УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Нелинейное программирование

Ковалева Елена Вячеславовна

*Пример

x_1, x_2 -количество взаимозаменяемых ресурсов.

$$z = f(x_1, x_2)$$

$$b = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

* Разделы нелинейного программирования:

- выпуклое программирование,
- квадратичное программирование,
- целочисленное программирование,
- стохастическое программирование,
- динамическое программирование и др.

* Классификация методов нелинейного программирования

- По количеству локальных критериев в целевой функции:
  - однокритериальные,
  - многокритериальные.
- По длине вектора неизвестных:
  - однопараметрические или одномерные (n=1),
  - многопараметрические или многомерные (n>1).

- По наличию ограничений:
  - без ограничений (безусловная оптимизация),
  - с ограничениями (условная оптимизация).
- По типу информации, используемой в алгоритме поиска экстремума:
  - методы прямого поиска;
  - *градиентные методы* первого порядка;
  - *градиентные методы* второго порядка.

$$u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

$$g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0, \quad k = \overline{1, \ldots, m}$$

Теорема1. (Теорема существования экстремума)

Если $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ *- непрерывная функция, определенная на замкнутом и ограниченном множестве, то она достигает на этом множестве, по крайней мере один раз, своих максимального и минимального значений*

*Теорема 2.

Если $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *является непрерывной функцией нескольких переменных, определенной на допустимом множестве* R, *то максимальное значение* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, *если оно существует, достигается в одной или нескольких точках, которые принадлежат одному из следующих множеств*: 1) S_1 - *множество стационарных точек* ; 2) S_2 - *множество точек границы* ; 3)S_3 - *множество точек, где функция* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *недифференцируема*.

$$u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

$$g_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0, \quad k = \overline{1, \ldots, m}$$

$$M_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$$

$$g_k\left(M_0\right) = 0, \quad k = \overline{1, \ldots, m}$$

$$L(M) = f(M) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(M)$$

Пусть функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при условии связи. Пусть функция $g_k(M)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0, их частные производные непрерывны в этой точке и пусть якобиан отличен от нуля в точке M_0 .

$$\frac{D(g_1, g_2, ..., g_m)}{D(x_1, x_2, ..., x_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

Тогда существуют числа λ_k при которых выполняется равенство

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}(M_0) = 0, k = \overline{1...n}$$

$$\frac{D\left(g_1, g_2, \ldots, g_m\right)}{D\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

$$g_1 = 3x^2 + 2xy, \quad g_2 = x^2 + y^2 - xy$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 6x + 2y \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 2x - y \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = 2y - x$$

$$\frac{D(g_1, g_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x - y & 2y - x \end{vmatrix} =$$

$$= (6x + 2y)(2y - x) - (2x - y)(2x)$$

$$H = \begin{pmatrix} O & G \\ G^T & \Lambda \end{pmatrix}$$

$$O_{m\times m} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad G_{m\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(M_0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(M_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(M_0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(M_0) \end{pmatrix}$$

$$G^T{}_{n\times m} \quad \Lambda_{n\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1{}^2}(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(M_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(M_0) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2{}^2}(M_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(M_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(M_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n{}^2}(M_0) \end{pmatrix}$$

$$H_{2m+1}, H_{2m+2}, \dots, H_{m+n}$$

$$(-1)^m \qquad (-1)^{m+1}$$

1) если знаки угловых миноров H_{2m+1}, H_{2m+2}, $\dots$, H_{m+n} совпадают со знаком числа $(-1)^m$, то точка M_0 является точкой условного минимума функции $f(M)$ при условиях связи (1);

2) если знаки угловых миноров H_{2m+1}, H_{2m+2}, $\dots$, H_{m+n} чередуются, причём знак минора H_{2m+1} совпадает со знаком числа $(-1)^{m+1}$, то точка M_0 является точкой условного максимума функции $f(M)$ при условиях связи (1).