

**Структура СМО. Классификация. Примеры. Дисциплина очереди.
Одноканальная СМО с отказами. N-канальные СМО с очередью и отказами. Граф состояний. Пропускная способность, время ожидания в очереди. Формулы расчета основных параметров.**

Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях систем массового обслуживания.

2. Формирование знаний об основных способах решения задач массового обслуживания

Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при составлении и решении задач массового обслуживания.

2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области основных понятий и способов решений задач массового обслуживания.

Во многих областях практической деятельности человека мы сталкиваемся с необходимостью пребывания в состоянии ожидания. Подобные ситуации возникают в очередях в билетных кассах, в крупных аэропортах, при ожидании обслуживающим персоналом самолетов разрешения на взлет или посадку, на телефонных станциях в ожидании освобождения линии абонента, в ремонтных цехах в ожидании ремонта станков и оборудования, на складах снабженческо-сбытовых организаций в ожидании разгрузки или погрузки транспортных средств. Во всех перечисленных случаях имеем дело с массовостью и обслуживанием. Изучением таких ситуаций занимается теория массового обслуживания.

Теория систем массового обслуживания начала развиваться в начале 20 века. Основателем СМО считается математик Иохансен, сформулировавший в 1907 году предпосылки новой теории.

В 1909 году шведский математик Эрланг применил теорию вероятностей к исследованию зависимости обслуживания телефонных вызовов от числа поступающих на телефонную станцию вызовов. В СССР развитием данной проблематики занимался математик Хинчин, одной из главных работ которого, является «Теория очередей». Кстати этот термин теории СМО используется за границей.

СМО представляют собой системы специфического вида. Вообще СИСТЕМА – целостное множество взаимосвязанных элементов, неделимое на независимое подмножество.

Основа СМО - средства, обслуживающие требования, называются **обслуживающими устройствами** или **каналами обслуживания**. Например, к ним относятся каналы телефонной связи, посадочные полосы, операторы, билетные кассиры, погрузочно-разгрузочные точки на базах и складах.

В теории систем массового обслуживания обслуживаемый **объект** называют требованием, а предназначением СМО как раз и является удовлетворение этих требований. В общем случае под требованием обычно понимают запрос на удовлетворение некоторой потребности, например, разговор с абонентом, посадка самолета, покупка билета, получение материалов на складе.

В теории СМО рассматриваются такие случаи, когда поступление требований происходит через случайные промежутки времени, а продолжительность обслуживания требований не является постоянной, т.е. носит случайный характер. В силу этих причин одним из основных методов математического описания СМО является аппарат теории случайных процессов .

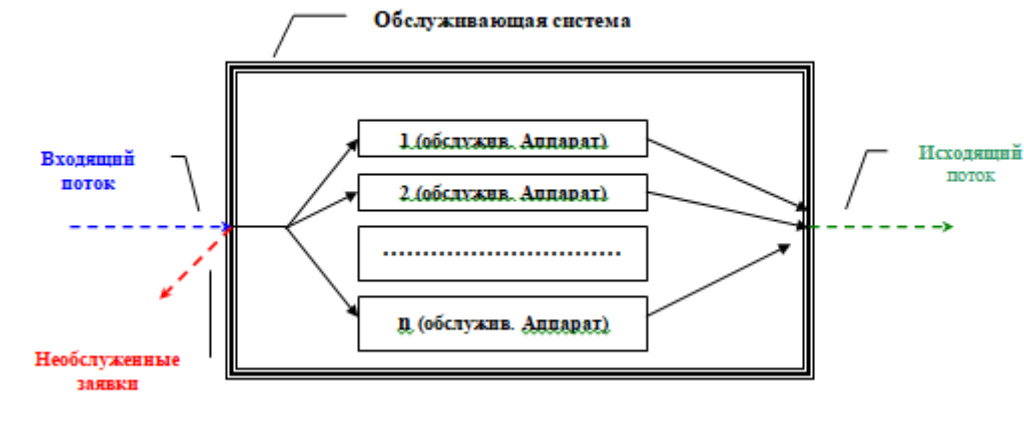
Предметом теории СМО является количественная сторона процессов, связанных с массовым обслуживанием.

Целью СМО является выработка рекомендаций по рациональному построению СМО и рациональной организации их работы и регулирования потока заявок.

Основной задачей теории СМО является изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания. Так, одной из характеристик обслуживающей системы является время пребывания требования в очереди. Очевидно, что это время можно сократить за счет увеличения количества обслуживающих устройств. Однако каждое дополнительное устройство требует определенных материальных затрат, при этом увеличивается время бездействия обслуживающего устройства из-за отсутствия требований на обслуживание, что также является негативным явлением. Следовательно, в теории СМО возникают задачи оптимизации: каким образом достичь определенного уровня обслуживания (максимального сокращения очереди или потерь требований)

при минимальных затратах, связанных с простоем обслуживающих устройств.

Структура СМО



Основные элементы

СМО классифицируются на разные группы в зависимости от состава и от времени пребывания в очереди до начала обслуживания, и от дисциплины обслуживания требований.

По числу каналов n СМО бывают **одноканальные** (с одним обслуживающим устройством) и **многоканальными** (с большим числом обслуживающих устройств). Многоканальные системы могут состоять из обслуживающих устройств как одинаковой, так и разной производительности.

По времени пребывания требований в очереди до начала обслуживания системы делятся на три группы:

- 1) с **неограниченным временем ожидания (очередь)**. При занятости системы заявка поступает в очередь и в итоге будет выполнена (торговля, сфера бытового и медицинского обслуживания);
- 2) с **отказами** (нулевое ожидание или явные потери). «Отказанная» заявка вновь поступает в систему, чтобы её обслужили (вызов абонента через АТС);
- 3) **смешанного типа** (ограниченное ожидание). Есть ограничение на длину очереди (автосервис). Ограничение на время пребывания заявки в СМО (особые условия обслуживания в КБ).

В системах с определенной **дисциплиной обслуживания** поступившее требование, застав все устройства занятыми, в зависимости от своего приоритета, либо обслуживается вне очереди, либо становится в очередь.

Основными элементами СМО являются: *входящий поток требований, очередь требований, обслуживающие устройства, (каналы) и выходящий поток требований.*

Эффективность функционирования СМО определяется её пропускной способностью – относительным числом обслуженных заявок.

Изучение СМО начинается с анализа входящего потока требований. Входящий поток требований представляет собой совокупность требований, которые поступают в систему и нуждаются в обслуживании. Входящий поток требований изучается с целью установления закономерностей этого потока и дальнейшего улучшения качества обслуживания.

В большинстве случаев входящий поток неуправляем и зависит от ряда случайных факторов. Число требований, поступающих в единицу времени, случайная величина. Случайной величиной является также интервал времени между соседними поступающими требованиями. Однако среднее количество требований, поступивших в единицу времени, и средний интервал времени между соседними поступающими требованиями предполагаются заданными.

Среднее число требований, поступающих в систему обслуживания за единицу времени, называется **интенсивностью поступления требований** и определяется следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{1}{T},$$

где T - среднее значение интервала между поступлением очередных требований.

Для многих реальных процессов поток требований достаточно хорошо описывается законом распределения Пуассона. Такой поток называется **простейшим**.

Простейший поток обладает такими важными свойствами:

- 1) **Свойством стационарности**, которое выражает неизменность вероятностного режима потока по времени. Это значит, что число требований, поступающих в систему в равные промежутки времени, в среднем должно быть постоянным. Например, число вагонов, поступающих под погрузку в среднем в сутки должно быть одинаковым для различных периодов времени, к примеру, в начале и в конце декады.
- 2) **Отсутствия последствия**, которое обуславливает взаимную независимость поступления того или иного числа требований на обслуживание в непересекающиеся промежутки времени. Это значит, что число требований, поступающих в данный отрезок времени, не зависит от числа требований, обслуженных в предыдущем промежутке времени. Например, число автомобилей, прибывших за материалами в десятый день месяца, не зависит от числа автомобилей, обслуженных в четвертый или любой другой предыдущий день данного месяца.
- 3) **Свойством ординарности**, которое выражает практическую невозможность одновременного поступления двух или более требований (вероятность такого события неизмеримо мала по отношению к рассматриваемому промежутку времени, когда последний устремляют к нулю).

При простейшем потоке требований распределение требований, поступающих в систему подчиняются закону распределения Пуассона:

вероятность $P_k(t)$ того, что в обслуживающую систему за время t поступит именно k требований:

$$P_k(t) = e^{-\lambda \cdot t} (\lambda \cdot t)^k / k!,$$

где λ - среднее число требований, поступивших на обслуживание в единицу времени.

Кроме того, наличие пуассоновского потока требований можно определить статистической обработкой данных о поступлении требований на обслуживание. Одним из признаков закона распределения Пуассона является равенство математического ожидания случайной величины и дисперсии этой же величины, т.е.

$$a = \sigma^2.$$

Одной из важнейших характеристик обслуживающих устройств, которая определяет пропускную способность всей системы, является **время обслуживания**.

Время обслуживания одного требования ($t_{обс}$)- случайная величина, которая может изменяться в большом диапазоне. Она зависит от стабильности работы самих обслуживающих устройств, так и от различных параметров, поступающих в систему, требований (к примеру, различной грузоподъемности транспортных средств, поступающих под погрузку или выгрузку).

Случайная величина $t_{обс}$ полностью характеризуется законом распределения, который определяется на основе статистических испытаний.

При показательном законе распределения времени обслуживания вероятность $P_{t_{обс}}$ события, что время обслуживания продлится не более чем t , равна:

$$P_{t_{обс}}(t) = 1 - e^{-\nu \cdot t},$$

где ν - интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством, которая определяется из соотношения:

$$\nu = 1 / \bar{t}_{обс}, \quad (1)$$

где $\bar{t}_{обс}$ - среднее время обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством.

Важным параметром СМО является **коэффициент загрузки α** , который определяется как отношение интенсивности поступления требований λ к интенсивности обслуживания ν .

$$\alpha = \lambda / \nu, \quad (2)$$

где α - коэффициент загрузки; λ - интенсивность поступления требований в систему; ν - интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством.

Из (1) и (2) получаем, что $\alpha = \lambda \cdot \bar{t}_{обс}$.

Учитывая, что λ - интенсивность поступления требований в систему в единицу времени, произведение $\lambda \cdot \bar{t}_{обс}$ показывает количество требований, поступающих в систему обслуживания за среднее время обслуживания одного требования одним устройством.

Для СМО с ожиданием количество обслуживаемых устройств n должно быть строго больше коэффициента загрузки (требование **установившегося** или **стационарного режима работы** СМО) :

$$n > \alpha.$$

В противном случае число поступающих требований будет больше суммарной производительности всех обслуживающих устройств, и очередь будет неограниченно расти.

Для СМО с отказами и смешанного типа это условие может быть ослаблено, для эффективной работы этих типов СМО достаточно потребовать, чтобы минимальное количество обслуживаемых устройств n было не меньше коэффициента загрузки α : $n \geq \alpha$

Эффективность работы СМО характеризуется:

1)_ группой показателей эффективности использования СМО:

- абсолютная пропускная способность – среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (A);
- относительная пропускная способность – отношение АПС к среднему числу заявок, поступивших за единицу времени (Q);
- средняя продолжительность периода занятости СМО (T_e);
- коэффициент использования СМО – средняя доля времени, в течении которого система занята обслуживанием заявок.

2)_ Показателями качества обслуживания заявок:

- среднее время ожидания заявки в очереди (T_{line});
- среднее время пребывания заявки в СМО (T_{sys});
- вероятность отказа заявки в обслуживании без ожидания;
- вероятность немедленного приёма заявки;
- среднее число заявок в очереди (N_{line});
- среднее число заявок, находящихся в СМО (N_{sys}).

3)_ Показатели эффективности функционирования пары «СМО – потребитель», (например, когда доход от СМО и затраты на её обслуживание измеряются в одних и тех же единицах, и отражает специфику работы СМО).

Выводы:

По результатам лекции у студентов сформированы теоретические знания об основных способах решения задач массового обслуживания.