УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ТЕОРИЯ ИГР

Критерии выбора оптимальной стратегии.

- ✓ Основные понятия и определения.
- ✓ Седловая точка.
- ✓ Нижняя и верхняя цена игры.
- ✓ Игра с природой.
- ✓ Принцип максимина,
- ✓ Критерий Гурвица,
- ✓ Критерий Севиджа.

Ковалева Елена Вячеславовна

Основные понятия и определения.

- **Теория игр** это раздел математической экономики, изучающий решение конфликтов между игроками и оптимальность их стратегий.
- **Теория игр** это раздел общественных наук, который изучает принятие стратегических решений. Теория игр охватывает самые разные игры от шахмат до воспитания детей, от тенниса до поглощения компаний, от рекламы до контроля над вооружениями.
- **Теория игр** это математический метод, который изучает стратегию конфликтов.
- **Теория игр** это математическая дисциплина, разрабатывающая теоретические основы построения математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях, носящих характер конкурентной борьбы, в том числе и в условиях неопределенности.

Краткая история развития.

- Основы теории игр зародились еще в 18 веке, с началом эпохи просвещения и развитием экономической теории.
- Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в классической книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение».
- В начале 50-х <u>Джон Нэш</u> разрабатывает методы анализа, в которых все участники или выигрывают, или терпят поражение. Эти ситуации получили названия <u>«равновесие по Нэшу»</u>.
- Большим вкладом в применение теории игр стала работа <u>Томаса Шеллинга</u>, нобелевского лауреата по экономике 2005 г. «Стратегия конфликта».

Основные понятия и определения.

- **Конфликтом** является любая ситуация, в которой затронуты интересу двух и более участников, традиционно называемых игроками.
- **Стратегией** игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации.
- Стратегия может быть *чистой* если игрок сознательно выбирает в качестве хода какое-либо из предусмотренных правилами действий.
- Стратегия может быть смешанной если игрок комбинирует свои предусмотренные правилами действия.

Основные понятия и определения.

- Содержание теории игр: установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности, доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений, их реализация.
- Это означает, что с помощью теории игр можно:
- ✓ смоделировать процесс и возможные результаты будущей игры еще до ее фактического начала;
- ✓ по результатам моделирования будущей игры принять решение о целесообразности участия и оптимальном поведении в реальном конфликте.

Неопределенность в игровых ситуациях

- Неопределенность является следствием сознательной деятельности другого лица (лиц), отстаивающего свои интересы.
- Неопределенность вследствие появления случайности в игровой ситуации: сознательные действия игроков (субъектов игровой ситуации), осуществляющих выбор своих стратегий на основе рандомизации множества допустимых альтернатив (частотного или вероятностного распределения исходных или чистых стратегий).
- Случайность в игровой ситуации как следствие действия так называемой «природы», характеризуемой обстоятельствами, не зависящими от субъектов игровой ситуации.

Применение теории игр

- в экономической науке классические примеры применения игровых подходов к исследованию проблем производства и ценообразования в олигополии.
- ✓ для выбора эффективных стратегий в бизнесе и оптимального поведения фирмы,
- ✓ для рационального управления финансами, в теории инвестирования.
- ✓ в оценке эффективности проектов,
- ✓ в страховании,
- ✓ в управлении городским транспортом,
- ✓ в области рынка жилья,
- √ в теории инноваций,
- ✓ в анализе и управлении эколого-экономическими системами,

Применение теории игр

- в военном деле, раздел дифференциальных игр, в которых рассматривается управление динамическими объектами (самолетами, ракетами, кораблями и др.) в условиях неопределенности и конфликта: задачи слежения, сближения, наведения, преследования, уклонения; например, при определении оптимальных маневров подводной лодки, преследуемой обнаружившим ее надводным кораблем противника.
- в области **политологии** (модель гонки вооружений на основе классической игры двух лиц); в межгосударственной политике (конфликтующие государства).

Классификация игр

- по **количеству игроков** (игры с двумя участниками *парные* игры, *игры п игроков*, где n > 2)
- по количеству стратегий (конечное или бесконечное число)
- по степени информированности игроков о стратегиях, сделанных ходах и предпочтениях противника (игры с полной/неполной информацией)
- по **свойствам функций выигрыша** (в зависимости от вида функции матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.)
- в зависимости от **характера выигрышей** игры с нулевой суммой (антагонистические игры), игры с ненулевой суммой, в которых целевые критерии для игроков различны).
- по возможности предварительных переговоров и взаимодействий между игроками в ходе игры (коалиционные, кооперативные, бескоалиционные игры)

- Бескоалиционные игры это класс игр, в которых каждый игрок принимает решение независимо от других игроков (изолированно), не участвуя ни в каких переговорах и соглашениях с другими игроками. К бескоалиционным играм относятся:
- ✓ статистические игры (игры с «природой»),
- ✓ антагонистические игры (игры с противоположными интересами сторон),
- ✓ игры с непротивоположными интересами (в том числе биматричные игры) и др.
- В коалиционных (кооперативных) играх, напротив, игроки могут принимать решения по согласованию друг с другом (им разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях), они вправе вступать в коалиции. Образовав коалицию, игроки принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. При этом они должны решить вопрос о дележе общего выигрыша между членами коалиции.

Проблемы практического применения

- Когда у игроков сложились разные представления об игре, в которой они участвуют, или когда они недостаточно информированы о возможностях друг друга.
- При множестве ситуаций равновесия.
- Если ситуация принятия стратегических решений очень сложна, то игроки часто не могут выбрать лучшие для себя варианты.
- При расширении игры до десяти и более этапов игроки уже не в состоянии пользоваться соответствующими алгоритмами и продолжать игру с равновесными стратегиями.

Примеры классических игр двух лиц

• «Дилемма заключенного». В совершении преступления подозреваются двое: А и Б. Есть основания полагать, что они действовали по сговору, и полиция, изолировав их друг от друга, предлагает им одну и ту же сделку: если один свидетельствует против другого, а тот хранит молчание, то первый освобождается за помощь следствию, а второй получает максимальный срок лишения свободы (10 лет). Однако иных доказательств их вины у следствия нет. Если оба молчат, их деяние квалифицируется как неоказание помощи следствию, и они приговариваются к 6 месяцам. Если оба свидетельствуют друг против друга, они получают минимальный срок (по 3 года). Каждый подозреваемый выбирает, молчать ему или свидетельствовать против другого. Однако ни один из них не знает точно, что сделает другой.

Альтернативы	Б хранит молчание	Б дает показания
А хранит молчание	Оба получают по полгода тюрьмы	А получает 10 лет, Б освобождается
А дает показания	А освобождается, Б получает 10 лет	Оба получают по 3 года тюрьмы

Стратегии игроков		Игрок Б		
		Хранить молчание	Давать показания	
0 K A	Хранить молчание	-0,5; -0,5	-10;0	
Итрок	Давать показания	0; -10	-3; -3	

- 1. Ситуация равновесия игры (равновесия по Нэшу) пара стратегий игроков, отклонение от которых в одиночку невыгодно ни одному из игроков. Поиск стратегий, образующих ситуацию равновесия, выполняется на основе индивидуального рационального выбора.
- 2. Ситуация (пара стратегий игроков) является оптимальной по Парето, если не существует другой ситуации, которая была бы предпочтительнее этой ситуации для всех игроков (т. е. увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша другого).

Модели конфликтной ситуации

Для построения модели конфликтной ситуации фиксируются правила, определяющие:

- 1) варианты действий противников;
- 2) объем информации каждого игрока о поведении партнеров;
- 3) выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Выигрыш (или проигрыш) должен быть задан количественно (либо в объективных единицах, либо в условных значениях), с помощью выигрыш-функции. Выигрыш функция может задаваться таблично или в аналитической форме (формула или выражение). После задания выигрыш функции для каждой конкретной ситуации, возникшей после применения правил поведения игроков, рассчитываются конкретные значения выигрышей. Рассчитанные выигрыши игроков в подавляющем числе игровых ситуаций заносятся в матрицу, в которой прописываются выигрыши по каждой из стратегий игроков.

	\mathbf{B}_1	\mathbf{B}_2	 B _n
A_1	X ₁₁	X ₁₂	 X _{ln}
A_2	X ₂₁	X ₂₂	 X_{2n}
A _m	X _{ml}	X _{m2}	 X _{mn}

Числа x_{ij} — выигрыш игрока в ситуации одновременных действий игроков под номером Ai и Bj . В зависимости от конфликтной ситуации таких матриц может быть либо одна, либо по числу участников.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется *ходом игрока*.

Личный ход — это сознательный выбор игроком одного из возможных действий.

Случайный ход — это случайно (с некоторой вероятностью) произошедшее действие.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Общий вид матрицы игры с природой.

	Состояния природы (j)					
Альтер- нативы(X _i)	1	2		j		M
()	Исходы (х _{іј})					
X_1	X ₁₁	X ₁₂		X _{1j}		X _{1M}
X_2	X ₂₁	x ₂₂		X _{2j}		X _{2M}
•••				•••		
X _i	X _{i1}	X _{i2}		X _{ij}	•••	x_{iM}
•••				•••		
X _N	X _{N1}	X _{N2}		X _{Nj}		X _{NM}

Алгоритм формализации игровой ситуации:

- 1. Расписать все возможные действия каждого игрока.
- 2. Составить выигрыш-функцию каждого игрока (если она представима в аналитическом виде)
- 3. Вычислить выигрыши каждого игрока в зависимости от одновременных действий игрока и его оппонента.
- 4. Заполнить игровые матрицы.

Формализация бескоалиционных игр

- Бескоалиционной игрой в нормальной (или стратегической) форме называется тройка Г = {I, S, H}, где I = {1, 2, ..., n} множество всех игроков, которых различаем по номерам; S_i множество стратегий, доступных игроку i∈I; отдельную стратегию игрока i обозначим s_i∈S_i
- Процесс игры состоит в выборе каждым из игроков одной своей стратегии s_i∈S_i.Таким образом, в результате каждой партии игры складывается набор стратегий s =(s₁,s₂,..., s_n), называемый ситуацией. Множество всех ситуаций S=S₁×S₂×...×S_n является декартовым произведением множеств стратегий всех игроков.
- Обозначим H_i(s) выигрыш игрока і в ситуации s. Функция H_i :S→R, определенная на множестве всех ситуаций S, называется функцией выигрыша игрока і.

Ситуации равновесия по Нэшу

• Пусть $S = (S_1, S_2, ..., S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, ..., S_n)$ произвольная ситуация в игре, где $S_i \in S_i$ — некоторая стратегия игрока і. Рассмотрим новую ситуацию, получившуюся из ситуации s заменой стратегии s_i игрока і на стратегию $S_i' \in S_i$, используя следующее обозначение:

$$s|_{s'_i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, ..., s_n)$$

Ситуация s в игре называется *приемлемой* для игрока i, если

$$H_i(s|_{s_i'}) \leq H_i(s)$$

Ситуация s называется́ ситуацией равновесия по Нэшу (или равновесной по Нэшу ситуацией), если она приемлема для всех игроков, т. е. для каждого і∈І выполняется

$$H_i(s|_{s_i'}) \leq H_i(s)$$

Ситуации равновесия по Нэшу

- Равновесной стратегией игрока в бескоалиционной игре называется такая его стратегия, которая входит хотя бы в одну из равновесных ситуаций игры.
- Нахождение ситуаций равновесия в бескоалиционной игре определяет решение игры и соответствующие выигрыши игроков.
- Предположение *о рациональности игроков*: все игроки действуют рационально, т. е. каждый игрок рассматривает доступные ему альтернативы, формирует представления относительно неизвестных параметров (возможных действий других игроков, их ресурсов), имеет четко определенные предпочтения и выбирает свои действия в результате некоторого процесса оптимизации (максимизации своей целевой функции).
- факт общеизвестности (общего знания) рациональности игроков, т. е. все игроки не только рациональны, но и знают, что другие игроки рациональны, что все игроки знают о том, что все они рациональны.

Пример.

Найти в следующей игре ситуации равновесия (здесь против каждой строки (каждого столбца) указана соответствующая стратегия игрока 1 (игрока 2)):

$$H = \begin{pmatrix} s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} \\ (4, 3) & (5, 1) & (6, 2) \\ (2, 1) & (8, 4) & (3, 6) \\ (3, 0) & (9, 6) & (2, 8) \end{pmatrix} \begin{array}{l} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)} \end{array}.$$

- $s_{ij} = \left(s_1^{(i)}, s_2^{(j)}\right)$ ситуацию при стратегиях игроков $H(s_{ij}) = H(s_1^{(i)}, s_2^{(j)}) = \left(H_1(s_{ij}), H_2(s_{ij})\right)$ функция выигрышей игроков.
- $s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ приемлема для игрока 1

$$H(s_{11}) = H(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = (4,3)$$

 $H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{21}) = 2, H_1(s_{11}) = 4 > H_1(s_{31}) = 3$

Пример.

• $s_{11} = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)})$ приемлема для игрока 2

$$H_2(s_{11}) = 3 > H_2(s_{12}) = 1, H_2(s_{11}) = 3 > H_2(s_{13}) = 2$$

 $s_{11} = \left(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}\right)$ приемлема для обоих игроков, т. е. это ситуация равновесия по Нэшу.

Задание для самостоятельной работы

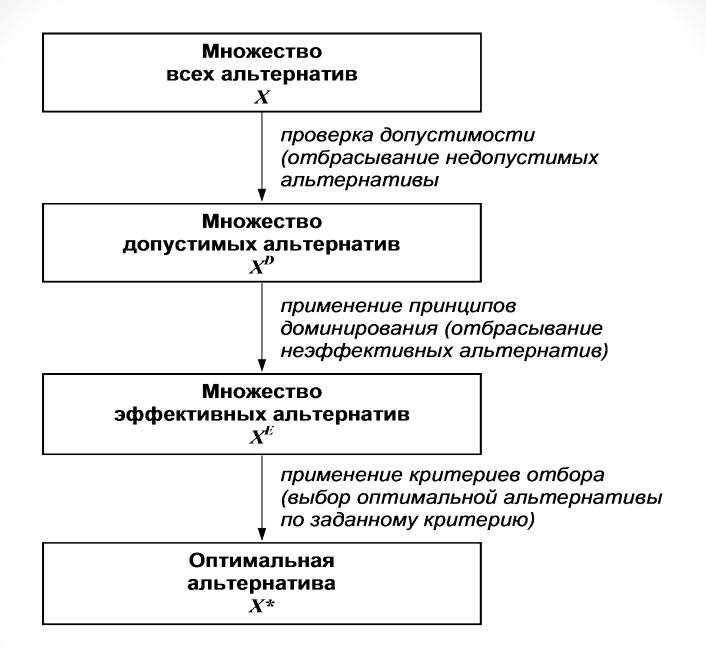
Найти в следующей игре ситуации равновесия (здесь против каждой строки (каждого столбца) указана соответствующая стратегия игрока 1 (игрока 2)):

$$H = \begin{pmatrix} (8,2) & (6,3) & (4,8) \\ (3,5) & (6,6) & (4,3) \\ (4,0) & (7,1) & (5,3) \end{pmatrix}$$

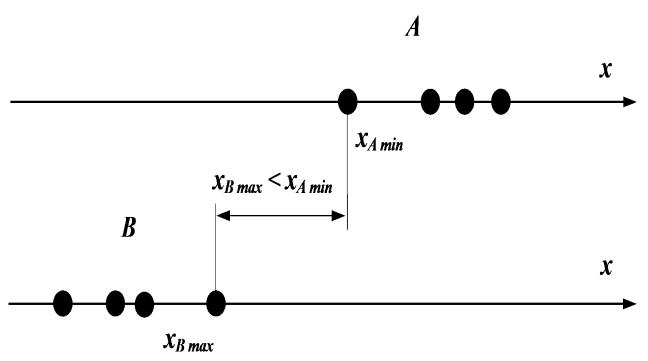
• Все задания отправляйте на электронную почту: e.kovaleva@mgutm.ru

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Все вопросы отправляйте на электронную почту: e.kovaleva@mgutm.ru



Абсолютное доминирование $A \succ_{\mathit{aбc}} B$



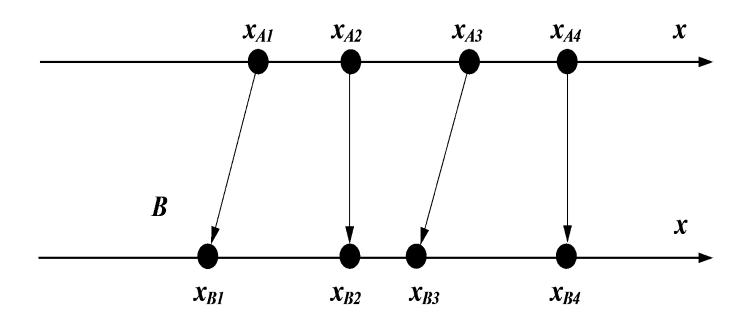
© Богоявленский С.Б., 2014

Доминирование по состояниям $A \succ B$

$$x_{Bj} < x_{Aj}, j = 1, 3$$

 $x_{Bj} = x_{Aj}, j = 2, 4$

A



1. Выбрать критерий и, при необходимости, параметры данного критерия. 2. Рассчитать значение выбранного критерия для каждой альтернативы 3. Сравнить значения критериев и выбрать альтернативу с наилучшим значением критерия 4. Альтернатива с наилучшим значением критерия является оптимальной

Критерий Вальда

$$W_i = \min(x_{ij}), j = 1..M$$

$$X^* = X_k, W_k = \max(W_i), i = 1..N$$

Критерий "максимакса"

$$M_i = \max(x_{ij}), j = 1..M$$

$$X^* = X_k, M_k = \max(M_i), i = 1..N$$

Критерий Лапласа

$$\sum_{L_i=\frac{j-1}{2}}^{M} x_{ij} \qquad X^* = X_k, L_k = \max(L_i), i = 1..N$$

Табл.2. Исходные данные.

Альтернативы	Состояния природы (j)		
(X _i)	1	2	3
X_1	45	25	50
X ₂	20	60	25

Критерий Сэвиджа

Порядок применения критерия Сэвиджа

- 1. Для каждого состояния природы j определим максимальное $y_j = \max(x_{ij})$
- 2. Для каждой клетки исходной матрицы X найдем разность между максимальным выигрышем r_j для данного состояния природы и исходом в рассматриваемой ячейке x_{ij} : $r_{ij} = y_j x_{ij}$ Из полученных значений составим новую матрицу R матрицу недополученных выигрышей.
- 3. Для каждой альтернативы в новой матрице R найдем наибольший возможный недополученный выигрыш S_i :
- $S_i = \max(r_{ij}), j=1..M$
- 4. Оптимальной альтернатива с минимальным (!) наибольшим недополученным выигрышем: $X^* = X_k$, $S_k = \min(S_i)$, i=1..N

Критерий Гурвица

$$x_{i \text{ max}} = \max(x_{ij}), x_{i \text{ min}} = \min(x_{ij}), j = 1..M$$

"коэффициент оптимизма" λ , $0 \le \lambda \le 1$

$$H_i(\lambda) = \lambda x_{i \max} + (1 - \lambda) x_{i \min}$$

$$X^* = X_k$$
, $H_k(\lambda) = \max(H_i(\lambda))$, $i = 1..N$

Обобщенный критерий Гурвица

$$H'_{i} = \sum_{q=1}^{M} \lambda_{q} x_{iq}$$
 $0 \le \lambda_{q} \le 1, \lambda_{1} + ... + \lambda_{q} + ... + \lambda_{M} = 1$

Порядок применения критерия Гурвица

- 1. Упорядочиваем матрицу игры таким образом, чтобы исходы каждой альтернативы располагались в порядке неубывания. $x_{il}, x_{i2},..., x_{ij},..., x_{iM} \rightarrow y_{i1} \leq y_{i2} \leq ... \leq y_{iq} \leq ... \leq y_{iM}$
- 2. Рассчитываем суммы исходов по каждому столбцу новой матрицы \mathbf{Y} : $y_q = \sum_{i=1}^N y_{iq}$
- 3. Рассчитываем сумму все исходов матрицы: $y = \sum_{i=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} y_{iq} = \sum_{q=1}^{M} y_{iq}$
 - 4. Далее коэффициенты λ_q определяются в зависимости от отношения ЛПР к неопределенности.

4.1. Если ЛПР оптимист, то коэффициент λ_q для любого q-го столбца определяется по формуле: $\lambda_q = \frac{y_q}{v}$

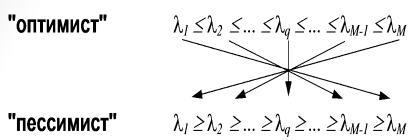
Поскольку для каждой альтернативы соблюдается условие: $y_{i1} \le y_{i2} \le \dots \le y_{iq} \le \dots \le y_{iM}$, то $y_1 \le y_2 \le \dots \le y_q \le \dots \le y_M$ и, следовательно: $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_q \le \dots \le \lambda_M$

То есть, чем лучше исход, тем больше удельный вес ему присваивается.

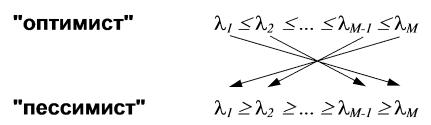
$$\lambda_{q} = \frac{y_{q}}{y} = \frac{y_{q}}{\sum_{q=1}^{M} y_{q}} \qquad \sum_{q=1}^{M} \lambda_{q} = I$$

4.2. Если ЛПР пессимист, то определение коэффициентов немного сложнее. Мы должны обеспечить соблюдение условия худшим исходам - большие веса. Это можно сделать, зеркально поменяв местами коэффициенты, рассчитанные для оптимистичного ЛПР:

а) при нечетном количестве состояний M:



б) при четном количестве состояний M:



Формальная запись зависимости для расчета коэффициентов λ_q при пессимистично настроенном ЛПР выглядит следующим образом $\lambda_q = \frac{y_{N-q+l}}{v}$

5. Теперь, имея все значения коэффициентов λ_q , можно рассчитать величину обобщенного коэффициента Гурвица для каждой i-й альтернативы:

$$H'_{i} = \sum_{q=1}^{M} \lambda_{q} y_{iq} = \lambda_{1} y_{i1} + \lambda_{2} y_{i2} + \dots + \lambda_{M} y_{iM}$$

6. Оптимальной является стратегия, у которой наибольшее значение обобщенного критерия Гурвица:

$$X^* = X_k, H'_k = max(H'_i), i=1..N$$

Альтернативы	Номер столбца (q)		
(X _i)	1	2	3
X_1	25	45	50
X_2	20	25	60
$y_q = \sum y_{iq}$	45	70	110
$y = \sum y_q$	225		
λ_q^{O} оптимист	0.20	0.31	0.49
$\lambda_q^{\ \Pi}$ пессимист	0.49	0.31	0.20

$$\lambda_{1}^{O} = 45/225 = 0.2 \quad \lambda_{2}^{O} = 70/225 = 0.31 \quad \lambda_{3}^{O} = 110/225 = 0.49$$

$$\lambda_{3}^{O} = 0.20 \quad \lambda_{2}^{O} = 0.31 \quad \lambda_{2}^{O} = 0.49$$

$$\lambda_{1}^{II} = 0.49 \quad \lambda_{2}^{II} = 0.31 \quad \lambda_{3}^{II} = 0.20$$

$$H'_{1}{}^{O} = \lambda_{1}{}^{O} y_{11} + \lambda_{2}{}^{O} y_{12} + \lambda_{3}{}^{O} y_{13} = 0.20 \times 25 + 0.31 \times 45 + 0.49 \times 50 = 43.4$$

$$H'_{2}{}^{O} = \lambda_{1}{}^{O} y_{21} + \lambda_{2}{}^{O} y_{22} + \lambda_{3}{}^{O} y_{23} = 0.20 \times 20 + 0.31 \times 25 + 0.49 \times 60 = 41.1$$

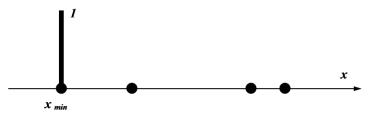
$$H'_{1}{}^{\Pi} = \lambda_{1}{}^{\Pi} y_{11} + \lambda_{2}{}^{\Pi} y_{12} + \lambda_{3}{}^{\Pi} y_{13} = 0.49 \times 25 + 0.31 \times 45 + 0.20 \times 50 = 36.2$$

$$H'_{2}{}^{\Pi} = \lambda_{1}{}^{\Pi}y_{21} + \lambda_{2}{}^{\Pi}y_{22} + \lambda_{3}{}^{\Pi}y_{23} = 0.49 \times 20 + 0.31 \times 25 + 0.20 \times 60 = 29.6$$

$$43.4 > 41.1 => H'_{1}^{0} > H'_{2}^{0} => X* = X_{1}$$

$$36.2 > 29.6 = > H'_1{}^{\Pi} > H'_2{}^{\Pi} = > X^* = X_1$$

Критерий Вальда



Критерий Лапласа



Критерий Гурвица (оптимист $0.5 < \lambda \le 1$)



Обобщенный критерий Гурвица (оптимист)

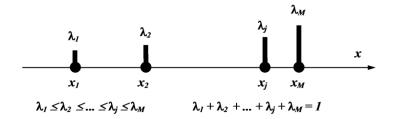


Рис.4. Сравнение принципов расчета основных критериев выбора.

© Богоявленский С.Б., 2014

Рекомендации относительно критериев выбора для принятия решений в условиях неопределенности:

- Нет универсальных критериев. Каждый критерий фокусируется на некоторых свойствах результатов и "затуманивает" другие. Поэтому желательно сравнивать альтернативы не по одному, а по нескольким критериям.
- Порядок расчета критерия объективен и не зависит от ЛПР. Однако сам выбор критерия для сравнения альтернатив субъективен и отражает отношение ЛПР к риску. Как следствие, решение, принятое одним ЛПР, не всегда является оптимальным для другого ЛПР.

• Процедура применения критериев формализована, а сами критерии "упрощают" представление об альтернативах. Из-за этого результаты применения критерия могут быть не совсем логичны с позиций реального человека. Поэтому любое решение, "рекомендуемое" тем или иным критерием, необходимо проверять с позиций "здравого смысла".