet lorsqu'un établissement initie un contrat swap de taux d'intérêt de nominal 100 à 3 ans, dans lequel il s'engage à payer un taux fixé à l'avance en échange d'un taux volatile (e.g Pibor), le montant du risque que l'établissement court sur le contrat peut se révéler bien différent du montant du nominal. D'une part parce que le montant du nominal n'est jamais échangé, il ne peut donc pas représenter le montant exact du risque induit par le contrat. D'autre part, il est possible que la contrepartie n'honore pas la "jambe" de son swap.

La particularité des swaps est d'être assujettis au risque de marché et au risque de crédit, au grand malheur des gestionnaires à qui la tâche se révèle encore plus périlleuse. La difficulté ne s'arrête pas là, la gestion des swaps s'avère être une mécanique très délicate car la volatilité du risque de marché est grande. A l'initiation du contrat le risque peut être considéré comme nul, en effet le prix du swap (i.e son taux fixe) est par construction celui qui conduit, en l'absence ultérieure des conditions de marché (i.e la modification des taux d'intérêt), à équilibrer les flux payés et reçus sur les deux jambes du swap. La nullité du risque au début de la transaction vient du fait que le taux fixe, sur la première jambe du swap, est connu dès l'initiation du contrat et sera constant, comme l'indique son nom, jusqu'à la date de règlement / livraison. Le taux variable, taux applicable sur la seconde jambe du swap n'est connu que pour la première période. Les *fixing* des taux variables (ici le Pibor) seront réactualisés tous les trois mois et contribueront à réactualiser les conditions de marché. En théorie, il est possible d'anticiper les valeurs successives du taux variable et donc la valeur présente des flux d'intérêt qui sera perçue par l'établissement sur toute la durée du contrat à partir du taux variable initié au début du contrat<sup>7</sup>. A supposer que le swap soit initié aux conditions de marché, les valeurs deux jambes du swap sont alors identiques en valeur absolue. Par conséquent, les parties ne se doivent rien, le risque est donc nul au début de l'opération.

Cependant, les anticipations des mouvements des taux n'est pas une science exacte. Au final, sur la jambe des taux variables, les taux Pibor qui seront réellement fixés à chaque période pourront être quelques peu différents de ceux prévus à l'initiation du contrat. En conséquence, plus la maturité est grande, plus les taux Pibor ont tendance à s'éloigner des taux prévus, ce qui va provoquer un déséquilibre sur le swap. Une des

---

<sup>7</sup> Le principe d'arbitrage parfait des marchés conduit à la formalisation mathématique suivante :  $(1 - R_{t,n}) \times (1 + R_{t+n,n}) = 1 + R_{t,2n}$ , avec  $R_{t,n}$  (taux à "n" mois connu à la date "t"),  $R_{t+n,n}$  (taux à "n" mois à la date "t+n") et  $R_{t,2n}$  (taux à "2n" mois également connu à la date "t").

parties devra alors s'acquitter d'une dette plus importante que l'autre. Dans ce cas, l'analyse du risque de crédit devient délicate. En plus, comme le niveau de risque évolue au cours du temps, le risque de taux peut évoluer sur une ou l'autre des parties. Dans le cas de notre établissement, il se peut que les taux évoluent dans un sens qui le place "perdant", c'est-à-dire que le différentiel entre le taux fixe et le taux variable est négatif (i.e swap est appelé "out-of-the-money"). Dans ce cas de figure, le risque de contrepartie sera alors nul pour notre établissement. Symétriquement, il est possible que notre établissement ait à supporter l'ensemble des risques de crédit, lorsque les taux ont évolué en sa faveur (i.e "in-the-money"). Au final, il devient très difficile de prévoir le niveau de risque et le niveau des pertes potentielles encourues sur un achat de swaps.

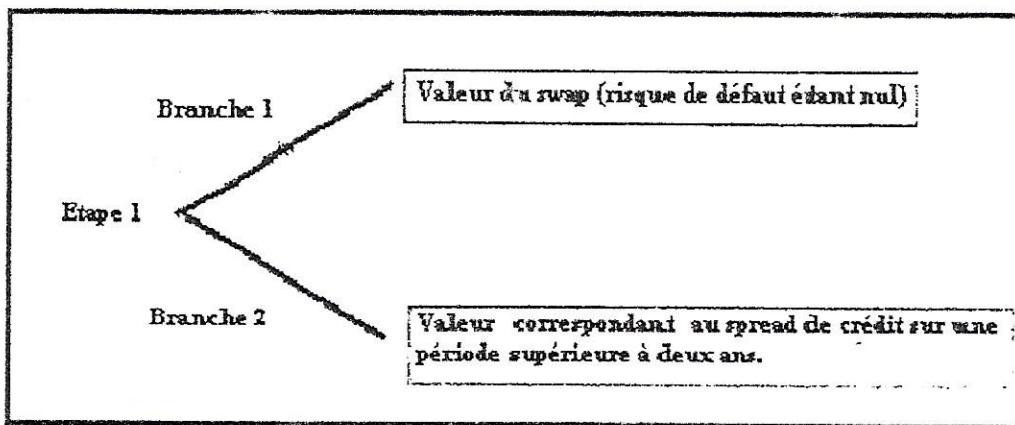
La difficulté d'évaluer le montant du risque est dû au fait que le risque de défaillance englobe deux types de risques bien distincts, un risque de marché (la possibilité que les prix ou les taux se déplacent dans un sens opposé aux anticipations) et un risque de crédit (la possibilité que la contrepartie ne puisse pas honorer sa dette).

Jusqu'à présent la seule possibilité d'estimer le risque de crédit sur un ensemble de positions swap a été, comme dans le cadre du ratio Cooke, de pondérer le nominal du swap de quelques "pourcent", en fonction de sa nature et de sa durée. Le nominal d'un cross currency swap (comportant un risque de taux et un risque de change) et de maturité trois ans sera alors pondéré de manière plus importante qu'un swap monod devise à un an. Cependant, ce mode d'évaluation du risque de crédit est devenu trop imprécis à l'heure où les instruments dérivés de crédit connaissent un développement rapide et une complexité croissante. Le volume des transactions de swaps est passé de zéro au début des années 1990 à 50 millions de dollars en 1997. Par conséquent, un certain nombre d'autres méthodes ont été développées par les établissements privés. Dans le même esprit, les réglementations sur le *netting* (cf. I.B.2.2.2), ou le principe de l'*add-on* (cf. I.B.2.2.1) ont permis aux établissements de réduire encore le montant des limites associées à chaque contrat. Bien que ces deux méthodes donnent une vue relativement précise du risque instantané, elles ne permettent pas d'anticiper la valeur future du risque jusqu'à l'échéance du contrat. A ce jour, la méthodologie la plus achevée, du point de vue opérationnel est celle de la VaR associée au swaps, développée dans la CreditMetrics™.

### II.C.2.2 Les Méthodologies à suivre

Cette partie est certainement la plus sensible et se caractérise par un accroissement de la complexité de l'estimation du risque de crédit. La méthode observée se déroule en deux étapes. Il faut diviser le swap en deux branches (cf. graphique 8) : dans un premier temps nous calculons la valeur du swap en considérant que celui-ci émane d'un état de l'OCDE, c'est-à-dire comportant un risque de défaut nul. Puis, il nous faut évaluer les pertes potentielles de défaut encouru à partir d'un certain horizon que nous définirions ici comme étant de deux ans.

Graphique 8 : Représentation d'un swap



Source : Commission Bancaire, Juin 1996

#### II.C.2.2.1 Les hypothèses du modèle :

Supposons qu'une banque et une entreprise d'investissement entrent dans un contrat swap de taux d'intérêt. La banque reçoit des *cash flows* correspondant à un taux fixe. En contrepartie, elle s'engage à payer un taux Libor à six mois. A la date initiale "t", la valeur totale du *swap mark-to-market* (i.e la valeur actualisée),  $V_t$  sera égale à :

$$V_t = V_{t1} (\text{valeur de la jambe à taux fixe du swap}) - V_{t2} (\text{valeur de la jambe à taux flexible du swap})$$

A l'instant "t", la banque court un risque de défaillance si la partie du swap de la banque est "dans la monnaie" (i.e  $V_t > 0$ ). Symétriquement, sa contrepartie sera en "dehors de la monnaie" (i.e  $V_t \leq 0$ ) et devra s'acquitter du différentiel d'intérêt entre ce qu'elle reçoit et qu'elle ce doit à la banque. En contre partie, l'entreprise d'investissement ne court aucun risque de crédit.

En somme, si l'on note  $E_t$  l'exposition face au risque de crédit à l'instant "t", alors :

$$E_t = V_t \text{ si } V_t > 0 \text{ et } E_t = 0 \text{ si } V_t \leq 0, \text{ ce qui se note aussi } E_t = \max(V_t, 0)$$

### ■ C.2.2.2 Le risque potentiel encouru :

Le risque potentiel encouru est la résultante des variations des prix des sous-jacents durant la période du contrat. Si l'on suppose que le taux fixe Libor à 6 mois est établi à 6,20 %, la maturité du swap soit de trois ans, et que le niveau des taux baisse au moment du règlement / livraison. Par conséquent, la valeur du taux swap que va recevoir l'entreprise sera en dessous de celui fixé à la date initiale du contrat "t". Symétriquement, la valeur du swap que va recevoir la banque aura augmenté.

Ce raisonnement peut être généralisé dans le tableau suivant :

	<b>Augmentation Des taux d'intérêt</b>	<b>Baisse Des taux d'intérêt</b>
<b>Payer un taux fixe (Recevoir un taux variable)</b>	La valeur du swap et le risque de crédit vont augmenter	La valeur du swap et le risque de crédit vont diminuer
<b>Payer un taux variable (Recevoir un taux fixe)</b>	La valeur du swap et le risque de crédit vont diminuer	La valeur du swap et le risque de crédit vont augmenter

### ■ C.2.2.3 La notion de risque de crédit maximum :

A partir de ce moment, les gestionnaires vont calculer le risque maximum qu'ils prennent sur leur position swap. L'exposition maximale face au risque se définit comme étant par exemple, le 95<sup>ème</sup> percentile des valeurs de la distribution d'une transaction à un moment donné. Cette mesure du risque de crédit permet de calculer le montant maximal de crédit qui peut être alloué à une contrepartie. Avec cet indice, le gestionnaire pourra identifier les expositions dont le risque de crédit est plus important qu'à l'initiation du contrat. Dans le même esprit, le gestionnaire peut utiliser la notion de "peak exposure" qui représente le pic de risque potentiel dans le portefeuille. Cette mesure permet au manager de visualiser la date à laquelle les pertes les plus importantes sont anticipées en cas de défaut de sa contrepartie.

### ■ C.2.2.4 La notion de risque de crédit moyen :

Bien qu'il faille être conscient du risque maximum généré par les positions d'un portefeuille, il est peu probable que le scénario catastrophe se produise, i.e l'ensemble des contreparties font défaut en même temps. Le gestionnaire utilisera plutôt le concept de risque de crédit moyen. Pour ceci, il suffit de calculer le risque encouru par le portefeuille à différentes dates dans le futur. Il suffira en suite de calculer la moyenne arithmétique de ces risques sur l'ensemble des périodes choisies.

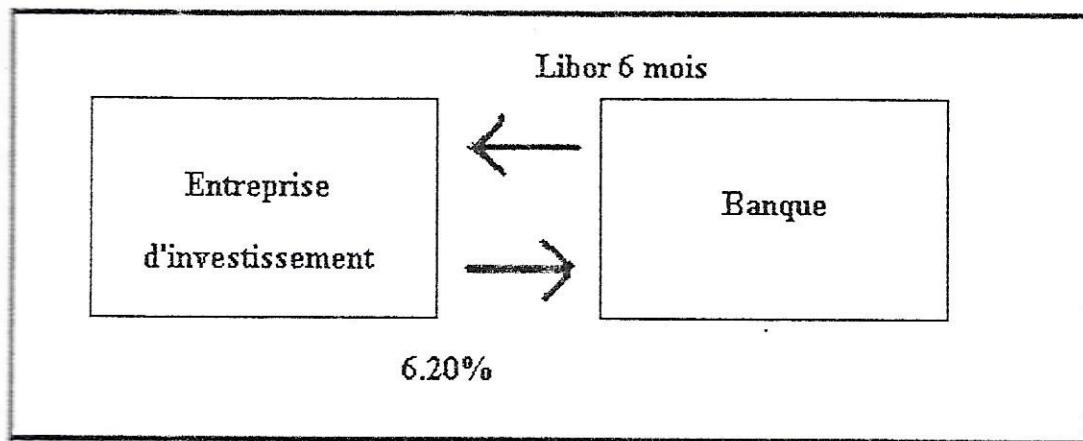
### III.C.2.3 Cas pratique :

Reprendons le cas de notre banque et d'une entreprise d'investissement qui entrent dans un contrat swap défini comme suit :

Date de transaction : 24 janvier 1998  
 Date de maturité : 24 janvier 2001  
 Valeur du notionnel : 10 millions de dollars  
 Taux fixe payé par l'entreprise à la banque  
 Taux fixe : 6.20 %  
 Taux variable : Libor à six mois.

Date de règlement livraison : le 24 juillet et le 24 janvier de chaque année.  
 Détermination du taux Libor : déterminé par avance.

Graphique 9 : Swap d'un Libor contre un taux fixe à 6.20 %



Ceci signifie que la banque et l'entreprise entrent dans un contrat swap de trois ans, de nominal égal à 10 millions de dollars, commençant le 24 janvier 1998. Ce sera cette date qui correspondra à la date initiale notée "t". En conséquence, la banque devra payer un taux fixe annuel de 6.20 %, tous les semestres pendant trois ans. Symétriquement, l'entreprise devra payer à la banque un taux Libor variable, chaque semestre.

Au final, les gestionnaires peuvent prévoir les séries de cash flow générées par le contrat :

Date	Semestre	Libor (%)	Paiement fixe	Paiement variable	Valeur finale
24 jan 98	0.0	-----	0	0	0
24 jui 98	0.5	5.775	310.00	288.75	-21.25
24 jan 99	1.0	6.100	310.00	305.00	-5.00
24 jui 99	1.5	6.198	310.00	309.90	-0.1
24 jan 2000	2.0	6.565	310.00	328.25	18.25
24 jui 2000	2.5	6.699	310.00	334.95	24.95
24 jan 2001	3.0	6.888	310.00	344.40	34.40

Pour calculer l'exposition face au risque, il faut choisir un ensemble de périodes futures. A chaque date correspond un risque de crédit associé. Pour faciliter l'analyse, nous allons choisir six périodes correspondantes aux six échéances du contrat. A partir de ce moment, nous allons pouvoir calculer précisément le risque de crédit associé au contrat swap. Pour ceci, nous allons utiliser trois méthodes différentes qui peuvent être utilisées dans le cadre de la VaR : l'approche statistique (cf. II.C.2.3.1), l'approche de l'évaluation de l'option (cf. II.C.2.3.2) et pour finir la simulation (cf. II.C.2.3.3). Puis, notre analyse se basera sur la comparaison de ces méthodes et de leur efficacité relative les unes par rapport aux autres.

#### II.C.2.3.1 L'approche statistique :

Comme pour le cas des obligations, il faut supposer que pour chaque période de temps choisie ("t+i", "i" variant de zéro à cinq), les différentes valeurs du swap devront suivre une loi normale de moyenne  $\mu_{t+i}$  et d'écart type  $\sigma_{t+i}$ . On notera  $V^*_{t+i}$  la valeur actuelle des cash flows générés entre "t+i" et la date d'échéance. Or nous avons vu précédemment que  $E_{t+i}$  est positif si la valeur du sous-jacent est "dans la monnaie".

Ce qui signifie que :

$$E_{t+i} = V^*_{t+i} \text{ si } V^*_{t+i} > 0 \text{ et } E_{t+i} = 0 \text{ si } V^*_{t+i} \leq 0, \text{ ce qui se note aussi } E_t = \max(V^*_{t+i}, 0).$$

A partir de ce point, nous pouvons calculer le niveau d'exposition maximum face à un risque au seuil de 5%, que nous noterons ( $ME_{t+i}$ ).

La formule mathématique correspondante est la suivante :

$$ME_{t+i} = \max(0, \mu_{t+i} + 1.65 \sigma_{t+i}), \text{ dans notre exemple } i=0, \dots, 5.$$

- Calcul des risques anticipés pour une période donnée :

Le risque de crédit anticipé pour une période donnée correspond au montant moyen qui peut être perdu en cas de défaillance de la contrepartie :

L'équation mathématique sera la suivante :

$$\hat{E}_{t+i} = \sigma_{t+i} \phi(-\mu_{t+i} / \sigma_{t+i}) + \mu_{t+i} [1 - \Phi(-\mu_{t+i} / \sigma_{t+i})],$$

avec  $\mu_{t+i}$  et  $\sigma_{t+i}$  la moyenne et l'écart type de la distribution correspond à la valeur de la transaction,

$\phi(-\mu_{t+i} / \sigma_{t+i})$  : fonction normale distribuée autour de  $-\mu_{t+i} / \sigma_{t+i}$

$\Phi(-\mu_{t+i} / \sigma_{t+i})$  : fonction normale cumulée distribuée autour de  $-\mu_{t+i} / \sigma_{t+i}$

$$ME_t = \sum_{i=0}^N w_{t+i} + \hat{E}_{t+i} : équation de l'exposition moyenne$$

$$w_{t+i} = \frac{\delta_{[t,t+i]}}{\sum_{i=0}^N \delta_{[t,t+i]}}$$

$\delta_{[t,t+i]}$  représente la valeur actualisée à la date "t" d'une série de cash flow qui se matérialise en "t+i".

- Reprenons notre contrat swap à trois ans de maturité :

Dans la pratique, le calcul de l'exposition moyenne et de l'exposition maximum se fera comme suit :

$$\mu_{t+i} = V_{t+i} \text{ et,}$$

$$\sigma_{t+i} = \sqrt{\tau} \sigma_{[i,T]}$$

$V_{t+i}$  est la valeur future du swap, i.e la valeur des cash flows générés entre "t+i" et la maturité du contrat.

$\sigma_{[i,T]}$  représente l'écart type du portefeuille qui génère des cash flows entre "t+i" et la maturité du contrat, T.

$\tau$  représente le nombre de jours entre "t" et "t+i".

Pour notre contrat swap à trois ans de maturité, la formule s'écrira :

$$\sigma_{t+2} = \sqrt{\tau_2} \sigma_{[2,T]}$$

A partir de cette formulation, nous pouvons en déduire l'exposition de l'entreprise face au risque de défaillance :

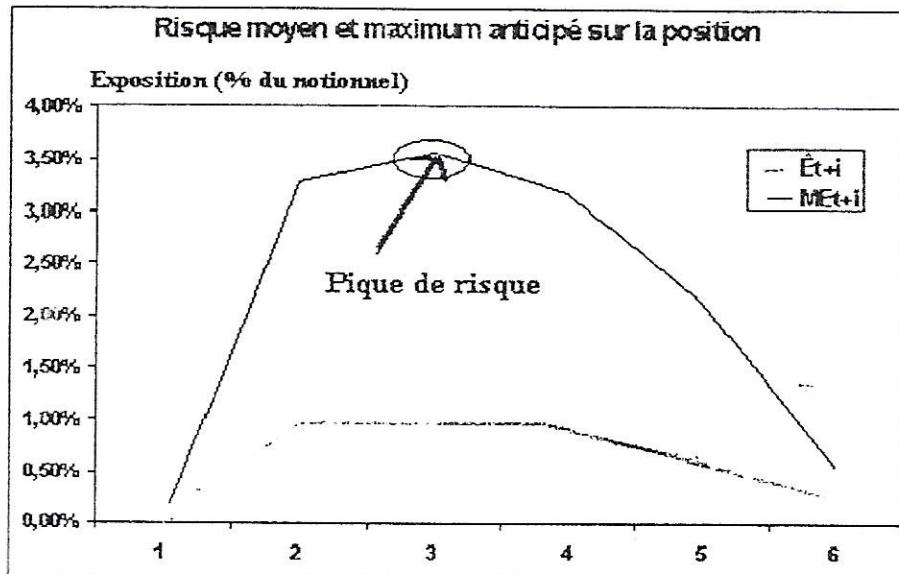
Période	Valeur future	horizon(en jours)	Volatilité
	$V_{t+i}$	$\tau_i$	$\sigma_{t+i}$
0	0.00	---	---
1	35.80	126	178,26
2	43.20	252	190,12
3	46.20	378	164,89
4	35.91	504	109,24
5	23.00	630	22,02

Dans un deuxième temps, nous pouvons en extraire les différentes statistiques que nous avions décrites précédemment :

Période	Valeur future $V_{t+i}$	Risque anticipé $\hat{E}_{t+i}$	Risque Maximum $ME_{t+i} (5\%)$	Pique du Risque
0	0.00	0.00	0.00	—
1	35.80	90.44	329.93	—
2	43.20	99.39	357.07	357.07
3	46.20	91.44	318.26	—
4	35.91	63.87	213.47	—
5	23.00	24.68	54.34	—

A partir de ce tableau, on peut construire le graphique suivant :

Graphique 10



Le calcul de l'exposition moyenne face au risque sur l'ensemble des périodes se déduit du tableau suivant :

Période	$W_{t+i}$	$\hat{E}_{t+i}$	$W_{t+i} \times \hat{E}_{t+i}$
0	0.18	0.00	0.00
1	0.17	90.44	15.37
2	0.17	99.39	16.89
3	0.16	91.44	14.63
4	0.16	63.87	10.22
5	0.15	24.68	3.70

Exposition moyenne sur la période : 60.81

Finalement, l'exposition moyenne face au risque le 24 janvier 1998 sera de 60.81 dollars.

□ Le portefeuille de swaps :

L'exposition d'un portefeuille de swaps face au risque de crédit se calcule de la même manière que précédemment. La seule différence réside dans l'expression de la valeur *mark-to-market* notée  $V_{t+i}$ . Dans le cas du portefeuille, la valeur *mark-to-market* du portefeuille correspondra à la somme des valeurs *mark-to-market* de chaque swap composant le portefeuille, et sera notée  $V_{t+i}$ . A part ceci, la démarche reste strictement identique à celle utilisée dans le point précédent.

#### II.C.2.3.2 La méthodologie de l'évaluation de l'option (*option valuation*) :

Comme nous l'avons vu précédemment,  $E_t$  représente l'exposition face au risque de crédit à l'instant "t", on en avait déduit que :

$E_t = \max(V_t, 0)$ , cette formule peut être généralisée pour l'ensemble des périodes "t+i",  
On obtient :  $E_{t+i} = \max(V_{t+i}, 0)$ .

Or  $V_{t+i}$  peut être définie comme étant la différence entre les gains (que nous noterons  $G_{t+i}$ ) et les pertes (que nous noterons  $P_{t+i}$ ) sur le portefeuille swap. Autrement dit,  $V_{t+i} = G_{t+i} - P_{t+i}$ . On en déduit que  $E_{t+i} = \max(G_{t+i} - P_{t+i}, 0)$ .

Pour parvenir au calcul de l'exposition moyenne face au risque de crédit, il faut utiliser la formule de la valeur intrinsèque d'un *call option* développé par Margabe<sup>7</sup>. Au final la formule mathématique traduisant le risque moyen d'un portefeuille de swaps sera la suivante :

$$ME_{t+i} = V_{t+i} + G_{t+i} \left( e^{1.65\sigma_{t+i}\sqrt{\tau_i} - \frac{\sigma_{t+i}^2 + \tau_i}{2}} - 1 \right)$$

Si l'on reprend le cas de notre swap à trois ans de maturité voici les résultats que l'on obtient :

Période	Valeur future $V_{t+i}$	Risque anticipé $\hat{E}_{t+i}$	Risque Maximum $ME_{t+i}$ (5 %)	Pique du Risque
0	0.00	0.00	0.00	---
1	35.80	90.44	333.28	---
2	43.20	99.39	360.88	360.88
3	46.20	91.44	473.53	---
4	35.91	63.87	217.61	---
5	23.00	24.68	59.44	---

<sup>7</sup> MARGABE (W): "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another", *Journal Of Finance*, March 1978, p33.

Les résultats de ces deux méthodes sont très proches. Dans le premier cas, le pic de risque était 357.07 FRF alors que dans le second cas, il est de 360.88 FRF.

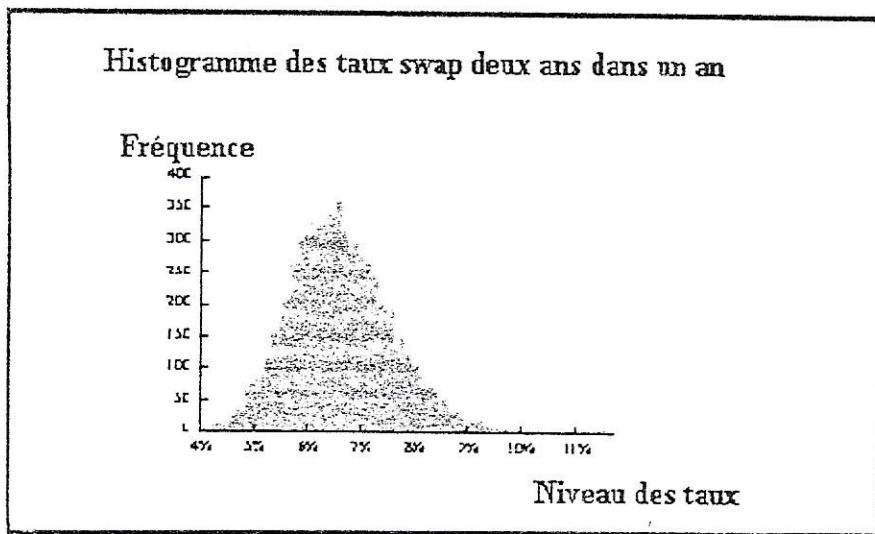
#### II.C.2.3.3 La méthodologie de la simulation :

La simulation est un outil indispensable pour les gestionnaires du risque qui doivent faire face aux variations journalières des sous-jacents (ici le taux d'intérêt). Si l'on se place au niveau de l'entreprise d'investissement et que l'on suppose une faillite bancaire au bout d'un an, la détermination de l'exposition face au risque de crédit dans un an sera obtenu en simulant les fluctuations des taux d'intérêt à deux ans de maturité dans un an, noté  $r_{1an,2ans}$ . Pour ceci, le gestionnaire a besoin de connaître la volatilité des taux deux ans à un an, que nous noterons  $\sigma_{1an,2ans}$ . Or la volatilité de ces taux est égal à 17.21 %<sup>8</sup>. Il devra aussi prendre en compte le taux d'intérêt *forward* deux ans à un an que nous noterons  $R_{1an,2ans}$ .

Supposons que ce taux soit égal à 6.335 %. La simulation (cf. graphique 11) des taux d'intérêt à deux ans de maturité dans un an est générée par la formule mathématique suivante :

$$r_{1an,2ans} = R_{1an,2ans} \times e^{\sqrt{252} \times \sigma_{1an,2ans}}$$

Graphique 11 :



Source : *RisksMetrics™ Monitor*, J.P Morgan&Co, March 1997, p 18.

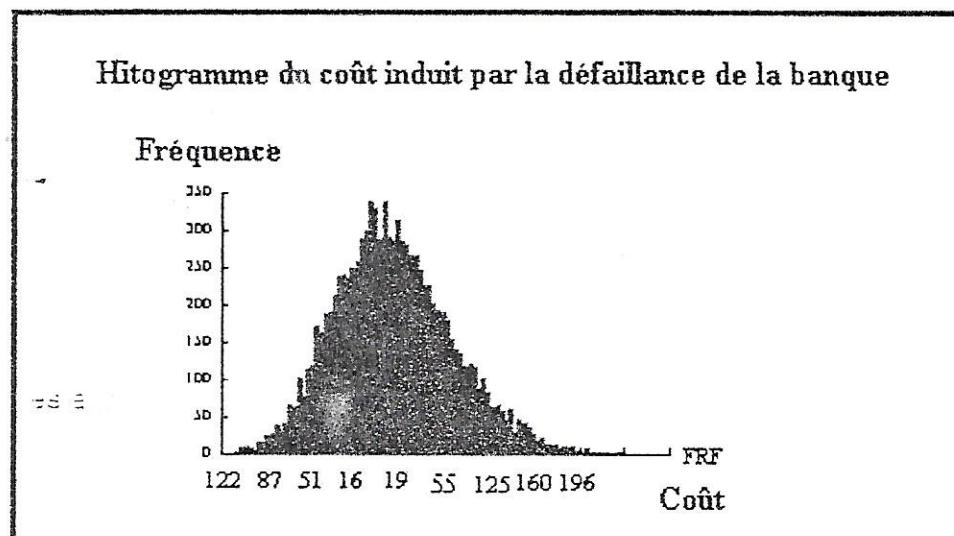
<sup>8</sup>  $252^{1/2} \times 1.084$  (volatilité à deux ans supposée pour le 24 janvier 1998)

Après avoir obtenu une distribution des taux d'intérêt de deux ans dans un an, le gestionnaire devra calculer la distribution des coûts induits par la défaillance au bout d'un an. Comme les coûts dépendent des niveaux des taux d'intérêt, la distribution des coûts (cf. graphique 12) suivra elle aussi une loi normale. En sachant que la distribution des coûts suivra la formule mathématique suivante :

$$\sum_i^n N \times (r_i - r_{1\text{an}, 2\text{ans}})$$

N étant le nominal du swap

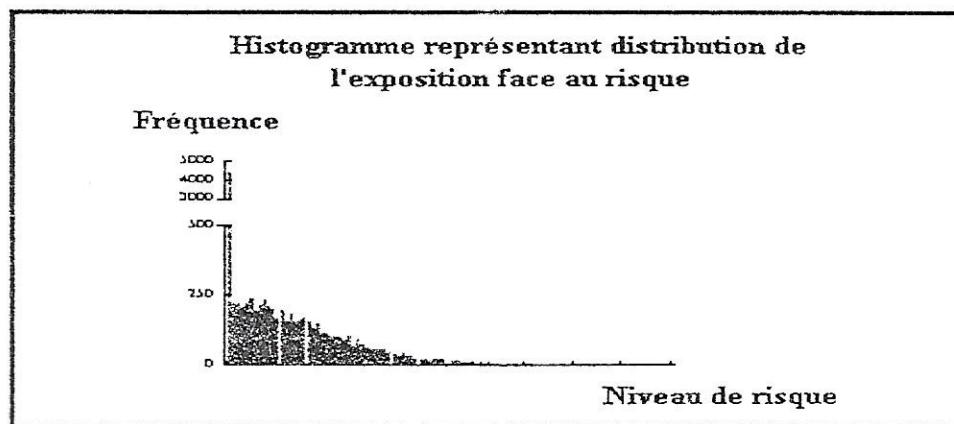
Graphique 12 :



Source : *RisksMetrics™ Monitor*, J.P Morgan&Co, March 1997, p 19.

A partir de ce moment, le gestionnaire peut en déduire la distribution des risques du swap.

Graphique 13 :

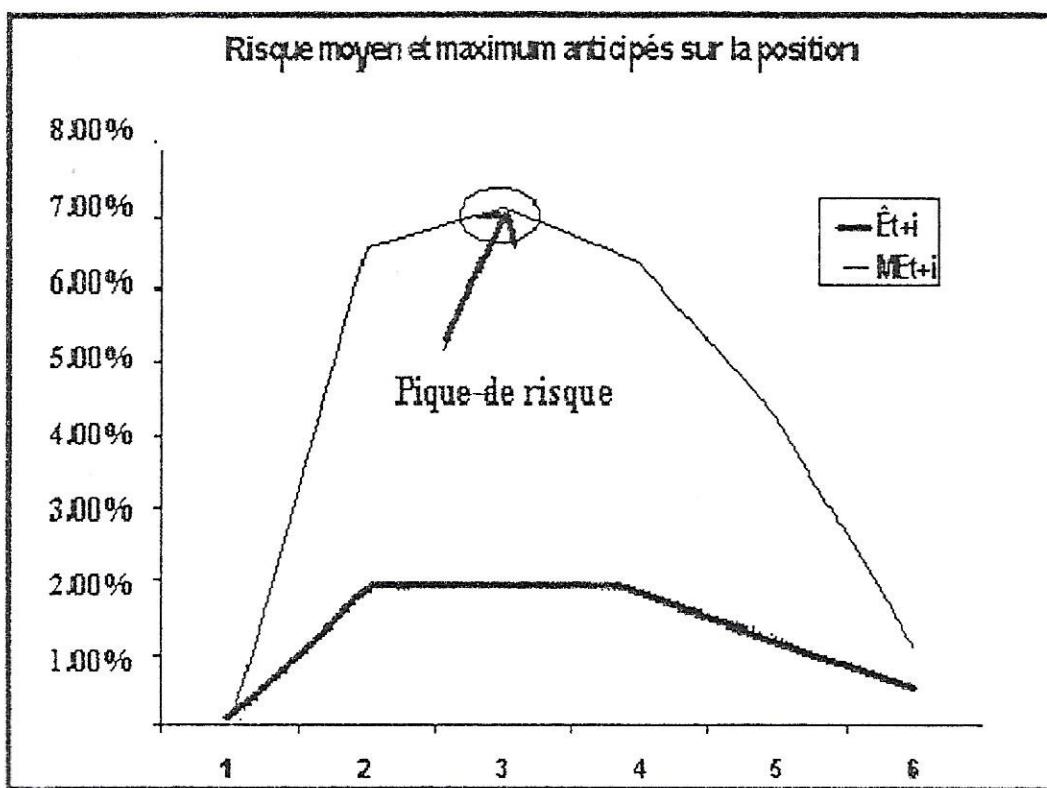


Source : *RisksMetrics™ Monitor*, J.P Morgan&Co, March 1997, p 19.

Lorsque le gestionnaire arrive à ce stade il ne lui reste plus qu'à utiliser la méthode analytique pour calculer la mesure du risque moyen et maximum du swap.

Comme précédemment, le *manager* du risque pourra en déduire un graphique qui aura la forme suivante :

**Graphique 14 :**



## Conclusion de la 2<sup>e</sup> partie

L'objet de cette partie a été de montrer comment il est possible de calculer la VaR aussi bien pour les instruments de bilan que de hors bilan. Un ensemble de remarques peuvent être mises en avant : le calcul de la VaR du risque de crédit peut être appliqué pour un ensemble d'opérations "de salle marché", mais il peut aussi servir pour des opérateurs qui traitent avec une clientèle de particuliers. De plus, comme nous l'avons vu, bien qu'il existe une définition littérale unique de la VaR, il n'y a pas de méthodologie mathématique unique. Le travail du gestionnaire est de choisir la

méthode qui correspond à l'instrument. De plus, il devra arbitrer entre la méthode la plus efficiente, tant sur le plan de la précision, du coût que de la durée sa mise en œuvre.