

Классификация задач математического моделирования.

Примеры простейших математических моделей

Цели:

1. Формирование знаний об основных понятиях и определениях теории задач математического моделирования.

Задачи:

1. Сформировать теоретические знания необходимые при составлении классификаций задач математического моделирования.

2. Содействовать расширению профессиональной компетенции в области основных понятий задач математического моделирования.

Модель в широком смысле - это любой образ, аналог мысленный или установленный изображение, описание, схема, чертеж, карта и т. п. какого либо объема, процесса или явления, используемый в качестве его заменителя или представителя. Сам объект, процесс или явление называется оригиналом данной модели.

Моделирование - это исследование какого либо объекта или системы объектов путем построения и изучения их моделей. Это использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов.

На идее моделирования базируется любой метод научного исследования, при этом, в теоретических методах используются различного рода знаковые, абстрактные модели, в экспериментальных - предметные модели.

При исследовании сложное реальное явление заменяется некоторой упрощенной копией или схемой, иногда такая копия служит лишь только для того чтобы запомнить и при следующей встрече узнать нужное явление. Иногда построенная схема отражает какие - то существенные черты, позволяет разобраться в механизме явления, дает возможность предсказать его изменение. Одному и тому же явлению могут соответствовать разные модели.

Задача исследователя - предсказывать характер явления и ход процесса.

Иногда, бывает, что объект доступен, но эксперименты с ним дорогостоящи или привести к серьезным экологическим последствиям. Знания о таких процессах получают с помощью моделей.

Важный момент - сам характер науки предполагает изучение не одного конкретного явления, а широкого класса родственных явлений. Предполагает необходимость формулировки каких - то общих категорических утверждений, которые называются законами. Естественно, что при такой формулировке многими подробностями пренебрегают. Чтобы более четко выявить закономерность сознательно идут на огрубление, идеализацию, схематичность, то есть изучают не само явление, а более или менее точную ее копию или модель. Все законы - это законы о моделях, а поэтому нет ничего удивительного в том, что с течением времени некоторые научные теории признаются непригодными. Это не приводит к краху науки, поскольку одна модель заменилась другой более современной.

Особую роль в науке играют математические модели, строительный материал и инструменты этих моделей - математические понятия. Они накапливались и совершенствовались в течении тысячелетий. Современная математика дает исключительно мощные и универсальные средства исследования. Практически каждое понятие в математике, каждый математический объект, начиная от понятия числа, является математической моделью. При построении математической модели, изучаемого объекта или явления выделяют те его особенности, черты и детали, которые с одной стороны содержат более или менее полную информацию об объекте, а с другой допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие адекватные математические понятия: числа, функции, матрицы и так далее. Тогда связи и отношения, обнаруженные и предполагаемые в изучаемом объекте между отдельными его деталями и составными частями можно записать с помощью математических отношений: равенств, неравенств, уравнений. В результате получается математическое описание изучаемого процесса или явления, то есть его математическая модель.

Изучение математической модели всегда связано с некоторыми правилами действия над изучаемыми объектами. Эти правила отражают связи между причинами и следствиями.

Построение математической модели - это центральный этап исследования или проектирования любой системы. От качества модели зависит весь последующий анализ объекта. Построение модели - это процедура не формальная. Сильно зависит от исследователя, его опыта и вкуса, всегда опирается на определенный опытный материал. Модель должна быть достаточно точной, адекватной и должна быть удобна для использования.

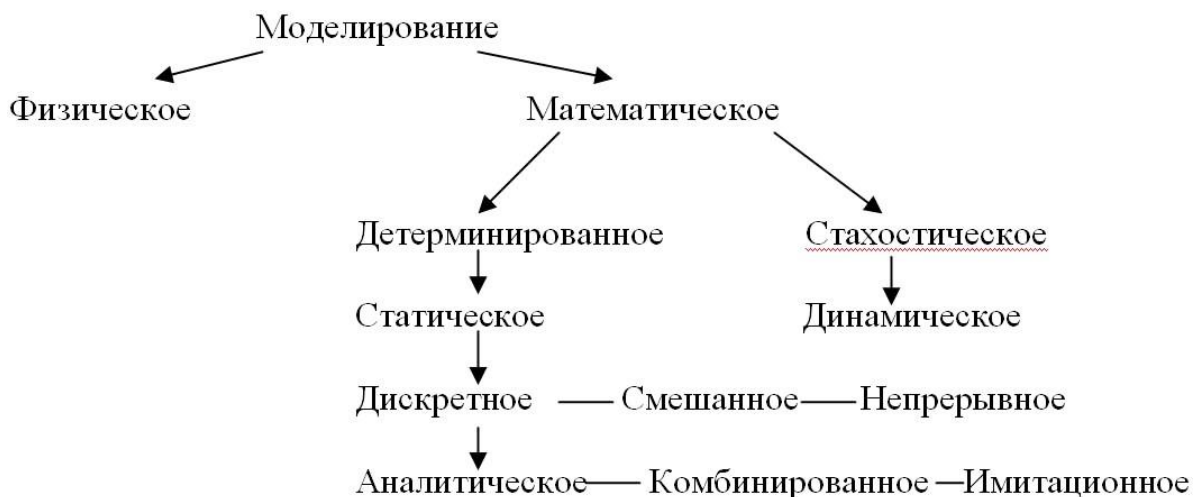
Модель сформулированная на языке математики с использованием математических методов называется математической моделью.

Исходным пунктом ее построения обычно является некоторая задача, например экономическая. Широко распространены, как дескриптивные, так и оптимизационные математические, характеризующие различные экономические процессы и явления, например:

распределение ресурсов
рациональный раскрой
транспортные перевозки
укрупнение предприятий
сетевое планирование.

Математические модели могут быть детерминированными и стохастическими.

Такой подход основан на знании механизма функционирования объектов. Часто моделируемый объект сложен и расшифровка его механизма может оказаться очень трудоемкой и длинной во времени. В этом случае поступают следующим образом: на оригинале проводят эксперименты, обрабатывают полученные результаты и, не вникая в механизм и теорию моделируемого объекта с помощью методов математической статистики и теории вероятности, устанавливают связи между переменными, описывающими объект. В этом случае получают стохастическую модель. В стохастической модели связь между переменными носит случайный характер, иногда это бывает принципиально. Воздействие огромного количества факторов, их сочетание приводит к случайному набору переменных описывающих объект или явление. По характеру режимов модель бывает статистическими и динамическими.



Детерминированные модели - это модели, в которых установлено взаимно-однозначное соответствие между переменными описывающими объект или явления.

Стохастическая модель - отображает вероятные процессы.

Статическая модель - служит для описания поведения объекта, в какой - либо момент времени.

Динамическая модель - отображает поведение объекта во времени.

Дискретная модель - характеризуется конечным числом значений переменных.

Непрерывная модель - она характеризуется бесконечным числом значений переменных.

Смешанная модель - характеризуется наличием как дискретных, так и непрерывных значений переменных.

Аналитическая модель - это математическая модель представляющая собой построение функциональных отношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечноразностных и т.д.) или логических условий.

Имитационное моделирование - это прямое (не система уравнений) отображение динамики системы. Его применяют если:

- в физических экспериментах трудно или невозможно проследить за происходящими изменениями в системе.
- необходимо исследовать систему до того, как она спроектирована.
- необходим анализ множества вариантов системы.
- необходимо исследовать систему за очень узкий или очень длинный промежуток времени.
- необходимо обучить персонал по принятию решений.

Комбинированное моделирование - это объединение аналитического и имитационного моделирования (производит расчленение систем).

Математическая модель - это совокупность математических объектов (уравнений, точек, прямых, цифр) и отношений между ними отражающих некоторые свойства моделирования системы.

Детерминированная модель - отображает процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий.

Требования, предъявляемые к моделям.

Универсальность - характеризует полноту отображения моделью изучаемых свойств реального объекта.

Адекватность - способность отражать нужные свойства объекта с погрешностью не выше заданной.

Точность - оценивается степенью совпадения значений характеристик реального объекта и значения этих характеристик полученных с помощью моделей.

Экономичность - определяется затратами ресурсов ЭВМ памяти и времени на ее реализацию и эксплуатацию.

Основные этапы моделирования.

1. Постановка задачи.

Определение цели анализа и пути ее достижения и выработки общего подхода к исследуемой проблеме. На этом этапе требуется глубокое понимание существа поставленной задачи. Иногда, правильно поставить задачу не менее сложно чем ее решить. Постановка - процесс не формальный, общих правил нет.

2. Изучение теоретических основ и сбор информации об объекте оригинала.

На этом этапе подбирается или разрабатывается подходящая теория. Если ее нет, устанавливаются причинно - следственные связи между переменными описывающими объект. Определяются входные и выходные данные, принимаются упрощающие предположения.

3. Формализация.

Заключается в выборе системы условных обозначений и с их помощью записывать отношения между составляющими объекта в виде математических выражений. Устанавливается класс задач, к которым может быть отнесена полученная математическая модель объекта. Значения некоторых параметров на этом этапе еще могут быть не конкретизированы.

4. Выбор метода решения.

На этом этапе устанавливаются окончательные параметры моделей с учетом условия функционирования объекта. Для полученной математической задачи выбирается какой-либо метод решения или разрабатывается специальный метод. При выборе метода учитываются знания пользователя, его предпочтения, а также предпочтения разработчика.

5. Реализация модели.

Разработав алгоритм, пишется программа, которая отлаживается, тестируется и получается решение нужной задачи.

6. Анализ полученной информации.

Сопоставляется полученное и предполагаемое решение, проводится контроль погрешности моделирования.

7. Проверка адекватности реальному объекту.

Результаты, полученные по модели сопоставляются либо с имеющейся об объекте информацией или проводится эксперимент и его результаты сопоставляются с расчётными.

Процесс моделирования является итеративным. В случае неудовлетворительных результатов этапов 6. или 7. осуществляется возврат к одному из ранних этапов, который мог привести к разработке неудачной модели. Этот этап и все последующие уточняются и такое уточнение модели происходит до тех пор, пока не будут получены приемлемые результаты.

Резюмируя.

Каким образом происходит построение математической модели?

Во-первых, формулируется цель и предмет исследования.

Во-вторых, выделяются наиболее важные характеристики, соответствующие данной цели. В-третьих, словесно описываются взаимосвязи между элементами модели.

Далее взаимосвязь формализуется.

И производится расчет по математической модели и анализ полученного решения.

Используя данный алгоритм можно решить любую оптимизационную задачу, в том числе и

многокритериальную, т.е. ту в которой преследуется не одна, а несколько целей, в том числе противоречивых.

Приведем пример. Теория массового обслуживания – проблема образования очередей. Нужно уравновесить два фактора – затраты на содержание обслуживающих устройств и затраты на пребывание в очереди. Построив формальное описание модели производят расчеты, используя аналитические и вычислительные методы. Если модель хороша, то ответы найденные с ее помощью адекватны моделирующей системе, если плоха, то подлежит улучшению и замене. Критерием адекватности служит практика.

Оптимизационные модели, в том числе многокритериальные, имеют общее свойство – известна цель(или несколько целей) для достижения которой часто приходится иметь дело со сложными системами, где речь идет не столько о решении оптимизационных задач, сколько об исследовании и прогнозировании состояний в зависимости от избираемых стратегий управления. И здесь мы сталкиваемся с трудностями реализации прежнего плана. Они состоят в следующем:

сложная система содержит много связей между элементами

реальная система подвергается влиянию случайных факторов, учет их аналитическим путем невозможен

возможность сопоставления оригинала с моделью существует лишь в начале и после применения математического аппарата, т.к. промежуточные результаты могут не иметь аналогов в реальной системе.

В связи с перечисленными трудностями, возникающими при изучении сложных систем, практика потребовала более гибкий метод, и он появился – имитационное моделирование "Simulation modeling".

Обычно под имитационной моделью понимается комплекс программ для ЭВМ, описывающий функционирование отдельных блоков систем и правил взаимодействия между ними. Использование случайных величин делает необходимым многократное проведение экспериментов с имитационной системой (на ЭВМ) и последующий статистический анализ полученных результатов. Весьма распространенным примером использования имитационных моделей является решение задачи массового обслуживания методом МОНТЕ–КАРЛО.

Таким образом, работа с имитационной системой представляет собой эксперимент, осуществляемый на ЭВМ. В чем же заключаются преимущества?

–Большая близость к реальной системе, чем у математических моделей;

–Блочный принцип дает возможность верифицировать каждый блок до его включения в общую систему;

–Использование зависимостей более сложного характера, не описываемых простыми математическими соотношениями.

Перечисленные достоинства определяют недостатки

–построить имитационную модель дольше, труднее и дороже;

–для работы с имитационной системой необходимо наличие подходящей по классу ЭВМ;

–взаимодействие пользователя и имитационной модели (интерфейс) должно быть не слишком сложным, удобным и хорошо известным;

–построение имитационной модели требует более глубокого изучения реального процесса, нежели математическое моделирование.

Встает вопрос: может ли имитационное моделирование заменить методы оптимизации? Нет, но удобно дополняет их. Имитационная модель – это программа, реализующая некоторый алгоритм, для оптимизации управления которым прежде решается оптимизационная задача.

Итак, ни ЭВМ, ни математическая модель, ни алгоритм для ее исследования порознь не могут решить достаточно сложную задачу. Но вместе они представляют ту силу, которая позволяет познавать окружающий мир, управлять им в интересах человека.

Резюмируя сказанное можно ответить на вопрос: для чего нужны модели? Для того, чтобы понять, как устроен объект (его структура, свойства, законы развития, взаимодействия с окружающим миром).

научиться управлять объектом (процессом) и определять наилучшие стратегии прогнозировать последствия воздействия на объект.

Что положительного в любой модели? Она позволяет получить новые знания об объекте, но, к сожалению, в той или иной степени не полна.

Классификация моделей

Классифицировать модели можно по разным критериям. Например, по характеру решаемых проблем модели могут быть разделены на функциональные и структурные. В первом случае все величины, характеризующие явление или объект, выражаются количественно. При этом одни из них рассматриваются как независимые переменные, а другие — как функции от этих величин. Математическая модель обычно представляет собой систему уравнений разного типа (дифференциальных, алгебраических и т. д.), устанавливающих количественные зависимости между рассматриваемыми величинами. Во втором случае модель характеризует структуру сложного объекта, состоящего из отдельных частей, между которыми существуют определенные связи. Как правило, эти связи не поддаются количественному измерению. Для построения таких моделей удобно использовать теорию графов. Граф — это математический объект, представляющий собой некоторое множество точек (вершин) на плоскости или в пространстве, некоторые из которых соединены линиями (ребрами).

По характеру исходных данных и результатов предсказания модели могут быть разделены на детерминистические и вероятностно-статистические. Модели первого типа дают определенные, однозначные предсказания. Модели второго типа основаны на статистической информации, а предсказания, полученные с их помощью, имеют вероятностный характер.

Классификация с учетом фактора времени и области использования (Макарова Н.А.)

Статическая модель - это как бы одномоментный срез информации по объекту (результат одного обследования)

Динамическая модель - позволяет увидеть изменения объекта во времени (Картончик в поликлинике)

Можно классифицировать модели и по тому, к какой области знаний они принадлежат (биологические, исторические, экологические и т.п.)

Классификация по области использования (Макарова Н.А.)

Учебные - наглядные пособия, тренажеры, обучающие программы

Опытные модели - уменьшенные копии (автомобиль в аэродинамической трубе)

Научно-технические - синхрофазотрон, стенд для проверки электронной аппаратуры

Игровые - экономические, спортивные, деловые игры

Имитационные - не просто отражают реальность, но имитируют ее (на мышах испытывается лекарство, в школах проводятся эксперименты и т.п. Такой метод моделирования называется методом проб и ошибок)

Классификация по способу представления Макарова Н.А.)

Материальные модели - иначе можно назвать предметными. Они воспринимают геометрические и физические свойства оригинала и всегда имеют реальное воплощение

Информационные модели - нельзя потрогать или увидеть. Они строятся только на информации. Информационная модель совокупность информации, характеризующая свойства и состояния объекта, процесса, явления, а также взаимосвязь с внешним миром.

Вербальная модель - информационная модель в мысленной или разговорной форме.

Знаковая модель - информационная модель выраженная знаками, т.е. средствами любого формального языка.

Компьютерная модель - модель, реализованная средствами программной среды.

Классификация моделей, приведенная в книге "Земля Информатика" (Гейн А.Г.)

"...вот нехитрая на первый взгляд задача: сколько потребуется времени, чтобы пересечь пустыню Каракумы? Ответ, разумеется, зависит от способа передвижения. Если путешествовать на верблюдах, то потребуется один срок, другой - если ехать на автомобиле, третий - если лететь самолетом. А самое главное - для планирования путешествия требуются разные модели. Для первого случая требуемую модель можно найти в мемуарах знаменитых исследователей пустынь: ведь здесь не обойтись без информации об оазисах и верблюжьих тропах. Во втором случае незаменима информация, содержащаяся в атласе автомобильных дорог. В третьем - можно воспользоваться расписанием самолетных рейсов.

Отличаются эти три модели - мемуары, атлас и расписание и характером предъявления информации. В первом случае модель представлена словесным описанием информации (описательная модель), во втором - как бы фотографией с натуры (натурная модель), в третьем - таблицей содержащей условные обозначения: время вылета и прилета, день недели, цена билета (так

называемая знаковая модель) Впрочем это деление весьма условно- в мемуарах могут встретиться карты и схемы (элементы натурной модели), на картах имеются условные обозначения (элементы знаковой модели), в расписании приводится расшифровка условных обозначений (элементы описательной модели). Так что эта классификация моделей ... на наш взгляд малопродуктивна"

На мой взгляд этот фрагмент демонстрирует общий для всех книг Гейна описательный (замечательный язык и стиль изложения) и как бы, сократовский стиль обучения (Все считают что это вот так. Я совершенно согласен с вами, но если приглядеться, то ...). В таких книгах достаточно сложно найти четкую систему определений (она и не предполагается автором). В учебнике под редакцией Н.А. Макаровой демонстрируется другой подход - определения понятий четко выделены и несколько статичны.