УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Симплекс-метод.
Базисные и свободные переменные. Простой симплекс – метод.

Ковалева Елена Вячеславовна

Алгоритм симплекс-метода

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$Z_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n;$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Введем условные обозначения:
$x_1, x_2, \ldots, x_r$ – базисные переменные;
$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – свободные переменные.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \alpha_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{1n}x_n); \\ x_2 = \beta_2 - (\alpha_{2r+1}x_{r+1} + \alpha_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{2n}x_n); \\ \vdots \\ x_r = \beta_r - (\alpha_{rr+1}x_{r+1} + \alpha_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{rn}x_n); \end{cases}$$

$$Z_{\min} = \gamma_0 - (\gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_nx_n).$$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \alpha_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{1n}x_n); \\ x_2 = \beta_2 - (\alpha_{2r+1}x_{r+1} + \alpha_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{2n}x_n); \\ \vdots \\ x_r = \beta_r - (\alpha_{rr+1}x_{r+1} + \alpha_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{rn}x_n); \end{cases}$$

$$Z_{\min} = \gamma_0 - (\gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_n x_n).$$

По последней системе ограничений и целевой функции Z построим таблицу. Данная таблица называется симплекс-таблицей. Все дальнейшие преобразования связаны с изменением содержания этой таблицы

Таб 1

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_{r+1}	x_{r+2}	…	x_n
x_1	β_1	α_{1r+1}	α_{1r+2}	…	α_{1n}
x_2	β_2	α_{2r+1}	α_{2r+2}	…	α_{2n}
…	…	…	…	…	…
x_r	β_r	α_{rr+1}	α_{rr+1}	…	α_{rn}
$Z_{\min}$	γ_0	γ_{r+1}	γ_{r+2}	…	γ_n

1. В последней строке симплекс-таблицы находят наименьший положительный элемент, не считая свободного члена. Столбец, соответствующий этому элементу, считается разрешающим.
2. Вычисляют отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (симплекс-отношение). Находят наименьшее из этих симплекс-отношений, оно соответствует разрешающей строке.
3. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент.
4. Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выбирают любое из них. То же самое относится к положительным элементам последней строки симлекс-таблицы.
5. После нахождения разрешающего элемента переходят к следующей таблице. Неизвестные переменные, соответствующие разрешающей строке и столбцу, меняют местами. При этом базисная переменная становится свободной переменной, и наоборот. Симплекс-таблица преобразована следующим образом

Таб 2

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_{r+1}	x_1	...	x_n
x_{r+2}	$\frac{\beta_1}{\alpha_{1r+2}}$	$\frac{\alpha_{1r+1}}{\alpha_{1r+2}}$	$\frac{1}{\alpha_{1r+2}}$	...	$\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1r+2}}$
x_2			$-\frac{\alpha_{2r+2}}{\alpha_{1r+2}}$	...	
...	...	...	...	...	...
x_r			$-\frac{\alpha_{rr+2}}{\alpha_{1r+2}}$	...	
$Z_{\min}$			$-\frac{\gamma_{r+2}}{\alpha_{1r+2}}$	...	

6. Элемент, соответствующий разрешающему элементу табл. 1, равен обратной величине разрешающего элемента.

7. Элементы строки табл. 2, соответствующие элементам разрешающей строки табл. 1, получаются путем деления соответствующих элементов табл. 1 на разрешающий элемент.

8. Элементы столбца табл. 2, соответствующие элементам разрешающего столбца табл. 1, получаются путем деления соответствующих элементов табл. 1 на разрешающий элемент и берутся с противоположным знаком.

9. Остальные клетки новой симплекс-таблицы заполняются по правилу прямоугольника

$$НЭ=СтЭ – (A*B)/РЭ$$

НЭ – новый элемент; СтЭ – старый элемент; РЭ – разрешающий элемент; А и В - элементы старой симплекс – таблицы, образующие прямоугольник с элементами СтЭ и РЭ.

10. Как только получится таблица, в которой в последней строке все элементы отрицательны, считается, что минимум найден. Минимальное значение функции равно свободному члену в строке целевой функции, а оптимальное решение определяется свободными членами при базисных переменных. Все свободные переменные в этом случае равны нулю.

11. Если в разрешающем столбце все элементы отрицательны, то задача не имеет решений (минимум не достигается).

Замечания

1. если решается задача минимизации целевой функции, то признаком оптимального плана является неположительность значений всех элементов z – строки.
2. Если на некотором шаге алгоритма оказалось, что в ведущем столбце все элементы не положительны, то целевая функция не ограничена не множестве допустимых планов и задача не имеет решения.

Метод искусственного базиса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n); \\ \vdots \\ y_r = b_r - (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n). \end{cases}$$

$$F_{\min} = y_1 + y_2 + \mathrm{E} + y_r,$$

Анализ вариантов решений

1. Если $F_{\min} \neq 0$, а все y_i переведены в свободные переменные, то задача не имеет положительного решения.

2. Если $F_{\min} = 0$, а часть y_i осталась в базисе, то для перевода их в свободные переменные необходимо применять специальные приемы.

Симплекс - метод

пример

Общая постановка задачи и каноническая форма

$$z_{\max} = 6x_1 - 7x_2 + 3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

$$z^*_{\min} = -z_{\max} = -3 - 6x_1 + 7x_2$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 - (-x_1 + x_2) \\ x_4 = 1 - (x_1 - x_2) \\ x_5 = 2 - (x_1 + x_2) \end{cases}$$

$$z^*_{\min} = -3 - (6x_1 - 7x_2)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

СП / БП	X_1	X_2	Св. члены
X_3	- 1	1	1
X_4	$\boxed{1}$	-1	1
X_5	1	1	2
Z_{min}	6	-7	-3

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

СП / БП	X_4	X_2	Св. члены
X_3	1	0	2
X_1	1	-1	1
X_5	-1	2	1
Z_{min}	-6	-1	-9

Искусственный базис

$$z_{\min} = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

$$x_3 = 1 - (3x_1 - 5x_2 + 2x_4)$$

$$y_1 = 4 - (-2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5)$$

$$y_2 = 5 - (-x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5)$$

$$z_{\min} = 0 - (-x_1 - 2x_2)$$

$$F_{\min} = y_1 + y_2 =$$

$$= 9 - (-3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

$$x_3 = 1 - (3x_1 - 5x_2 + 2x_4)$$

$$y_1 = 4 - (-2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5)$$

$$y_2 = 5 - (-x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5)$$

$$z_{\min} = 0 - (-x_1 - 2x_2)$$

$$F_{\min} = y_1 + y_2 =$$

$$= 9 - (-3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

СП / БП	Св.ч	x1	x2	x4	x5
X3	1	3	-5	2	0
У1	4	-2	2	-1	1
У2	5	-1	3	-2	1
Zmin	0	-1	-2	0	0
Fmin	9	-3	5	-3	2

СП / БП	Св.ч	x1	x2	x4	x5
Х3	1	3	-5	2	0
У1	4	-2	2	-1	$\boxed{1}$
У2	5	-1	3	-2	1
Zmin	0	-1	-2	0	0
Fmin	9	-3	5	-3	2

СП / БП	Св.ч	x1	x2	x4	y1
Х3	1	3	-5	2	0
x5	4	-2	2	-1	1
У2	1	1	1	-1	-1
Zmin	0	-1	-2	0	0
Fmin	1	1	1	-1	-2

СП БП	Св.ч	x1	x2	x4	y1
X3	1	3	-5	2	0
x5	4	-2	2	-1	1
У2	1	1	$\boxed{1}$	-1	-1
Zmin	0	-1	-2	0	0
Fmin	1	1	1	-1	-2

СП БП	Св.ч	x1		x4	
X3	6	8		-3	
x5	2	-4		1	
x2	1	1		-1	
Zmin	2	1		-2	

СП / БП	Св. члены	X_1	X_4
X_3	6	$\boxed{8}$	-3
X_5	2	-4	1
X_2	1	1	-1
Z_{min}	2	1	-2

СП / БП	Св. члены	X_3	X_4
X_1			
X_5	5		-0,5
X_2			
Z_{min}			

Задачи для самостоятельного решения

1. Привести к каноническому виду и решить симплекс - методом

$$F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 16, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 18, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

e.kovaleva@mgutm.ru

Литература

Основные источники

- Половников Виктор Антонович Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие / И.В. Орлова, В.А. Половников. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 389 с.: 60x90 1/16. (п) ISBN 978-5-9558-0208-4 http://znanium.com/catalog/product/424033
- Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2018. - 432 с: ил.

Дополнительные источники

- Математическое и имитационное моделирование : учеб. пособие / А.И. Безруков, О.Н. Алексенцева. — М. : ИНФРА-М, 2017. — 227 с. + Доп. материалы , http://znanium.com/catalog/product/811122
- Моделирование систем управления с применением Matlab: Учебное пособие / Тимохин А.Н., Румянцев Ю.Д; Под ред. А.Н.Тимохина - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 256 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010185-9 http://znanium.com/catalog/product/590240
- **Интернет-ресурсы**
- http://window.edu.ru
- http:// edu.ru
- http://Fcior.edu.ru