

Динамическое программирование.

План.

1. **Постановка задачи динамического программирования.** Метод решения задач динамического программирования. Принцип Белмана.
2. **Решение экономических задач методом ДП.** Принцип оптимальности.

Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях теории динамического программирования.

Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при составлении и решении задач динамического программирования.
2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области основных понятий динамического программирования.

Динамическое программирование — один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги).

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием — управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т.д., является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Одним из основных методов динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом.

В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования

Оптимальная стратегия замены оборудования

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые. Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость. Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой

больших затрат; причем его можно заменить новым оборудованием того же вида или новым, более совершенным. Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении

оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации. Введем обозначения:

$r(t)$ — стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;

$u(t)$ — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;

$s(t)$ — остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P — покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования. Обозначим через $f_N(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $N = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $N = N$ — к началу процесса (рис. 1). На каждом этапе N -стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.



Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) \rightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \rightarrow \text{Замена,} \end{cases}$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) \rightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \rightarrow \text{Замена.} \end{cases}$$

Уравнение 1 описывает N -стадийный процесс, а 2 — одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя — доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В уравнении (1) функция $r(t) - u(t)$ есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на N -й стадии процесса.

Функция $f_{N-1}(t+1)$ характеризует суммарную прибыль от $(N-1)$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $(t+1)$ лет.

Нижняя строка (2.1) характеризуется следующим образом: функция $s(t) - P$ представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет. Функция $r(0)$ выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию.

Последняя функция f_{N-1} в (2.1) представляет собой доход от оставшихся $N-1$ стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одностадийного процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t+1)$, так как N принимает значение 1, 2, ..., N . Равенство $f_0(t) = 0$ следует из определения функции $f_N(t)$. Уравнения (2.1) и (2.2) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-1}(t+1)$.

Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до $(t + 1)$ лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до $(N - 1)$. Расчет начинают с использования уравнения (2.1). Уравнения (2.1) и (2.2) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования, с тем чтобы принять тот из них, который предполагает больший доход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Оптимальное распределение ресурсов

Пусть имеется некоторое количество ресурсов x , которое необходимо распределить между n различными предприятиями, объектами, работами и т.д. так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения. Введем обозначения: x_i — количество ресурсов, выделенных i -му предприятию ($i = \overline{1, n}$); $g_i(x_i)$ — функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурса x_i , полученного i -м предприятием; $f_k(x)$ — наибольший доход, который можно получить при использовании ресурсов x от первых k различных предприятий.

Сформулированную задачу можно записать в математической форме:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$. Обозначим через x_k количество ресурса, используемого k -м способом ($0 \leq x_k \leq x$), тогда для $(k - 1)$ способов остается величина ресурсов, равная $(x - x_k)$. Наибольший доход, который получается при использовании ресурса $(x - x_k)$ от первых $(k - 1)$ способов, составит $f_{k-1}(x - x_k)$. Для максимизации суммарного дохода от k -го и первых $(k - 1)$ способов необходимо выбрать x_k таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$f_1(x) = g_1(x),$$

$$f_k(x) = \max \{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Минимизация затрат на строительство и эксплуатацию предприятий

Задача по оптимальному размещению производственных предприятий может быть сведена к задаче распределения ресурсов согласно критерию минимизации с учетом условий целочисленности, накладываемых на переменные.

Выводы:

По результатам лекции у студентов сформированы теоретические знания об основных математических моделях задач динамического программирования и основных методах их решения.