Транспортные задачи линейного программирования.

1. Составление плана ТЗ. Метод северо-западного угла.
2. Метод потенциалов.

Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях транспортных задач.
2. Формирование знаний об основных способах решения транспортных задач

Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при составлении и решении транспортных задач математического моделирования.
2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области основных понятий и способов решений транспортных задач математического моделирования.

Под названием ―*транспортная задача* объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены симплексным методом. Однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить оптимальное решение.

Различают два типа транспортных задач:

- ✓ по критерию стоимости (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию)
- ✓ по критерию времени (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).

Методы нахождения опорного плана

- ✓ Метод северо-западного угла;
- ✓ Метод минимального (максимального) элемента
- ✓ Метод аппроксимации Фогеля.

Метод минимального элемента

В отличие от метода северно-западного угла, в методе минимального элемента выбор пунктов отправления и пунктов назначения производится ориентируясь на тарифы перевозок, т.е. в каждом шаге нужно выбрать клетку с минимальным тарифом перевозок. Если таких клеток несколько, то выбираем один из них.

Надо отметить, что при данном методе определения заполняемой клетки, стоимость перевозок как правило бывает меньше, чем при методе северно западного угла. Поэтому целесообразно начальный опорный план найти методом минимального элемента.

Решение транспортной задачи линейного программирования

Необходимо найти решение транспортной задачи по критерию стоимости методом потенциалов.

В силу специфических особенностей структуры математической модели транспортной ЗЛП разработаны для ее решения менее трудоемкие методы, чем симплекс-метод. Наибольшее применение нашел метод потенциалов, базирующийся на утверждениях теорем двойственности. Опорное решение ТЗЛП можно находить любым из предлагаемых методов. Для решения воспользуемся сервисом Транспортная задача онлайн.

26	30	17	10	16	4
30	37	26	9	23	6
13	4	32	3	1	10
3	1	5	14	24	10
7	7	7	7	2	

Решение:

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

$\sum a = 4 + 6 + 10 + 10 = 30$

$\sum b = 7 + 7 + 7 + 7 + 2 = 30$

Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17	10	16	4
2	30	37	26	9	23	6
3	13	4	32	3	1	10
4	3	1	5	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи. Искомый элемент равен 1.

Для этого элемента запасы равны 10, потребности 2. Поскольку минимальным является 2, то вычитаем его.

26	30	17	10	x	4
30	37	26	9	x	6
13	4	32	3	**1**	**8**
3	1	5	14	x	10
7	7	7	7	**0**	0

Искомый элемент равен 1. Для этого элемента запасы равны 10, потребности 7. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.

26	x	17	10	x	4
30	x	26	9	x	6
13	x	32	3	1	8
3	**1**	5	14	x	**3**
7	**0**	7	7	0	0

Искомый элемент равен 3. Для этого элемента запасы равны 8, потребности 7. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.

26	x	17	x	x	4
30	x	26	x	x	6
13	x	32	**3**	1	**1**
3	1	5	x	x	3
7	0	7	**0**	0	0

Искомый элемент равен 3. Для этого элемента запасы равны 3, потребности 7. Поскольку минимальным является 3, то вычитаем его.

26	x	17	x	x	4
30	x	26	x	x	6
13	x	32	3	1	1
3	1	x	x	x	**0**
4	0	7	0	0	0

Искомый элемент равен 13. Для этого элемента запасы равны 1, потребности 4. Поскольку минимальным является 1, то вычитаем его.

26	x	17	x	x	4
30	x	26	x	x	6
13	x	x	3	1	**0**
3	1	x	x	x	0
3	0	7	0	0	0

Искомый элемент равен 17. Для этого элемента запасы равны 4, потребности 7. Поскольку минимальным является 4, то вычитаем его.

x	x	**17**	x	x	**0**
30	x	26	x	x	6
13	x	x	3	1	0
3	1	x	x	x	0
3	0	**3**	0	0	0

Искомый элемент равен 26. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 3. Поскольку минимальным является 3, то вычитаем его.

x	x	17	x	x	0
30	x	**26**	x	x	**3**
13	x	x	3	1	0
3	1	x	x	x	0
3	0	**0**	0	0	0

Искомый элемент равен 30. Для этого элемента запасы равны 3, потребности 3. Поскольку минимальным является 3, то вычитаем его.

x	x	17	x	x	0

30	x	26	x	x	**0**
13	x	x	3	1	0
3	1	x	x	x	0
0	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30[3]	37	26[3]	9	23	6
3	13[1]	4	32	3[7]	1[2]	10
4	3[3]	1[7]	5	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 8, а должно быть m + n - 1 = 8. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы u_i и v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_i = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17

u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9

u2 + v1 = 30; 9 + v1 = 30; v1 = 21

u3 + v1 = 13; 21 + u3 = 13; u3 = -8

u3 + v4 = 3; -8 + v4 = 3; v4 = 11

u3 + v5 = 1; -8 + v5 = 1; v5 = 9

u4 + v1 = 3; 21 + u4 = 3; u4 = -18

u4 + v2 = 1; -18 + v2 = 1; v2 = 19

	v_1=21	v_2=19	v_3=17	v_4=11	v_5=9
u_1=0	26	30	17[4]	10	16
u_2=9	30[3]	37	26[3]	9	23
u_3=-8	13[1]	4	32	3[7]	1[2]
u_4=-18	3[3]	1[7]	5	14	24

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $u_i+v_j > c_{ij}$

(1;4): 0 + 11 > 10; Δ_{14} = 0 + 11 - 10 = 1

(2;4): 9 + 11 > 9; Δ_{24} = 9 + 11 - 9 = 11

(3;2): -8 + 19 > 4; Δ_{32} = -8 + 19 - 4 = 7 max(1,11,7) = 11

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;4): 9.

Для этого в перспективную клетку (2;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Цикл приведен в таблице.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30[3][-]	37	26[3]	9[+]	23	6
3	13[1][+]	4	32	3[7][-]	1[2]	10
4	3[3]	1[7]	5	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. y = min (2, 1) = 3. Прибавляем 3 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 3 из X_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30	37	26[3]	9[3]	23	6
3	13[4]	4	32	3[4]	1[2]	10
4	3[3]	1[7]	5	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

4. Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы u_i и v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17

u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9

u2 + v4 = 9; 9 + v4 = 9; v4 = 0

u3 + v4 = 3; 0 + u3 = 3; u3 = 3

u3 + v1 = 13; 3 + v1 = 13; v1 = 10

u4 + v1 = 3; 10 + u4 = 3; u4 = -7

u4 + v2 = 1; -7 + v2 = 1; v2 = 8

u3 + v5 = 1; 3 + v5 = 1; v5 = -2

	v_1=10	v_2=8	v_3=17	v_4=0	v_5=-2
u_1=0	26	30	17[4]	10	16
u_2=9	30	37	26[3]	9[3]	23
u_3=3	13[4]	4	32	3[4]	1[2]
u_4=-7	3[3]	1[7]	5	14	24

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $u_i+v_j > c_{ij}$

(3;2): $3 + 8 > 4$; $\Delta_{32} = 3 + 8 - 4 = 7$

(4;3): $-7 + 17 > 5$; $\Delta_{43} = -7 + 17 - 5 = 5$

max(7,5) = 7

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;2): 4.

Для этого в перспективную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Цикл приведен в таблице.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30	37	26[3]	9[3]	23	6
3	13[4][-]	4[+]	32	3[4]	1[2]	10
4	3[3][+]	1[7][-]	5	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. y = min (3, 1) = 4. Прибавляем 4 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 4 из X_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30	37	26[3]	9[3]	23	6
3	13	4[4]	32	3[4]	1[2]	10
4	3[7]	1[3]	5	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

4. Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы u_i и v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17

u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9

u2 + v4 = 9; 9 + v4 = 9; v4 = 0

u3 + v4 = 3; 0 + u3 = 3; u3 = 3

u3 + v2 = 4; 3 + v2 = 4; v2 = 1

u4 + v2 = 1; 1 + u4 = 1; u4 = 0

u4 + v1 = 3; 0 + v1 = 3; v1 = 3

u3 + v5 = 1; 3 + v5 = 1; v5 = -2

	$v_1=3$	$v_2=1$	$v_3=17$	$v_4=0$	$v_5=-2$
$u_1=0$	26	30	17[4]	10	16
$u_2=9$	30	37	26[3]	9[3]	23
$u_3=3$	13	4[4]	32	3[4]	1[2]

$u_4=0$	3[7]	1[3]	5	14	24

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток. (4;3): 0 + 17 > 5; Δ_{43} = 0 + 17 - 5 = 12
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;3): 5
Для этого в перспективную клетку (4;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Цикл приведен в таблице.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30	37	26[3][-]	9[3][+]	23	6
3	13	4[4][+]	32	3[4][-]	1[2]	10
4	3[7]	1[3][-]	5[+]	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 2) = 3. Прибавляем 3 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 3 из X_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30	37	26[0]	9[6]	23	6
3	13	4[7]	32	3[1]	1[2]	10
4	3[7]	1	5[3]	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

4. Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы u_i и v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.
u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17
u2 + v3 = 26; 17 + u2 = 26; u2 = 9
u2 + v4 = 9; 9 + v4 = 9; v4 = 0
u3 + v4 = 3; 0 + u3 = 3; u3 = 3
u3 + v2 = 4; 3 + v2 = 4; v2 = 1
u3 + v5 = 1; 3 + v5 = 1; v5 = -2
u4 + v3 = 5; 17 + u4 = 5; u4 = -12
u4 + v1 = 3; -12 + v1 = 3; v1 = 15

	$v_1=15$	$v_2=1$	$v_3=17$	$v_4=0$	$v_5=-2$
$u_1=0$	26	30	17[4]	10	16
$u_2=9$	30	37	26[0]	9[6]	23
$u_3=3$	13	4[7]	32	3[1]	1[2]

u_4=-12	3[7]	1	5[3]	14	24

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток. (3;1): 3 + 15 > 13; Δ_{31} = 3 + 15 - 13 = 5. Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;1): 13 Для этого в перспективную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-». Цикл приведен в таблице.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30	37	26[0][-]	9[6][+]	23	6
3	13[+]	4[7]	32	3[1][-]	1[2]	10
4	3[7][-]	1	5[3][+]	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 3) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из X_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	1	2	3	4	5	Запасы
1	26	30	17[4]	10	16	4
2	30	37	26	9[6]	23	6
3	13[0]	4[7]	32	3[1]	1[2]	10
4	3[7]	1	5[3]	14	24	10
Потребности	7	7	7	7	2	

4. Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы u_i и v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

u1 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17
u4 + v3 = 5; 17 + u4 = 5; u4 = -12
u4 + v1 = 3; -12 + v1 = 3; v1 = 15
u3 + v1 = 13; 15 + u3 = 13; u3 = -2
u3 + v2 = 4; -2 + v2 = 4; v2 = 6
u3 + v4 = 3; -2 + v4 = 3; v4 = 5
u2 + v4 = 9; 5 + u2 = 9; u2 = 4
u3 + v5 = 1; -2 + v5 = 1; v5 = 3

	v_1=15	v_2=6	v_3=17	v_4=5	v_5=3
u_1=0	26	30	17[4]	10	16
u_2=4	30	37	26	9[6]	23
u_3=-2	13[0]	4[7]	32	3[1]	1[2]
u_4=-12	3[7]	1	5[3]	14	24

Опорный план является оптимальным. Минимальные затраты составят:
F(x) = 17*4 + 9*6 + 4*7 + 3*1 + 1*2 + 3*7 + 5*3 = 191

Выводы:

По результатам лекции у студентов сформированы теоретические знания об основных способах решения детерминированных задач математического моделирования.