ОП.11 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ

Тема 1.2 Приближенные методы поиска корней алгебраических многочленов

Отделение корней при решении уравнений с одной неизвестной.

- ✓ Общая формула оценки погрешностей приближенного корня.
- ✓ Границы действительных корней алгебраических уравнений; теорема Лагранжа; метод знакопеременных сумм.
- ✓ Число действительных корней полинома

Ковалева Елена Вячеславовна e.kovaleva@mgutm.ru

Число знакопостоянств (знакоперемен)

Число знакопостоянств (знакоперемен) определяется для конечной последовательности $A_1, \ldots, A_n, (n \geq 2)$, *вещественных чисел . Если числа* A_1 *и* A_2 *— одного знака, то говорят, что имеет место* ***знакопостоянство*** *(или* ***постоянство знака****),*

если разного — то ***знакоперемена*** *(или* ***перемена знака****).*
Вводят счетчики ρ *- знакопостоянств и* ν *- знакоперемен , полагая*

$$\mathcal{P}(A_1, A_2) = \begin{cases} 1 & npu \quad A_1A_2 > 0 \\ 0 & npu \quad A_1A_2 < 0 \end{cases} ; \mathcal{V}(A_1, A_2) = \begin{cases} 1 & npu \quad A_1A_2 < 0 \\ 0 & npu \quad A_1A_2 > 0 \end{cases} .$$

Число знакопостоянств *(****-перемен****) в последовательности определяется как сумма этих величин, вычисленных для соседних членов:*

$$\mathcal{P}(A_1, \ldots, A_n) = \mathcal{P}(A_1, A_2) + \mathcal{P}(A_2, A_3) + \cdots + \mathcal{P}(A_j, A_{j+1}) + \cdots + \mathcal{P}(A_{n-1}, A_n),$$

$$\mathcal{V}(A_1, \ldots, A_n) = \mathcal{V}(A_1, A_2) + \mathcal{V}(A_2, A_3) + \cdots + \mathcal{V}(A_j, A_{j+1}) + \cdots + \mathcal{V}(A_{n-1}, A_n) .$$

Пример

$$\mathcal{P}(-2, \sqrt{5.3}, 2.818, 123, -0.5, -33) =$$

$$= \mathcal{P}(-2, \sqrt{5.3}) + \mathcal{P}(\sqrt{5.3}, 2.818) + \mathcal{P}(2.818, 123) + \mathcal{P}(123, -0.5) + \mathcal{P}(-0.5, -33) = 0+1+1+0+1 = 3\,,$$

$$\mathcal{V}(-2, \sqrt{5.3}, 2.818, 123, -0.5, -33) = 2\,.$$

При наличии нулей среди чисел $A_1, \ldots, A_n$ иногда дополнительно устанавливается правило, что при подсчете знакопостоянств (-перемен) нулевые значения пропускаются (не учитываются). В случае когда все ненулевые, имеет место равенство:

$$\mathcal{P}(A_1, \ldots, A_n) + \mathcal{V}(A_1, \ldots, A_n) = n - 1$$

Локализация корней полинома

Теорема [Декарт]. Число положительных корней полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad (a_0 > 0, a_n \neq 0)$$

с учетом их кратностей равно или меньше на четное число числа знакоперемен в ряду его коэффициентов:

$$\mathrm{nrr}\{f(x) = 0 \mid x > 0\} = \mathcal{V}(a_0, a_1, \ldots, a_n) - 2k, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\} .$$

Число отрицательных корней полинома с учетом их кратностей можно оценить по формуле

$$\mathrm{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\} = \mathcal{V}(a_0, -a_1, a_2, \ldots, (-1)^n a_n) - 2k' ,$$

а если среди коэффициентов полинома нет нулевых, то — по формуле

$$\mathrm{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\} = \mathcal{P}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) - 2k'$$

algebra2:notations

где $k' \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, ρ - число знакопостоянств.

nrr – число вещественных корней

Пример

Оценить число положительных и число отрицательных корней полинома

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 - x^2 - 9x + 1 \; .$$

Решение.

$$\mathcal{V}(1, -2, -8, -1, -9, 1) = 2 \;\Rightarrow\; \mathrm{nrr}\{f(x) = 0 \mid x > 0\} = 2 - 2k \geq 0 \; ,$$

следовательно $f(x)$ имеет либо два, либо ни одного положительного корня.

$$\mathrm{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\} = \mathcal{P}(1, -2, -8, -1, -9, 1) = 3 - 2k' \geq 0 \; ,$$

следовательно $f(x)$ имеет либо три, либо один отрицательный корень

Пример

Оценить число положительных и число отрицательных корней полинома

$$f(x) = x^5 - x^3 - 1.$$

Решение.

$$\mathcal{V}(1, 0, -1, 0, 0, -1) = \mathcal{V}(1, -1, -1) = 1.$$

$$\mathrm{nrr}\{f(x) = 0 \mid x > 0\} = 1 - 2k \geq 0 \implies = 1$$

$$\mathrm{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\} = \mathcal{V}(1, 0, -1, 0, 0, 1) - 2k' = 2 - 2k' = \begin{cases} 2 & npu\ k' = 0; \\ 0 & npu\ k' = 1. \end{cases}$$

Ответ. Полином имеет один положительный и либо два, либо ни одного отрицательного корня.

Теорема Лагранжа

Теорема [Лагранж]. Все вещественные корни полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[x], \;\; a_0 > 0$$

удовлетворяют неравенству

$$\lambda_j < 1 + \sqrt[r]{A}, \quad при \quad A = \max_{k \in \{1,\dots,n\}} \left| \frac{a_k}{a_0} \right|$$

Где *r* - номер первого отрицательного коэффициента.

Оценка Лагранжа, являясь оценкой вещественных корней сверху, фактически ограничивает возможные <u>положительные</u> корни.

Пример

Найти оценки положительных и отрицательных корней полинома

$$f(x) = x^8 + 2x^7 - 2x^6 + 6x^5 - 80x^4 + 100x^3 - 400x^2 + 15x + 30.$$

$$f(-x) = x^8 - 2x^7 - 2x^6 - 6x^5 - 80x^4 - 100x^3 - 400x^2 - 15x + 30,$$

$$f^*(x) = x^8 f(1/x) = 1 + 2x - 2x^2 + 6x^3 - 80x^4 + 100x^5 - 400x^6 + 15x^7 + 30x^8$$

Отделение корней

Определение. Всякое число ξ обращающее функцию в нуль, т.е. такое, что $f(\xi)=0$, называется корнем (нулем) функции или корнем уравнения

$$f(x)=0$$

Решить уравнение — значит найти все его корни, то есть те значения **x**, которые обращают уравнение в тождество.
Если уравнение достаточно сложно, то задача точного определения корней является в некоторых случаях *нерешаемой*.
Поэтому ставится задача найти такое *приближенное значение* корня $\mathbf{x_{ПР}}$, которое отличается от точного значения корня **x*** на величину, по модулю не превышающую указанной точности (малой положительной величины) **ε**, то есть

$$|\mathbf{x^* - x_{пр}}| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Величину **ε** также называют ***допустимой ошибкой***, которую можно задать по своему усмотрению.

Приближенное вычисление корня, как правило, распадается на две задачи:

1. отделение корней, т.е. определение интервалов, в каждом из которых содержится только один корень уравнения;
2. уточнение корня, т.е. вычисление его с заданной степенью точности.

Графическое отделение корней

Для того чтобы графически отделить корни уравнения, необходимо построить график функции $\boldsymbol{f(x)}$. Абсциссы точек его пересечения с осью Ох являются действительными корнями уравнения.

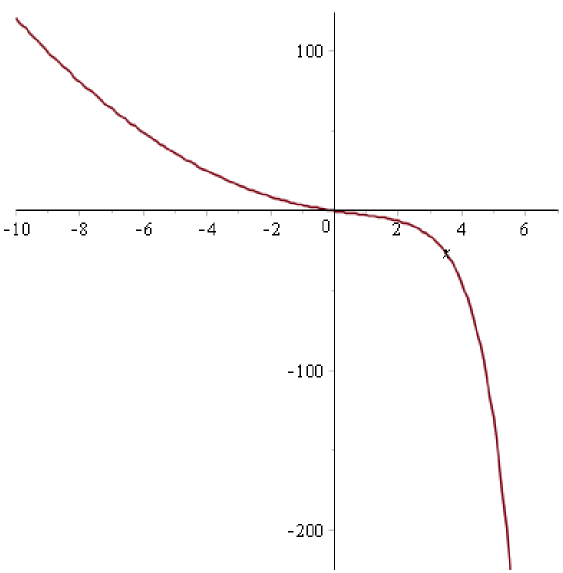
$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$

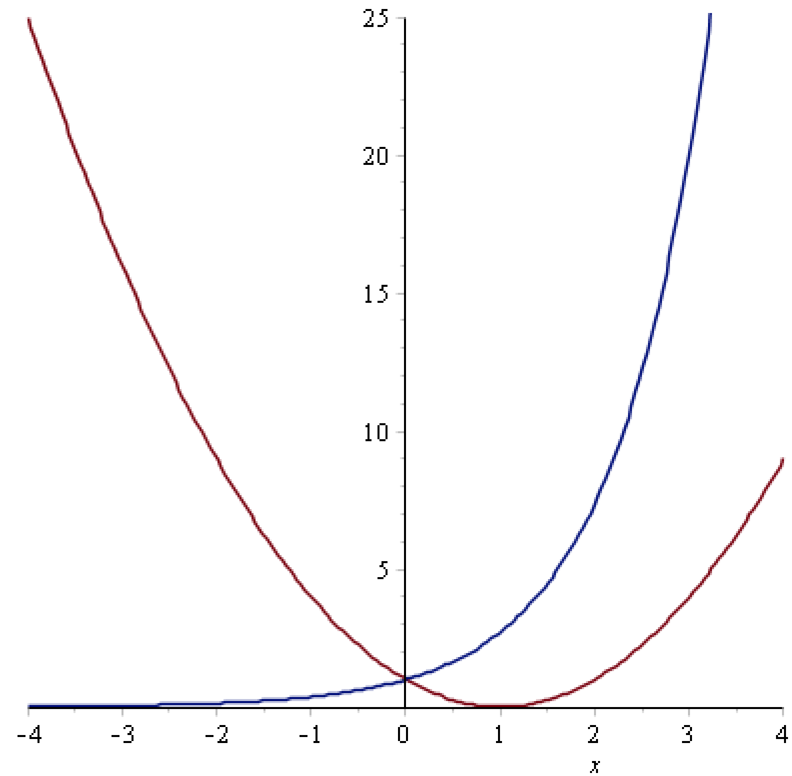
$\varphi(x) = \psi(x)$

Пример

Отделить корни графически $(x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$$





Аналитическое отделение корней

Теорема 1. Если непрерывная функция $\boldsymbol{f(x)}$ принимает на концах отрезка [a; b] значения разных знаков, т.е.

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

то на этом отрезке содержится по крайней мере один корень уравнения.

Теорема 2. Если непрерывная на отрезке [a;b] функция $\boldsymbol{f(x)}$ принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $\boldsymbol{f'(x)}$ сохраняет знак внутри указанного отрезка, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

Литература

Численные методы и программирование : учеб. пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. — М. : ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2017. http://znanium.com/catalog/product/672965

Дополнительные источники

Введение в численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие / Гулин А.В.,Мажорова О.С.,Морозова В.А.-М.:АРГАМАК-МЕДИА,НИЦ ИНФРА-М,2014

Интернет-ресурсы

- http://window.edu.ru
- http:// edu.ru
- http://Fcior.edu.ru

Спасибо за внимание