Критерии выбора оптимальной стратегии. Основные понятия и определения. Седловая точка. Нижняя и верхняя цена игры. Игра с природой. Принцип максимина, критерий Гурвица, критерий Севиджа.

Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях теории игр.
2. Формирование знаний об основных способах решения теории игр.

Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при составлении и решении задач теории игр.
2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области основных понятий и способов решений задач теории игр.

Одним из методов, позволяющих принимать решения в условиях неопределенности, являются так называемые **"матричные игры"**, исследуемые в рамках математической теории игр. Принципиально выделяют два основных вида таких игр:

1. **стратегические игры** и
2. **игры с природой**.

Аппарат стратегических игр применяется для принятия решений в условиях конфликта. Там неопределенность связана с действиями других лиц, которые целенаправленно стремятся максимизировать свой выигрыш. ЛПР не знает точно, что будут делать противники. Однако он может обоснованно предполагать, что они осознанно выбирают стратегии наилучшие для себя и наихудшие для других (в т.ч. и для нашего ЛПР). Методы стратегических игр позволяют выбрать оптимальную стратегию в условиях такого противодействия.

Если же целенаправленного противодействия нет, и неопределенность связана с объективными (независящими от воли конкретных субъектов) обстоятельствами, то применяется аппарат "игр с природой". При этом под "природой" не обязательно подразумевается живая или неживая природа (биосфера, атмосфера и т.д.). Это может быть рынок или иная совокупность субъектов, которые не конфликтуют с нашим ЛПР, а просто совершают непредсказуемые для него действия. Такая "природа" безразлична к выигрышу или проигрышу ЛПР и не стремится обратить его просчеты в сою пользу. Естественно, что логика принятия решений в таких условиях несколько отличается от логики стратегических игр. В нашей книге мы будем рассматривать только такую неопределенность, не зависящую от воли конкретных субъектов, и применять для принятия решений математический аппарат "игр с природой".

Постановка задачи в условиях игр с природой

Предположим, у ЛПР есть N вариантов действий (альтернатив, стратегий). Обозначим i-ю альтернативу через X_i, где $i = 1..N$

Природа может оказаться в одном из M возможных состояний. Номер состояния природы обозначим через j, $j = 1..M$.

В зависимости от того, какое состояние примет природа, каждая альтернатива обеспечивает некоторый известный выигрыш. Выигрыш, который получит ЛПР, выбравший альтернативу X_i, если наступит j-е состояние природы, обозначим как x_{ij}.

Представленные исходные данные для игры с природой образуют так называемую **"матрицу игры"** (см.табл..1) (отсюда и общее название данной группы методов "матричные игры").

Табл 1 Общий вид матрицы игры с природой.

Альтер-нативы(X_i)	**Состояния природы (j)**					
	1	**2**	**...**	***j***	**...**	***M***
	Исходы (x_{ij})					
X_1	x_{11}	x_{12}		x_{1j}		x_{1M}
X_2	x_{21}	x_{22}		x_{2j}		x_{2M}
...				...		
X_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{iM}
...				...		
X_N	x_{N1}	x_{N2}		x_{Nj}		x_{NM}

Задача принятия решения сводится к выбору "наилучшей" (оптимальной) альтернативы X^* из числа доступных альтернатив X_i, $i = 1..N$.

Каким же образом можно выбрать оптмальную стратегию, если, например, при состоянии природы j_1 наилучший результат приносит альтернатива X_k, а при состоянии природы j_2 самые хорошие результаты даст X_l ?

Примечание

Здесь и далее, если нет специальных оговорок, в задачах на принятие решения в качестве исходов x_{ij} *мы будем рассматривать показатели, которые желательно максимизировать - выигрыш, доход, прибыль.*

К ним применяется принцип "чем больше, тем лучше". Все принципы выбора оптимальной альтернативы будут сформулированы именно для таких показателей.

Если в матрице игры в качестве исходов надо представить показатели, которые подлежат минимизации - убытки, расходы, потери, то здесь возможны два пути:

1) представлять их в матрице виде отрицательных значений. Тогда можно без изменений использовать приведенные далее в книге формулы, операции сравнения и принципы определения оптимальной альтернативы;

2) представлять их в матрице в виде положительных значений. В этом случае необходимо поменять в приведенных в книге формулах:

- *операции максимизации на минимизацию и наоборот,*
- *операции сравнения при определении оптимальных альтернатив с "больше" и "больше или равно" - на "меньше" и "меньше или равно", и наоборот.*

Принцип последовательного уменьшения неопределенности

Если сразу "на глаз" выбрать наилучшую альтернативу не получается, то применяется **принцип последовательного уменьшения неопределенности**. Он сводится к поэтапному **сужению множества альтернатив** до тех пор, пока в итоге не останется одна стратегия, имеющая наилучшие показатели (или несколько альтернатив имеющих одинаковые показатели).

Сужение множества альтернатив происходит в несколько этапов (см. рис.2.1). На первом из всех исходных альтернатив X отбирают множество допустимых X^D. Отбрасываются те стратегии, которые не соответствуют установленным ограничениям. В исходных условиях задач, как правило, уже задаются только допустимые альтернативы, поэтому данный этап пропускается. На практике же ЛПР приходится самостоятельно проверять возможность реализации той или иной альтернативы и отбрасывать принципиально невозможные или неприемлемые в силу различных ограничений (политических, экономических, юридических, моральных и т.д.).

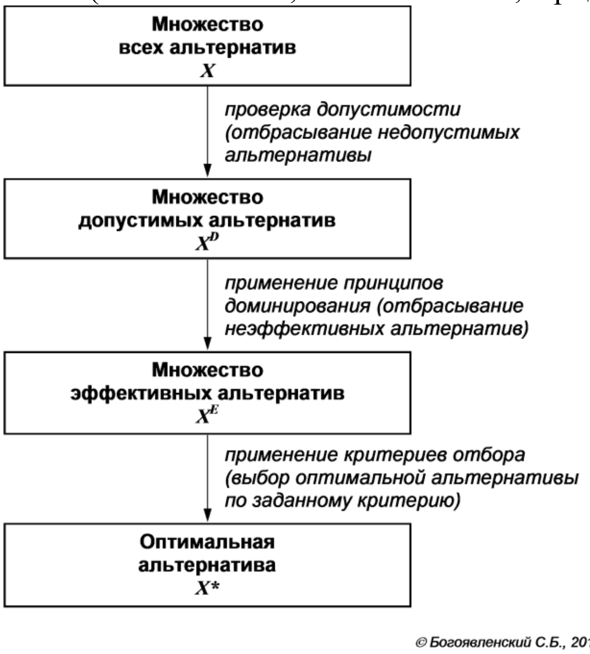

Рис. 1. Процесс принятия решения путем последовательного сужения множества альтернатив.

На втором этапе отбрасываются так называемые неэффективные альтернативы, которые хуже всех остальных. Среди них не может быть оптимальной. Оставшееся множество составляют эффективные альтернативы X^E, про которые пока нельзя сказать, что они самые лучшие, но и невозможно найти те, которые однозначно лучше других. Чтобы отобрать такие стратегии, применяют принципы доминирования.

Поиск оптимальной альтернативы X^* производится на третьем этапе среди ранее отобранных эффективных стратегий. Обычно это осуществляется с использованием так называемых критериев.

В результате получается, что оптимальная альтернатива X^* относится ко множеству эффективных альтернатив X^E, которое является подмножеством допустимых альтернатив X^D, а то, в свою очередь, является подмножеством вообще всех возможных альтернатив X:

$$X^* \in X^E \subseteq X^D \subseteq X$$

Благодаря последовательной проверке ограничений, применению принципов доминирования и критериев удается все многообразие вариантов действий свести к одной наилучшей стратегии при заданных условиях для данного ЛПР.

Абсолютное доминирование и доминирование по состояниям

Для сужения множества допустимых альтернатив и исключения из рассмотрения неэффективных могут применяться принципы доминирования:

- **абсолютное доминирование**;
- **доминирование по состояниям**;
- **стохастическое (или вероятностное) доминирование**.

Абсолютное доминирование и доминирование по состояниям может существовать как при неопределенности, так и в ситуации риска. Стохастическое относится только к ситуации риска, поскольку подразумевает знание вероятностей. Поэтому мы рассмотрим его в **главе 3**. Пока же остановимся на первых двух.

Доминирование обозначается символом $\succ$. Запись $A \succ B$ означает, что альтернатива A доминирует альтернативу B. Мы будем добавлять к этому символу буквенные обозначения, чтобы было понятно, о каком виде доминирования идет речь. Это не совсем строгая математическая запись, однако, она легче воспринимается при обучении.

Абсолютное доминирование

Абсолютное доминирование одной альтернативы над другой имеет место, когда самый плохой исход первой альтернативы лучше самого хорошего исхода второй (см. рис.2.2а).

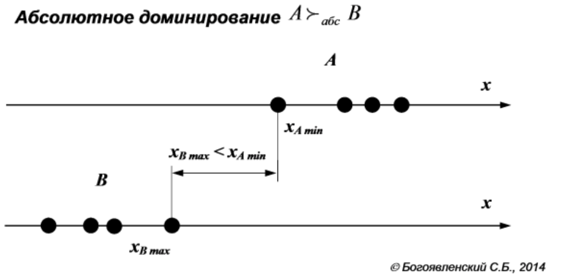

Рис. 2а. Пример абсолютного доминирования.

Математически это может быть записано следующим образом:

$X_i \succ_{абс} X_k \iff \min(x_{ij}) \geq \max(x_{kj}),\ j = 1..M$

Если одна альтернатива абсолютно доминирует все остальные, то она является оптимальной.

Доминирование по состояниям

Одна альтернатива доминирует по состояниям другую, если для каждого состояния природы исход первой альтернативы не хуже исхода второй, и хотя бы для одного состояния исход первой альтернативы строго лучше (см.рис.2.2б).

Рис. 2б. Пример доминирования по состояниям.

Математическая запись доминирования по состояниям выглядит так:

$$X_i \succ X_k \Longleftrightarrow x_{ij} \geq x_{kj}\,,\; j = 1..M$$

$$x_{il} > x_{kl}\,,\; l \in 1..M$$

Если одна альтернатива доминирует по состояниям все остальные, то она является оптимальной.

Таким образом, в ситуации неопределенности, проверив множество всех допустимых альтернатив на соответствие принципам абсолютного доминирования и доминирования по состояниям, можно получить следующие результаты:

1) если есть одна альтернатива, которая абсолютно или по состояниям доминирует все остальные, то она является оптимальной, и задача выбора решена;

2) если среди альтернатив есть альтернатива, которая доминирует одну или несколько других, то доминируемые альтернативы можно отбросить (исключить из рассмотрения), поскольку они точно не будут оптимальными. Задача выбора еще не решена, т.к. все равно остается несколько альтернатив, но их уже меньше, и делать выбор проще;

3) если среди всех допустимых альтернатив нет доминирующих ни абсолютно, ни по состояниям, значит, множество рассматриваемых альтернатив не сужается, и принимать решение придется, рассматривая все допустимые стратегии.

Во втором и третьем случаях проверка принципов доминирования не дает однозначного решения, поэтому требуется применение других методов, в частности, сравнение альтернатив по критериям выбора.

Критерии выбора

В детерминированной ситуации подразумевается, что ЛПР точно знает состояние среды (в терминах игры - "природы"). Поэтому, можно точно рассчитать исходы для всех стратегий, и сделать выбор относительно несложно. Достаточно сравнить результаты, которые обеспечивают разные альтернативы, и выбрать ту, которая дает наибольший выигрыш при этом единственном состоянии. Для этого применяется операция численного сравнения (больше, меньше, равно).

В ситуации неопределенности есть несколько возможных состояний, и разные альтернативы при них обеспечивают различный выигрыш. То есть у нас есть несколько альтернатив, каждая из которых представляет собой набор значений исходов при соответствующих состояниях природы. Эти наборы нельзя просто математически сравнить "целиком", используя понятия "больше-меньше". Такую операцию можно провести только с отдельными членами данных наборов. Если все значения одного набора не меньше значений другого при этих же состояниях, а одно значение строго больше, то тогда первый набор является предпочтительным. Но такую проверку мы уже провели, когда применяли принцип доминирования по состояниям. Предполагается, что все альтернативы, которые доминировались по состояниям, уже отброшены.

Если среди альтернатив нет доминирующих по состояниям, это означает, что при разных состояниях природы наилучший результат показывают разные альтернативы. Каким же образом можно сравнить между собой эти наборы значений, и как выбрать оптимальный? Здесь на помощь приходят так называемые **критерии выбора** или просто критерии.

Основная идея любого критерия: заменить целый набор значений одним численным показателем, характеризующим данный набор с определенной точки зрения, и затем просто численно сравнить между собой эти показатели.

У какого набора этот численный показатель окажется "лучше" (больше или меньше - зависит от вида критерия и ситуации), тот и будет считаться оптимальным по данному критерию.

Идея простая, но эффективная. Однако существенным недостатком любого критерия является "потеря информации". Из-за "сжатия" целого набора значений в одно единственное число, становятся заметны одни свойства (черты) набора и не видны другие.

Это все равно, что про человека судить только по принципу (т.е. критерию) "плохой" или "хороший". Здесь все качества, черты характера, взгляды человека описываются одним словом. Это легко запомнить, но здесь нет подробной информации. Более того, может происходить ее искажение.

Во-первых, не все качества плохого человека могут быть хуже, чем у хорошего (он может быть здоровее или даже умнее).

Во-вторых, значение "плохой" или "хороший" соответствует взгляду конкретного субъекта или группы, которые оценили человека по своим субъективным. И, вполне возможно, у других людей существуют свои подходы к присвоению значения "плохой" или "хороший". Поэтому такая оценка не является точной и универсальной.

В общем случае **порядок применения критерия** выглядит следующим образом (см. рис.2.3):

1) на первом этапе выбирается критерий, по которому будет производиться выбор;

2) для каждой альтернативы рассчитывается значение выбранного критерия. По сути, в соответствие каждой альтернативе ставится одно численное значение критерия (ее количественная оценка);

3) альтернативы сравниваются путем обычного численного сравнения соответствующих им значений критериев;

4) по результатам сравнения оптимальной признается альтернатива, имеющая наилучшее значение критерия. Что считать "наилучшим" - максимальное или минимальное значение критерия - зависит от того, что показывают исходы альтернатив (прибыль, выигрыш или убытки, расходы), и по какому критерию производится сравнение.

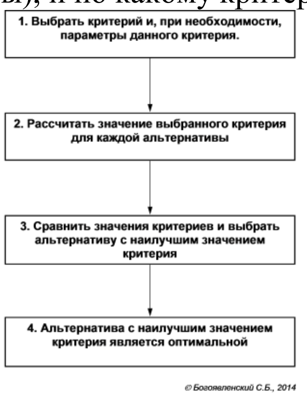

Рис.3. Порядок применения критерия выбора.

В нашей работе мы рассмотрим шесть основных критериев, которые можно использовать при сравнении альтернатив в ситуации неопределенности:

- критерий Вальда;
- критерий "максимакса";
- критерий Лапласа;
- критерий Сэвиджа;
- критерий Гурвица;
- обобщенный критерий Гурвица.

Критерий Вальда

Критерий Вальда является самым "осторожным". Согласно ему, оптимальной альтернативой будет та, которая обеспечивает наилучший исход среди всех возможных альтернатив при самом плохом стечении обстоятельств.

Если исходы отражают подлежащие минимизации показатели (убытки, расходы, потери и т.д.), то критерий Вальда ориентируется на **"минимакс"** (минимум среди максимальных значений потерь всех альтернатив).

Если в качестве исходов альтернатив фигурируют показатели прибыли, дохода и других показателей, которые надо максимизировать (по принципу "чем больше, тем лучше"), то ищется **"максимин"** выигрыша (максимум среди минимальных выигрышей). Здесь и далее для всех критериев в тексте мы будем рассматривать именно такой случай, когда исход показывает некий выигрыш.

По критерию Вальда оценкой ***i***-й альтернативы является ее наименьший выигрыш:

$W_i = \min(x_{ij}),\ j = 1..M$

Оптимальной признается альтернатива с максимальным наихудшим выигрышем:

$X^* = X_k,\ W_k = \max(W_i),\ i = 1..N$

Пример применения критерия Вальда

Есть два проекта X_1 и X_2, которые при трех возможных сценариях развития региона (***j=1..3***) обеспечивают разную прибыль. Значения прибыли приведены в таблице 2.2. Необходимо выбрать проект для реализации.

Табл.2. Исходные данные.

Альтернативы (X_i)	**Состояния природы (j)**

	1	2	3
X_1	*45*	*25*	*50*
X_2	*20*	*60*	*25*

Среди возможных проектов нет доминирующих ни абсолютно, ни по состояниям. Поэтому решение придется принимать по критериям.

Если выбор оптимального проекта осуществляется по критерию Вальда, то ЛПР должен выполнить следующие действия:

1. Найти **минимальные** исходы для каждой альтернативы. Это и будут значения критерия Вальда:

$W_1 = \min(x_{1j}), j = 1..3 \Rightarrow W_1 = \min(45, 25, 50) = 25$

$W_2 = \min(x_{2j}), j = 1..3 \Rightarrow W_2 = \min(20, 60, 25) = 20$

2. Сравнить значения критерия Вальда и найти наибольшую величину. Альтернатива с **максимальным значением критерия** будет считаться оптимальной:

$25 > 20 \Rightarrow W_1 > W_2 \Rightarrow X^* = X_1$

Если бы решение принималось только по критерию Вальда, ЛПР выбрал для реализации проект X_1, поскольку прибыль, которую обеспечит данный проект при самом плохом развитии ситуации, выше.

Выбрав оптимальную альтернативу по критерию Вальда, ЛПР гарантирует себе, что при самом плохом стечении обстоятельств он не получит меньше, чем значение критерия. Поэтому данный показатель еще называют **критерием гарантированного результата**.

Основной проблемой критерия Вальда является его излишняя пессимистичность, и, как следствие, не всегда логичный результат. Так, например, при выборе по данному критерию между альтернативами ***A{100; 500}*** и ***B{90; 1000}*** следует остановиться на варианте ***A***. Однако в жизни логичнее было бы выбрать ***B***, так как в худшем случае ***B*** лишь немного хуже ***A***, тогда как при хорошем стечении обстоятельств ***B*** обеспечивает гораздо больший выигрыш.

Критерий "максимакса"

Диаметральной противоположностью критерия Вальда является так называемый критерий "максимакса". Если Вальд отражал взгляд предельного пессимиста, то **"максимакс"** соответствует отношению крайнего оптимизма. Все внимание уделяется только наилучшим исходам, поэтому оценкой ***i***-й альтернативы по данному критерию является ее наибольший выигрыш M_i:

$M_i = \max(x_{ij}), j = 1..M$

Оптимальной считается альтернатива с максимальным наибольшим выигрышем:

$X^* = X_k, M_k = \max(M_i), i = 1..N$

Пример применения критерия "максимакса"

В условиях примера из п.2.7 (**табл.2.2**) действия ЛПР, использующего критерий "максимакса" для принятия решения, будут следующие:

1. Найти **максимальные** исходы для каждой альтернативы:

$M_1 = \max(x_{1j}), j = 1..3 \Rightarrow M_1 = \max(45, 25, 50) = 50$

$M_2 = \max(x_{2j}), j = 1..3 \Rightarrow M_2 = \max(20, 60, 25) = 60$

2. Сравнить найденные значения и определить альтернативу с **максимальной**величиной критерия:

$50 < 60 \Rightarrow M_1 < M_2 \Rightarrow X^* = X_2$

По критерию "максимакса" оптимальным является проект X_2., который может обеспечить наибольшую прибыль при наилучшем стечении обстоятельств.

Критерий "максимакса" не учитывает никакие иные исходы, кроме самых лучших. Поэтому его применение, во-первых, может быть весьма опасным, и, во-вторых, также как и критерий Вальда он может приводить к нелогичным решениям. Например, среди альтернатив ***A{-100; 0; 500}*** и ***B{200; 300; 400}*** с позиции "максимакса" лучшей является ***A***, однако она несет в себе и опасность убытков (***-100***), и вообще все исходы, кроме лучшего намного уступают ***B***. Поэтому практическое применение критерия "максимакса" весьма ограничено.

Критерий Лапласа

Критерий Лапласа основан на **принципе недостаточного обоснования**. Поскольку в рамках информационного подхода в ситуации неопределенности вероятности состояний неизвестны, то нет оснований утверждать, что они различны. Поэтому можно допустить, что они одинаковы.

По **критерию Лапласа** в качестве оценки альтернативы используется средний выигрыш:

$$L_i = \frac{\sum_{j=1}^{M} x_{ij}}{M}$$

Оптимальной является альтернатива с максимальным средним выигрышем:

$X^* = X_k,\ L_k = \max(L_i),\ i = 1..N$

Пример применения критерия Лапласа

Для условий примера из п.2.7 (**табл.2**) использование критерия Лапласа будет выглядеть следующим образом:

1. Найти **среднее арифметическое** значение исходов по каждому проекту. Оно является оценкой альтернативы по критерию Лапласа:

$L_1 = (x_{11}+x_{12}+x_{13})/3 = (45+25+50)/3 = 40$

$L_2 = (x_{21}+x_{22}+x_{23})/3 = (20+60+25)/3 = 35$

2. Сравнить рассчитанные величины и найти альтернативу с **максимальным**значением критерия:

$40 > 35 \Rightarrow L_1 > L_2 \Rightarrow X^* = X_1$

По критерию Лапласа оптимальным является проект X_1, у которого наибольшая средняя прибыль.

Среднее значение является достаточно популярной мерой в условиях неопределенности и даже риска, однако оно не учитывает разброс результатов относительно этого значения. Так, например, альтернативы $A\{400;\ 600\}$ и $B\{0;\ 1000\}$ являются эквивалентными по критерию Лапласа ($L_A = L_B = 500$), однако альтернатива B более "рискованна", так как предполагает возможность при плохом стечении обстоятельств не получить ничего.

Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа несколько отличается от всех остальных, рассматриваемых в данной книге. Оценка альтернатив производится не по исходной матрице, а по так называемой **"матрице сожалений"** или, как ее еще называют в некоторых источниках, **"матрице рисков"**.

Для произвольной альтернативы и конкретного состояния природы величина "сожаления" равна разнице между тем, что обеспечивает данная альтернатива, и тем, сколько максимально можно выиграть при данном состоянии. С экономической точки зрения величину "сожаления" можно трактовать как недополученный выигрыш (или упущенную выгоду) по сравнению с максимально возможным при данном состоянии природы.

Рассмотрим, каким образом следует выбирать наилучшую альтернативу, руководствуясь критерием Сэвиджа.

Порядок применения критерия Сэвиджа

1. Для каждого состояния природы j (столбца матрицы) определим максимальное значение выигрыша y_j: $y_j = \max(x_{ij})$

2. Для каждой клетки исходной матрицы X найдем разность между максимальным выигрышем r_j для данного состояния природы и исходом в рассматриваемой ячейке x_{ij}: $r_{ij} = y_j - x_{ij}$

Из полученных значений составим новую матрицу R - "матрицу сожалений" или, как ее еще можно назвать, матрицу недополученных выигрышей.

3. Для каждой альтернативы в новой матрице R найдем наибольший возможный недополученный выигрыш ("максимальное сожаление"). Это и будет являться оценкой данной альтернативы по критерию Сэвиджа S_i: $S_i = \max(r_{ij}),\ j=1..M$

4. Оптимальной может быть признана альтернатива с минимальным (!) наибольшим недополученным выигрышем: $X^* = X_k,\ S_k = \min(S_i),\ i=1..N$

Пример применения критерия Сэвиджа

Применим изложенный выше алгоритм действий для принятия решения в условиях задачи из п.2.7 (**табл.2**).

1. Найдем наибольшую возможную величину прибыли для каждого сценария развития региона:

$y_1 = \max(x_{11}, x_{21}) = \max(45, 20) = 45$

$y_2 = \max(x_{12}, x_{22}) = \max(25, 60) = 60$

$y_3 = \max(x_{13}, x_{23}) = \max(50, 25) = 50$

2. Рассчитаем значения "сожалений" для каждого проекта при каждом сценарии (т.е. найдем недополученную прибыль по сравнению с максимально возможной при данном сценарии развития). Составим из полученных значений "матрицу сожалений" (см. табл.2.3).

для проекта X_1:

$r_{11} = y_1 - x_{11} = 45 - 45 = 0$

$r_{12} = y_2 - x_{12} = 60 - 25 = 35$

$r_{13} = y_3 - x_{13} = 50 - 50 = 0$

для проекта X_2:

$r_{21} = y_1 - x_{21} = 45 - 20 = 25$

$r_{22} = y_2 - x_{22} = 60 - 60 = 0$

$r_{23} = y_3 - x_{23} = 50 - 25 = 25$

Табл.3. Матрица сожалений R (для примера).

Альтернативы (X_i)	Состояния природы (j)			Макс. "сожаление" S_i
	1	2	3	
X_1	*0*	*35*	*0*	*35*
X_2	*20*	*0*	*25*	*25*
y_j	*45*	*60*	*50*	

4. В полученной матрице по каждой строке найдем **наибольшую** величину "сожаления" для каждого проекта (последний столбец в табл.2.3). Это значение соответствует оценке данной альтернативы по критерию Сэвиджа.

$S_1 = \max(0, 35, 0) = 35 \quad S_2 = \max(25, 0, 25) = 25$

5. Сравним полученные величины и найдем проект с **минимальным (!) значением критерия**. Он и будет оптимальным: $35 > 25 \Rightarrow S_1 > S_2 \Rightarrow X^* = X_2$

ЛПР, руководствующийся при принятии решений критерием Сэвиджа, выберет проект X_2.

Еще раз подчеркнем, что в отличие от остальных критериев, наилучшей альтернативой является та, для которой значение критерия Сэвиджа **минимально**, поскольку критерий отражает наибольший из возможных недополученных выигрышей для данной альтернативы. Разумеется, чем меньше можно недополучить, тем лучше.

Критерий Гурвица

Обычный (или простой) **критерий Гурвица** учитывает только крайние исходы $x_{i\,\max}$ и $x_{i\,\min}$ каждой альтернативы: $x_{i\,\max} = \max(x_{ij}),\ x_{i\,\min} = \min(x_{ij}),\ j = 1..M$

Он позволяет учесть субъективное отношение применяющего данный критерий ЛПР за счет придания этим исходам разных "весов". Для этого в расчет критерия введен **"коэффициент оптимизма"** $\lambda,\ 0 \le \lambda \le 1$. Формула для расчета критерия Гурвица для i-й альтернативы с коэффициентом оптимизма λ выглядит следующим образом: $H_i(\lambda) = \lambda\, x_{i\,\max} + (1 - \lambda)\, x_{i\,\min}$

Если исходы представляют возможные выигрыши, то оптимальной признается альтернатива с максимальным значением критерия Гурвица: $X^* = X_k,\ H_k(\lambda) = \max(H_i(\lambda)),\ i = 1..N$

Как видно из формулы, правильный выбор коэффициента оптимизма λ оказывает существенное влияние на результат применения критерия. Остановимся подробнее на логике подбора λ.

Если ЛПР настроен пессимистически, то для него важнее меньше потерять при плохом развитии событий, пусть даже это означает не такой большой выигрыш при удачном состоянии. Значит, удельный вес наихудшего исхода $x_{i\,\min}$ в оценке альтернативы должен быть выше, чем для $x_{i\,max}$. Это обеспечивается, когда λ находится в пределах от 0 до 0.5, исключая последнее значение.

При $\lambda = 0$ критерий Гурвица "вырождается" в критерий Вальда и подходит только для очень пессимистично настроенных ЛПР.

Оптимистичный ЛПР, напротив, ориентируется на лучшие исходы, так как для него важнее больше выиграть, а не меньше проиграть. Больший удельный вес в оценке наилучшего исхода достигается при λ больше 0.5 и до 1 включительно. При $\lambda = 1$ критерий Гурвица становится критерием "максимакса", который учитывает исключительно наибольший исход каждой альтернативы.

Если у ЛПР нет ярко выраженного уклона ни в сторону пессимизма, ни оптимизма, коэффициент λ принимается равным ***0.5***.

Пример применения критерия Гурвица

В условиях задачи из п.2.7 (**табл.2**) рассмотрим принятие решения по критерию Гурвица для ЛПР, настроенного оптимистически ($\lambda = 0.8$), и ЛПР-пессимиста ($\lambda = 0.3$). Порядок действий таков:

1. Найдем максимальные $x_{i\,max}$ и минимальные $x_{i\,min}$ исходы для каждого проекта:

$x_{1\,max} = \max(45, 25, 50) = 50$ $x_{1\,min} = \min(45, 25, 50) = 25$

$x_{2\,max} = \max(20, 60, 25) = 60$ $x_{2\,min} = \min(20, 60, 25) = 20$

2. Рассчитаем величину критерия Гурвица при заданных значениях коэффициента оптимизма:

ЛПР-оптимист (λ=*0.8*):

$H_1\ (0.8) = \lambda\ x_{1\,max} + (1 - \lambda)\ x_{1\,min} = 0.8\times50 + (1 - 0.8)\times25 = 45$

$H_2\ (0.8) = \lambda\ x_{2\,max} + (1 - \lambda)\ x_{2\,min} = 0.8\times60 + (1 - 0.8)\times20 = 52$

ЛПР-пессимист (λ=*0.3*):

$H_1\ (0.3) = \lambda\ x_{1\,max} + (1- \lambda)\ x_{1\,min} = 0.3\times50 + (1 - 0.3)\times25 = 32.5$

$H_2\ (0.3) = \lambda\ x_{2\,max} + (1- \lambda)\ x_{2\,min} = 0.3\times60 + (1 - 0.3)\times20 = 32$

3. Сравним полученные величины. Оптимальными для каждого ЛПР будут альтернативы с **максимальным значением** критерия Гурвица:

ЛПР-оптимист ($\lambda = 0.8$): $45 < 52 \Rightarrow H_1(0.8) < H_2(0.8) \Rightarrow X^* = X_2$

ЛПР-пессимист ($\lambda = 0.3$): $32.5 < 32 \Rightarrow H_1(0.3) > H_2(0.3) \Rightarrow X^* = X_1$

Как мы видим, выбор оптимальной альтернативы в одних и тех же условиях существенным образом зависит от отношения ЛПР к риску. Если для пессимиста оба проекта примерно равноценны, то оптимист, который надеется на лучшее, выберет второй проект. Его высокая наилучшая прибыль (***60***) при больших значениях коэффициента λ значительно повышает ценность данного проекта по критерию Гурвица.

Недостатком обычного критерия Гурвица является его "нечувствительность" к распределению исходов между крайними значениями. Это может приводить к неправильным решениям. Например, альтернатива ***A{100; 150; 200; 1000}*** по критерию Гурвица с "оптимистичным" коэффициентом $\lambda = 0.7$ лучше альтернативы ***B{100; 750; 850; 950}***, так как:

$H_A\ (0.7) = 0.7\times1000 + (1 - 0.7)\times100 = 730$

$H_B\ (0.7) = 0.7\times950 + (1 - 0.7)\times 100 = 695$

Однако, если посмотреть внимательнее на возможности, которые предоставляет ***B***, то становится заметно, что она выгоднее. Ее "внутренние" исходы (***750*** и ***850***) существенно лучше, чем у ***A (150 и 200)***, а максимальный выигрыш лишь немногим хуже (***950*** против ***1000***). В реальной жизни логичнее было бы выбрать ***B***.

Обобщенный критерий Гурвица

Принцип построения **обобщенного критерия Гурвица** похож на предыдущий. Всем принимаемым в расчет исходам присваивается некоторый "удельный вес". Значение критерия для альтернативы рассчитывается как взвешенная сумма ее исходов. Однако чтобы избежать недостатков "предшественника", обобщенный критерий учитывает все исходы каждой альтернативы.

Тогда, формула для расчета обобщенного критерия для ***i***-й альтернативы может быть записана следующим образом: $H'_i = \sum_{q=1}^{M} \lambda_q x_{iq}$, ***где*** λ_q - коэффициент для ***q***-го значения ***i***-й альтернативы,

$0 \le \lambda_q \le 1,\ \lambda_1 + ... + \lambda_q + ... + \lambda_M = 1$

Получается, что для использования обобщенного критерия Гурвица необходимо назначить ***M*** (!) коэффициентов λ_q. Конечно, можно было бы это сделать произвольно. Но при большом количестве состояний ***M*** это становится весьма трудоемко, так как необходимо, чтобы коэффициенты удовлетворяли как минимум двум условиям:

1) сумма всех весовых коэффициентов должна быть равна единице: $\sum_{q=1}^{M} \lambda_q = 1$

2) величины коэффициентов должны отражать отношение ЛПР к неопределенности:

1. а) для оптимистичного ЛПР лучшие исходы должны иметь больший "вес", причем, чем лучше исход, тем больше "вес";

2. б) для пессимистичного ЛПР - все наоборот - больший "вес" у худших исходов, и чем хуже исход - тем больше "вес":

Чтобы не назначать коэффициенты произвольно по отдельности были предложены формализованные методы их расчета, один и которых мы и рассмотрим ниже.

Порядок применения обобщенного критерия Гурвица

1. Упорядочиваем матрицу игры таким образом, чтобы исходы каждой альтернативы располагались в порядке неубывания. При этом в одном столбце матрицы могут оказаться исходы, относящиеся к разным состояниям - это не существенно. В результате вместо "старой" матрицы игры $\boldsymbol{X}$ мы получаем "новую" матрицу $\boldsymbol{Y}$, где в каждой строке исходы располагаются от самого маленького до самого большого: $\boldsymbol{x_{i1}, x_{i2},..., x_{ij},..., x_{iM} \rightarrow y_{i1} \le y_{i2} \le.. \le y_{iq} \le.. \le y_{iM}}$

2. Рассчитываем суммы исходов по каждому столбцу новой матрицы $\boldsymbol{Y}$: $y_q = \sum_{i=1}^{N} y_{iq}$

3. Рассчитываем сумму все исходов матрицы: $y = \sum_{i=1}^{N}\sum_{q=1}^{M} y_{iq} = \sum_{q=1}^{M} y_q$

4. Далее коэффициенты $\boldsymbol{\lambda_q}$ определяются в зависимости от отношения ЛПР к неопределенности.

4.1. Если ЛПР оптимист, то коэффициент $\boldsymbol{\lambda_q}$ для любого $\boldsymbol{q}$-го столбца определяется по формуле: $\lambda_q = \frac{y_q}{y}$

Поскольку для каждой альтернативы соблюдается условие: $\boldsymbol{y_{i1} \le y_{i2} \le.. \le y_{iq} \le.. \le y_{iM}}$,

то $\boldsymbol{y_1 \le y_2 \le... \le y_q \le... \le y_M}$ и, следовательно: $\boldsymbol{\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_q \le ... \le \lambda_M}$

То есть, чем лучше исход, тем больше удельный вес ему присваивается.

Кроме того, так как $\lambda_q = \frac{y_q}{y} = \frac{y_q}{\sum_{q=1}^{M} y_q}$,

то обеспечивается выполнение равенства: $\sum_{q=1}^{M} \lambda_q = 1$

Таким образом, полученные формальным путем коэффициенты отвечают необходимым условиям.

4.2. Если ЛПР пессимист, то определение коэффициентов немного сложнее. Мы должны обеспечить соблюдение условия: худшим исходам - большие веса. Это можно сделать, зеркально поменяв местами коэффициенты, рассчитанные для оптимистичного ЛПР:

а) при нечетном количестве состояний $\boldsymbol{M}$:

"оптимист" $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_q \le ... \le \lambda_{M-1} \le \lambda_M$

"пессимист" $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_q \ge ... \ge \lambda_{M-1} \ge \lambda_M$

б) при четном количестве состояний $\boldsymbol{M}$:

"оптимист" $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_{M-1} \le \lambda_M$

"пессимист" $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_{M-1} \ge \lambda_M$

Формальная запись зависимости для расчета коэффициентов $\boldsymbol{\lambda_q}$ при пессимистично настроенном ЛПР выглядит следующим образом: $\lambda_q = \frac{y_{N-q+1}}{y}$

5. Теперь, имея все значения коэффициентов $\boldsymbol{\lambda_q}$, можно рассчитать величину обобщенного коэффициента Гурвица для каждой $\boldsymbol{i}$-й альтернативы:

$$H'_i = \sum_{q=1}^{M} \lambda_q y_{iq} = \lambda_1 y_{i1} + \lambda_2 y_{i2} + ... + \lambda_M y_{iM}$$

6. Оптимальной является стратегия, у которой наибольшее значение обобщенного критерия Гурвица:

$\boldsymbol{X^* = X_k, H'_k = max(H'_i), i=1..N}$

Пример применения обобщенного критерия Гурвица

Применим обобщенный критерий Гурвица для поиска оптимального решения в условиях задачи из п.2.7 (**табл.2**) для оптимистически и пессимистически настроенного ЛПР.

Будем действовать в соответствии с изложенным выше алгоритмом.

1. Упорядочим матрицу игры, расположив исходы в порядке неубывания (см.табл.2.4).

2. Рассчитаем суммы y_q по столбцам упорядоченной матрицы:

$y_1 = y_{11} + y_{21} = 25 + 20 = 45 \quad y_2 = y_{12} + y_{22} = 45 + 25 = 70 \quad y_3 = y_{13} + y_{23} = 50 + 60 = 110$

3. Рассчитаем сумму всех исходов: $y = y_1 + y_2 + y_3 = 45 + 70 + 110 = 225$

Табл.4. Упорядоченная матрица игры Y (для примера).

Альтернативы (X_i)	**Номер столбца (q)**		
	1	**2**	**3**
X_1	*25*	*45*	*50*
X_2	*20*	*25*	*60*
$y_q = \sum y_{iq}$	*45*	*70*	*110*
$y = \sum y_q$	*225*		
λ_q^O ***оптимист***	*0.20*	*0.31*	*0.49*
$\lambda_q^П$ ***пессимист***	*0.49*	*0.31*	*0.20*

4. Рассчитаем коэффициенты для каждого ЛПР.

4.1. коэффициенты для ЛПР оптимиста:

$\lambda_1^O = 45/225 = 0.2 \quad \lambda_2^O = 70/225 = 0.31 \quad \lambda_3^O = 110/225 = 0.49$

4.2. коэффициенты для ЛПР пессимиста рассчитывать нет необходимости - главное, правильно поменять местами уже найденные коэффициенты:

$\lambda_3^O = 0.20 \qquad \lambda_2^O = 0.31 \qquad \lambda_2^O = 0.49$

$\lambda_1^П = 0.49 \qquad \lambda_2^П = 0.31 \qquad \lambda_3^П = 0.20$

5. Рассчитать значения обобщенного критерия Гурвица для каждого проекта для каждого ЛПР:

5.1. ЛПР-оптимист

$H'^O_1 = \lambda_1^O y_{11} + \lambda_2^O y_{12} + \lambda_3^O y_{13} = 0.20 \times 25 + 0.31 \times 45 + 0.49 \times 50 = 43.4$

$H'^O_2 = \lambda_1^O y_{21} + \lambda_2^O y_{22} + \lambda_3^O y_{23} = 0.20 \times 20 + 0.31 \times 25 + 0.49 \times 60 = 41.1$

5.2. ЛПР-пессимист

$H'^П_1 = \lambda_1^П y_{11} + \lambda_2^П y_{12} + \lambda_3^П y_{13} = 0.49 \times 25 + 0.31 \times 45 + 0.20 \times 50 = 36.2$

$H'^П_2 = \lambda_1^П y_{21} + \lambda_2^П y_{22} + \lambda_3^П y_{23} = 0.49 \times 20 + 0.31 \times 25 + 0.20 \times 60 = 29.6$

6. Сравнить полученные значения обобщенного коэффициента Гурвица. Оптимальными для каждого ЛПР являются проекты с **максимальным значением** критерия:

ЛПР-оптимист: $43.4 > 41.1 \Rightarrow H'^O_1 > H'^O_2 \Rightarrow X^* = X_1$

ЛПР-пессимист: $36.2 > 29.6 \Rightarrow H'^П_1 > H'^П_2 \Rightarrow X^* = X_1$

Здесь и для оптимистичного, и для пессимистичного ЛПР оптимальным по обобщенному критерию Гурвица является первый проект.

Благодаря тому, что в оценке учитываются все исходы, обобщенный критерий Гурвица лишен недостатка обычного критерия. Кроме того, формальный подход к расчету коэффициентов максимально снижает степень субъективности. ЛПР достаточно определить лишь общий характер своего отношения к неопределенности - оптимистичный или пессимистичный, тогда как при использовании обычного критерия требовалось еще и самому задать уровень оптимизма.

Сравнение критериев выбора

Мы рассмотрели шесть основных критериев, которые можно применять для принятия решений в условиях неопределенности. Если проанализировать то, как они построены, то можно заметить, что пять из них, по сути, отличаются между собой только разными весовыми коэффициентами, присваиваемыми исходам. Действительно, все критерии, кроме **критерия Сэвиджа**, могут быть описаны формулой: $C_i = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j x_{ij}$ ***, где*** λ_j - удельный вес j-го значения исхода рассматриваемой i-й альтернативы, $0 \le \lambda_j \le 1$, $\sum_{j=1}^{M} \lambda_j = 1$

Для **критерия Вальда** "веса" всех исходов кроме самого плохого - нулевые, зато для наихудшего исхода этот коэффициент равен единице.

Для **"максимакса"** - наоборот, коэффициент единица присваивается наибольшему исходу, а для остальных они равны ***0***.

Критерий Лапласа устанавливает всем исходам одинаковые удельные веса, равные ***1/M***.

В **обычном критерии Гурвица** ненулевыми являются только коэффициенты для крайних значений, причем они задаются произвольно (при условии, что их сумма равна единице) исходя из степени неприятия ЛПР неопределенности.

При расчете **обобщенного критерия Гурвица** каждому исходу присваивается свой удельный вес. Формальный способ расчета обеспечивает и соблюдение необходимых условий, и учет отношения к риску.

На рис.4 представлено графическое отображение данных особенностей. На нем хорошо видны слабые места тех или иных подходов, что позволяет более осторожно подбирать критерии для принятия решений.

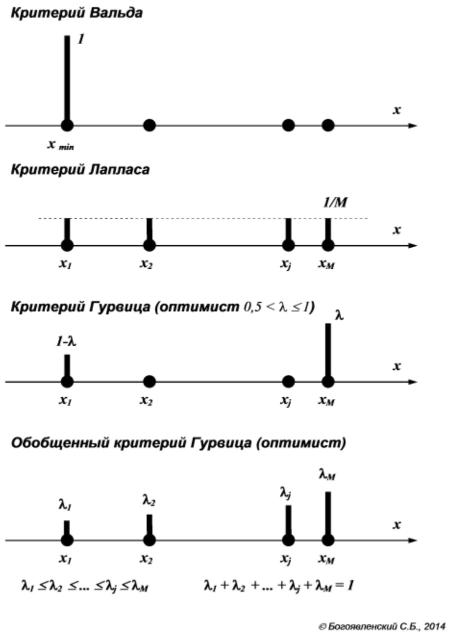

Рис.4. Сравнение принципов расчета основных критериев выбора.

Подход, основанный на присвоении исходам удельных весов - это один из способов заполнить пробел знаний относительно вероятностного распределения состояний. Один из самых распространенных (но, к сожалению, не всегда самый лучший) критерий сравнения альтернатив в условиях риска - ожидаемое значение - рассчитывается практически также: $MX_i = \sum_{j=1}^{M} p_j x_{ij}$ **,**

Здесь в качестве удельных весов исходов используются их вероятности p_j, которые обладают теми же свойствами, что и использованные нами ранее весовые коэффициенты: $\boldsymbol{0 \le p_j \le 1}$**,**

$$\sum_{j=1}^{M} p_j = 1$$

Чем выше вероятность получить конкретный исход - тем больше его удельный вес в этой оценке. В условиях риска вероятности известны, поэтому и используются в расчетах. В ситуации неопределенности мы о них ничего не знаем. Как следствие, мы вынуждены "додумывать" и произвольно присваивать веса, опираясь не на вероятности, а на свое отношение к неопределенности. Знание вероятностного распределения устранило необходимость делать такие допущения и позволило бы принимать более взвешенные решения.

Поэтому в условиях неопределенности теоретически наилучшим подходом является более глубокое исследование ситуации и определение вероятностей. Однако на практике это не всегда возможно или требует серьезных временных и иных затрат. В таком случае остается принимать решения на основе имеющихся данных лишь об исходах, применяя рассмотренные в настоящей главе принципы доминирования и критерии выбора.

Подводя итог рассмотрению критериев выбора, можно сформулировать несколько простых рекомендаций относительно их использования для **принятия решений в условиях неопределенности**:

- Нет универсальных критериев. Каждый критерий фокусируется на некоторых свойствах результатов и "затуманивает" другие. Поэтому желательно сравнивать альтернативы не по одному, а по нескольким критериям.
- Порядок расчета критерия объективен и не зависит от ЛПР. Однако сам выбор критерия для сравнения альтернатив - субъективен и отражает отношение ЛПР к риску. Как следствие, решение, принятое одним ЛПР, не всегда является оптимальным для другого ЛПР. Каждый человек должен сам выбрать именно те критерии, которые наиболее точно соответствуют его отношению к неопределенности.
- Процедура применения критериев формализована, а сами критерии сильно "упрощают" представление об альтернативах. Из-за этого результаты применения критерия могут быть не совсем логичны с позиций реального человека. Поэтому любое решение, "рекомендуемое" тем или иным критерием, необходимо проверять с позиций "здравого смысла".

В рассмотренном в данной главе примере две альтернативы оценивались последовательно по всем шести критериям. В результате были получены противоречивые результаты. Часть критериев "рекомендовала" первую стратегию, часть - вторую. Каким критериям доверять больше, а каким меньше, должен выбрать ЛПР.

Выводы:

По результатам лекции у студентов сформированы теоретические знания об основных способах решения задач

Выводы:

По результатам лекции у студентов сформированы теоретические знания об основных способах решения детерминированных задач математического моделирования.

.