УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

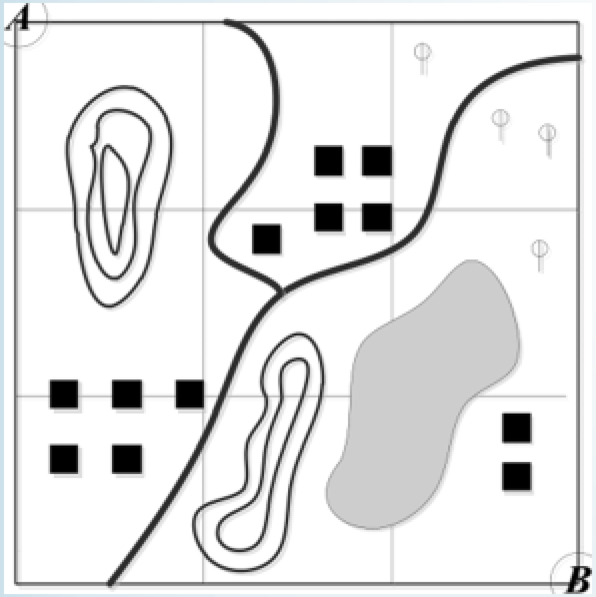
Динамическое программирование

- ✓ Решение экономических задач методом ДП.
- ✓ Принцип оптимальности.

Ковалева Елена Вячеславовна

Динамическое программирование

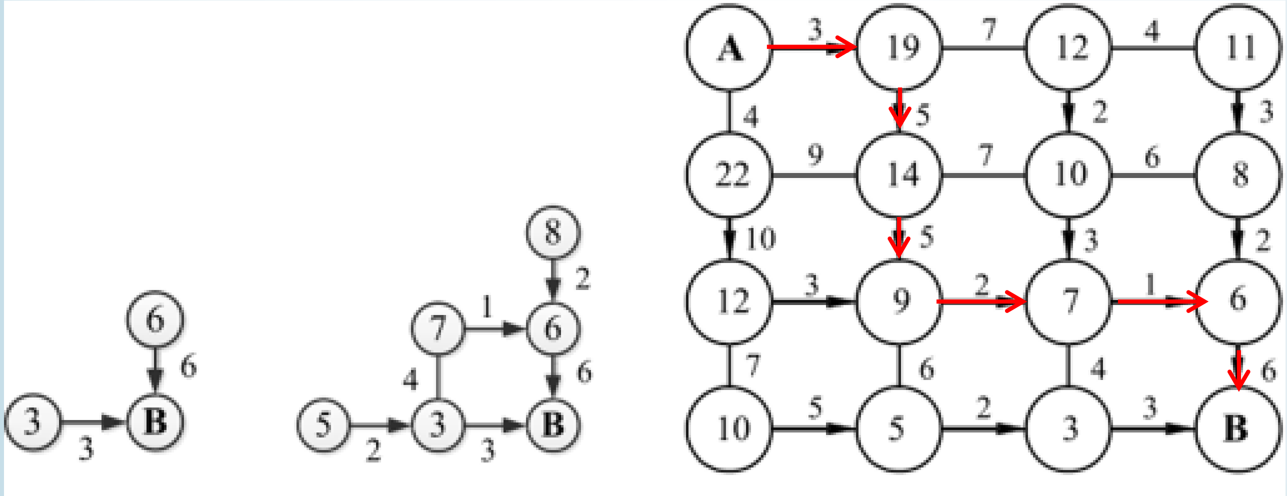
Метод динамического программирования основан на пошаговой оптимизации целевой функции, где в качестве такой функции могут выступать стоимость, ресурсные затраты, финансово-экономические затраты, а также кратчайшие пути. Рассмотрим пример топологической оптимизации.



Пусть дана карта местности (рис.). Разбиваем эту карту координатной сеткой. Шаг сетки выбираем, исходя из условия точности. Узлы координатной сетки считаем вершинами графа.

Топологическая оптимизация

Проставляем веса ребер, учитывая, какая цель преследуется. Построение пути осуществляем из конечной вершины в начальную, исходя из следующих приоритетных направлений: вниз и вправо (при движении к конечной вершине). На первом этапе движения до конечной вершины *В* вынужденные, т.е. вниз и вправо (рис. *а).* На последующих шагах направление движения определяется оптимизацией длин путей (рис. *б).* В результате выполнения операций определяется длина пути между вершинами (22 единицы) и траектория движения (по стрелкам), показанная (рис. *в).*



а *б* *в*

Метод динамического программирования при нахождении кратчайшего пути

Введем функцию f_i определяющую минимальную длину пути из начальной вершины в вершину *i*. Обозначим через S_{ij} - длину пути между вершинами *i и j*— наименьшую длину пути между вершиной *j* и начальной вершиной. Выбирая в качестве *i* такую вершину, которая минимизирует сумму $(S_{ij} + f_j)$, получаем функциональное уравнение Беллмана

$$f_i = \min_{i \neq j} \{S_{ij} + f_j\} \text{ либо } f_i = \min_{i \neq j} \{S_{ji} + f_j\}.$$

Трудность решения этого уравнения состоит в том, что неизвестная функция входит в обе части равенства. В такой ситуации приходится прибегать к классическому методу последовательных приближений (итераций), используя рекуррентную формулу

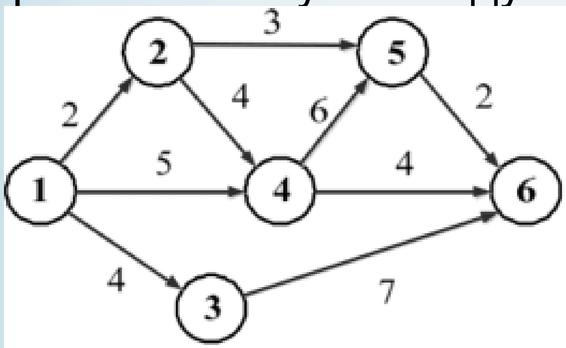
$$f_i^{(k+1)} = \min_{i \neq j} \{S_{ij} + f_j^{(k)}\},$$

Возможен другой подход к решению поставленной задачи с помощью метода стратегий. При движении из начальной точки *i* в конечную точку *к* получается приближение = S_{ik}, где S_{ik} — длина пути между точками *i* и *к.*

Следующее приближение — поиск решения в классе двузвенных ломаных. Дальнейшие приближения отыскивают в классе трехзвенных, четырехзвенных и других ломаных.

Пример

Используя метод динамического программирования, найти кратчайший путь между вершинами 1 и 6 в графе



	1	2	3	4	5	6
1	–	2	4	5	–	–
2	–	–	–	4	3	–
3	–	–	–	–	–	7
4	–	–	–	–	6	4
5	–	–	–	–	–	2
6	–	–	–	–	–	–

Первый этап алгоритма — поиск длины минимального пути.

$f_1 = 0$ так как для этой вершины никакой путь еще не пройден.

$$f_2 = \min\{S_{12} + f_1\} = \min\{2+0\} = 2 \qquad f_3 = \min\{S_{13} + f_1\} = \min\{4+0\} = 4$$

$$f_4 = \min\begin{Bmatrix} S_{14} + f_1 \\ S_{24} + f_2 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 5+0 \\ 4+2 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} \underline{5} \\ 6 \end{Bmatrix} = 5$$

$$f_5 = \min\begin{Bmatrix} S_{25} + f_2 \\ S_{45} + f_4 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 3+2 \\ 6+5 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} \underline{5} \\ 11 \end{Bmatrix} = 5$$

$$f_6 = \min\begin{Bmatrix} S_{56} + f_5 \\ S_{46} + f_4 \\ S_{36} + f_3 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 2+5 \\ 4+5 \\ 7+4 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} \underline{7} \\ 9 \\ 11 \end{Bmatrix} = 7$$

На втором этапе алгоритма будет найдена последовательность вершин, через которые проходит вычисленный минимальный путь. Для этого необходимо найти последовательность тех функций, которым соответствовал выбираемый минимум.

$$f_6 \to f_5 \to f_2 \to f_1$$

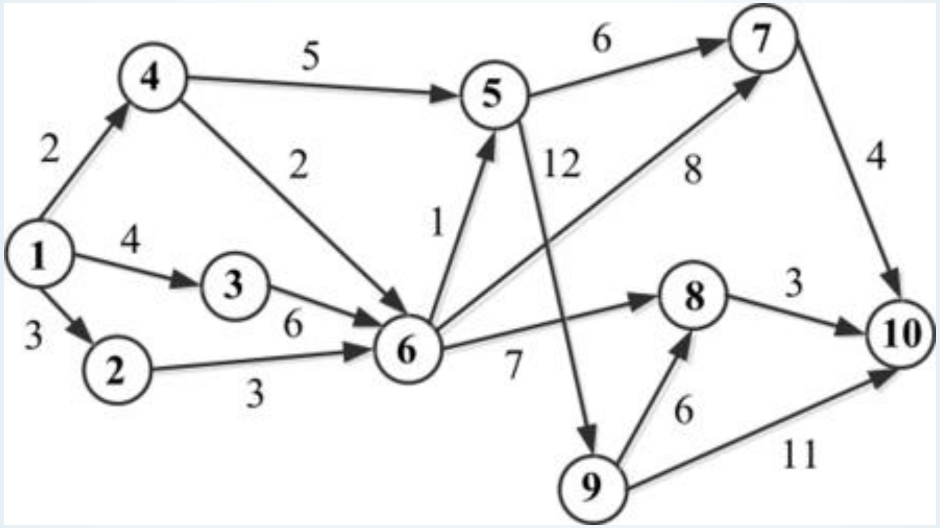
Следовательно, «отработка назад» от конечной вершины 6 искомого пути до его начальной вершины 1 позволяет указать последовательность проходимых при этом вершин графа:

$$1 \to 2 \to 5 \to 6$$

Минимальное расстояние между вершинами 1 и 6 составит 7ед.

Пример для самостоятельного решения

Определить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 10 для графа



Пример 2

- **Задача о загрузке (рюкзаке)** Самолет загружается предметами *n* различных типов. Каждый предмет типа *j* дает доход *cj* тысяч рублей и весит *aj* тонн. Грузоподъемность самолета – *b* тонн. Выбрать предметы, погрузка которых позволит получить максимальный доход без превышения грузоподъемности самолета.

$$f_1(y_1) = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le y_1$$

$$x_j \ge 0 - целые$$

$$y_1 = b$$

Рекуррентные уравнения Беллмана

Для процедуры обратной прогонки

$$f_n(y_n) = \max_{x_n = 0,1,\ldots,\left[b/a_n \right]} \{c_n x_n\}$$

$$f_n(y_n) = \max_{x_n = 0,1,\ldots,\left[b/a_n \right]} \{c_j x_j + f_{j+1}(y_j - a_j x_j)\}$$

$$j = n-1,\ldots,2,1$$

c_j - доход, получаемый от перевозки одного предмета типа j

a_j - вес это предмета

x_j - количество предметов j-го типа (управление)

y_j - часть грузоподъемности самолета, выделенная для предметов *j, j+1,…,n* (состояния)

$f_j(y_j)$ - максимальный доход от погрузки предметов *j, j+1,…,n* , если в самолете выделено y_i тонн под эти предметы.

Решим конкретную задачу с помощью рекуррентного уравнения

$$f_1(y_1) = \max_{x_1, x_2, x_3} \{65x_1 + 80x_2 + 30x_3\}$$

$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \le y_1$$

$$x_j - целые, \quad y_1 = 5$$

Этап 3. Предметы 3 типа

$$f_3(y_3) = \max_{x_3} \{30x_3\}, \quad \max x_3 = [5/1] = 5$$

y_3	$30x_3$						Оптимальное решение	
	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$	$x_3=5$	$f_3(y_3)$	x_3^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	0	30	–	–	–	–	30	1
2	0	30	60	–	–	–	60	2
3	0	30	60	90	–	–	90	3
4	0	30	60	90	120	–	120	4
5	0	30	60	90	120	150	150	5

Этап 2. Предметы 2 и 3 типа

$$f_2(y_2) = \max_{x_2}\{80x_2 + f_3(y_2 - 3x_2)\}, \quad \max x_2 = [5/3] = 1$$

y_2	$80x_2 + f_3(y_2 - 3x_2)$		Оптимальное решение	
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$f_2(y_2)$	x_2^*
0	0+ 0= 0	–	0	0
1	0+ 30=30	–	30	0
2	0+ 60=60	–	60	0
3	0+ 90=90	80+0 = 80	90	0
4	0+120=120	80+30=110	120	0
5	0+150=150	80+60=140	150	0

Этап 1. Предметы 1, 2 и 3 типа

$$f_1(y_1) = \max_{x_1}\{65x_1 + f_2(y_1 - 2x_1)\}, \quad \max x_1 = [5/2] = 2$$

y_1	$65x_1 + f_2(y_1 - 2x_1)$			Оптимальное решение	
	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$f_1(y_1)$	x_1^*
0	0+ 0= 0	–	–	0	0
1	0+ 30= 30	–	–	30	0
2	0+ 60= 60	65+ 0= 65	–	65	1
3	0+ 90= 90	65+30= 95	–	95	1
4	0+120=120	65+60=125	130+ 0=130	130	2
5	0+150=150	65+90=155	130+30=160	160	2

При заданном $y_1 = 5$ оптимальным решением является $x^* = (2,0,1)$, а суммарная стоимость груза равна 160.

Динамическое программирование

Оптимальное распределение ресурсов

В общем виде задачи оптимального распределения ресурсов могут быть описаны следующим образом. Имеется некоторое количество ресурсов (материальные, трудовые, финансовые), которые необходимо распределить между различными объектами их использования по отдельным промежуткам планового периода так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Показателем эффективности может служить, например, прибыль, себестоимость, суммарные затраты и т.д.

Пример 3

Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукции, изготавливаемой 3-я предприятиями, выделены капиталовложения в объеме S= 700 тыс. у.д.е. Использование i- м предприятием x_i – тыс. у.д.е. обеспечивает прирост выпуска продукции, определяемый значением нелинейной функции $f_i(x_i)$

Объем капиталовложений X_i (тыс. руб.)	Прирост выпуска продукции $f_i(X_i)$ в зависимости от объема капиталовложений (тыс. руб.)		
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Решение.

$$\varphi_1(X) = \max_{0 \leqslant X_1 \leqslant X} \{f_1(X_1)\};$$

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \leqslant X_2 \leqslant X} \{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\};$$

. . . .

$$\varphi_{n-1}(X) = \max_{0 \leqslant X_{n-1} \leqslant X} \{f_{n-1}(X_{n-1}) + \varphi_{n-2}(X - X_{n-1})\}.$$

Для 1-го предприятия

$$X = 0 \quad \varphi_1(0) = 0$$

$$X = 100 \quad \varphi_1(100) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \end{Bmatrix} = 30 \quad X_1^0 = 100$$

$$\varphi_1(200) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ \boxed{50} \end{Bmatrix} = 50, \quad X_1^0 = 200;$$

$$\varphi_1(300) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ \boxed{90} \end{Bmatrix} = 90, \quad X_1^0 = 300;$$

$$\varphi_1(400) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ \boxed{110} \end{Bmatrix} = 110, \quad X_1^0 = 400;$$

$$\varphi_1(500) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ \boxed{170} \end{Bmatrix} = 170, \quad X_1^0 = 500;$$

$$\varphi_1(600) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ \boxed{180} \end{Bmatrix} = 180, \quad X_1^0 = 600;$$

$$\varphi_1(700) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{Bmatrix} = 210, \quad X_1^0 = 700.$$

Объем капиталовложений X, выделяемых первому предприятию (тыс. руб.)	Максимальный прирост $\varphi_i(X)$ выпуска продукции (тыс. руб.)	Условно оптимальный объем капиталовложений X_1^0, выделяемых первому предприятию (тыс. руб.)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \leqslant X_2 \leqslant X} \{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\}$$

$$\varphi_2(0) = 0, \qquad X_2^0 = 0;$$

$$\varphi_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ \boxed{50+0} \end{Bmatrix} = 50, \quad X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(200) = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ \boxed{50+30} \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 80, \quad X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(300) = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ \boxed{80+30} \\ 90+0 \end{Bmatrix} = 110, \quad X_2^0 = 200;$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ \boxed{150+0} \end{Bmatrix} = 150, \quad X_2^0 = 400;$$

$$\varphi_2(500) = \max\begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ \boxed{190+0} \end{Bmatrix} = 190, \quad X_2^0 = 500;$$

$$\varphi_2(600) = \max\begin{Bmatrix} 0+180 \\ \boxed{50+170} \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{Bmatrix} = 220, \qquad X_2^0 = 100,$$

$$\varphi_2(700) = \max\begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+180 \\ \boxed{80+170} \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{Bmatrix} = 250, \qquad X_2^0 = 200.$$

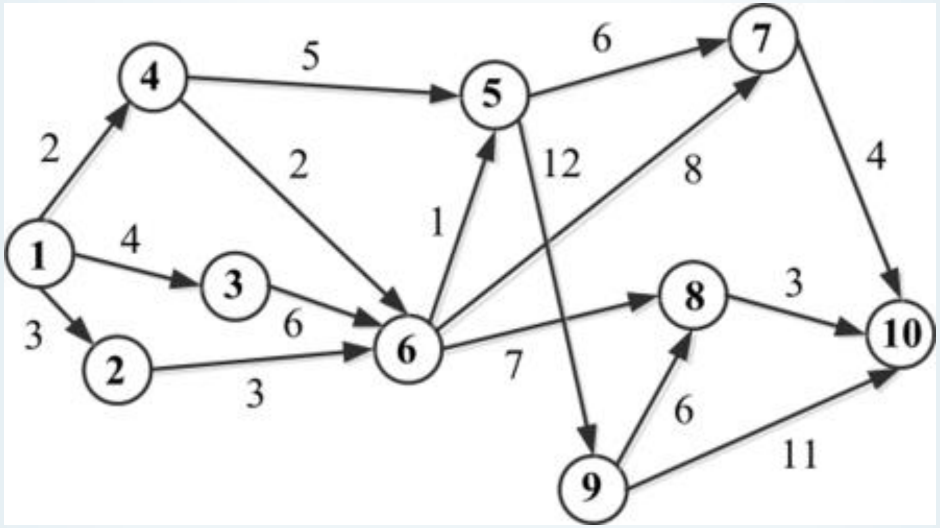
Объем капиталовложений X, выделяемых двум предприятиям (тыс. руб.)	Максимальный прирост $\varphi_2(X)$ выпуска продукции (тыс. руб.)	Условно оптимальный объем капиталовложений X_2^0, выделяемых второму предприятию (тыс. руб.)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

$$\varphi_3(X)=\max_{0\leqslant X_3\leqslant X}\{f_3(X_3)+\varphi_2(X-X_3)\},$$

$$\varphi_3(700)=\left\{\begin{matrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 110+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ \boxed{220+50} \\ 240+0 \end{matrix}\right\}=270,\ \bar{X}_3^0=600.$$

Пример для самостоятельного решения

Определить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 10 для графа



Перечень рекомендуемой литературы:

1. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2020. - 140 с. - ISBN 978-5-16-105235-8. - Текст : электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/1057221
2. Акулич И.Л. Математическое моделирование в примерах и задачах.
3. https://math.semestr.ru/math/lagrange.php

Все вопросы отправляйте на электронную почту:
e.kovaleva@mgutm.ru

Спасибо за внимание!