Интерполирование и экстраполирование функций.

План

1. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

2. Интерполяционные формулы Ньютона.

Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях теории интерполирования и аппроксимации функций.

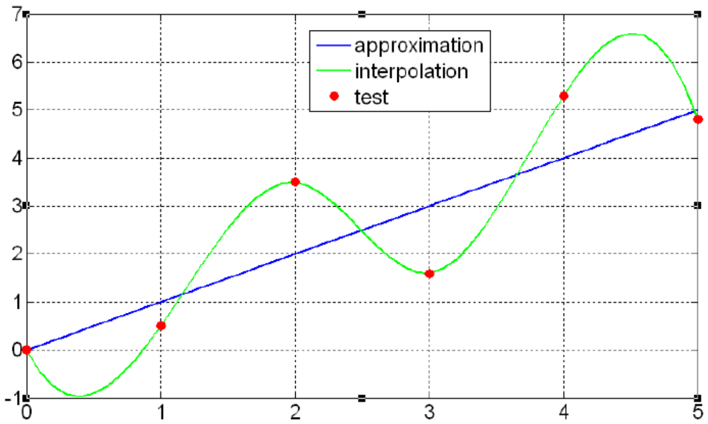
2. Формирование умений решать задачи интерполирования и аппроксимации функций.

Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при решении задач интерполирования и аппроксимации функций.

2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области интерполирования и аппроксимации функций.

Экспериментальные данные, сведенные в таблицы и графики, проигрывают в наглядности аналитическим решениям. Подобные проблемы возникают и в случае, если данные получены расчетным путем, но существуют для ограниченного числа точек. Причиной тому может быть сложность и трудоемкость расчетов. Можно выделить два подхода к решению данной задачи. Можно построить кривую, не требуя прохождения ее через все имеющиеся точки, в каком-то смысле соответствующей этим точкам. Эта задача ***аппроксимации***. На рисунке ей соответствует синяя линия. Красные маркеры – результаты измерений. Если требовать, чтобы построенная кривая точно проходила через точки, как зеленая линия на рисунке, то это задача ***интерполяции.***



Аппроксимация (приближение) – научный метод, состоящий в замене объектов более простыми, но близкими к исходным.

В основе большинства численных методов математического анализа лежит замена одной функции $f(x)$ (известной, неизвестной или частично известной) другой функцией $\varphi(x)$, близкой *к* $f(x)$ и обладающей «хорошими» свойствами, позволяющими легко производить над нею те или иные аналитические или вычислительные операции.

Будем называть такую замену ***аппроксимацией***.

Будем считать, что аппроксимация функции производится с помощью *многочленов степени* n∈ N0. Тогда в зависимости от выбора критерия согласия и, в частности, от количества точек согласования $f(x)$ с $\varphi(x)$ (будем называть их *узлами*), то есть точек, в которых известна информация об f (x) и, возможно, ее производных, можно рассмотреть разные конкретные способы аппроксимации.

Дискретная и интегральная аппроксимация

- Когда приближение строится на дискретном наборе точек, аппроксимацию называют точечной или ***дискретной***.
- Когда аппроксимация проводится на непрерывном множестве точек (отрезке), то она называется непрерывной или ***интегральной***.

Метод конечных элементов

МКЭ получил глубокие теоретические обоснования и применяется для решения весьма широкого круга задач, например:

- стационарные задачи распространения тепла, диффузии, распределения электрического поля, другие задачи теории поля;

• задачи гидромеханики, в частности, течение жидкости в пористой среде;

• задачи механики и прочности, в т.ч. проектирование самолётов, ракет и различных пространственных оболочек;

• и др.

Основная концепция МКЭ

1) любую непрерывную величину (например, температуру, давление, перемещение) можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определённых на конечном числе подобластей (элементов);

2) кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области.

При построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом.

1. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми (или просто узлами).

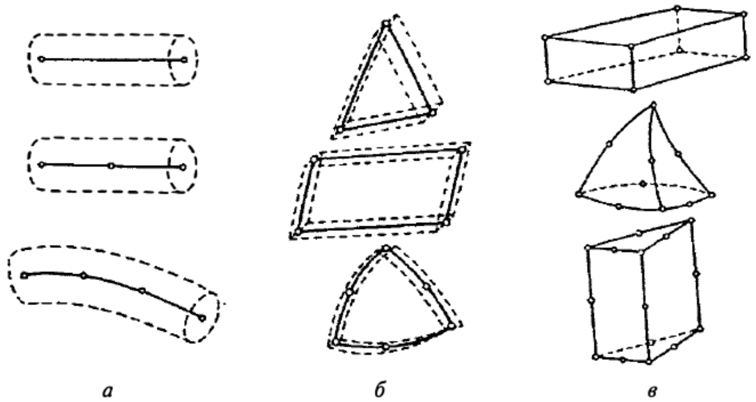
2. Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена.

3. Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами (или конечными элементами). Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

4. Непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом (или какой-либо другой функцией), который определяется с помощью узловых значений этой величины.

Для каждого элемента определяется свой полином, но полиномы подбираются таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ элемента.

Этот полином называют ещё функцией элемента.



Некоторые виды конечных элементов:
а — одномерные; *б* — двухмерные; *в* — трехмерные

Преимущества МКЭ

1. Свойства материалов смежных элементов не должны быть обязательно одинаковыми. Это позволяет применять метод к телам, составленным из нескольких материалов.

2. Криволинейная область может быть аппроксимирована с помощью прямолинейных элементов или описана точно с помощью криволинейных элементов. Таким образом, методом можно пользоваться не только для областей с «хорошей» формой границы.

3. Размеры элементов могут быть переменными.

Это позволяет укрупнить или измельчить сеть разбиения области на элементы, если в этом есть необходимость.

4. С помощью МКЭ не представляет труда рассмотрение граничных условий с разрывной поверхностной нагрузкой, а также смешанных граничных условий.

Интерполяция

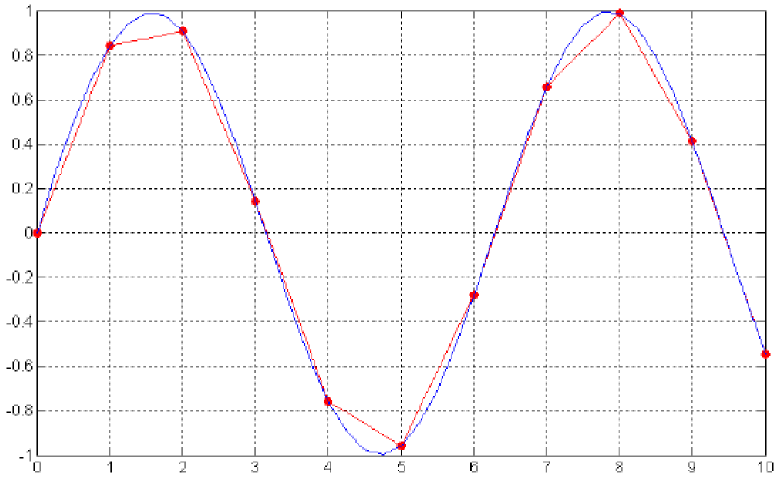
Интерполяция – нахождения промежуточных значений по имеющемуся дискретному набору точных числовых значений.

На отрезке [a,b] в точках {x1,x2,...,xn} известны значения функции $f(x)$. Требуется построить функцию g(x), совпадающую с заданной функцией $f(x)$ в этих точках. g(xk)=f(xk), k=1,2,...,n, Точки {x1,x2,...,xn} называются узлами интерполяции, а построение функции – интерполированием.

Линейная интерполяция – узлы соединяются прямолинейными отрезками. Два соседних узла позволяют рассчитать параметры этих отрезков. Построенная таким образом функция g(x) – ломаная с вершинами в узлах. Точность интерполяции в промежуточных точках невысока. Представляют интерес гладкие функции, имеющие непрерывные производные.

Интерполяция полиномом высокой степени на всем отрезке называется ***глобальной.*** Теоретически точность интерполяции возрастает с ростом степени полинома, однако на практике погрешность расчета коэффициентов при высоких степенях приводят к осцилляциям интерполяционной кривой.

Идея ***локальной*** интерполяции заключается в том, что между соседними узлами строится свой отдельный интерполяционный полином невысокой степени. Затем эти полиномы «сшиваются». Такой метод называется сплайн- интерполяцией. Если использовать полином третьего порядка, то в узлах можно удовлетворить как условию непрерывности функции, так и непрерывности её первой и второй производных.



Экстраполяция

Экстраполи́рование, экстраполя́ция, (от лат. extrā — снаружи, вне, кроме, за и лат. polire — выправляю, приглаживаю, меняю, изменяю) — это особенный вид аппроксимации, при котором функция аппроксимируется вне заданного интервала, а не меж фиксированными значениями. Другими словами, экстраполяция — это приближённое определение значений функции в точках, которые лежат вне отрезка, по её значениям в точках.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполирующую функцию ищут в виде полинома n степени. Для каждого набора точек имеется только один интерполяционный многочлен, степени не больше n. Однозначно определенный многочлен может быть представлен в различных видах. Графически задача интерполирования заключается в том, чтобы построить такую интерполирующую функцию, которая бы проходила через все узлы интерполирования

$$L_n(x) = p_0(x)y_0 + p_1(x)y_1 + \ldots + p_n(x)y_n = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_i,$$

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)},$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} y_i$$

Интерполяционный полином Эрмита

Пусть задана таблица значений интерполируемой функции в узлах и значения ее производной. Тогда необходимо, чтобы в узлах интерполяции совпадали не только значения функции и интерполяционного многочлена, но и значения их производных. Такую интерполяцию называют эрмитовой. Задано

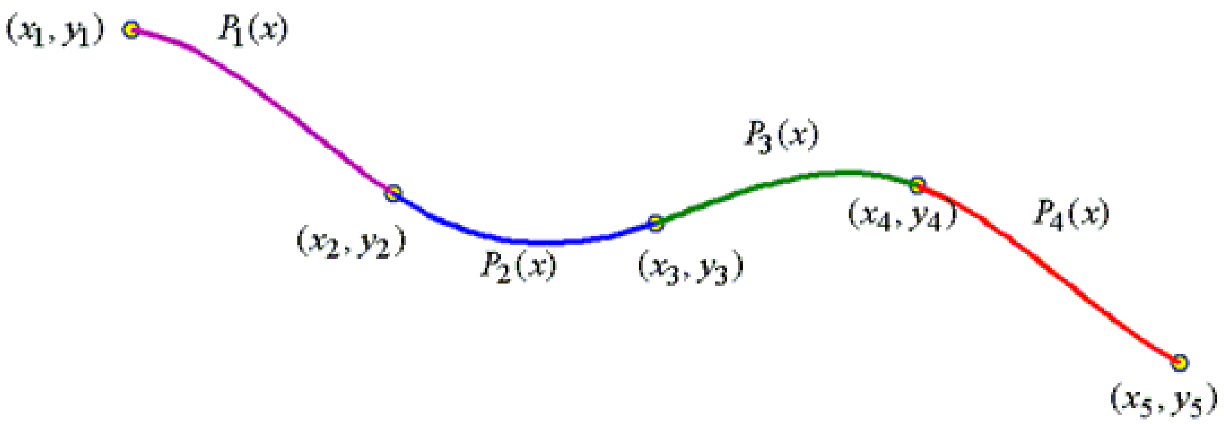
$(x_k, f(x_k), f'(x_k))_{k=1,2,\ldots,n}$.

Требуется найти n-1 кубический полином

$P_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$.

Так чтобы выполнялись условия

$P_k(x_k) = f(x_k)$, $\quad P_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$, $\quad \frac{dP_k}{dx}(x_k) = f'(x_k)$, $\quad \frac{dP_k}{dx}(x_{k+1}) = f'(x_{k+1})$



$P_k(x_k) = a_k$ и $\frac{dP_k}{dx}(x_k) = b_k$, $\quad \begin{cases} P_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) \\ \frac{dP_k}{dx}(x_{k+1}) = f'(x_{k+1}) \end{cases}$

$a_k = f(x_k)$ и $b_k = f'(x_k)$.

$$c_k = \frac{3f[x_k, x_{k+1}] - f'(x_{k+1}) - 2f'(x_k)}{x_{k+1} - x_k},$$

$$d_k = \frac{f'(x_k) + f'(x_{k+1}) - 2f[x_k, x_{k+1}]}{(x_{k+1} - x_k)^2}. \qquad f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}.$$

Понятие конечных разностей

Любой узел сетки можно представить в виде $x_i = x_0 + ih$

Конечные разности первого порядка

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

………………

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Конечные разности второго порядка

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$

…………

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

k-го порядка

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов

Интерполирование вперед

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0,1,2,\dots,n, \quad q = \frac{x - x_0}{h}$$

$$N_1(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots$$

$$+\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Второй интерполяционный многочлен Ньютона

- Интерполирование назад

$$x = x_n + qh, \qquad q = \frac{x - x_n}{h}$$

$$N_2(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots$$

$$+\frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$