

## Основы теории случайных процессов.

### Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях теории случайных процессов.
2. Формирование знаний об основных способах решения задач с помощью теории случайных процессов.

### Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при решении задач с помощью теории случайных процессов.
2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области основных понятий и способов решения задач с помощью теории случайных процессов, как средства организации процесса разработки и исследования объектов профессиональной деятельности.

## Основные понятия марковских процессов.

Функция  $X(t)$  называется **случайной**, если ее значение при любом  $t$  является случайной величиной.

Случайная функция  $X(t)$ , аргументом которой является время, называется **случайным процессом**.

Марковские процессы являются частным видом случайных процессов. Особое место марковских процессов среди других классов случайных процессов обусловлено следующими обстоятельствами: для марковских процессов хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать многие практические задачи; с помощью марковских процессов можно описать (точно или приближенно) поведение достаточно сложных систем.

*Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе  $S$ , называется марковским (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени  $t_0$  вероятность любого состояния системы в будущем (при  $t > t_0$ ) зависит только от ее состояния в настоящем (при  $t = t_0$ ) и не зависит от того, когда и каким образом система  $S$  пришла в это состояние.*

**Классификация марковских процессов.** Классификация марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции  $X(t)$  и параметра  $t$ . *Различают следующие основные виды марковских случайных процессов.*

- с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (марковские последовательности);
- с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);
- с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

В данной работе будут рассматриваться только марковские процессы с дискретными состояниями  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .

**Граф состояний.** Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого графа состояний (рис. 1), где кружками обозначены состояния  $S_1, S_2, \dots$  системы  $S$ , а стрелками — возможные переходы из состояния в состояние. На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», т.е. стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным). Пример графа состояний системы  $S$  представлен на рис.9.1.

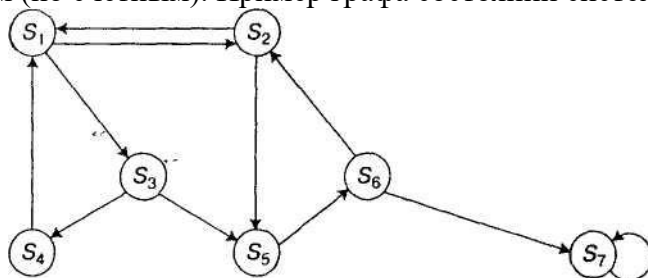


Рисунок 1

### Марковская цепь и матрица перехода вероятностей.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют **марковской цепью**. Для такого процесса моменты  $t_1, t_2, \dots$ , когда система  $S$  может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, выступает не время  $t$ , а номер шага  $1, 2, \dots, k, \dots$ . Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний  $S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots$ , где  $S(0)$  - начальное состояние системы (перед первым шагом);  $S(1)$  — состояние системы после первого шага;  $S(k)$  — состояние системы после  $k$ -го шага...

Событие  $\{S(k) = S_i\}$ , состоящее в том, что сразу после  $k$ -го шага система находится в состоянии  $S_i, (i=1,2, \dots)$ , является случайным событием. Последовательность состояний  $S(0), S(1), \dots, S(k), \dots$  можно рассматривать как последовательность случайных событий. Такая случайная последовательность событий называется марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния  $S_i$  в любое  $S_j$  не зависит от того, когда и как система пришла в состояние  $S_i$ . Начальное состояние  $S(0)$  может быть заданным заранее или случайным.

**Вероятностями состояний** цепи Маркова называются вероятности  $P_i(k)$  того, что после  $k$ -го шага (и до  $(k+1)$ -го) система  $S$  будет находиться в состоянии  $S_i, (i=1,2, \dots, n)$ . Очевидно, для любого  $k$

$$\sum_{i=1}^n P_i(k) = 1 \quad (1)$$

**Начальным распределением** вероятностей марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса:

$$P_1(0), P_2(0), \dots, P_i(0), \dots, P_n(0) \quad (2)$$

В частном случае, если начальное состояние системы  $S$  в точности известно  $S(0) = S_i$  то начальная вероятность  $P_i(0) = 1$ , а все остальные равны нулю.

**Вероятностью перехода** (переходной вероятностью) на  $k$ -м шаге из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  называется условная вероятность того, что система  $S$  после  $k$ -го шага окажется в состоянии  $S_j$  при условии, что непосредственно перед этим (после  $k-1$  шага) она находилась в состоянии  $S_i$ .

Поскольку система может пребывать в одном из  $n$  состояний, то для каждого момента времени  $t$  необходимо задать  $n$  вероятностей перехода  $P_{ij}$  которые удобно представить в виде следующей матрицы:

$$\|P_{ij}\| = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

где  $P_{ij}$  — вероятность перехода за один шаг из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ ,  $P_{ii}$  — вероятность задержки системы в состоянии  $S_i$ .

Матрица (9.3) называется **переходной** или матрицей **переходных вероятностей**.

#### Однородные цепи Маркова

Если переходные вероятности не зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая цепь Маркова называется **однородной**.

Переходные вероятности однородной марковской цепи  $P_{ij}$  образуют квадратную матрицу размера  $n \times n$ . Отметим некоторые ее особенности:

1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а ее элементы представляют собой вероятности всех возможных переходов за один шаг из выбранного (из  $i$ -го) состояния, в том числе и переход в самое себя.

2. Элементы столбцов показывают вероятности всех возможных переходов системы за один шаг в заданное ( $j$ -е) состояние (иначе говоря, строка характеризует вероятность перехода системы из состояния, столбец - в состояние).

3. Сумма вероятностей каждой строки равна единице, так как переходы образуют полную группу несовместных событий:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

4. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности  $P_{ii}$  того, что система не выйдет из состояния  $S_i$ , а останется в нем.

Если для однородной марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей (9.2) и матрица переходных вероятностей  $\|P_{ij}\|$  (3), то вероятности состояний системы  $P_i(k)$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}$ ) определяются по рекуррентной формуле:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1)P_{ji} = 1, \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}) \quad (5)$$

**Пример 1.** Рассмотрим процесс функционирования системы - автомобиль. Пусть автомобиль (система) в течение одной смены (суток) может находиться в одном из двух состояний: исправном ( $S_1$ ) и неисправном ( $S_2$ ). Граф состояний системы представлен на рис. 2.

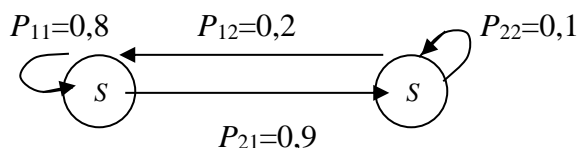


Рисунок 2. Граф состояний автомобиля

В результате проведения массовых наблюдений за работой автомобиля составлена следующая матрица вероятностей перехода:

$$\|P_{ij}\| = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}$$

где  $P_{11} = 0,8$  - вероятность того, что автомобиль останется в исправном состоянии;

$P_{12} = 0,2$  - вероятность перехода автомобиля из состояния «исправен» в состояние «неисправен»;

$P_{21} = 0,9$  - вероятность перехода автомобиля из состояния «неисправен» в состояние «исправен»;

$P_{22} = 0,1$  - вероятность того, что автомобиль останется в состоянии «неисправен».

Вектор начальных вероятностей состояний автомобиля задан

$$P(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ т.е. } P_1(0) = 0 \text{ и } P_2(0) = 1.$$

Требуется определить вероятности состояний автомобиля через трое суток.

#### Решение

Используя матрицу переходных вероятностей, определим вероятности состояний  $P_i(k)$  после первого шага (после первых суток):

$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{11} + P_2(0) \cdot P_{21} = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,9 = 0,9$$

$$P_2(1) = P_1(0) \cdot P_{12} + P_2(0) \cdot P_{22} = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 = 0,1$$

Вероятности состояний после второго шага (после вторых суток) таковы:

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot P_{11} + P_2(1) \cdot P_{21} = 0,9 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,81$$

$$P_2(2) = P_1(1) \cdot P_{12} + P_2(1) \cdot P_{22} = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,19$$

Вероятности состояний после третьего шага (после третьих суток) равны

$$P_1(3) = P_1(2) \cdot P_{11} + P_2(2) \cdot P_{21} = 0,81 \cdot 0,8 + 0,19 \cdot 0,9 = 0,819$$

$$P_2(3) = P_1(2) \cdot P_{12} + P_2(2) \cdot P_{22} = 0,81 \cdot 0,2 + 0,19 \cdot 0,1 = 0,181$$

Таким образом, после третьих суток автомобиль будет находиться в исправном состоянии с вероятностью 0,819 и в состоянии «неисправен» с вероятностью 0,181.

**Пример 2.** В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система  $S$ , которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний:  $S_1$ , — ЭВМ полностью исправна;  $S_2$  — ЭВМ имеет неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи;  $S_3$  — ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач;  $S_4$  — ЭВМ полностью вышла из строя.

В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна (состояние  $S_1$ ). Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ . Процесс, протекающий в системе  $S$ , может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая, третья проверки ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|P_{ij}\| = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Определите вероятности состояний ЭВМ после трех проверок

#### Решение

Граф состояний имеет вид, показанный на рис. 3. Против каждой стрелки проставлена соответствующая вероятность перехода. Начальные вероятности состояний  $P_1(0) = 1$  и  $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$ .

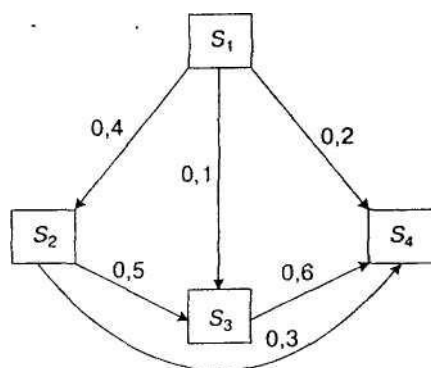


Рисунок 3. Граф состояний ЭВМ.

По формуле (5), учитывая в сумме вероятностей только те состояния, из которых возможен непосредственный переход в данное состояние, находим:

$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{11} = 1 \cdot 0,3 = 0,3$$

$$P_2(1) = P_1(0) \cdot P_{12} = 1 \cdot 0,4 = 0,4$$

$$P_3(1) = P_1(0) \cdot P_{13} = 1 \cdot 0,1 = 0,1$$

$$P_4(1) = P_1(0) \cdot P_{14} = 1 \cdot 0,2 = 0,2$$

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot P_{11} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$$

$$P_2(2) = P_1(1) \cdot P_{12} + P_2(1) \cdot P_{22} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,20$$

$$P_3(2) = P_1(1) \cdot P_{13} + P_2(1) \cdot P_{23} + P_3(1) \cdot P_{33} = 0,27$$

$$P_4(2) = P_1(1) \cdot P_{14} + P_2(1) \cdot P_{24} + P_3(1) \cdot P_{34} + P_4(1) \cdot P_{44} = 0,44$$

$$P_1(3) = P_1(2) \cdot P_{11} = 0,09 \cdot 0,3 = 0,27$$

$$P_2(3) = P_1(2) \cdot P_{12} + P_2(2) \cdot P_{22} = 0,09 \cdot 0,4 + 0,20 \cdot 0,2 = 0,076$$

$$P_3(3) = P_1(2) \cdot P_{13} + P_2(2) \cdot P_{23} + P_3(2) \cdot P_{33} = 0,217$$

$$P_4(3) = P_1(2) \cdot P_{14} + P_2(2) \cdot P_{24} + P_3(2) \cdot P_{34} + P_4(2) \cdot P_{44} = 0,680$$

Итак, вероятности состояний ЭВМ после трех проверок следующие:  $P_1(3) = 0,027$ ;  $P_2(3) = 0,076$ ;  $P_3(3) = 0,217$ ;  $P_4(3) = 0,680$ .

### Непрерывные цепи Маркова. Уравнение для вероятностей перехода (Колмогорова)

Марковский случайным процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется **непрерывной цепью Маркова** при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени.

В экономике часто встречаются ситуации, которые указать заранее невозможно. Например, любая деталь или агрегат автомобиля могут выйти из строя в любой, непредсказуемый заранее момент времени. Для описания таких систем в отдельных случаях можно использовать математический аппарат непрерывной цепи Маркова.

Пусть система характеризуется  $n$  состояниями  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ , а переход из состояния в состояние может осуществляться в любой момент времени. Обозначим через  $P_i(t)$  вероятность того, что в момент времени  $t$  система  $S$  будет находиться в состоянии  $S_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Требуется определить для любого  $t$  вероятности состояний  $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$ . Очевидно, что

$$\sum_{i=0}^n P_i(t) = 1$$

Для процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей  $P_{ij}$  рассматриваются плотности вероятностей перехода  $\lambda_{ij}$  представляющие собой предел отношения вероятности перехода системы за время  $\Delta t$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  к длине промежутка  $\Delta t$ :

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t}$$

где  $P_{ij}(t; \Delta t)$  - вероятность того, что система, пребывавшая в момент  $t$  в состоянии  $S_i$  за время  $\Delta t$  перейдет из него в состояние  $S_j$  (при этом всегда  $i \neq j$ ).

Если  $\lambda_{ij} = \text{const}$  то процесс называется **однородным**, если плотность вероятности зависит от времени  $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$  то процесс — **неоднородный**.

При рассмотрении непрерывных марковских процессов принято представлять переходы системы  $S$  из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий. **Потоком событий** называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим через какие-то, вообще говоря, случайные интервалы времени. Плотность вероятности перехода интерпретируется как интенсивность  $\lambda_{ij}$  соответствующих потоков событий. Если все эти потоки пуассоновские, то процесс, протекающий в системе  $S$ , будет марковским.

При изучении марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем в графе состояний над стрелками, ведущими из состояния  $S_i$  в  $S_j$ , проставляют соответствующие интенсивности  $\lambda_{ij}$ . Такой граф состояний называют **размеченным**.

Пусть система  $S$  имеет конечное число состояний  $S_0, S_1, \dots, S_n$ . Случайный процесс, протекающий в этой системе, описывается вероятностями состояний  $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$ , где  $P_i(t)$  — вероятность того, что система  $S$  в момент  $t$  находится в состоянии  $S_i$ . Для любого  $t$

$$\sum_{i=1}^n P_i(k) = 1$$

Вероятности состояний  $P_i(t)$  находят путем решения системы дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} P_j(t) - P_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (8)$$

где  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Величина  $\lambda_{ij} P_i(t)$  называется потоком вероятности перехода из состояния  $S_i$  в  $S_j$  причем интенсивность потоков  $\lambda_{ij}$  может зависеть от времени или быть постоянной.

Уравнения (9.8) составляют по размеченному графу состояний системы, пользуясь следующим **мнемоническим правилом**: производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное состояние, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений (9.8), нужно задать начальное распределение вероятностей  $P_0(0)$ ,  $P_1(0)$ , ...,  $P_i(0)$ , ...,  $P_n(0)$ . Для решения применяют численные методы.

### Предельные вероятности состояний

Если процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, то имеет смысл говорить о предельном поведении вероятностей  $P_i(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . В некоторых случаях существуют финальные (предельные) вероятности состояний:

$$P_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t),$$

где  $i = 0, 1, \dots, n$ , не зависящие от того, в каком состоянии система  $S$  находилась в начальный момент. Говорят, что в системе  $S$  устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний  $P_i$  уже не меняются. Система, для которой существуют финальные вероятности, называется **эргодической**, а соответствующий случайный процесс **эргодическим**.

Финальные вероятности состояний (если они существуют) могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если приравнять производные к нулю, а вероятностные функции состояния  $P_1(t)$ , ...,  $P_n(t)$  в правых частях уравнений (9.8) заменить соответственно на неизвестные финальные вероятности  $P_1, \dots, P_n$ .

Таким образом, для системы  $S$  с  $n$  состояниями получается система  $n$  линейных однородных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными  $P_1, \dots, P_n$ , которые можно найти с точностью до произвольного множителя. Для нахождения точного значения  $P_0, P_1, \dots, P_n$  к уравнениям добавляют нормировочное условие  $P_0 + P_1 + \dots + P_n = 1$ , пользуясь которым можно выразить любую из вероятностей  $P_i$  через другие и отбросить одно из уравнений.

**Пример 3.** Имеется размеченный граф состояний системы  $S$  (рис. 4). Необходимо составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова и записать начальные условия для решения этой системы, если известно, что в начальный момент система находилась в состоянии  $S_1$ .

### Решение

Согласно приведенному мнемоническому правилу, система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид

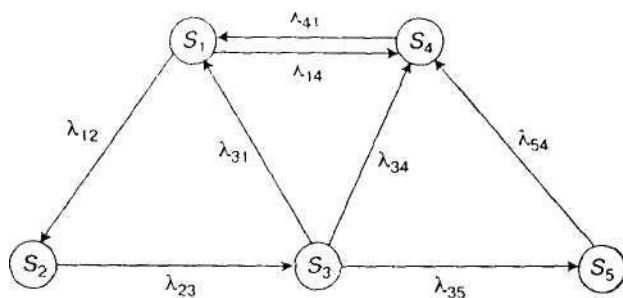


Рисунок 4. Граф состояний системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_1}{dt} = \lambda_{31} \cdot P_3 + \lambda_{41} \cdot P - \lambda_{12} \cdot P_1 - \lambda_{14} \cdot P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda_{12} \cdot P_1 - \lambda_{23} \cdot P_2 \\ \frac{dP_3}{dt} = \lambda_{23} \cdot P_2 - (\lambda_{41} \cdot P_3 + \lambda_{34} \cdot P_3 + \lambda_{35} \cdot P_3) \\ \frac{dP_4}{dt} = \lambda_{14} \cdot P_1 + \lambda_{34} \cdot P_3 - \lambda_{54} \cdot P_5 - \lambda_{41} \cdot P_4 \\ \frac{dP_5}{dt} = \lambda_{35} \cdot P_3 - \lambda_{54} \cdot P_5 \end{array} \right. \quad (9)$$

Начальные условия при  $t = 0$ :

$$P_1 = 1; P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 0.$$

Рассмотрим, что произойдет с системой  $S$ , описываемой дифференциальными уравнениями Колмогорова, при  $t \rightarrow \infty$ . Известно, что в случае сообщающихся состояний функции  $P_1(t), \dots, P_n(t)$  стремятся к предельным (финальным) вероятностям состояний системы  $S$ . Финальные вероятности не зависят от времени. Поэтому в системе дифференциальных уравнений Колмогорова все левые части уравнений (производные) принимают равными нулю. При этом система дифференциальных уравнений превратится в систему линейных алгебраических уравнений.

Для нашего примера система (9.9) будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \lambda_{31} \cdot P_3 + \lambda_{41} \cdot P - \lambda_{12} \cdot P_1 - \lambda_{14} \cdot P_1 \\ 0 = \lambda_{12} \cdot P_1 - \lambda_{23} \cdot P_2 \\ 0 = \lambda_{23} \cdot P_2 - (\lambda_{41} \cdot P_3 + \lambda_{34} \cdot P_3 + \lambda_{35} \cdot P_3) \\ 0 = \lambda_{14} \cdot P_1 + \lambda_{34} \cdot P_3 - \lambda_{54} \cdot P_5 - \lambda_{41} \cdot P_4 \\ 0 = \lambda_{35} \cdot P_3 - \lambda_{54} \cdot P_5 \end{array} \right.$$

Решая ее, с учетом условия  $P_0 + P_1 + \dots + P_n = 1$ , получим все предельные вероятности. Эти вероятности представляют собой не что иное, как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Для существования финальных вероятностей одного условия  $\lambda_{ij} = \text{const}$  недостаточно, требуется выполнение еще некоторых условий, проверить которые можно по графу состояний, выделив в нем так называемые существенные и несущественные состояния.

Состояние  $S_i$  называется **существенным**, если нет другого состояния  $S_j$ , т. е. такого, что, перейдя однажды каким-то способом из  $S_i$  в  $S_j$ , система уже не может вернуться в  $S_i$ .

Все состояния, не обладающие таким свойством, называются **несущественными**.

Рассмотрим пример, представленный на рис. 5.

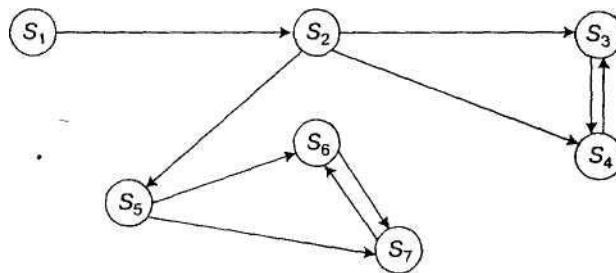


Рисунок 5. Граф состояний системы  $S$

Состояния  $S_1, S_2$  и  $S_5$  - несущественные, так как из  $S_1$ , можно уйти, например, в состояние  $S_2$  и не вернуться, а из состояния  $S_2$  — в состояние  $S_3$  или  $S_4$  и не вернуться аналогично из состояния  $S_5$  — в состояние  $S_6$  и  $S_7$ . Состояния  $S_3, S_4, S_6$  и  $S_7$  — существенные состояния.

**Теорема.** При конечном числе состояний для существования финальных вероятностей необходимо и достаточно, чтобы из каждого существенного состояния можно было (за какое-то число шагов) перейти в каждое другое существенное состояние.

Граф из примера рис. 9.5 этому условию не удовлетворяет, так как из существенного состояния  $S_4$  нельзя перейти в существенное состояние  $S_7$ . Если система  $S$  имеет конечное число состояний  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , то для существования финальных вероятностей достаточно, чтобы из любого состояния системы можно было (за какое-то число шагов) перейти в любое другое состояние.

Если число состояний  $S_1, S_2, \dots, S_n$  бесконечно, то это условие перестает быть достаточным, и существование финальных вероятностей зависит не только от графа состояний, но и от интенсивности  $\lambda_{ij}$ .

### Потоки событий. Простейший поток

При исследовании непрерывных марковских цепей, как было уже отмечено, часто бывает удобно представить переход системы из состояния в состояние как воздействие каких-то потоков событий (поток заявок на обслуживание, поток автомобилей, поток документов и т. п.). Различают следующие основные свойства, которыми могут обладать случайные потоки событий:

- стационарность;
- ординарность;
- отсутствие последействия.

**Стационарность.** Свойство стационарности проявляется в том, что вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени  $t$  зависит только от длины участка и не зависит от расположения на оси  $ot$ . Другими словами, стационарность означает неизменность вероятностного режима потока событий во времени. Поток, обладающий свойством стационарности, называют стационарным. Для стационарного потока среднее число событий, воздействующих на систему в течение единицы времени, остается постоянным. Реальные потоки событий в экономике предприятия являются в действительности стационарными лишь на ограниченных участках времени.

**Ординарность.** Свойство ординарности потока присутствует, если вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с длиной этого участка. Свойство ординарности означает, что за малый промежуток времени практически невозможно появление более одного события. Поток, обладающий свойством ординарности, называют ординарным. Реальные потоки событий в различных экономических системах либо являются ординарными, либо могут быть достаточно просто приведены к ординарным.

**Отсутствие последействия.** Данное свойство потока состоит в том, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени. Поток, обладающий свойством отсутствия последействия, называют потоком без последействия. Поток событий, одновременно обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется простейшим потоком событий.

Под интенсивностью потока понимают

$$\lambda(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m(t, t + \tau)}{\tau} \quad (11)$$

где  $m(t, t + \tau)$  – среднее число событий в  $(t, t + \tau)$ .

Поток событий называется **простейшим** (или **стационарным пуассоновским**), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия.

**Интенсивность потока  $\lambda$**  называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени. Можно доказать, что если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления  $k$  событий простейшего потока за время длительностью  $t$  определяется формулой Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

Эта формула отражает все свойства простейшего потока.

Действительно, из формулы видно, что вероятность появления  $k$  событий за время  $t$ , при заданной интенсивности является функцией  $k$  и  $t$ , что характеризует свойство стационарности.



Формула не использует информации о появлении событий до начала рассматриваемого промежутка, что характеризует свойство отсутствия последствия.

Убедимся, что формула отражает свойство ординарности. Положив  $k = 0$  и  $k=1$ , найдем соответственно вероятности непоявления событий и появления одного события:

$$P_t(0) = e^{-\lambda t}, P_t(1) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Следовательно, вероятность появления более одного события

$$P_t(k > 1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}]$$

Пользуясь разложением

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots$$

после элементарных преобразований получим

$$P_t(k > 1) = \frac{(\lambda t)^2}{2} + \dots$$

Сравнивая  $P_t(1)$  и  $P_t(k > 1)$ , заключаем, что при малых значениях  $t$  вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события, что характеризует свойство ординарности.

Итак, формулу Пуассона можно считать математической моделью простейшего потока событий.

**Пример 4.** Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за 5 минут поступит:

- а) 2 вызова;
- б) менее двух вызовов;
- в) не менее двух вызовов.

Поток вызовов предполагается простейшим.

#### Решение

По условию,  $\lambda = 2$ ,  $t = 5$ ,  $k = 2$ . Воспользуемся формулой Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

- а) Искомая вероятность того, что за 5 мин поступит 2 вызова,

$$P_5(2) = \frac{10^2 \cdot e^{-10}}{2!} = 100 \cdot 0,000045 / 2 = 0,00225$$

Это событие практически невозможно.

б) События «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов» несовместны, поэтому по теореме сложения искомая вероятность того, что за пять минут поступит не менее двух вызовов, равна

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + \frac{10 \cdot e^{-10}}{1!} = 0,000495$$

Это событие практически невозможно.

в) События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 5 мин поступит не менее двух вызовов,

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0,000495 = 0,999505$$

Это событие практически достоверно.

#### Нестационарный пуассоновский поток

Для простейшего потока интенсивность  $\lambda = \text{const}$ . Если поток событий не имеет последствия, ординарен, но не стационарен, то его называют **нестационарным пуассоновским потоком**, а его интенсивность зависит от времени, т. е.  $\lambda = \lambda(t)$ .

В пуассоновском потоке событий (стационарном и нестационарном) число событий потока, попадающих на любой участок, распределено по **закону Пуассона**:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где  $P_m$  — вероятность попадания на участок  $m$  событий;  $a$  — среднее число событий, приходящееся на участок.

Для простейшего потока  $a = \lambda \cdot \tau$ , а для нестационарного пуассоновского потока

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt \quad (13)$$

где  $\tau$  — длина участка времени;  $t_0$  — начало участка  $\tau$ .

Отметим еще одно важное свойство простейшего потока событий. Промежуток времени  $t$  между соседними событиями распределен по показательному закону, а его среднее значение  $\bar{T}$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  равны, т. е.

$$\bar{T} = \sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (14)$$

где  $\lambda$  — интенсивность потока.

Для нестационарного пуассоновского потока закон распределения промежутка  $t$  уже не является показательным, так как зависит от положения на оси  $Ot$  и вида зависимости  $\lambda(t)$ . Однако для некоторых задач при сравнительно небольших изменениях  $\lambda(t)$  его можно приближенно считать показательным с интенсивностью  $\lambda$ , равной среднему значению  $\lambda(t)$ .

Таким образом, для исследуемой системы  $S$  с дискретными состояниями и непрерывным временем переходы из состояния в состояние происходят под действием пуассоновских потоков событий с определенной интенсивностью  $\lambda_{ij}$ .

В теории случайных процессов простейший поток в качестве предельного возникает так же естественно, как нормальное распределение вероятностей в качестве предельного для случайных величин.

**Замечание.** Часто на практике трудно установить, обладает ли поток перечисленными выше свойствами. Поэтому были найдены и другие условия, при соблюдении которых поток можно считать простейшим или близким к простейшему. В частности, установлено, что если поток представляет собой сумму очень большого числа независимых стационарных потоков, влияние каждого из которых на всю сумму (суммарный поток) ничтожно мало, то суммарный поток (при условии его ординарности) близок к простейшему.

### Процесс гибели и размножения

Рассмотрим еще одну типичную схему непрерывных марковских цепей — так называемую схему гибели и размножения, часто встречающуюся в разнообразных практических задачах.

Марковский процесс с дискретными состояниями  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$  называется процессом **гибели и размножения**, если все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний ( $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ ) может переходить только в соседние состояния, которые, в свою очередь, переходят обратно, а крайние состояния ( $S_0$  и  $S_n$ ) переходят только в соседние состояния (рис. 6).

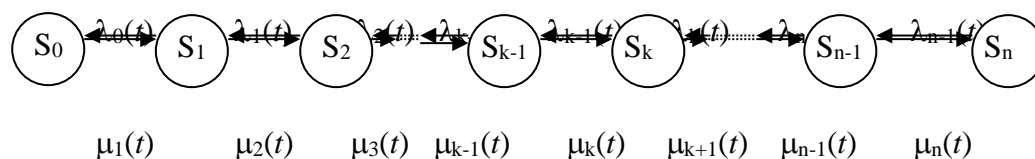


Рисунок 6. Граф состояний для процесса гибели и размножения

Название взято из биологических задач, где состояние популяции  $S_k$  означает наличие в ней  $k$  единиц особей.

Переход вправо связан с размножением единиц, а влево — с их гибелью.

$\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)$  — интенсивности размножения,

$\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_n(t)$  - интенсивности гибели.

У  $\lambda$  и  $\mu$  индекс того состояния, из которого стрелка выходит. С состоянием  $S_k$  связана неслучайная величина  $X_k$ : если система  $S$  в момент времени  $t$  находится в состоянии  $S_k$ , то дискретная случайная величина  $X(t)$ , связанная с функционированием системы, принимает значение  $k$ . Таким образом, получаем случайный процесс  $X(t)$ , который в случайные, заранее неизвестные моменты времени скачком изменяет свое состояние.

*Марковским процессом гибели и размножения с непрерывным временем* называется такой случайный процесс, который может принимать только целые неотрицательные значения. Изменения этого процесса могут происходить в любой момент времени, т. е. в любой момент времени он может либо увеличиться на единицу, либо уменьшиться на единицу, либо остаться неизменным.

В практике встречаются процессы чистого размножения и чистой гибели. *Процессом чистого размножения* называется такой процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков гибели равны нулю; аналогично *процессом чистой «гибели»* называется такой процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков размножения равны нулю.

При постоянных интенсивностях потоков гибели и размножения и конечном числе состояний будет существовать стационарный режим. Система  $S$  с конечным числом состояний  $(n+1)$ , в которой протекает процесс гибели и размножения с постоянными интенсивностями потоков гибели и размножения, является простейшей эргодической системой. Размеченный граф состояния для такой системы представлен на рис. 7.

Предельные (финальные) вероятности состояний для простейшего эргодического процесса гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме, определяются по следующим формулам:

$$P_k = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_k} \cdot P_0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

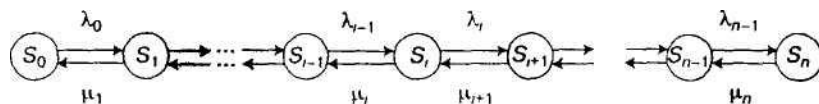


Рисунок 7. Граф состояний

$$P_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n} \right\}^{-1} \quad (16)$$

**Правило.** Вероятность  $k$ -го состояния в схеме гибели и размножения равна дроби, в числителе которой стоит произведение всех интенсивностей размножения, стоящих левее  $S_k$ , а в знаменателе - произведение всех интенсивностей гибели, стоящих левее  $S_k$ , умноженной на вероятность крайнего левого состояния системы  $P_0$ .

Легко заметить, что в формулах (15) для  $P_1, P_2, \dots, P_n$  коэффициенты при  $P_0$  — это слагаемые, стоящие после единицы в формуле (9.16). Числители этих коэффициентов представляют собой произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо до данного состояния  $S_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), а знаменатели — произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево из состояния  $S_k$  (рис. 9.7).

**Пример 5.** Процесс гибели и размножения представлен графом (рис 9.8). Найти предельные вероятности состояний.

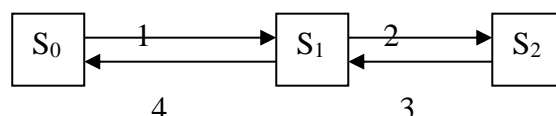


Рисунок 8

По формуле (9.16) найдем

$$P_0 = \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} \right\}^{-1} = 0,706$$

по (15)

$$P_1 = \frac{1}{4} 0,706 = 0,176, \quad P_2 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} 0,706 = 0,118,$$

т.е. в установившемся стационарном режиме в среднем 70,6% времени система будет находиться в состоянии  $S_0$ , 17,6% — в состоянии  $S_1$  и 11,8% — в состоянии  $S_2$ .

**Выводы.** Сформированы теоретические знания необходимые при решении задач с помощью теории случайных процессов.