ОП.11 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ

Тема 1.4 Вычислительные основы линейной алгебры

Итерационные методы решения систем уравнений.

- ✓ Метод простых итераций.
- ✓ Метод Зейделя.
- ✓ Метод релаксаций.

Ковалева Елена Вячеславовна e.kovaleva@mgutm.ru

Собственный вектор и собственные числа матрицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L_n$ называется собственным вектором матрицы A , если найдётся такое число λ , что

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (\textit{или} \;\; A \cdot X = \lambda X\,),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

λ называется **собственным** (характеристическим) числом матрицы A .

Нахождение собственных значений

Характеристическое уравнение матрицы А:

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow P_n(\lambda)=0.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Норма элемента

Пусть L – линейное пространство

$\forall x \in L$ ставим в соответствие положительный функционал $p(x) = \|x\|$ - ***норма элемента,*** удовлетворяющее аксиомам

1. $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|;$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Пространство с заданной нормой – ***нормированное пространство***

Свойства норм

1. $\|x-y\| \geq \big|\|x\|-\|y\|\big|$
2. $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$
3. $-1 \leq \frac{\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2}{2\|x\|\|y\|} \leq 1$

Нормы $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ***эквивиалентны,*** если существуют положительные константы $\alpha, \beta: \forall x \in L$

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

Свойства: 1. рефлексивность $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_1$

2. Симметричность $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_1$

3. Транзитивность $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$, то $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$

Примеры нормированных пространств

Пример 1. в n-мерном действительном пространстве $\boldsymbol{R}^n$ норма элемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$$

Пример 2. В пространстве непрерывных функций $C^1[a, b]$ норма

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} x(t)$$

Норма матрицы

при $p = 1$ $\quad \|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_{j \in \{1, \ldots, n\}} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|;$

при $p = 2$ $\quad \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\Lambda}$, *где* Λ — *наибольшее собственное число матрицы* $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$;

при $p = \infty$ $\quad \|\mathbf{A}\|_\infty = \max\limits_{i \in \{1, \ldots, m\}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$

Метод простой итерации
для решения систем линейных уравнений

Имеем линейную систему уравнений с n неизвестными:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\,, \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n\,.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Эквивалентная система уравнений:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n\,, \\
x_2 &= f_2 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n\,, \\
&\qquad\qquad \cdots \\
x_n &= f_n + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \ldots + c_{n,n-1}x_{n-1}\,,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где $f_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$; $c_{ij} = \dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$ и

$$c_{ii} = 0\left(i, j = 1, 2, \ldots, n\right) \tag{2.3}$$

Итерационный процесс для системы (2.2):

$$x^{(k+1)} = f + cx^{(k)} \quad \left(k = 0,1,2,...\right), \qquad (2.4)$$

где k – номер итерации.

Для сходящегося процесса решением является

$$\overset{*}{x} = \lim_{k \to \infty} \left(f + cx^{(k)} \right). \qquad (2.5)$$

Условие сходимости:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, ..., n), \qquad (2.6)$$

т.е. модуль диагонального коэффициента для каждого уравнения больше суммы модулей его недиагональных коэффициентов.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций при любом начальном x к решению системы является требование чтобы все собственные числа матрицы С были по модулю меньше 1. .

Условие завершения итерационного процесса:

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \varepsilon \qquad (2.7)$$

Теорема 2. Если $\|C\| \le q < 1$, то при любом начальном векторе $\chi^{(0)}$ метод простых итераций сходится к единственному решению χ^* и при все $k \in N$ справедливы оценки погрешности

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{q}{q-1}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$ апостериорная

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{q^k}{q-1}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$$ априорная

Замечания

1. Априорная оценка, как правило, грубее апостериорной.
2. Априорная оценка k-го приближения

$$\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \le q^k \left(\left\|\mathbf{x}^{(0)}\right\| + \frac{\|\mathbf{c}\|}{1-q} \right)$$

3. Априорная оценка позволяет заранее подсчитать число итераций, достаточное для получения решения с заданной точностью

$$\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon .$$

Пример

Для системы записать какой-нибудь сходящийся процесс метода простых итераций. За сколько шагов этого процесса, можно достичь точности ε = 0,001 по норме максимум? Найти третье приближение и оценить его абсолютную погрешность и сравнить ее с истинной погрешностью, зная точное решение системы

X=(1;-2;1)

$$\begin{cases} 1.1x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 = 1.6, \\ 0.1x_1 - 1.2x_2 - 0.2x_3 = 2.3, \\ 0.2x_1 - 0.1x_2 + 1.1x_3 = 1.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.1x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 = 1.6, \\ 0.1x_1 - 1.2x_2 - 0.2x_3 = 2.3, \\ 0.2x_1 - 0.1x_2 + 1.1x_3 = 1.5 \end{cases}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \ldots, m\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

$$\begin{cases} x_1 = -0.1x_1 + 0.2x_2 - 0.1x_3 + 1.6, \\ x_2 = 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 - 2.3, \\ x_3 = -0.2x_1 + 0.1x_2 - 0.1x_3 + 1.5. \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ 0.1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ -2.3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.6, \\ x_2^{(k+1)} = \ \ 0.1x_1^{(k)} - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} - 2.3, \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} + 0.1x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \end{cases}$$

$$\left\|\mathbf{x}^{*}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|_{\infty} \leq \frac{0.5^{k}}{1-0.5}\left\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\right\|_{\infty}$$

$$\left\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\right\|_{\infty}=\|\mathbf{c}\|_{\infty}=2.3$$

$$0.5^{k-1} \cdot 2.3 \leq 0.001,$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=-0.1 \cdot 1.6+0.2 \cdot(-2.3)-0.1 \cdot 1.5+1.6=0.83, \\ x_2^{(2)}=0.1 \cdot 1.6-0.2 \cdot(-2.3)-0.2 \cdot 1.5-2.3=-1.98, \\ x_3^{(2)}=-0.2 \cdot 1.6+0.1 \cdot(-2.3)-0.1 \cdot 1.5+1.5=0.8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)}=-0.1 \cdot 0.83+0.2 \cdot(-1.98)-0.1 \cdot 0.8+1.6=1.041, \\ x_2^{(3)}=0.1 \cdot 0.83-0.2 \cdot(-1.98)-0.2 \cdot 0.8-2.3=-1.981, \\ x_3^{(3)}=-0.2 \cdot 0.83+0.1 \cdot(-1.98)-0.1 \cdot 0.8+1.5=1.056. \end{cases}$$

Априорная оценка погрешности 3-го приближения

$$\left\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(3)} \right\|_\infty \le \frac{0.5^3}{1-0.5} \left\| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right\|_\infty = 0.25 \cdot 2.3 = 0.575\,,$$

$$\left\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(3)} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -0.041 \\ -0.019 \\ -0.044 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.044\,,$$

Апостериорная оценка погрешности

$$\left\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(3)} \right\|_\infty \le \frac{0.5}{1-0.5} \left\| \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(2)} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.211 \\ -0.001 \\ 0.256 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.256$$

2.5. Метод Зейделя для решения линейных систем

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации.

Считаем, что дана линейная система, приведенная к итерационному виду (2.2):

$$x_i = f_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \qquad (2.8)$$

Полагаем, что найдено *k*-е приближение $x_i^{(k)}$ всех корней. Согласно методу Зейделя, (*k*+1)-е приближение корней будет определяться по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = f_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = f_2 + c_{21} x_1^{(k+1)} + c_{22} x_2^{(k)} + c_{23} x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n} x_n^{(k)},$$

$$x_3^{(k+1)} = f_3 + c_{31} x_1^{(k+1)} + c_{32} x_2^{(k+1)} + c_{33} x_3^{(k)} + \ldots + c_{3n} x_n^{(k)},$$

$$\ldots \tag{2.9}$$

$$x_i^{(k+1)} = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k)},$$

$$\ldots$$

$$x_n^{(k+1)} = f_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + c_{nn} x_n^{(k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Метод Зейделя обеспечивает, как правило, лучшую сходимость, чем метод простой итерации.

Пример

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.6, \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k+1)} - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} - 2.3, \\ x_3^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_2^{(k+1)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.6, \\ x_2^{(1)} = 0.1 \cdot 1.6 - 2.3 = -2.14, \\ x_3^{(1)} = -0.2 \cdot 1.6 + 0.1 \cdot (-2.14) + 1.5 = 0.966; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -0.1 \cdot 1.6 + 0.2 \cdot (-2.14) - 0.1 \cdot 0.966 + 1.6 \approx 0.915, \\ x_2^{(2)} = 0.1 \cdot 0.915 - 0.2 \cdot (-2.14) - 0.2 \cdot 0.966 - 2.3 \approx -1.974, \\ x_3^{(2)} = -0.2 \cdot 0.915 + 0.1 \cdot (-1.974) - 0.1 \cdot 0.966 + 1.5 \approx 1.023; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -0.1 \cdot 0.915 + 0.2 \cdot (-1.974) - 0.1 \cdot 1.023 + 1.6 \approx 1.011, \\ x_2^{(3)} = 0.1 \cdot 1.011 - 0.2 \cdot (-1.974) - 0.2 \cdot 1.023 - 2.3 \approx -2.009, \\ x_3^{(3)} = -0.2 \cdot 1.011 + 0.1 \cdot (-2.009) - 0.1 \cdot 1.023 + 1.5 \approx 0.995. \end{cases}$$

Задание для самостоятельного решения

Для системы записать какой-нибудь сходящийся процесс метода простых итераций. За сколько шагов этого процесса, можно достичь точности ε = 0,001 по норме максимум? Найти третье приближение и оценить его абсолютную погрешность. Выполнить 3 первые итерации методом Зейделя.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 = 10, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 = -5. \end{cases}$$

Информационное обеспечение

Основные источники

1. Численные методы и программирование : учеб. пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. — М. : ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2017. http://znanium.com/catalog/product/672965

Дополнительные источники

1. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие / Гулин А.В.,Мажорова О.С.,Морозова В.А.-М.:АРГАМАК-МЕДИА,НИЦ ИНФРА-М,2014
2. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): учеб. пособие / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2017.