Формулы Ньютона - Котеса: методы прямоугольников, трапеций, парабол. Интегрирование с помощью формул Гаусса.

Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях методов численного интегрирования

2. Формирование знаний об основных способах вычисления определенных интегралов численными методами.

Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при решении задач с помощью численного интегрирования.

2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области основных понятий и способов применения методов численного интегрирования.

В ряде задач возникает необходимость вычисления определенного интеграла от некоторой функции:

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx \qquad (1)$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Геометрический смысл интеграла заключается в том, что если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x) \cdot dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс, прямой $x = a$ и прямой $x = b$ (рис.1). Таким образом, вычисление интеграла равносильно вычислению площади криволинейной трапеции.

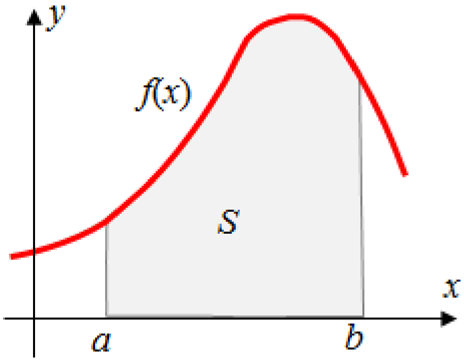


Рис.1. Геометрический смысл интеграла

Задача **численного интегрирования** состоит в замене исходной подынтегральной функции некоторой аппроксимирующей функцией (обычно полиномом).

Численное интегрирование применяется, когда:

- сама подынтегральная функция не задана аналитически, а например, представлена в виде таблицы значений;
- аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции.

Способы численного вычисления определенных интегралов основаны на замене интеграла конечной суммой:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot f(x_j) \qquad (2)$$

где c_j – числовые коэффициенты, выбор которых зависит от выбранного метода численного интегрирования, x_j – узлы интегрирования ($x_j \in [a, b], j = 1, \ldots, N$). Выражение (2) называют **квадратурной формулой**.

Разделим отрезок $[a,b]$ на *N* равных частей, то есть на *N* элементарных отрезков. Длина каждого элементарного отрезка:

$$h = \frac{b-a}{N} \qquad (3)$$

Тогда значение интеграла можно представить в виде:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cdot dx \qquad (4)$$

Из этого выражения видно, что для численного интегрирования на отрезке $[a,b]$, достаточно построить квадратурную формулу на каждом частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$.

Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$\Psi_N = \int_a^b f(x)\cdot dx - \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot f(x_j) \qquad (5)$$

и зависит от выбора коэффициентов c_j и от расположения узлов x_j.

Погрешность численного интегрирования определяется шагом разбиения. Уменьшая этот шаг, можно добиться большей точности. Однако увеличивать число точек не всегда возможно. Если функция задана в табличном виде, приходится ограничиваться заданным множеством точек. Повышение точности может быть в этом случае достигнуто за счет повышения степени используемых интерполяционных многочленов.

Методы Ньютона-Котеса

Метод прямоугольников

Одним из простейших методов численного интегрирования является **метод прямоугольников**. На частичном отрезке $[x_{j-1}, x_j]$ подынтегральную функцию заменяют полиномом Лагранжа нулевого порядка, построенным в одной точке. В качестве этой точки можно выбрать середину частичного отрезка $x_{j-0.5} = x_j - 0.5h$. Тогда значение интеграла на частичном отрезке:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cdot dx \approx f(x_{j-0.5})\cdot h \qquad (6)$$

Подставив это выражение в (4), получим составную формулу **средних прямоугольников**:

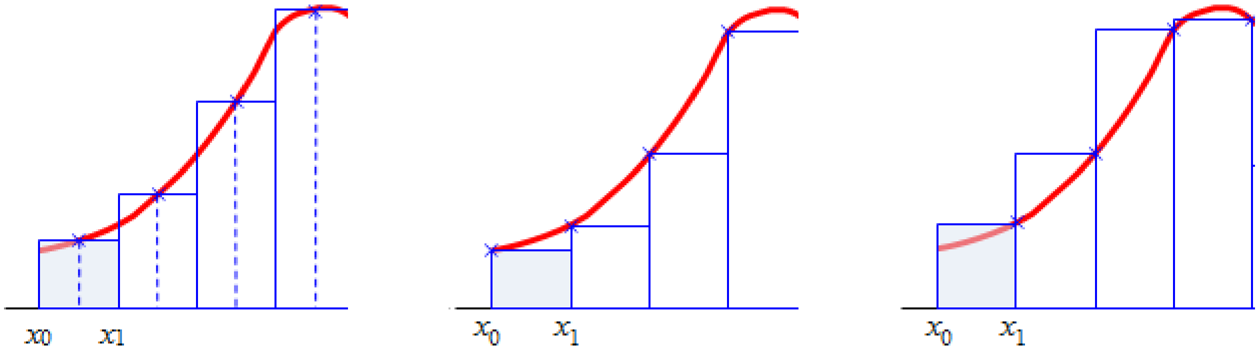
$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} f(x_{j-0.5})\cdot h \qquad (7)$$

Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рис.2(а). Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из *N* прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы *N* элементарных прямоугольников.

Формулу (2.7) можно представить в ином виде:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} h\cdot f(x_{j-1}) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{j=1}^{N} h\cdot f(x_j) \qquad (8)$$

Эти формулы называются формулой **левых и правых прямоугольников** соответственно. Графически метод левых и правых прямоугольников представлен на рис.2(б, в). Однако из-за нарушения симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, их погрешность значительно больше, чем в методе средних прямоугольников.



а) средние прямоугольники *б) левые прямоугольники* *в) правые прямоугольники*

Рис.2. Интегрирование методом прямоугольников

Метод трапеций

Если на частичном отрезке $[x_{j-1},x_j]$ подынтегральную функцию заменить полиномом Лагранжа первой степени:

$$f(x) = L_{1,j}(x) = \frac{1}{h}\left[\left(x - x_{j-1}\right)f(x_j) - \left(x - x_j\right)f(x_{j-1})\right] \tag{9}$$

то искомый интеграл на частичном отрезке запишется следующим образом:

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{1}{h}\left[f(x_j)\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x - x_{j-1}\right)dx - f(x_{j-1})\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x - x_j\right)dx\right] = \frac{f\left(x_{j-1}\right) + f\left(x_j\right)}{2}h \tag{10}$$

Тогда составная формула трапеций на всем отрезке интегрирования $[a,b]$ примет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N}\frac{f\left(x_j\right) + f\left(x_{j-1}\right)}{2}h = h\left[\frac{1}{2}\left(f_1 + f_N\right) + f_2 + \ldots + f_{N-1}\right] \tag{11}$$

Графически метод трапеций представлен на рис.3. Площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из N трапеций, при этом кривая заменяется вписанной в нее ломаной. На каждом из частичных отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные значения, при этом площадь трапеции на каждом отрезке определяется по формуле 10.

Погрешность метода трапеций выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удается далеко не всегда.

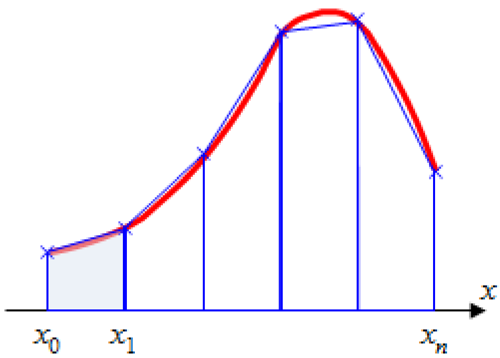


Рис3. Интегрирование методом методом трапеций

Метод Симпсона

В этом методе подынтегральная функция на частичном отрезке $[x_{j-1},x_j]$ аппроксимируется параболой, проходящей через три точки x_{j-1}, $x_{j-0.5}$, x_j, то есть интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени:

$$f(x)=L_{2,j}(x)=\frac{2}{h^2}\Big[(x-x_{j-0.5})(x-x_j)f(x_{j-1})-$$
$$-2\cdot(x-x_{j-1})(x-x_j)f(x_{j-0.5})+(x-x_{j-1})(x-x_{j-0.5})f(x_j)\Big] \qquad (12)$$

Проведя интегрирование, получим:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx\approx\frac{h}{6}\left(f_{j-1}+4f_{j-0.5}+f_j\right) \qquad (13)$$

Это и есть формула Симпсона или формула парабол. На отрезке $[a,b]$ формула Симпсона примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{6}\left[f_0+f_N+2(f_1+f_2+\ldots+f_{N-1})+4(f_{0.5}+f_{1.5}+f_{2.5}+\ldots+f_{N-0.5})\right]=$$
$$=\frac{h}{6}\left[f_0+f_N+2\cdot\sum_{j=1}^{N-1}f_j+4\cdot\sum_{j=0.5}^{N-0.5}f_j\right] \qquad (14)$$

Если разбить отрезок интегрирования $[a,b]$ на **четное** количество $2N$ равных частей с шагом $h=\frac{b-a}{2N}$, то можно построить параболу на каждом сдвоенном частичном отрезке $[x_{j-1},x_j]$ и переписать выражения (12-14) без дробных индексов. Тогда формула Симпсона примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left[f_0+f_{2N}+2(f_2+f_4+\ldots+f_{2N-2})+4(f_1+f_3+f_5+\ldots+f_{2N-1})\right]=$$
$$=\frac{h}{3}\left[f_0+f_{2N}+2\cdot\sum_{j=2,2}^{2N-2}f_j+4\cdot\sum_{j=1,2}^{2N-1}f_j\right] \qquad (15)$$

Графическое представление метода Симпсона показано на рис.4. На каждом из сдвоенных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой параболой.

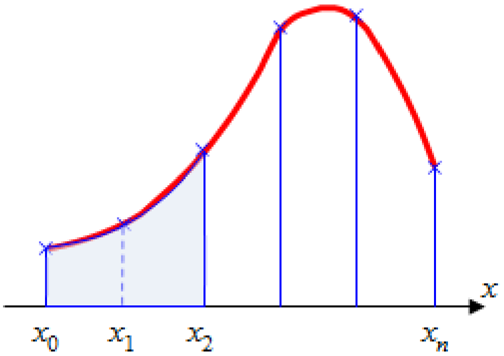


Рис.4. Метод Симпсона

Семейство методов Ньютона-Котеса

Выше были рассмотрены три схожих метода интегрирования функций – метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона. Их объединяет общая идея: интегрируемая функция интерполируется на отрезке интегрирования по равноотстоящим узлам многочленом Лагранжа, для которого аналитически вычисляется значение интеграла. Семейство методов, основанных на таком подходе, называется **методами Ньютона-Котеса**.

В выражении $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j)$ коэффициенты c_j правильнее называть **весовыми коэффициентами**. Величину $\Psi_N = \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^{N} c_j f(x_j)$, определяющую погрешность численного интегрирования, называют **остатком**.

Для семейства методов Ньютона-Котеса можно записать общее выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{n \cdot h}{C_n} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} c_{in} f(x_i) \tag{16}$$

где n – порядок метода Ньютона-Котеса, N – количество частичных отрезков, $h = \frac{x_j - x_{j-1}}{n}$, $C_n = \sum_{i=0}^{n} c_{in}$, $x_i = x_j + i \cdot h$.

Из выражения (16) легко можно получить формулу прямоугольников для $n = 0$, формулу трапеций для $n = 1$, и формулу Симпсона для $n = 2$. Коэффициенты c_{in} могут быть заданы в табличной форме (таблица.1).

n	C_n	c_{0n}	c_{1n}	c_{2n}	c_{3n}	c_{4n}	c_{5n}
0	**1**	1					
1	**2**	1	1				
2	**6**	1	4	1			
3	**8**	1	3	3	1		
4	**90**	7	32	12	32	7	
5	**288**	19	75	50	50	75	19

Таблица 1. Весовые коэффициенты метода Ньютона-Котеса

Вывод. Сформированы теоретические основы необходимые при решении задач с помощью численного интегрирования.