ОП.11 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ

Тема 1.1 Элементы теории погрешностей

Общие сведения об источниках погрешностей, их классификация.

- ✓ Формы записи данных.
- ✓ Вычислительная погрешность.
- ✓ Понятие о погрешности машинных вычислений.

Ковалева Елена Вячеславовна

Введение

Вычислительная математика является одной из основных дисциплин, необходимых для подготовки специалистов, работающих в различных областях.

При изучении многих физических явлений, технологических процессов различных областей науки и техники, а также процессов, наблюдаемых в экономике, экологии и других социальных науках, часто не удается найти закон, связывающий рассматриваемые величины, т.е. зачастую возникает необходимость решения задачи, не допускающей аналитического решения. Например, эта проблема может возникнуть при решении систем дифференциальных уравнений, описывающих динамические модели сложных технических систем, модели микро- или макроэкономики, динамики малого предприятия и т.п.

Основным инструментом для решения сложных математических задач в настоящее время являются численные методы, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами; при этом результаты получаются в виде числовых значений.

Численные методы используются при постановке и решении прикладных задач с помощью математических моделей и компьютера, при создании и применении пакетов стандартных программ в инженерно-экономической деятельности, а также в других областях научной и практической работы: статистике, медицине, лингвистике и т. д.

Численными методы решения инженерных задач

Численные методы являются одним из мощных математических средств решения инженерных задач.

Современные численные методы и мощные ЭВМ дали возможность решать такие задачи, о которых полвека назад могли только мечтать. Но применять численные методы далеко не просто. Цифровые ЭВМ умеют выполнять только арифметические действия и логические операции. Поэтому помимо разработки математической модели, требуется еще разработка алгоритма, сводящего все вычисления к последовательности арифметических и логических действий.

Выбирать модель и алгоритм надо с учетом скорости и объема памяти ЭВМ: чересчур сложная модель может оказаться машине не под силу, а слишком простая – не даст физической точности.

Сам алгоритм и программа для ЭВМ должны быть тщательно проверены. Даже проверка программы нелегка, о чем свидетельствует популярное утверждение: «В любой сколь угодно малой программе есть по меньшей мере одна ошибка».

Однако численные методы не всесильны. Они не отменяют все остальные математические методы. Начиная исследовать проблему, целесообразно использовать простейшие модели, аналитические методы и прикидки.

И только разобравшись в основных чертах явления, надо переходить к полной модели и сложным численным методам; даже в этом случае численные методы выгодно применять в комбинации с точными и приближенными аналитическими методами.

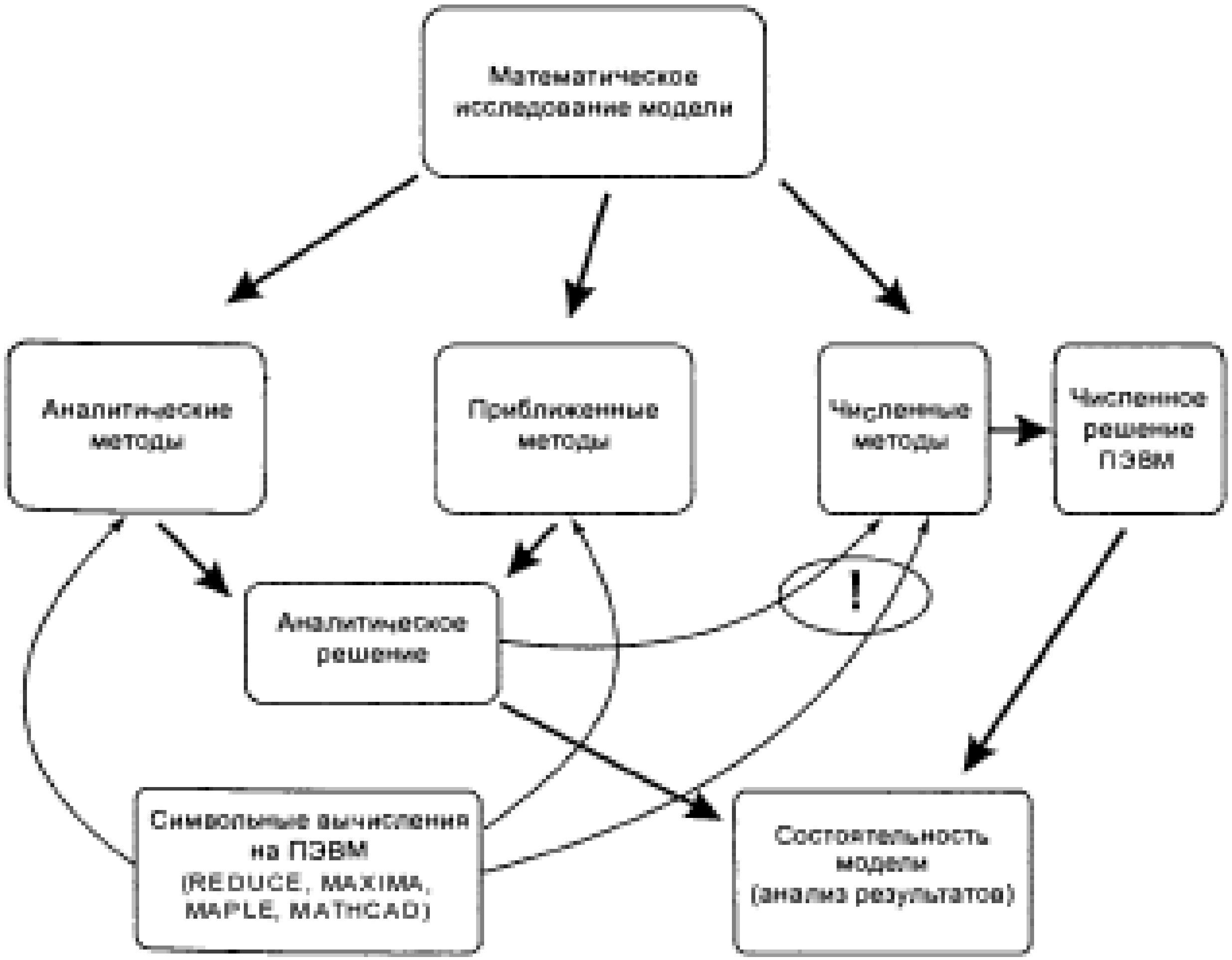
Вычислительная математика

Вычислительная математика — раздел **математики**, включающий круг вопросов, связанных с производством разнообразных **вычислений**. В более узком понимании **вычислительная математика** — теория численных методов решения типовых математических задач.

Задачи вычислительной математики

- решение линейных уравнений;
- нахождение собственных значений и векторов матрицы;
- решение нелинейных алгебраических уравнений;
- решение систем нелинейных алгебраических уравнений;
- решение дифференциальных уравнений;
- решение систем дифференциальных уравнений;
- решение интегральных уравнений;
- задачи аппроксимации, интерполяции, экстраполяции.

Взаимосвязи этапов математического моделирования



Общие сведения об источниках погрешностей

1. Математическое описание задач (математическая модель) большей частью является неточным;

2. Методы решения задач не являются точными. Во многих случаях получение точного решения требует выполнения неограниченного количества шагов. Обрыв бесконечного процесса приводит к получению приближенного решения;

3. Исходные данные для решения задач, как правило, получаются из эксперимента, а каждый эксперимент может дать результат с ограниченной точностью;

4. При вводе исходных данных в машину, при выполнении арифметических операций, при выводе информации производятся округления;

5. Погрешности приближенных чисел (погрешности исходных данных и погрешности округления) в процессе решения задачи будут последовательно переходить (чаще всего в увеличенном размере) в результаты вычислений и порождать новые погрешности.

Классификация

А) Неустранимые погрешности:

1) математического описания задачи;

2) исходных данных;

Б) погрешности метода;

В) вычислительные погрешности.

Точные и приближенные числа. Правила округления чисел

Определение 1. Приближенным числом а называется число, незначительно отличающееся от точного числа А и заменяющее его в вычислениях.

При работе с приближенными числами вычислитель должен уметь решать следующие задачи:

1. давать математические характеристики точности приближенных чисел;

2. зная степень точности исходных данных, оценивать степень

точности результата (прямая задача теории погрешностей);

3. выбирать исходные данные с той точностью, которая

обеспечит заданную точность результата (обратная задача теории погрешностей);

4. оптимальным образом строить вычислительный процесс, чтобы не производить расчетов, не влияющих на точные цифры результата.

Правила округления:

1. если отбрасываемые при округлении цифры составляют число, большее половины единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу;

2. если отбрасываемые при округлении цифры составляют число, меньшее половины единицы последнего оставляемого разряда, то оставляемые цифры остаются без изменения;

3. при округлении, когда отбрасываемые цифры составляют число, равное половине единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная (правило четной цифры).

Правило 1. При сложении и вычитании приближённых чисел результат округляется по минимальному числу верных цифр после запятой у исходных чисел.

<u>Пример.</u>

$120.6 + 31.37 + 22.987 + 22.987 - 103.22 = \quad 77.647 \quad = 77.6$

Правило 2. При умножении и делении приближённых чисел производится округление результата с числом значащих цифр, совпадающим с минимальным числом верных значащих цифр у исходных чисел.

<u>Пример.</u>

$35.2 \cdot 1.748 = \quad 61.5296 \quad = 61.5$

Пример 1

Округлить следующие числа:

A1 = 271,5001 до целых,

A2 = 271,15 до десятых,

A3 = 271,25 до десятых,

A4 = 0,15497 до сотых.

Математические характеристики точности приближенных чисел

Определение 2. Абсолютной погрешностью приближенного числа а назовем величину Δа , про которую известно, что

$$|A - a| \le \Delta a . \qquad (1.1)$$

Таким образом, точное число заключено в границах

$$a - \Delta a \le A \le a + \Delta a \qquad (1.2)$$

или сокращенно

$$A = a \pm \Delta a . \qquad (1.3)$$

Пример 2

Пример 2. Приближенные числа $a_1 = 2,87; a_2 = 300; a_3 = 3 \cdot 10^2$ получены округлением, точные значения чисел неизвестны. Что можно сказать об абсолютной погрешности данных приближенных чисел?

Решение. Пользуясь правилами округления чисел, можно сказать, что абсолютные погрешности приближенных чисел не превосходят половины единицы последнего разряда, т.е.

$$|A_1 - a_1| \le 0,005 = \Delta a_1 ,$$

$$|A_2 - a_2| \le 0,5 = \Delta a_2 ,$$

$$|A_3 - a_3| \le 50 = \Delta a_3 .$$

Кроме того, можно записать:

$$A_1 = 2,87 \pm 0,005,$$

$$A_2 = 300 \pm 0,5,$$

$$A_3 = (3 \pm 0,5) \cdot 10^2 .$$

Замечания

Замечание 1. Абсолютную погрешность принято записывать в виде числа, содержащего не более одной или двух цифр, отличных от нуля (двух значащих цифр).

Замечание 2. В силу определения погрешности абсолютную погрешность округляют до одной или двух значащих цифр только в большую сторону (не придерживаясь сформулированных выше правил округления чисел).

Относительная погрешность

Относительной погрешностью δa приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δa к абсолютной величине приближенного числа a:

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|};\ a \neq 0 \qquad (1.4)$$

Замечание 3. Относительная погрешность представляет собой безразмерную величину.

При вычислении относительную погрешность округляют в большую сторону и записывают в виде числа, содержащего одну-две значащие цифры.

Число верных знаков приближенного числа.

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots \qquad (1.5)$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 10^{m-i+1} \qquad (1.6)$$

28,0496=

7,54=

0,006783=

Значащие цифры

Определение 4. Значащими цифрами числа а называют все цифры в его записи (1.5) начиная с первой слева, отличной от нуля. Например, приводимые ниже числа имеют следующее количество значащих цифр:

5423,47

0,0000605

0,060500

Значащие цифры

- Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр. Различают значащие цифры верные в ***узком и широком*** смыслах.

Определение 5. Цифры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ приближенного числа a называют верными в узком смысле, если абсолютная погрешность Δa приближенного числа a не превосходит половины единицы $(m-n+1)$ – го разряда, которому принадлежит цифра α_n, т.е. если

$$\Delta a \le 0.5 \cdot 10^{m-n+1}. \qquad (1.7)$$

Пример 6. Оценить абсолютную погрешность приближенного числа а = 4,483, если известно, что оно имеет 3 верных знака в узком смысле.

Значащие цифры

Определение 6. Цифры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ приближенного числа a называют верными в широком смысле, если абсолютная погрешность Δa приближенного числа a не превосходит единицы $(m-n+1)$ – го разряда, которому принадлежит цифра α_n, т.е. если

$$\Delta a \leq 10^{m-n+1}. \qquad (1.8)$$

- Например, если число a = 4,483 имеет n = 3 верных знака в широком смысле, то его абсолютная погрешность не превосходит

Значащие цифры

Определение 7. Цифры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ приближенного числа a называются верными в смысле ω, если абсолютная погрешность числа a не превосходит величины $\omega \cdot 10^{m-n+1}$, т.е.

$$\Delta a \le \omega \cdot 10^{m-n+1}. \qquad (1.9)$$

- Определение числа верных значащих цифр позволяет решать и обратную задачу, т.е. определять, какие знаки в приближенном числе верные, а какие нет, если известна его абсолютная погрешность.

Зависимость от числа верных значащих цифр относительной погрешности

Пусть приближенное число a,

$$|a| = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots \qquad (1.10)$$

имеет n верных значащих цифр в смысле определения 7.

Разделив обе части неравенства (1.9) на выражение (1.10), получим

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{\omega \cdot 10^{m-n+1}}{|\alpha_1 \cdot 10^m + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1}|} \le \frac{\omega \cdot 10^{m-n+1}}{|\alpha_1 \cdot 10^m|} \le \frac{\omega}{\alpha_1} \cdot 10^{1-n},$$

т.е.

$$\delta a \le \frac{\omega}{\alpha_1} \cdot 10^{1-n}, \qquad (1.11)$$

где α_1 - первая значащая цифра числа, n – количество верных значащих цифр.

Общая формула теории погрешностей (погрешность вычисления значения функции)

Основная задача теории погрешностей заключается в следующем: известны погрешности некоторой системы величин, требуется определить погрешность данной функции от этих величин.

$$\Delta y \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) \right| \Delta x_i \, .$$

$$\delta y \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} ln\, f(x_1, \dots, x_n) \right| \Delta x_i$$

$$\Delta y \le |f'(x)| \Delta x,$$

$$\delta y \le \left| \frac{d}{dx} \ln f(x) \right| \Delta x.$$

Для основных элементарных функций

1. $y = x^{\alpha}$, $\Delta y = \left|\alpha x^{\alpha - 1}\right| \Delta x$, $\delta y = |\alpha| \delta x$;

2. $y = a^{x}$, $\Delta y = a^{x}\, ln\, a \cdot \Delta x$, $\delta y = ln\, a\, \Delta x$; $a > 1$,

$y = e^{x}$, $\Delta y = e^{x} \Delta x$, $\delta y = \Delta x$;

3. $y = lg_{a}\, x$, $\Delta y = \dfrac{1}{x|ln\, a|} \Delta x$, $\delta y = \dfrac{\delta x}{|ln\, a \cdot lg_{a}\, x|}$,

$y = ln\, x$, $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{x} = \delta x$, $\delta y = \dfrac{\delta x}{|ln\, x|}$;

4. $y = sin\, x$, $\Delta y = |cos\, x| \cdot \Delta x \le \Delta x$,

$y = cos\, x$, $\Delta y = |sin\, x| \cdot \Delta x \le \Delta x$,

$y = tg\, x$, $\Delta y = (1 + tg^{2} x) \cdot \Delta x \ge \Delta x$,

$y = ctg\, x$, $\Delta y = (1 + ctg^{2} x) \cdot \Delta x \ge \Delta x$.

Погрешность арифметических действий

1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i .$$

абсолютная погрешность алгебраической суммы не может быть меньше абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых, так как увеличение точности за счет остальных слагаемых невозможно. Поэтому, чтобы не производить лишних вычислений, не следует сохранять лишние знаки и в более точных слагаемых.

Пример 3

Найти сумму приближенных чисел

y = 5,8 + 287,649 + 0,008064

и оценить погрешность результата, считая все знаки слагаемых верными в узком смысле.

$$\begin{array}{r} 5{,}8 \\ 287{,}649 \\ 0{,}008064 \\ \hline 293{,}457064 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}8 \\ 287{,}6 \\ 0{,}0 \\ \hline 293{,}4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}8 \\ 287{,}65 \\ 0{,}01 \\ \hline 293{,}46 \approx 293{,}5 \end{array}$$

Погрешность полученной суммы будет равна сумме трех слагаемых:

1) сумма погрешностей исходных данных

$\Delta_1 = 0{,}05 + 0{,}0005 + 0{,}0000005 < 0{,}051$;

2) абсолютная величина суммы ошибок округления слагаемых

$\Delta_2 < |-0{,}001 - 0{,}002| = 0{,}003$;

3) погрешность округления результата

$\Delta_3 = 0{,}04$.

Следовательно,

$$\Delta y = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0{,}094,$$

$$y = 293{,}5 \pm 0{,}094,$$

т.е. y имеет 4 верных знака в широком смысле и 3 в узком.

Погрешность арифметических действий

2. Относительная погрешность суммы нескольких чисел одного и того же знака заключена между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых:

$$\min_{1 \le k \le n} \delta x_k \le \delta y \le \max_{1 \le k \le n} \delta x_k \,. \qquad (1.23)$$

Погрешность арифметических действий

3. Относительная погрешность разности двух положительных чисел больше относительных погрешностей этих чисел, особенно, если эти числа близки между собой. Это приводит к потере точности при вычитании близких чисел, что следует учитывать при выборе вычислительной схемы.

$$y = x_1 - x_2 \ , \qquad (1.28)$$

то

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 ; \quad \delta y = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|x_1 - x_2|} .$$

Пример 4

Найти разность двух чисел a=5,069, b=5,061, $\Delta a = \Delta b$ = 0,0005 Оценить погрешность результата.

$$y = a - b = 0{,}008; \quad \Delta y = \Delta a + \Delta b = 0{,}001; \quad \delta y = \frac{10^{-3}}{8 \cdot 10^{-3}} < 13\%$$

$$\delta a = \delta b = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{5} = 0{,}01\%$$

Погрешность арифметических действий

4. При умножении и делении приближенных чисел складываются их относительные погрешности.

Относительная погрешность произведения и частного не может быть меньше, чем относительная погрешность наименее точного из сомножителей, следовательно, число верных знаков произведения не может быть больше наименьшего числа верных знаков сомножителей. Поэтому при перемножении нескольких чисел, имеющих разное число верных значащих цифр, выполняют следующие правила:

1) выделяют число, имеющее наименьшее число верных значащих цифр;

2) округляют оставшиеся сомножители, оставляя в них на одну значащую цифру больше, чем в выделенном сомножителе;

3) сохраняют в произведении столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет выделенный сомножитель.

Спасибо за внимание