Тема 6. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Численное решение дифференцированного уравнения.

Метод Эйлера.

Метод Рунге-Кутта.

Ковалева Елена Вячеславовна, e.kovaleva@mgutm.ru

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной ***x***, неизвестной функции ***y = f(x)*** и её производных (или дифференциалов**):**

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Порядком уравнения называется максимальный порядок ***n*** входящей в него производной (или дифференциала).

Функция **y(x)** называется **решением (или интегралом)** дифференциального уравнения если при подстановке ее в уравнение обращает его в **тождество**.

Процесс отыскания решения ДУ называется **интегрированием**, а график решения ДУ – **интегральной кривой**.

Пример: $y^{(4)} - y + x = 0$ **-** уравнение четвёртого порядка.

ОДУ первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

где x - независимая переменная, y(x) - неизвестная функция

$$y' = f(x, y)$$

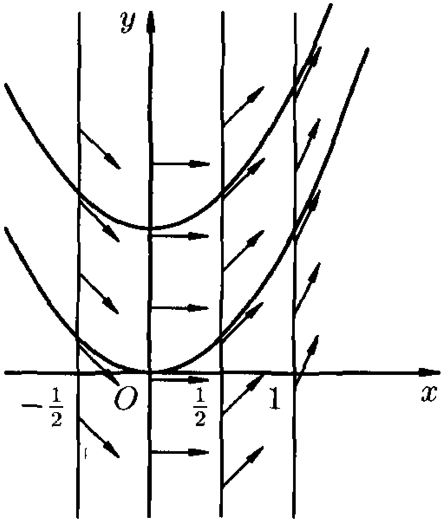
Уравнение устанавливает связь между координатами точки (x,y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Дифференциальная форма записи ДУ.

Геометрическое истолкование ДУ первого порядка

- $y' = f(x, y)$ дает совокупность направлений (поле направлений) на плоскости.
- Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется ***изоклиной***.
- Изоклина может использоваться для приближенного построения интегральных кривых.



Общим решением ДУ первого порядка называется функция , $y=\varphi(x,C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $y=\varphi(x,C)$ является решением ДУ при каждом фиксированном С.
2. Каково бы ни было начальное условие, можно найти $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y=\varphi(x,C_0)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при конкретном значении постоянной.

$\Phi(x, y, C) = 0$ - общий интеграл ДУ.

$\Phi(x, y, C_0) = 0$ - частный интеграл ДУ

Задача, отыскания решения ДУ первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется **задачей Коши**.

Численное решение ДУ

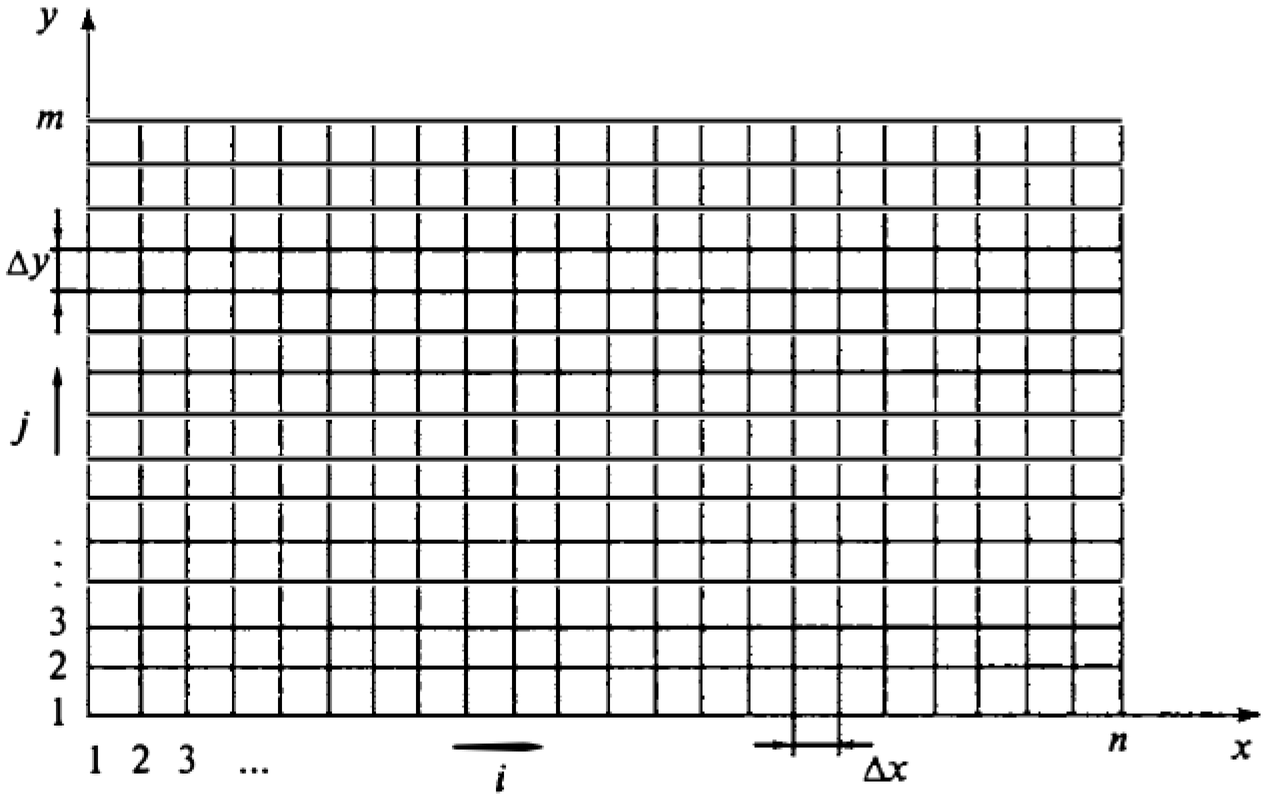
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,\ y), \quad a \le x \le b; \\ y(a) = y_a. \end{cases}$$

$$y'' = f(x,\ y,\ y')$$

$$z' = f(x,\ y,\ z);$$

$$y' = z,$$

Численное решение ДУ



$$\{y_i,\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ N\}$$

$$\{f_i = f(x_i,\ y_i),\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ N\}$$

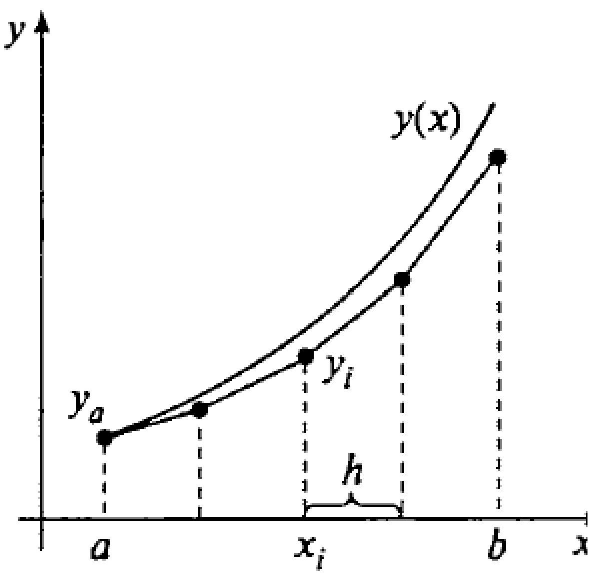
$$\delta = \max_i |y_i - y(x_i)| \qquad \delta \le \mathrm{const} \cdot h^p$$

Метод Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \le x \le b; \\ y(a) = y_a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1; \\ y_0 = y_a. \end{cases}$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$



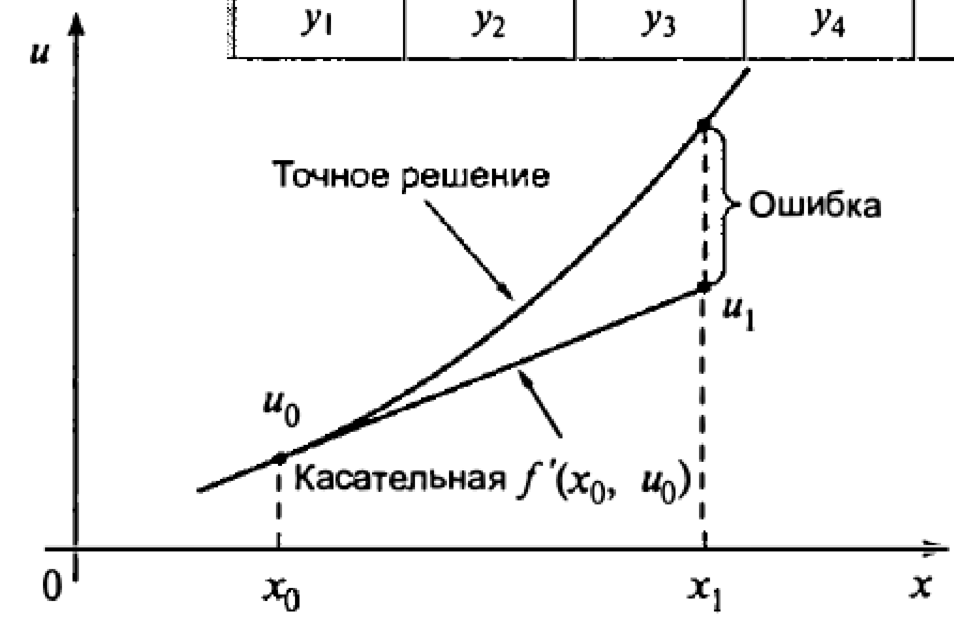
$$\begin{cases} \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1; \\ y_0 = y_a. \end{cases}$$

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_i, y_i).$$

$$y_i^{(k)} = y_{i-1} + hf(x_k, y_i^{(k-1)}), \quad y_i^{(0)} = y_{i-1}.$$

Метод Эйлера

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...	x_n
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	...	y_n



$$x_i = x_0 + ih,\ h = \frac{x - x_0}{n}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x,\ y);$$

$$y - y_0 = f(x_0,\ y_0)(x - x_0),$$

$$y = y_0 + f(x_0,\ y_0)(x - x_0);$$

$$x = x_1,$$

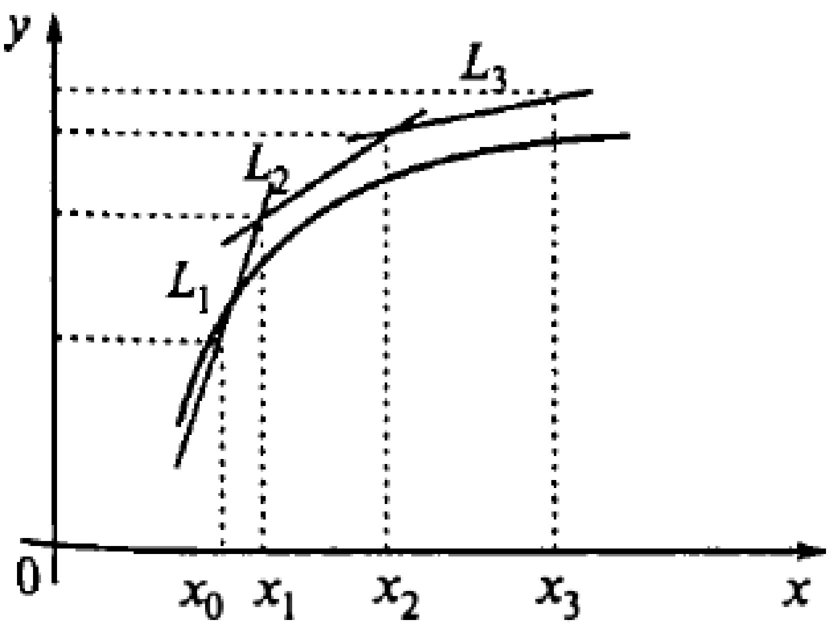
$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0), \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad \Delta y_0 = hf(x_0, y_0);$$

$$x = x_2,$$

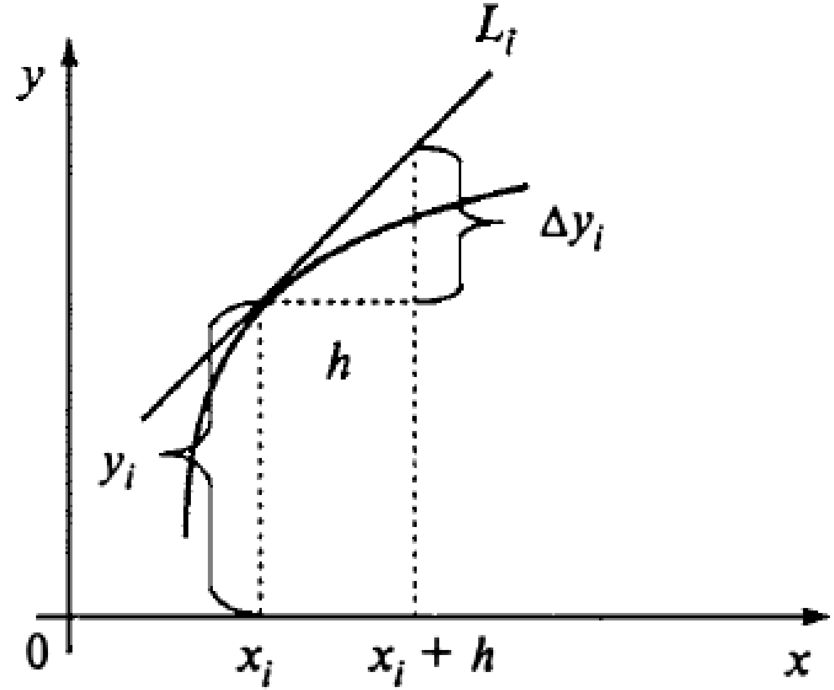
$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1), \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \quad \Delta y_1 = hf(x_1, y_1),$$

Метод Эйлера

$$\Delta y_k = hf(x_k, y_k), \qquad y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$



Интегральная кривая



Касательная к кривой

Пример

Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y' = y - x \qquad x_0 = 0;\ y_0 = 1{,}5 \text{ на отрезке } [0;\ 1{,}5]$$

h=0,25

Решение

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = h_i y_i'$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1,5	1,5	0,375
1	0,25	1,875	1,625	0,406
2	0,5	2,281	1,781	0,445
3	0,75	2,726	1,976	0,494
4	1	3,22	2,221	0,555
5	1,25	3,775	2,525	0,631
6	1,5	4,407		

Метод Рунге-Кутта второго порядка

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i; \ \Delta y_i = \Delta y_{i1} + \Delta y_{i2},$$

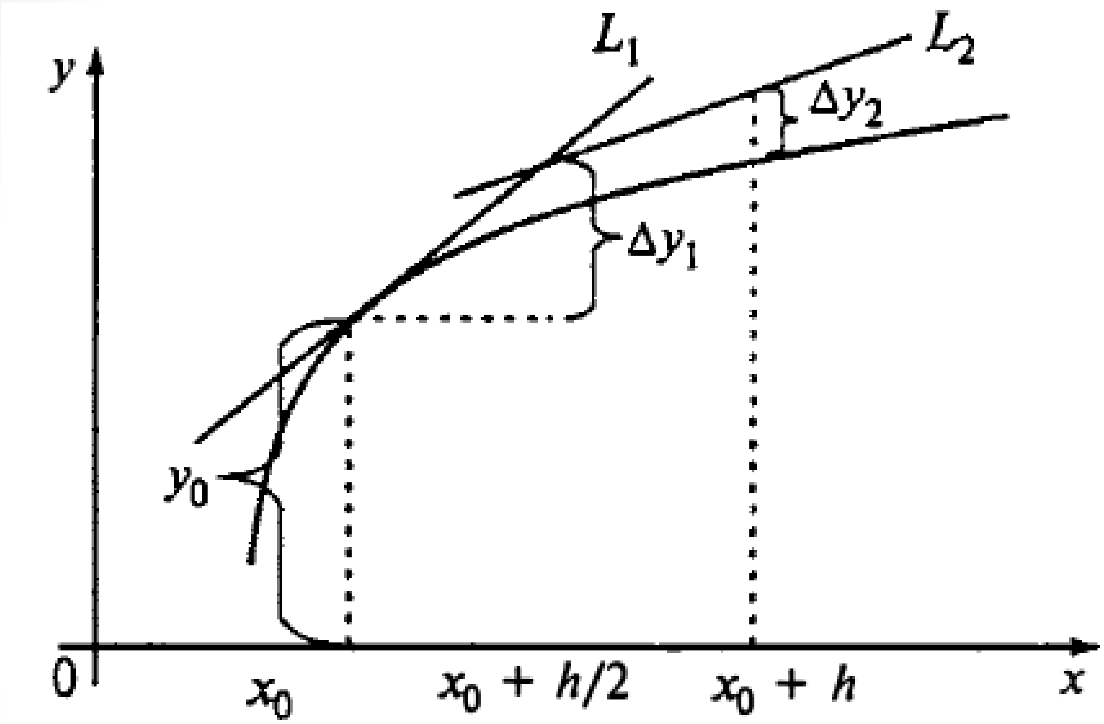
$$\Delta y_{i1} = \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \qquad \Delta y_{i2} = \frac{h}{2} f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)).$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))}{2}.$$

$$y^{*}_{i+1} = y_1 + hf(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_1 + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{*}_{i+1}))}{2}.$$

Метод Рунге-Кутта второго порядка



Метод Рунге-Кутта четвертого порядка

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i;$$

$$\Delta y_i = h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \text{ где } i = 0,\ 1,\ \ldots;$$

$$k_1 = f(x_i,\ y_i);$$

$$k_2 = f(x_i + h/2,\ y_i + hk_1/2);$$

$$k_3 = f(x_i + h/2,\ y_i + hk_2/2);$$

$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + hk_3).$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad x_{i+1} = x_i + h;$$

$$k_1 = hF(x_i, y_i);$$

$$k_2 = hF(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2});$$

$$k_3 = hF(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2});$$

$$k_4 = hF(x_i + h, y_i + k_3);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ где } i = 1, \ldots, n.$$

Литература

Численные методы и программирование : учеб. пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. — М. : ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2017. http://znanium.com/catalog/product/672965

Дополнительные источники

Введение в численные методы в задачах и упражнениях: Учебное пособие / Гулин А.В.,Мажорова О.С.,Морозова В.А.- М.:АРГАМАК-МЕДИА,НИЦ ИНФРА-М,2014

Интернет-ресурсы

- http://window.edu.ru
- http:// edu.ru
- http://Fcior.edu.ru

Спасибо за внимание