УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Алгоритмы на графах.

Ковалева Елена Вячеславовна

Задачи потоков в графах. Потоки в сетях

- Основные понятия и определения.
- Способы задания графов.
- Максимальный поток, минимальный разрез.
- Теорема Форде-Фалкерсона.

Постановка задачи

Если приписать каждой дуге ориентированного графа *поток* некоторого вещества, граф становится удобной моделью при исследовании целого ряда проблем в транспорте, связи и других областях, связанных с действительным или воображаемым движением товаров, информации или людей.

Исследуется ***две основные задачи***:

- *максимизация суммарного потока* между двумя заданными вершинами при условии, что поток через каждую дугу ограничен сверху и снизу;
- *задача нахождения ограниченных потоков с минимальной стоимостью*, когда каждой дуге приписана стоимость единицы потока.

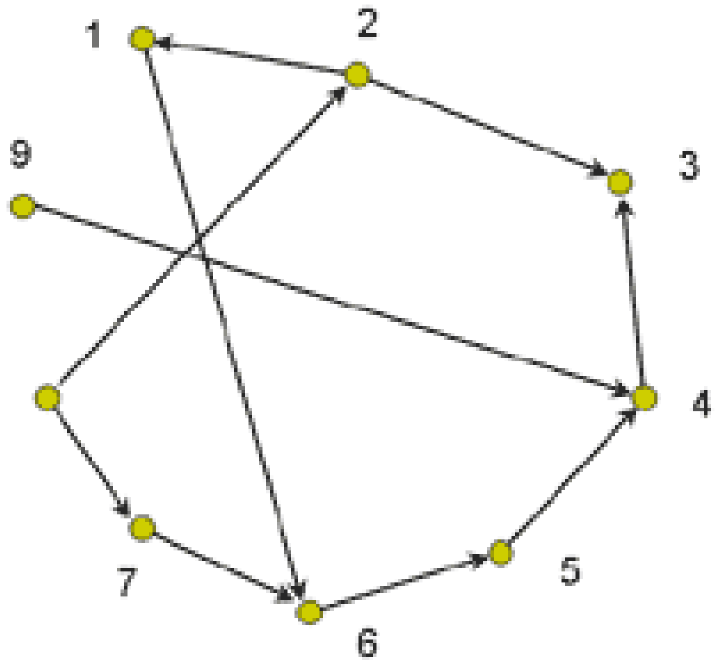
Граф

- это **конечное** множество вершин ***V*** и множество ребер ***R***, соединяющих пары вершин, ***G=(V,R)*.**
- Мощности множеств *V* и *R* равны ***N*** и ***M***.
- Множество ребер может быть пустым.

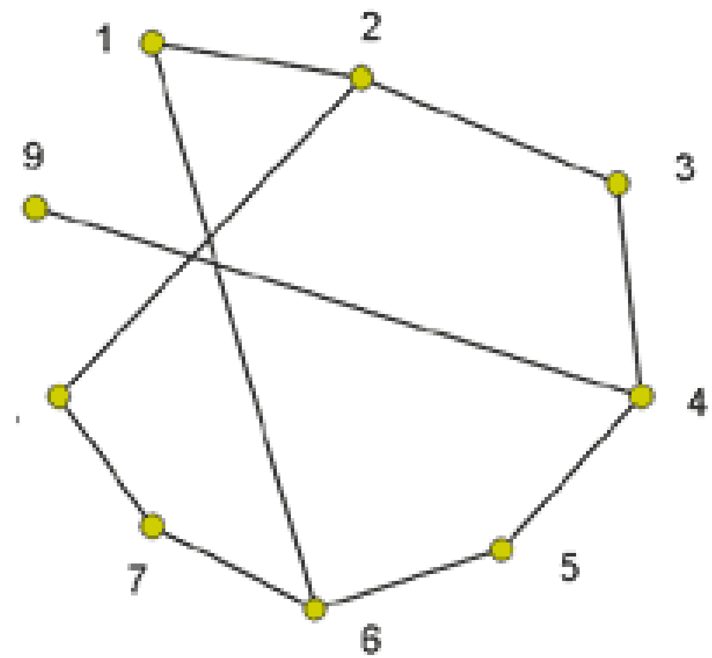
Примеры вершин – объекты любой природы (населенные пункты, компьютерные сети).

Примеры ребер – дороги, стороны, линии.

- Вершины, соединенные ребром, называются ***смежными.*** Ребра, имеющие общую вершину, также называются ***смежными.***
- Ребро и любая из его двух вершин называются ***инцидентными.***
- ***Степень вершины*** – количество инцидентных ей ребер.
- Каждый граф можно представить на плоскости множеством точек, соответствующих вершинам, которые соединены линиями, соответствующими ребрам.



***Ориентированный** граф*



***Неориентированный** граф*

В орграфе ребро называют **дугой**.

- ***Маршрут графа*** – последовательность вершин и ребер.
- Маршрут ***замкнутый*** (циклический), если начальная и конечная вершины совпадают.
- Маршрут – ***простая цепь***, если все вершины и ребра различны.
- Граф ***связный***, если каждая вершина достижима из любой другой.
- Вершины, не имеющие инцидентных ребер, называются ***изолированными***.

- **Взвешенный** граф (**сеть**) – граф, ребрам или дугам которого поставлены в соответствие числа (**вес**).
- **Вес сети** равен сумме весов ее ребер.

Способы описания графа:

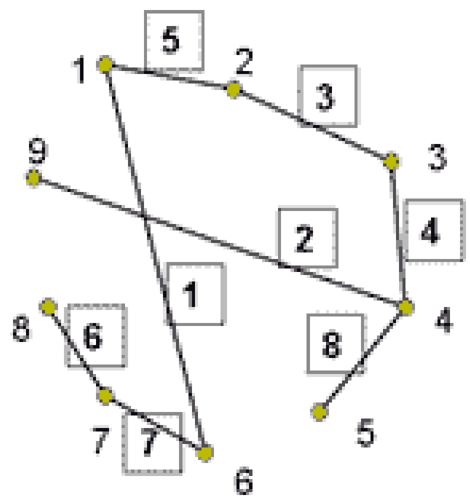
- матрица инциденций,
- матрица смежности,
- списки связи,
- перечисление ребер.

Матрица смежности

- – это квадратная матрица A размера $N*N$.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ вершина с номером } i \\ \quad \text{смежна с вершиной } j \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

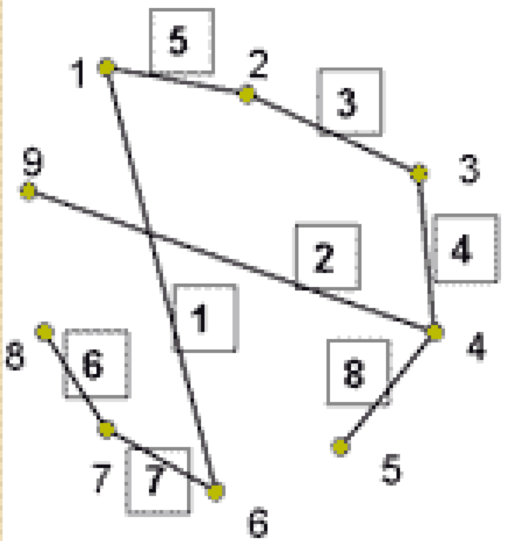
Матрица смежности графа



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Матрица смежности сети

(с учетом весов ребер)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	5	0	0	0	1	0	0	0
2	5	0	3	0	0	0	0	0	0
3	0	3	0	4	0	0	0	0	0
4	0	0	4	0	8	0	0	0	2
5	0	0	0	8	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	7	0	0
7	0	0	0	0	0	7	0	6	0
8	0	0	0	0	0	0	6	0	0
9	0	0	0	2	0	0	0	0	0

Пропускная способность и поток

Пусть задана сеть (G,α), в которой

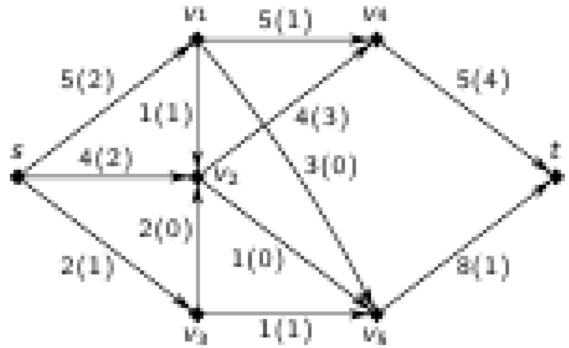
- Имеет один *источник* s и один *сток* t;
- Любая вершина достижима из источника и из любой вершины достижим сток.

$\alpha(u,v)$ – пропускная способность дуги (u,v) .

Определение. Функция φ с неотрицательными значениями, заданная на дугах сети (G,α), называется ***потоком***, если

1. Для всякой дуги (u,v) выполнено неравенство $\varphi(u,v) \leq \alpha(u,v)$
2. Выполнено условие сбалансированности потока: для всякой вершины сети, отличной от источника и стока, сумма значений потока на входящих дугах равна сумме значений потока на исходящих дугах.

Пример потока



Сумма потоков вдоль дуг, исходящих из источника, называется *величиной потока* и обозначается $|\varphi|$ для потока φ. Поток называется максимальным, если его величина максимальна среди всех потоков в данной сети.

Лемма о величине потока.

В любой сети сумма потоков вдоль дуг , исходящих из источника, равна сумме потоков вдоль дуг, входящих в сток.

Разделяющие множества

- Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $F \subset E$ — подмножество множества его ребер. При этом F называется ***разделяющим множеством*** тогда и только тогда, когда подграф $G' = (V, E - F)$ несвязен.
- Разделяющие множества всегда существуют (если граф имеет по меньшей мере две вершины), так как всегда можно положить $F = E$. Очевидно, что граф может быть разбит разделяющим множеством на более чем две компоненты.

Разрезы

- Если задан связный граф $G = (V, E)$ и множество его вершин разбито на два непустых подмножества A и A', множество ребер, соединяющих A с A', называется *разрезом*.
- Для любого множества A это множество ребер будет непусто в силу связности графа G, и следовательно, разрез определен. Для любого заданного графа совокупность разрезов, определенных различными множествами A, образует подкласс класса всех разделяющих множеств и, более того, любое разделяющее множество содержит, по крайней мере, один разрез в качестве своего подмножества.

Разрез в сети . Минимальный разрез.

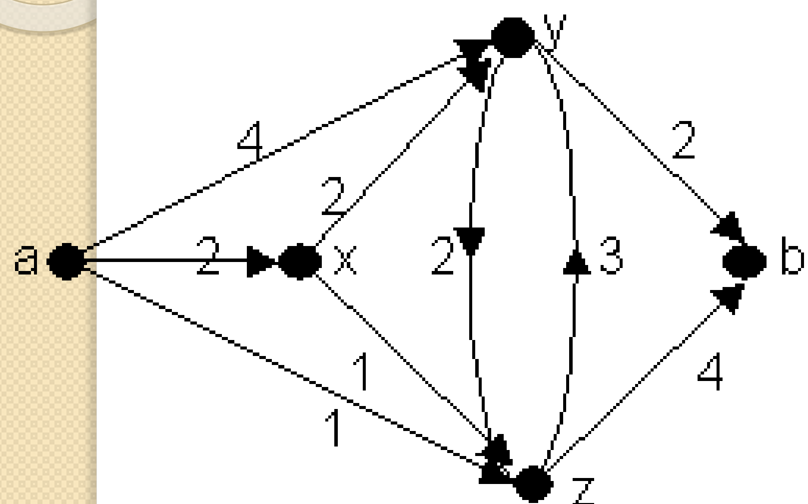
Разрезом в сети (G,α) с источником s и стоком t называется множество $\{f_1, f_2,..., f_k\}$

дуг сети, обладающее следующими свойствами:

1. В орграфе G -$\{f_1, f_2,..., f_k\}$нет (s,t) – цепей;
2. Если любую из дуг $f_1, f_2,..., f_k$ добавить к орграфу G- $\{f_1, f_2,..., f_k\}$, то в полученном орграфе найдется (s,t) – цепь.

Пропускной способностью разреза называется сумма пропускных способностей дуг, входящих в разрез. Разрез называется ***минимальным***, если его пропускная способность минимальна среди всех пропускных способностей всех разрезов сети.

Пример



- **Примеры разрезов — множества** $S_1=\{(a,y), (a,x), (a,z)\}$, $S_2=\{(a,z), (x,z), (y,z), (y,b)\}$, $S_3=\{(y,b), (z,b)\}$.
- **Определите пропускные способности этих разрезов**

Теорема Форда - Фалкерсона

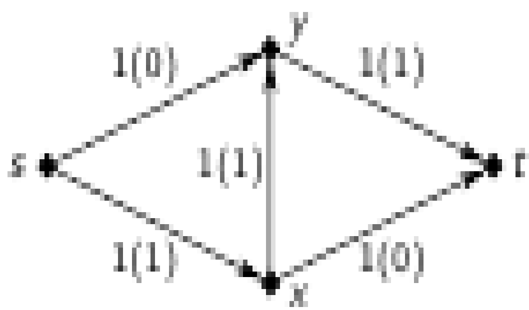
В любой сети величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

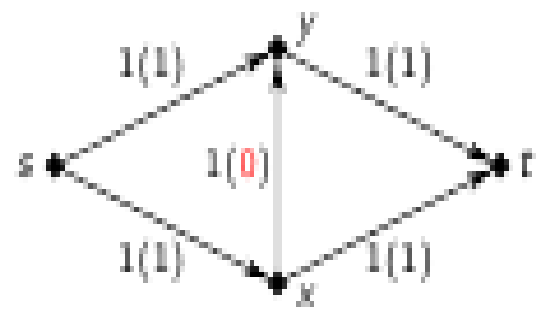
Задача о максимальном потоке.

В заданной сети найти максимальный поток и минимальный разрез.

Увеличение потока

- Чтобы увеличить поток в сети, может потребоваться поток вдоль некоторых дуг уменьшить

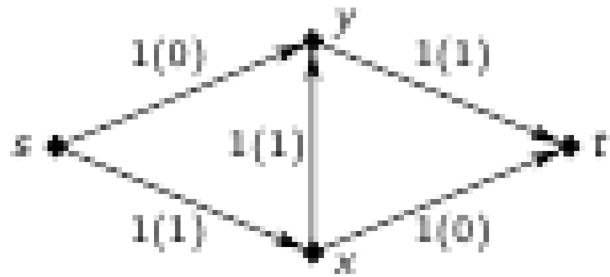




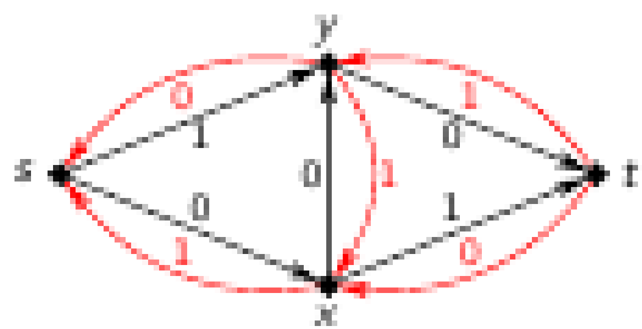
Остаточная сеть

- Остаточной сетью $(\widehat{G}, \alpha_{\varphi})$ называется сеть, полученная из сети (G,α) с заданным потоком φ применением двух преобразований:

1. Для каждой пары вершин u,v∈V(G) таких, что (u,v)∈E(G) и (v, u)∉V(G) , добавить к орграфу G дугу (v, u) пропускной способности 0;
2. Для каждой дуги (u,v)∈E(G) такой, что φ (u,v)>0, уменьшить пропускную способность дуги (u,v) на φ (u,v) и увеличить пропускную способность (v, u) на φ (u,v) .



Остаточная сеть

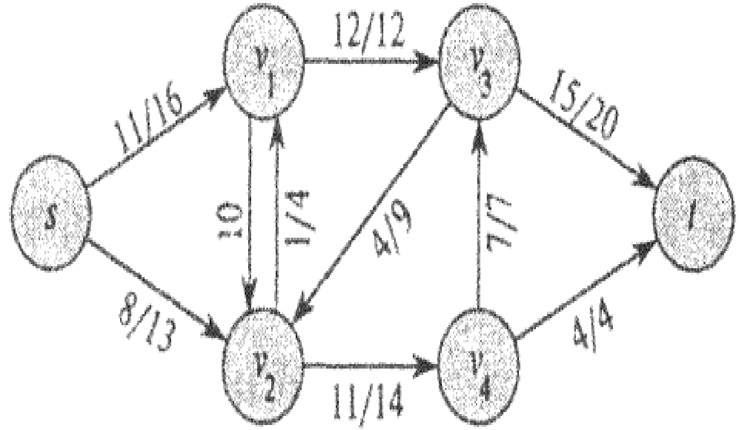


Лемма об остаточной сети

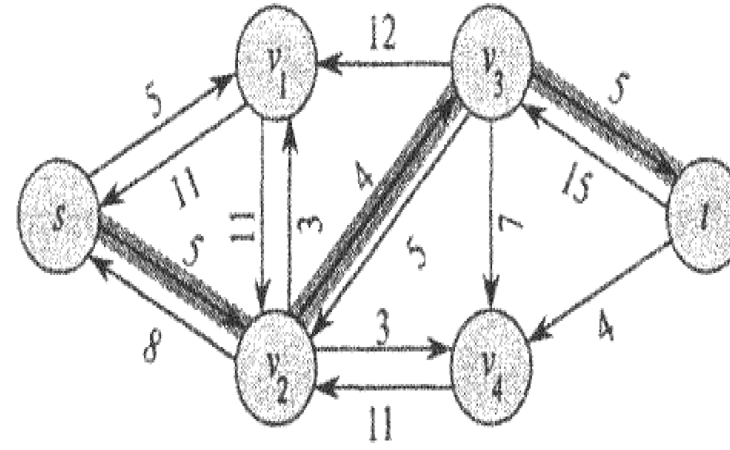
- Пропускной способностью цепи в сети называется минимум из пропускных способностей входящих в нее дуг

Лемма.

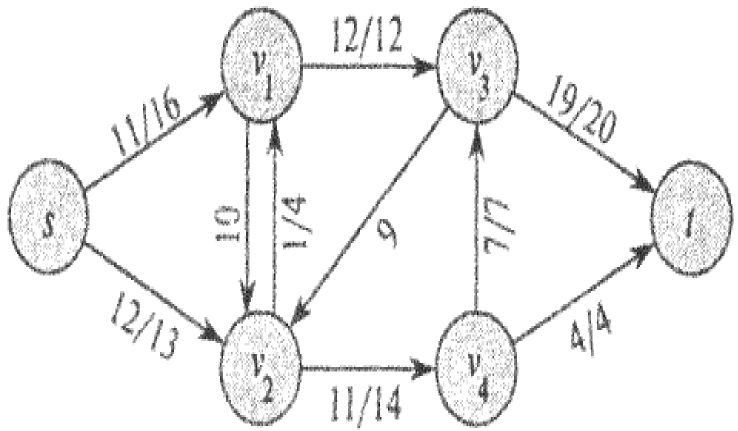
Если в остаточной $(\widehat{G}, \alpha_{\varphi})$ сети существует простая (s,t)-цепь пропускной способностью $\delta>0$, то величину потока в сети (G,α) можно увеличить на δ.


s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
11/16
8/13
12/12
10
1/4
4/9
7/7
11/14
15/20
4/4

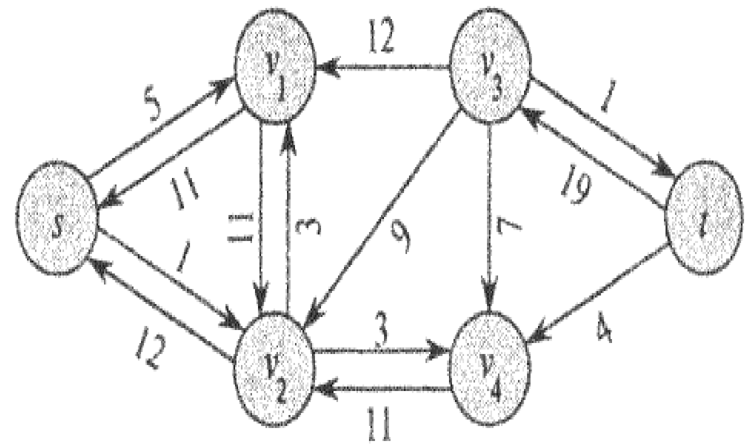
а)


s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
5
11
5
8
12
11
3
4
5
3
11
7
5
15
4

б)


s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
11/16
12/13
12/12
10
1/4
9
7/7
11/14
19/20
4/4

в)


s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
5
11
1
12
12
11
3
9
3
11
7
1
19
4

г)

Алгоритм Форда - Фалкерсона

1. Для всякой дуги (u,v) положить φ (u,v) = 0.

2. Построить остаточную сеть $(\widehat{G},\alpha_\varphi)$

3. Если в $(\widehat{G},\alpha_\varphi)$ найдется (s,t)-цепь С пропускной способность δ>0, изменить поток φ вдоль С по правилам и вернуться на шаг 2.

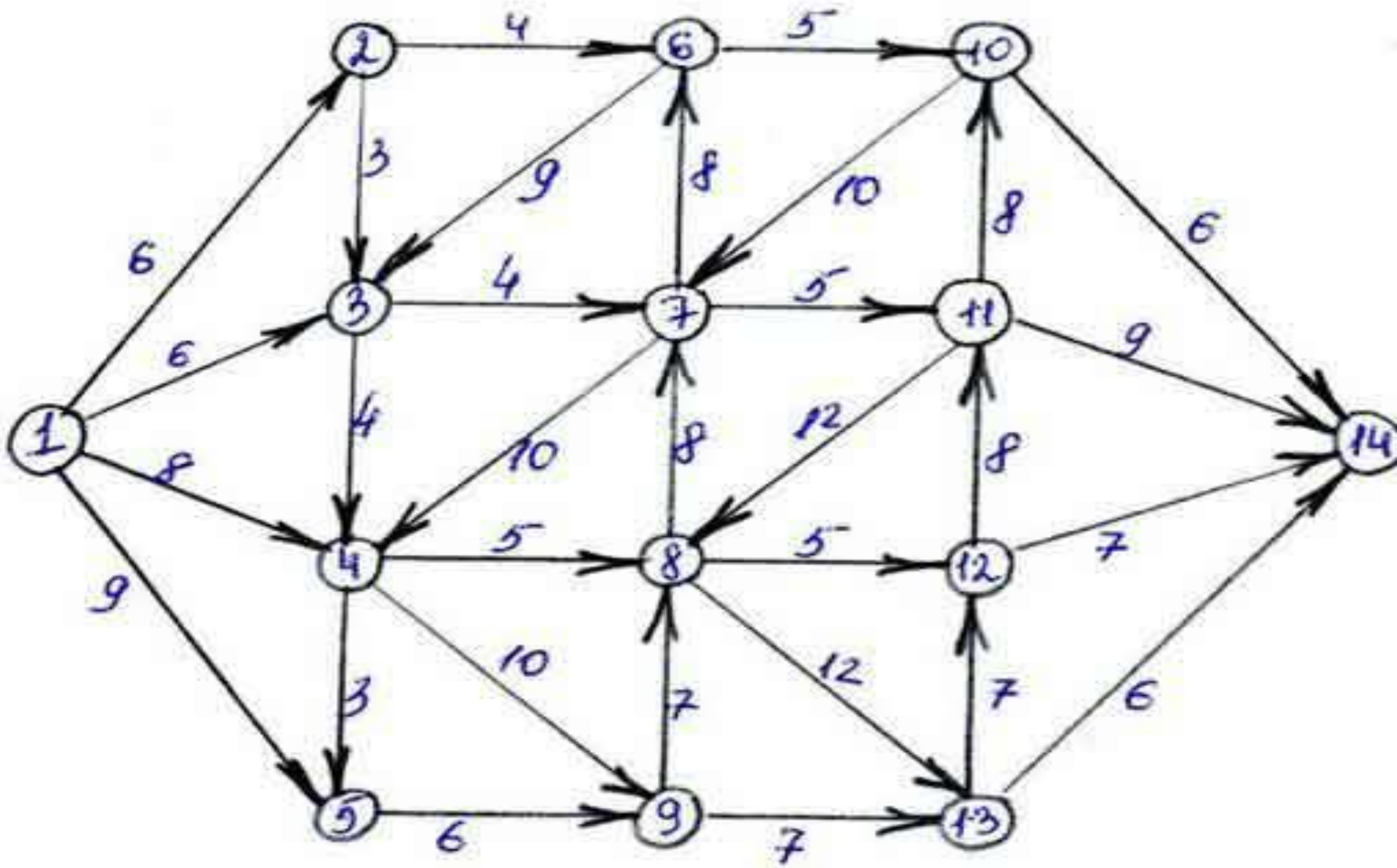
4. Найти множество S, состоящее из всех вершин v сети, для которых в $(\widehat{G},\alpha_\varphi)$ существует (s,v) цепь ненулевой пропускной способности; положить

$$R = \{(u,v) \in E(G) \mid u \in S, v \notin S\}$$

алгоритм Форда-Фалкерсона

- а) ищем любую цепь из истока графа в сток;
  б) каждой дуге приписываем возможный больший поток из истока в сток (записываем его через дробь с весом дуги; при этом поток не может превысить вес дуги, но может быть ему равен);

в) если поток становится равен весу дуги, то эта дуга является **насыщенной**, то есть через нее нельзя пройти при рассмотрении цепей в графе;
г) так перебираем все возможные цепи, пока станет невозможно попасть из истока в сток;
д) поток в сети будет равен сумме потоков всех дуг, инцидентных стоку графа (следует заметить, что сумма потоков всех дуг, инцидентных стоку графа равна сумме потоков всех дуг, инцидентных истоку графа).



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
6
6
8
9
4
3
9
4
4
10
5
3
10
6
8
8
7
5
10
5
12
5
12
7
8
8
6
9
7
7
6

Следуя вышеописанному алгоритму, рассмотрим следующие цепи:

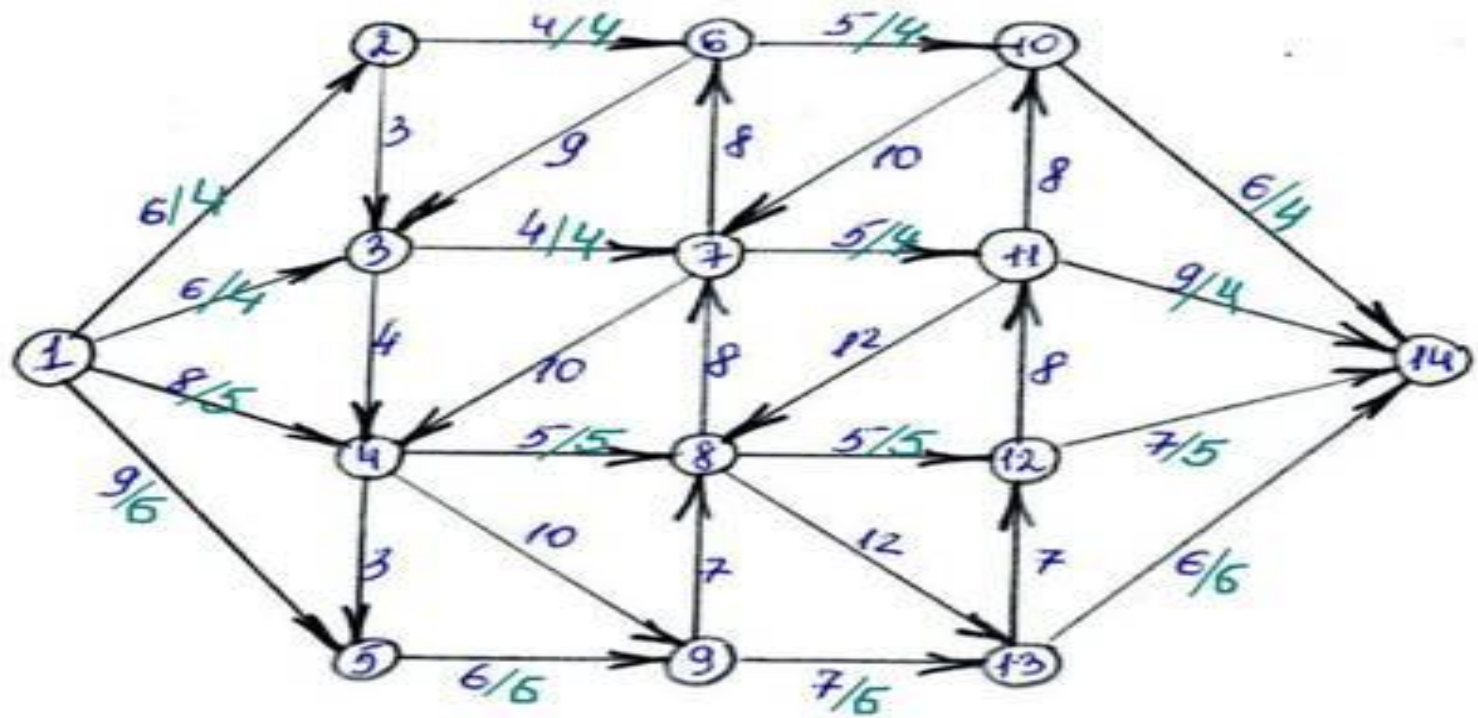
1-5-9-13-14; min φ =6

1-4-8-12-14; min φ =5

1-3-7-11-14; min φ =4

1-2-6-10-14 min φ =4

Расставив потоки у соответствующих дуг, получим:



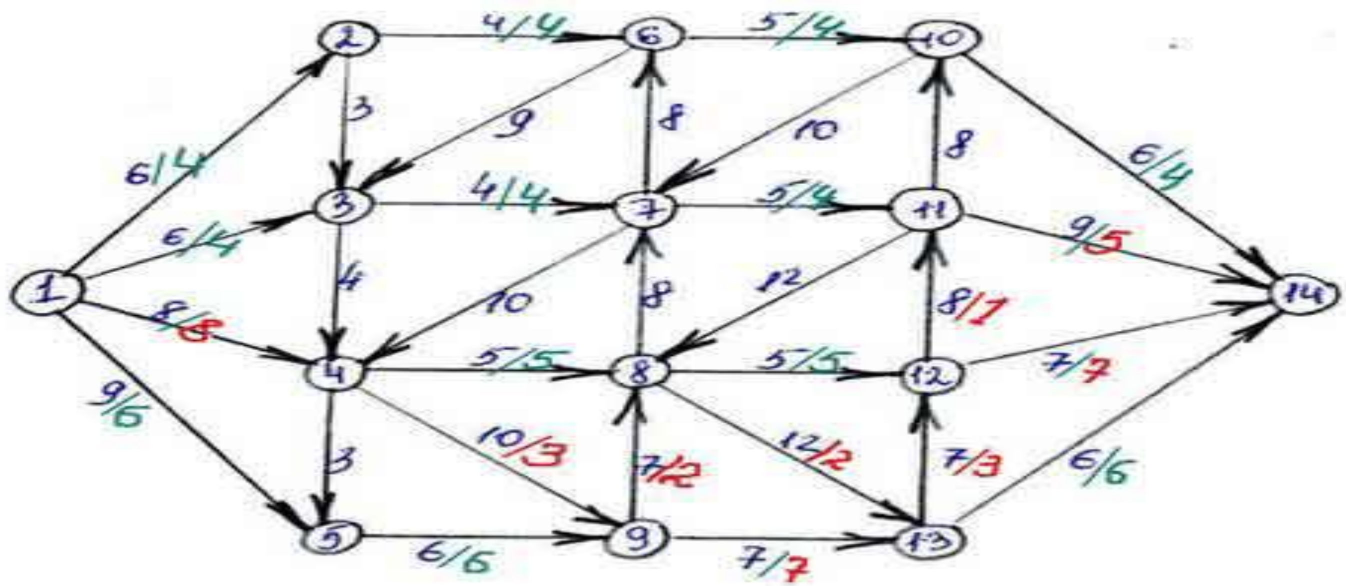
Далее будем выбирать цепи так, чтобы насыщались дуги, инцидентные истоку.

1-4-9-13-12-14 (здесь поток каждой дуги увеличивается на единицу);

1-4-9-8-13-12-14 (здесь также на единицу);

1-4-9-8-13-12-11-14 (и здесь тоже на единицу).

После этой последовательности цепей получим насыщенную дугу 1-4.



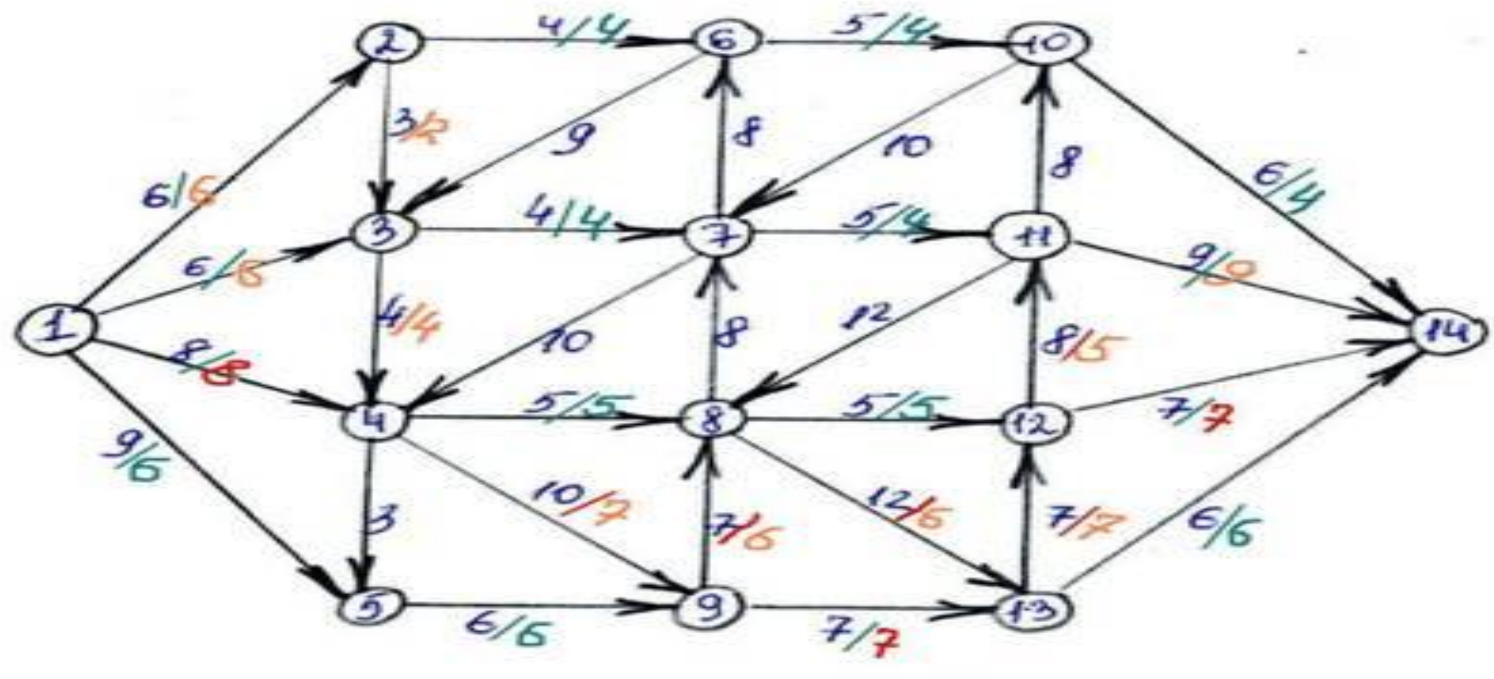
Следующая последовательность цепей дает нам окончательный результат:

1-3-4-9-8-13-12-11-14 (здесь поток каждой дуги увеличивается на двойку);

1-2-3-4-9-8-13-12-11-14 (здесь поток каждой дуги опять увеличивается на двойку).

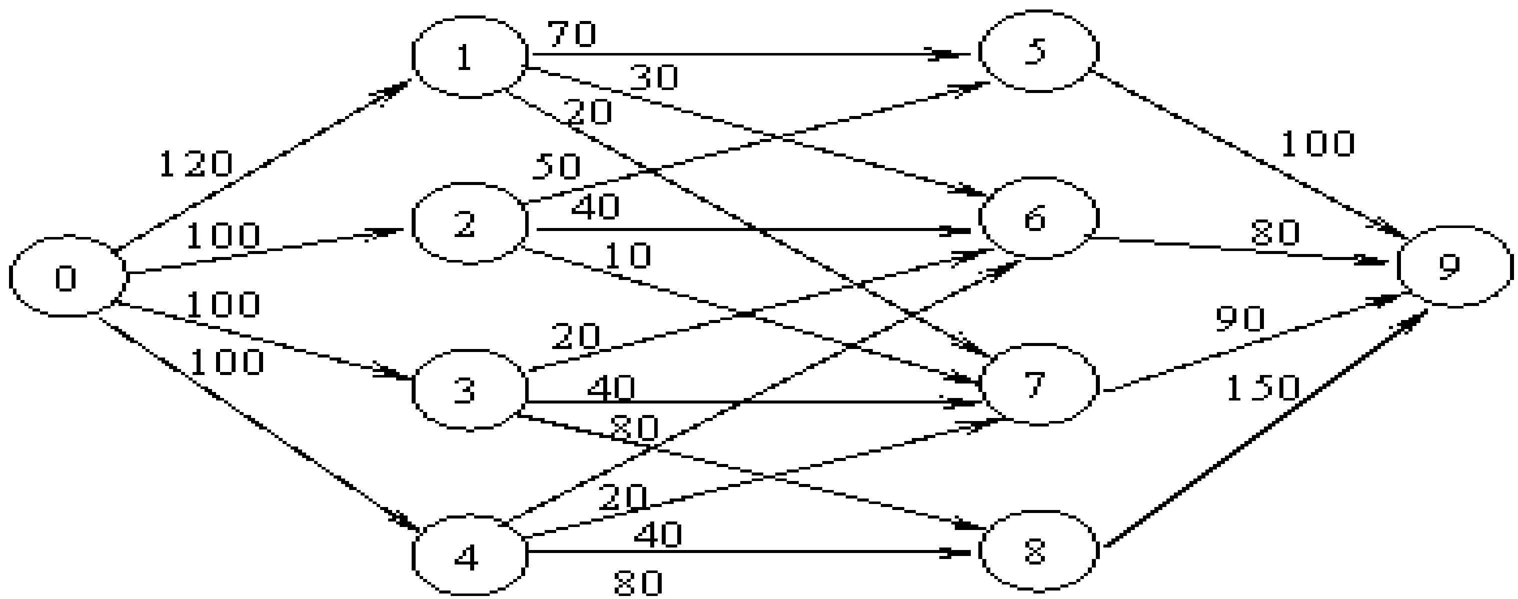
<u>Поток </u>в сети равен 4 9 7 6=6 6 8 6=26.

<u>Насыщенные дуги</u>: 1-4,1-3,1-2, 5-9, 9-13, 13-14, 13-12, 4-8, 8-12, 12-14, 3-7, 11-14,   2-6, 3-4.



Задание для самостоятельного решения

Заданы топология и пропускные способности каналов замкнутой информационной сети. Найти минимальное сечение и максимальный поток для пары источник-адресат. s = 0, t = 9.



Все вопросы и решения отправляйте на электронную почту:
e.kovaleva@mgutm.ru

Перечень рекомендуемой литературы:

1. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2020. - 140 с. - ISBN 978-5-16-105235-8. - Текст : электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/1057221
2. Акулич И.Л. Математическое моделирование в примерах и задачах.
3. https://math.semestr.ru/math/lagrange.php

Все вопросы отправляйте на электронную почту: e.kovaleva@mgutm.ru

Спасибо за внимание!