УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Основы теории случайных процессов

Ковалева Елена Вячеславовна

Основные понятия марковских процессов

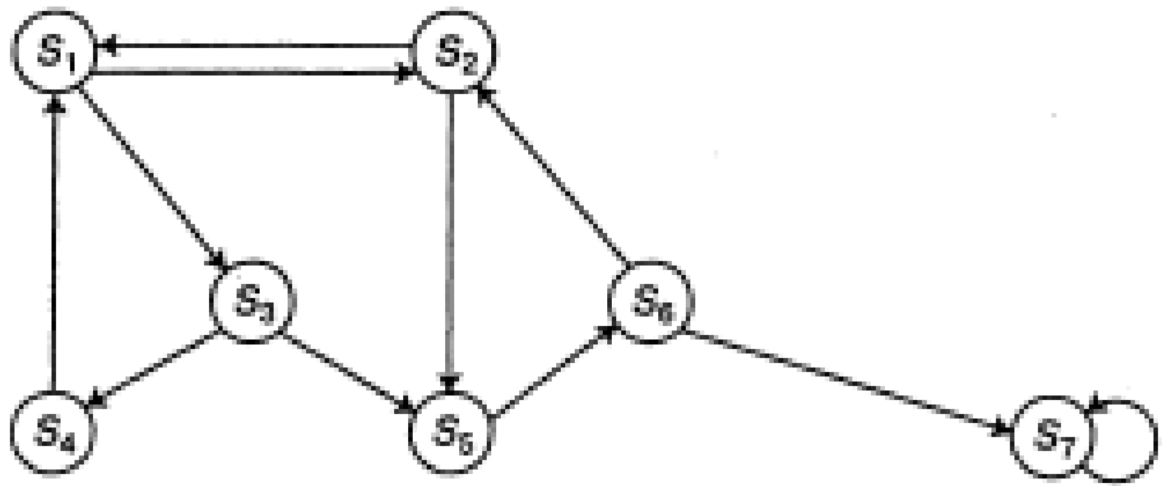
- Функция X(t) называется *случайной*, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной.
- Случайная функция X(t), аргументом которой является время, называется *случайным процессом*.

Определение. Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется ***марковским*** (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$ зависит, только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

Классификация марковских процессов.

- с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (марковские последовательности);
- с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);
- с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Граф состояний



Марковские цепи

- Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют *марковской цепью.*
- Для такого процесса моменты t_1, t_2, ..., когда система S может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве *аргумента*, от которого зависит процесс, выступает не время *номер шага* 1,2,...,k. Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний S(0), S(1), …, S(k).
- Событие {S(k) = Si}, состоящее в том, что сразу после k-то шага система находится в состоянии i, является случайным событием.
- S(0), S(1), …, S(k) - последовательность случайных событий (марковская цепью), если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния Si в любое Sj не зависит от того, когда и как система пришла в состояние Si.

- *Вероятностями состояний* цепи Маркова называются вероятности Pj(k) того, что после k-го шага (и до (к + 1)-го) система S будет находиться в состоянии Si (i =1,2, ..., n).

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(k) = 1$$

- *Начальным распределением вероятностей* марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса

$$P_1(0),\ P_2(0),\ \ldots,\ P_i(0),\ldots,\ P_n(0).$$

Вероятностью перехода (переходной вероятностью) на k-м шаге из состояния Si в состояние Sj называется условная вероятность того, что система S после k-го шага окажется в состоянии Sj при условии, что непосредственно перед этим (после k — 1 шага) она находилась в состоянии Si.

Матрица переходных вероятностей

$$\left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

- Если переходные вероятности не зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая цепь Маркова называется однородной.

Свойства матрица переходных вероятностей

1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а ее элементы представляют собой вероятности всех возможных переходов за один шаг из выбранного (из i-го) состояния, в том числе и переход в самое себя;
2. Элементы столбцов показывают вероятности всех возмож-ных переходов системы за один шаг в заданное (j-е) состояние;
3. Сумма вероятностей каждой строки равна единице, так как переходы образуют полную группу несовместных событий.
4. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности Pii того, что система не выйдет из состояния Si, а останется в нем.

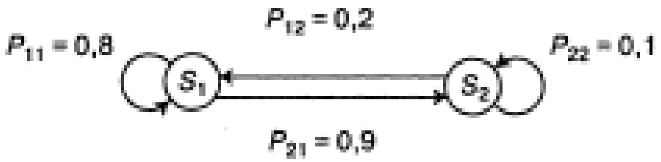
Вероятности состояний системы

- Если для однородной марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей и матрица переходных вероятностей, то вероятности состояний системы определяются по рекуррентной формуле:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) \cdot P_{ji}, \quad (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$$

Пример 1.

- Рассмотрим процесс функционирования системы автомобиля. Пусть автомобиль (система) в течение одной смены (суток) может находиться в одном из двух состояний: исправном (S_1) и неисправном (S_2). Граф состояний системы



- В результате проведения массовых наблюдений за работой автомобиля составлена следующая матрица вероятностей перехода:

$$\left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$$

- Вектор начальных вероятностей состояний автомобиля задан

$$P(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Требуется определить вероятности состояний автомобиля через трое суток.

- Используя матрицу переходных вероятностей, определим вероятности состояний Pi(k) после первого шага (после первых суток): $P_1(1) = P_1(0)P_{11} + P_2(0)P_{21} = 0 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}9 = 0{,}9$

$$P_2(1) = P_1(0)P_{12} + P_2(0)P_{21} = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$$

- Вероятности состояний после второго шага (после вторых суток) таковы:

$$P_1(2) = P_1(1)P_{11} + P_2(1)P_{21} = 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$$

$$P_2(2) = P_1(1)P_{12} + P_2(1)P_{21} = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}19$$

- Вероятности состояний после третьего шага (после третьих суток) равны

$$P_1(3) = P_1(2)P_{11} + P_2(2)P_{21} = 0{,}81 \cdot 0{,}8 + 0{,}19 \cdot 0{,}9 = 0{,}819$$

$$P_2(3) = P_1(2)P_{12} + P_2(2)P_{21} = 0{,}81 \cdot 0{,}2 + 0{,}19 \cdot 0{,}1 = 0{,}181$$

Пример 2.

В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система S, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний:

- S_1 - ЭВМ полностью исправна;
- S_2 - ЭВМ имеет неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи;
- S_3 — ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач;
- S_4 — ЭВМ полностью вышла из строя.

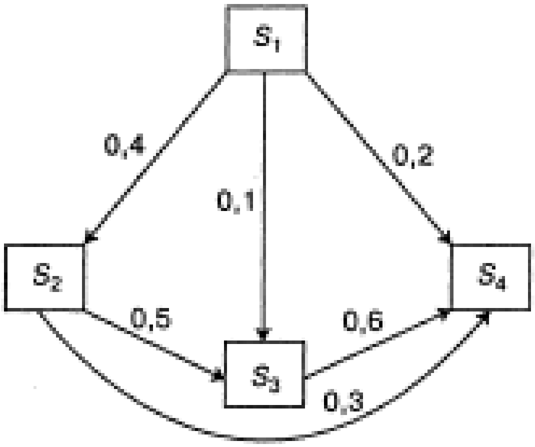
В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна (состояние S_1).

$$\left\|P_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

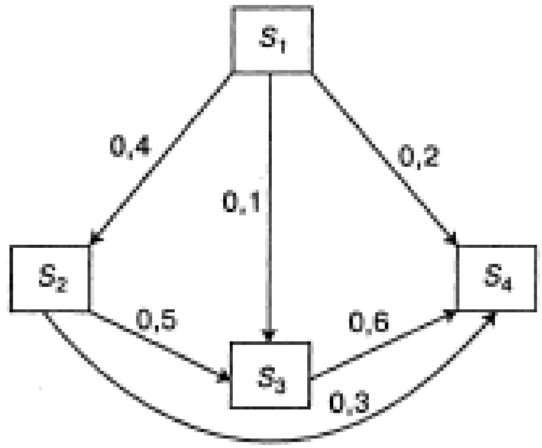
Определите вероятности состояний ЭВМ после трех проверок.

Матрица вероятностей перехода

$$\left\|P_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{pmatrix}$$



Решение



- Начальные вероятности состояний $P_1(0) = 1$; $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$.

$$P_1(1) = P_1(0)P_{11} = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$$
$$P_2(1) = P_1(0)P_{12} = 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$$
$$P_3(1) = P_1(0)P_{13} = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$$
$$P_4(1) = P_1(0)P_{14} = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$$

$$P_1(2) = P_1(1)P_{11} = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$$
$$P_2(2) = P_1(1)P_{12} + P_2(1)P_{22} = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}20$$
$$P_3(2) = P_1(1)P_{13} + P_1(1)P_{23} + P_1(1)P_{33} = 0{,}27$$
$$P_4(2) = P_1(1)P_{14} + P_1(1)P_{24} + P_1(1)P_{34} + P_1(1)P_{44} = 0{,}44$$

$$P_1(3) = P_1(2)P_{11} = 0,09 \cdot 0,3 = 0,027$$

$$P_2(3) = P_1(2)P_{12} + P_2(2)P_{22} = 0,09 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,076$$

$$P_3(3) = P_1(2)P_{13} + P_1(2)P_{23} + P_1(2)P_{33} = 0,217$$

$$P_4(3) = P_1(2)P_{14} + P_1(2)P_{24} + P_1(2)P_{34} + P_1(2)P_{44} = 0,680$$

- Итак, вероятности состояний ЭВМ после трех проверок следующие: $P_1(3) = 0,027$; $P_2(3) = 0,076$; $P_3(3) = 0,217$; $P_4(3) = 0,680$.

Непрерывные цепи Маркова

- Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется непрерывной цепью Маркова при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени.
- Пусть система характеризуется n состояниями $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, а переход из состояния в состояние может осуществляться в любой момент времени. Обозначим через $P_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t система S будет находиться в состоянии S_i ($i = 0,1, \ldots, n$). Требуется определить для любого t вероятности состояний $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)$.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1$$

- Для процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей P_{ij} рассматриваются плотности вероятностей перехода λ_{ij} представляющие собой предел отношения вероятности перехода системы за время Δt из состояния S_i в состояние S_j к длине промежутка Δt:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}$$

- Если λ_{ij} = const, то процесс называется однородным, если плотность вероятности зависит от времени λ_{ij} , то – неоднородным.
- ***Потоком событий*** называется последовательность однородных событий следующих одно за другим через какие-то, вообще говоря, случайные интервалы времени. Плотность вероятности перехода интерпретируется как интенсивность λ_{ij} соответствующих потоков событий. Если все эти потоки пуассоновские, то процесс, протекающий в системе S, будет марковским.

- Вероятности состояний $P_i(t)$ находят путем решения системы дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова)

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_j(t) - P_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$$

$\lambda_{ij} P_i(t)$ называется потоком вероятности перехода из состояния S_i в S_j причем интенсивность потоков λ_{ij} может зависеть от времени или быть постоянной.

Уравнения составляют по размеченному графу состояний системы, пользуясь следующим мнемоническим правило:

производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное состояние, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений, нужно задать начальное распределение вероятностей $P_0(0)$, $P_1(0)$,...,

$P_2(0)$, ..., $P_n(0)$. Для решения применяют численные методы.

Финальные вероятности состояний

- Если процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, то имеет смысл говорить о предельном поведении вероятностей $P_i(t)$ при $t \to \infty$.

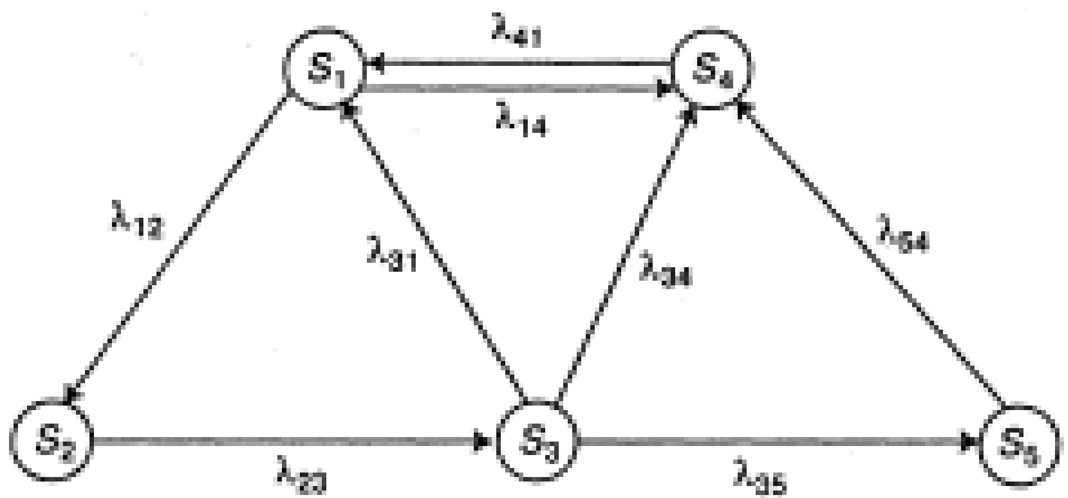
$$P_i = \lim_{t \to \infty} P_i(t)$$

не зависящие от того, в каком состоянии система S находилась в начальный момент. Говорят, что в системе S устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний Р, уже не меняются.

- Система, для которой существуют финальные вероятности, называется *эргодической*, а соответствующий случайный процесс –*эргодическим.*

Пример 3.

Имеется размеченный граф состояний системы S. Необходимо составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова и записать начальные условия для решения этой системы, если известно, что в начальный момент система находилась в состоянии S_1.



Решение

Система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_1}{dt} = \lambda_{31}P_3 + \lambda_{41}P_4 - \lambda_{12}P_1 - \lambda_{14}P_1 \\
\dfrac{dP_2}{dt} = \lambda_{12}P_1 - \lambda_{23}P_2 \\
\dfrac{dP_3}{dt} = \lambda_{23}P_2 - (\lambda_{31}P_3 + \lambda_{34}P_3 + \lambda_{35}P_3) \\
\dfrac{dP_4}{dt} = \lambda_{14}P_1 + \lambda_{34}P_3 + \lambda_{54}P_5 - \lambda_{41}P_4 \\
\dfrac{dP_5}{dt} = \lambda_{35}P_3 + \lambda_{54}P_5
\end{cases}
$$

Начальные условия при $t = 0$, $P_1=1$, $P_2=P_3=P_4=P_5=0$/

Финальные вероятности не зависят от времени. Поэтому в системе дифференциальных уравнений Колмогорова все левые части уравнений (производные) принимают равными нулю.

$$\begin{cases} 0 = \lambda_{31}P_3 + \lambda_{41}P_4 - \lambda_{12}P_1 - \lambda_{14}P_1 \\ 0 = \lambda_{12}P_1 - \lambda_{23}P_2 \\ 0 = \lambda_{23}P_2 - (\lambda_{31}P_3 + \lambda_{34}P_3 + \lambda_{35}P_3) \\ 0 = \lambda_{14}P_1 + \lambda_{34}P_3 + \lambda_{54}P_5 - \lambda_{41}P_4 \\ 0 = \lambda_{35}P_3 + \lambda_{54}P_5 \end{cases}$$

- Решая ее с учетом условия $P_1+P_2+P_3+P_4+P_5 = 1$ получим все предельные вероятности. Эти вероятности представляют собой не что иное, как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Задание для самостоятельного решения

1. Техническое устройство имеет два возможных состояния:
S_1 - исправно, работает;
S_2 - неисправно, ремонтируется.
Матрица переходных вероятностей имеет вид:
Постройте граф состояний. Найдите вероятности состояний после третьего шага и в установившемся режиме, если в начальном состоянии техническое устройство исправно.

$$\left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Задание для самостоятельного решения

2. Техническое устройство состоит из двух узлов и может находиться в одном из следующих состояний:

- оба узла исправны, работают;
- неисправен только первый узел;
- неисправен только второй узел;
- неисправны оба узла.

Вероятность выхода из строя (отказов) после месячной эксплуатации для первого узла – $P_1 = 0{,}4$; для второго узла – $P_2 = 0{,}3$, а вероятность совместного выхода их из строя – $P_{1,2} = 0{,}1$. В исходном состоянии оба узла исправны, работают.

Запишите матрицу переходных вероятностей и найдите вероятности состояний после двухмесячной эксплуатации.

СМО

Перечень рекомендуемой литературы:

1. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2020. - 140 с. - ISBN 978-5-16-105235-8. - Текст : электронный. - URL: https://new.znanium.com/catalog/product/1057221
2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2006. - 432 с: ил.
   ISBN 5-279-02940-8

Все вопросы отправляйте на электронную почту: e.kovaleva@mgutm.ru

Спасибо за внимание!