Отделение корней при решении уравнений с одной неизвестной. Локализация корней полинома

План

1. Отделение корней при решении уравнений с одной неизвестной. Общая формула оценки погрешностей приближенного корня. Границы действительных корней алгебраических уравнений; теорема Лагранжа; метод знакопеременных сумм. Число действительных корней полинома

2. Простейшие численные способы решения уравнений: метод половинного деления, пропорциональных частей, метод хорд. метод Ньютона, метод простых итераций. Преобразование уравнения к итерационному виду. Оценки погрешностей метода итераций.

Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях приближенных методов поиска корней алгебраических и трансцендентных уравнений.

2. Формирование умений решать задачи приближенного поиска корней уравнений.

Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при решении задач приближенных методов поиска корней уравнений.

2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области применения приближенных методов поиска корней алгебраических многочленов.

Задача. Пусть задан полином $f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ с комплексными коэффициентами от комплексной переменной $z = x + \mathbf{i}y$ и заданы полиномы $g_1(x, y), \ldots, g_K(x, y)$ с вещественными коэффициентами. Требуется определить число корней полинома $f(z)$ в области комплексной плоскости, описываемой системой неравенств

$$g_1(x, y) > 0, \ldots, g_K(x, y) > 0 \ .$$

Такая задача имеет теоретическое и практическое значение. Так, например, в теории управления требуется определить критерии того, чтобы все корни полинома $f(z)$ лежали в области $y < 0$, т.е. в левой полуплоскости комплексной плоскости. Проблема исследования сходимости итерационной процедуры в численных методах требует проверки другого свойства для корней: они должны лежать в круге $x^2 + y^2 < 1$.

Оказывается, что многие подобные задачи могут быть решены без привлечения каких-либо явных способов решения алгебраического уравнения $f(z) = 0$. Именно, существуют процедуры, позволяющие за конечное число элементарных алгебраических операций ($+$,$-$, $\times$, $\div$) над коэффициентами полиномов $f, g_1, \cdots, g_K$ однозначно установить искомое число корней.

Вещественные корни

Задача. Для полинома $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ установить точное число его вещественных корней на заданном интервале[1] $]a, b[$: $\operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid a < x < b\}$.

Чувствительность корней

Если мы хотим найти приближенное значение корня полинома применением какого-либо численного метода, то мы должны предварительно дать оценку точности вычислений: сколько значащих цифр мы должны сохранять в промежуточных выкладках, чтобы гарантировать достоверность получаемых результатов?

Это порождает более общую задачу оценки **чувствительности** корней, т.е. оценки их изменения при некотором возмущении коэффициентов полинома. Принципиальным результатом здесь является теорема о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов. Выясним на примере, насколько малым может быть возмущение коэффициентов полинома $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с вещественными коэффициентами, чтобы сохранилось неизменным хотя бы число его вещественных корней. Для определенности, рассмотрим случай, когда полином $f(x)$ не имеет кратных корней (т.е. его дискриминант отличен от нуля). Тогда число вещественных корней не изменится при малых (вещественных) вариациях его коэффициентов. В самом деле, вещественный корень полинома с вещественными коэффициентами не может «сойти» с вещественной оси пока не столкнется с другим вещественным корнем, т.е. не станет кратным Осталось только оценить малость допустимого возмущения.

Пример [Уилкинсон]. Вычислить корни полинома

$$f(x) = x^{20} + 210\,x^{19} + 20615\,x^{18} + 1256850\,x^{17} + 53327946\,x^{16} + 1672280820\,x^{15} + 40171771630\,x^{14} + 756111184500\,x^{13} + 11310276995381\,x^{12} + 135585182899530\,x^{11} + 1307535010540395\,x^{10} + 10142299865511450\,x^{9} + 63030812099294896\,x^{8} + 311333643161390640\,x^{7} + 1206647803780373360\,x^{6} + 3599979517947607200\,x^{5} + 8037811822645051776\,x^{4} + 12870931245150988800\,x^{3} + 13803759753640704000\,x^{2} + 8752948036761600000\,x + 2432902008176640000$$

по методу Ньютона.

Решение. Забегая вперед, укажем ответ: данный полином имеет каноническое разложение $f(x) = \prod_{j=1}^{20}(x+j)$, и таким образом его корнями являются числа $-1, -2, \dots, -20$, достаточно хорошо разнесенные. Пусть, однако же, эта информация нам изначально недоступна, и мы для поиска корней применяем метод Ньютона, задав точность вычислений в 10^{-5}. Является ли эта точность достаточной для нахождения приближенных значений корней? Оказывается, нет. Рассмотрим полином

$$\tilde{f}_{\varepsilon}(x) = f(x) + \varepsilon\, x^{19} \quad npu\ \varepsilon = 2^{-23} \approx 1.192092896 \times 10^{-7} .$$

Уже при таком малом возмущении в одном-единственном коэффициенте происходит потеря <u>десяти</u> вещественных корней! Корнями $\tilde{f}_{\varepsilon}(x)$ являются

$$\lambda_1 = -1.000000,\ \lambda_2 = -2.000000,\ \lambda_3 = -3.000000,\ \lambda_4 = -4.000000,$$
$$\lambda_5 = -4.999999,\ \lambda_6 = -6.000007,\ \lambda_7 = -6.999697,\ \lambda_8 = -8.007268,\ \lambda_9 = -8.917250$$
$$\lambda_{10,11} = -10.095266 \pm 0.643501\,\mathbf{i},\ \lambda_{12,13} = -11.793634 \pm 1.652330\,\mathbf{i},$$
$$\lambda_{14,15} = -13.992358 \pm 2.518830\,\mathbf{i},\ \lambda_{16,17} = -16.730737 \pm 2.812625\,\mathbf{i},$$
$$\lambda_{18,19} = -19.502439 \pm 1.940330\,\mathbf{i},\ \lambda_{20} = -20.846908 .$$

В данном примере допустимые возмущения для ε, т.е. такие, при которых сохранится свойство вещественности всех корней $\tilde{f}_{\varepsilon}(x)$, находятся в пределах

$$-1.3508 \times 10^{-10} < \varepsilon < +1.4213 \times 10^{-10} .$$

Правило знаков Декарта

Теорема [Декарт]. Число положительных корней полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad (a_0 > 0, a_n \neq 0)$$

с учетом их кратностей равно или меньше на четное число числа знакоперемен

Число знакопостоянств (знакоперемен) определяется для конечной последовательности <u>вещественных</u> чисел $A_1, \dots, A_n, (n \ge 2)$. Если числа A_1 и A_2 — одного знака, то говорят, что имеет место **знакопостоянство** (или **постоянство знака**), если разного — то **знакоперемена** (или **перемена знака**). Вводят счетчики[3)] $\mathcal{P}$ знакопостоянств и знакоперемен $\mathcal{V}$, полагая

$$\mathcal{P}(A_1, A_2) = \begin{cases} 1 & npu \quad A_1A_2 > 0 \\ 0 & npu \quad A_1A_2 < 0 \end{cases} ; \ \mathcal{V}(A_1, A_2) = \begin{cases} 1 & npu \quad A_1A_2 < 0 \\ 0 & npu \quad A_1A_2 > 0 \end{cases} .$$

Число знакопостоянств (-перемен) в последовательности $A_1, \dots, A_n$ определяется как сумма этих величин, вычисленных для соседних членов:

$$\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{P}(A_1, A_2) + \mathcal{P}(A_2, A_3) + \dots + \mathcal{P}(A_j, A_{j+1}) + \dots + \mathcal{P}(A_{n-1}, A_n),$$
$$\mathcal{V}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{V}(A_1, A_2) + \mathcal{V}(A_2, A_3) + \dots + \mathcal{V}(A_j, A_{j+1}) + \dots + \mathcal{V}(A_{n-1}, A_n) .$$

Пример.

$$\mathcal{P}(-2, \sqrt{5.3}, 2.818, 123, -0.5, -33) =$$
$$= \mathcal{P}(-2, \sqrt{5.3}) + \mathcal{P}(\sqrt{5.3}, 2.818) + \mathcal{P}(2.818, 123) + \mathcal{P}(123, -0.5) + \mathcal{P}(-0.5, -33) = 0+1+1+0+1 = 3 ,$$
$$\mathcal{V}(-2, \sqrt{5.3}, 2.818, 123, -0.5, -33) = 2 .$$

При наличии нулей среди чисел $A_1, \dots, A_n$ иногда дополнительно устанавливается правило, что при подсчете знакопостоянств (-перемен) нулевые значения пропускаются (не учитываются). В случае когда все $A_1, \dots, A_n$ ненулевые, имеет место равенство:

$$\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n) + \mathcal{V}(A_1, \dots, A_n) = n - 1 .$$

в ряду его коэффициентов:

$$\mathrm{nrr}\{f(x) = 0 \mid x > 0\} = \mathcal{V}(a_0, a_1, \dots, a_n) - 2k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} .$$

С помощью преобразования корней полинома (Будем использовать сокращение nrr для **числа вещественных корней** можно доказать следствие:

Число отрицательных корней полинома

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \quad (a_0 > 0, a_n \neq 0)$$

с учетом их кратностей можно оценить по формуле

$$\operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\} = \mathcal{V}(a_0, -a_1, a_2, \ldots, (-1)^n a_n) - 2k' ,$$

а если среди коэффициентов a_j нет нулевых, то — по формуле

$$\operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\} = \mathcal{P}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) - 2k' ,$$

где $k' \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\mathcal{P}$ обозначает число знакопостоянств.

Пример. Оценить число положительных и число отрицательных корней полинома

$$f(x) = x^5 - 2\,x^4 - 8\,x^3 - x^2 - 9\,x + 1 .$$

Решение.

$$\mathcal{V}(1, -2, -8, -1, -9, 1) = 2 \ \Rightarrow \ \operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid x > 0\} = 2 - 2k \geq 0 ,$$

следовательно $f(x)$ имеет либо два, либо ни одного положительного корня. Далее, по следствию:

$$\operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\} = \mathcal{P}(1, -2, -8, -1, -9, 1) = 3 - 2k' \geq 0 ,$$

следовательно $f(x)$ имеет либо три, либо один отрицательный корень.

Пример. Оценить число положительных и число отрицательных корней полинома $f(x) = x^5 - x^3 - 1$.

Решение. Здесь $\mathcal{V}(1, 0, -1, 0, 0, -1) = \mathcal{V}(1, -1, -1) = 1$.

$$\operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid x > 0\} = 1 - 2k \geq 0 \implies = 1$$

Далее, на основании <u>первой</u> формулы из следствия имеем

$$\operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\} = \mathcal{V}(1, 0, -1, 0, 0, 1) - 2k' = 2 - 2k' = \begin{cases} 2 & \text{при } k' = 0; \\ 0 & \text{при } k' = 1. \end{cases}$$

Ответ. Полином имеет один положительный и либо два, либо ни одного отрицательного корня.

Заметим, что формальное применение для решения последнего примера <u>второй</u> формулы из следствия дало бы неправильную оценку для $\operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid x < 0\}$.

Если каким-то образом заранее известно, что все корни полинома вещественны, то число положительных из них определяется по правилу знаков Декарта однозначно:

$$\operatorname{nrr}\{f(x) = 0 \mid x > 0\} = \mathcal{V}(a_0, a_1, \ldots, a_n) .$$

Не смотря на кажущуюся грубость (приблизительность) оценки, правило знаков Декарта позволяет иногда делать достаточно глубокие выводы относительно корней полинома. В частности, из него следует, что чем больше коэффициентов полинома $f(x)$ обращается в нуль, тем меньше у него потенциальных возможностей иметь вещественные корни.

Теорема [Лагранж]. Все вещественные корни полинома

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[x], \ a_0 > 0$$

удовлетворяют неравенству $\lambda_j < 1 + \sqrt[r]{A}, \quad \text{при} \quad A = \max_{k \in \{1, \ldots, n\}} \left| \frac{a_k}{a_0} \right|,$

где r — номер первого отрицательного коэффициента.

Оценка Лагранжа, являясь оценкой вещественных корней сверху, фактически ограничивает возможные <u>положительные</u> корни.

А как получить нижнюю оценку возможных <u>отрицательных</u> корней?

Это можно сделать с помощью преобразования 1 полинома, рассмотренного. В самом деле, отрицательные корни полинома $f(x)$ являются положительными корнями полинома $f(-x)$. Найдя верхнюю границу последних с помощью любого из приведенных выше критериев, мы меняем у нее знак и в результате получаем нижнюю оценку отрицательных корней $f(x)$.

Пример. Найти оценки положительных и отрицательных корней полинома

$$f(x) = x^8 + 2\,x^7 - 2\,x^6 + 6\,x^5 - 80\,x^4 + 100\,x^3 - 400\,x^2 + 15\,x + 30.$$

Решение. Сначала ограничим положительные корни сверху. В теореме Лагранжа имеем $r = 2$, $A = 400$, следовательно $\lambda_j < 21$. Теперь ограничим отрицательные корни снизу.

$$f(-x) = x^8 - 2\,x^7 - 2\,x^6 - 6\,x^5 - 80\,x^4 - 100\,x^3 - 400\,x^2 - 15\,x + 30,$$

и теперь $r = 1$, $A = 400$, следовательно $-\lambda_j < 401 \;\Rightarrow\; \lambda_j > -401$. Формируем полином

$$f^*(x) = x^8 f(1/x) = 1+2\,x-2\,x^2+6\,x^3-80\,x^4+100\,x^5-400\,x^6+15\,x^7+30\,x^8$$

для оценки нижней границы положительных корней:

$$1/\lambda_j < 1 + \sqrt{400/30} \;\Rightarrow\; \lambda_j > \frac{1}{1+\sqrt{40/3}}.$$

Наконец, оценка Лагранжа для полинома $f^*(-x)$:

$$-1/\lambda_j < 1 + 40/3 \;\Rightarrow\; \lambda_j < -\frac{1}{1+40/3}$$

позволяет ограничить сверху отрицательные корни полинома $f(x)$.

Ответ. Положительные корни находятся в интервале $]0.214\,,21[$, а отрицательные — в интервале $]-401,-0.06[$.

Проверка. Вещественные корни полинома:

$$-4.324358112,\; -0.2473416673,\; 0.3027275675,\; 2.716544138.$$

Простейшие численные способы решения уравнений.

Рассмотрим некоторую функцию f(x).

Определение. Всякое число ξ обращающее функцию в нуль, т.е. такое, что f (ξ)= , н0азывается корнем (нулем) функции или корнем уравнения

$$f(x)=0. \tag{2.1}$$

Решить уравнение — значит найти все его корни, то есть те значения **x**, которые обращают уравнение в тождество.

Если уравнение достаточно сложно, то задача точного определения корней является в некоторых случаях *нерешаемой*. Поэтому ставится задача найти такое *приближенное значение* корня $\mathbf{x_{ПР}}$, которое отличается от точного значения корня **x*** на величину, по модулю не превышающую указанной точности (малой положительной величины) **ε**, то есть

$$\left| \mathbf{x^* - x_{пр}} \right| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Величину **ε** также называют ***допустимой ошибкой***, которую можно задать по своему усмотрению.

Приближенное вычисление корня, как правило, распадается на две задачи:

1 отделение корней, т.е. определение интервалов, в каждом из которых содержится только один корень уравнения;

2 уточнение корня, т.е. вычисление его с заданной степенью точности.

Метод половинного деления. Дихотомия.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет на его концах разные по знаку значения. Задача состоит в том, чтобы вычислить корень уравнения $f(x)=0$, принадлежащий отрезку $[a,b]$ с заданной степенью точности ε , т.е. найти такое приближенное значение корня

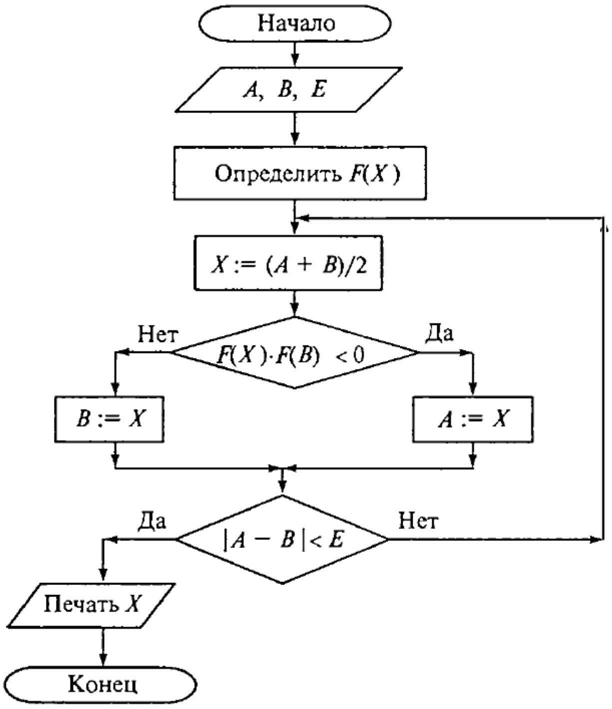
$$\left|\xi - x_n\right| \le \Delta x_n \le \varepsilon\,.$$

Если $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$ - приближенные значения корня уравнения **f(x) = 0** и выполняется условие $f(x_0)\cdot f(x_1) < 0$, то последующие приближения находятся по формуле

$$x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i-2}}{2}$$

и вычисляется $\mathbf{f(x_i)}$. Если $\mathbf{f(x_i)=0}$, то корень найден. В противном случае из отрезков выбирается тот, на концах которого **f(x)** принимает значения разных знаков, и проделывается аналогичная операция. Процесс продолжается до получения требуемой точности.

Схема алгоритма дихотомии

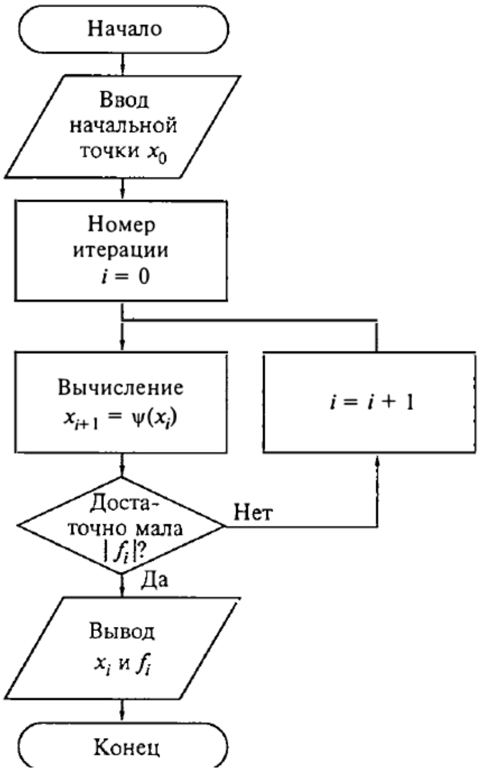


Метод простых итераций

Метод итерации — численный метод решения математических задач, используемый для приближённого решения алгебраических уравнений и систем. Суть метода заключается в нахождении по приближённому значению величины следующего приближения (являющегося более точным). Метод позволяет получить решение с заданной точностью в виде предела последовательности итераций. Характер сходимости и сам факт сходимости метода зависит от выбора начального приближения решения.

Функциональное уравнение может быть записано в виде

$$x = f(x)$$



Реализация на С++

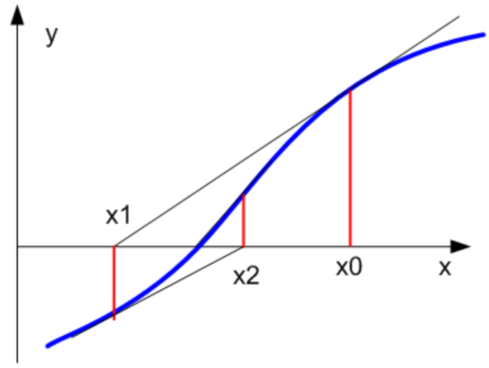
```
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double find(double x, double eps)
{
  double rez; int iter = 0;
  cout << "x0= " << x << " ";
  do {
    rez = x;
    x = 1 / (sin(M_PI*x / 180));
    iter++;
  } while (fabs(rez - x) > eps && iter<20000);
  cout << iter << " iterations" << endl;
  return x;
}
int main()
{
  cout << find(7, 0.00001);
  cin.get();
  return 0;
}
```

Метод Ньютона (метод касательных)

Если известно начальное приближение x_0 корня уравнения $f(x)=0$, то последовательные приближения находят по формуле

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Графическая интерпретация метода касательных имеет вид



Метод секущих (метод хорд)

Если x_0, x_1 - приближенные значения корня уравнения **f(x) = 0** и выполняется условие

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

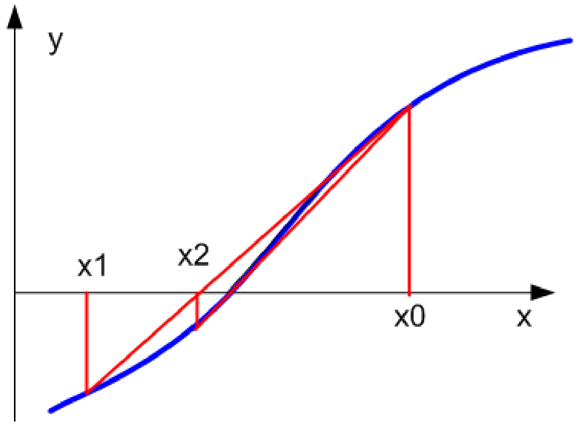
то последующие приближения находят по формуле

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} \cdot (x_{i-1} - x_{i-2})$$

Методом хорд называют также метод, при котором один из концов отрезка закреплен, т.е. вычисление приближения корня уравнения **f(x) = 0** производят по формулам:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f(x_{i-1}) - f(x_0)} \cdot (x_{i-1} - x_0)$$

Геометрическая интерпретация метода хорд:



Выводы:

По результатам лекции у студентов сформированы теоретические знания и практические навыки о приближенных методах поиска корней алгебраических многочленов.