

Matrius-guia17-mates1-21

f.u., a.g.

1/28/2021

Definició i notacions

Creem una matriu en R amb la funció `matrix()`. Hem de donar els elements de la matriu en ordre en una sola seqüència, per defecte per columnes. Si ho volem donar per files, hem d'especificar `byrow = TRUE`. Cal especificar el nombre de files o el de columnes, com a mínim una de les dues.

```
A <- matrix(c(2, 0, 3, 4, 7, 5, 5, 4, 9, 10), ncol = 5)
A
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    2    3    7    5    9
[2,]    0    4    5    4   10
```

```
B <- matrix(data=c(2, 3, 7, 5, 9, 0, 4, 5, 4, 10), byrow = TRUE, nrow = 2)
B
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    2    3    7    5    9
[2,]    0    4    5    4   10
```

Podem accedir a l'element $a_{i,j}$ de la matriu utilitzant la notació `A[i,j]`

Però recorda que R diferencia entre `A` i `a`! La matriu l'hem definit amb `A` majúscula.

```
A[2,3] # serà l'element de la fila 2 i columna 3
```

```
[1] 5
```

```
A[,3] # si no diem quina fila, les torna totes
```

```
[1] 7 5
```

```
A[1,] # si no diem quina columna les torna totes
```

```
[1] 2 3 7 5 9
```

En la notació més habitual el que hem demanat s'escriuria la columna a_3 i la fila a_1 . (posem un puntet per indicar tota la fila o tota la columna).

Atenció: quan demanem una fila o una columna, R ens torna sempre un vector fila, horitzontal.

Igualtat de matrius

Si demanem si dues matrius són iguals, R ens torna la comparació terme a terme.

```
A <- matrix(c(2, 0, 3, 4, 7, 5, 5, 4, 9, 10), nrow = 2)
B <- matrix(c(2, 0, 3, 4, 7, 5, 5, 4, 9, 10), ncol = 5)
A == B
```

```

      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
[2,] TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
B[1,3]=13 # canviem l'element (1,3)
A == B

```

```

      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] TRUE TRUE FALSE TRUE TRUE
[2,] TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
all(A == A) # per veure si tots són TRUE

```

```

[1] TRUE
all(A == B)

```

```

[1] FALSE

```

Suma, diferència, producte per escalars de matrius

Aquí treballem amb matrius igual que amb nombres.

```

A <- matrix(c(1, 2, 3, 1, 1, 0), byrow = TRUE, nrow = 2)
B <- matrix(c(1, 0, 5, 1, 1, 6), byrow = TRUE, nrow = 2)
A + B

```

```

      [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    2    8
[2,]    2    2    6

```

```

A - 2 * B

```

```

      [,1] [,2] [,3]
[1,]   -1    2   -7
[2,]   -1   -1  -12

```

```

3 * A

```

```

      [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    6    9
[2,]    3    3    0

```

```

-B

```

```

      [,1] [,2] [,3]
[1,]   -1    0   -5
[2,]   -1   -1   -6

```

El producte de matrius. No és commutatiu!

Si fem servir el producte de nombres *, R fa el producte terme a terme. El producte matricial es fa amb %*%.

```

A <- matrix(c(1, 2, 3, 1, 1, 0, -2, 1), byrow = TRUE, nrow = 2) # matriu 2 x 4
B <- matrix(c(1, 0, 5, 1, 1, 6, -1, 0), byrow = TRUE, nrow = 4) # matriu 4 x 2
A %*% B # serà matriu 2 x 2

```

```

      [,1] [,2]
[1,]   13   20
[2,]   -2  -12

```

```
B %*% A # serà matriu 4 x 4
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4]  
[1,]     1     2     3     1  
[2,]     6    10    13     6  
[3,]     7     2    -9     7  
[4,]    -1    -2    -3    -1
```

En el cas de matrius quadrades sempre podem canviar l'ordre del producte, de vegades el resultat serà el mateix, de vegades no.

```
A <- matrix(c(1, 2, 3, 1, 1, 0, -2, 1, 0), byrow = TRUE, nrow = 3) # matriu 3 x 3  
B <- matrix(c(-2, 1, 0, 5, 1, 1, 6, -1, 0), byrow = TRUE, nrow = 3) # matriu 3 x 3  
A %*% B
```

```
      [,1] [,2] [,3]  
[1,]    26     0     2  
[2,]     3     2     1  
[3,]     9    -1     1
```

```
B %*% A
```

```
      [,1] [,2] [,3]  
[1,]    -1    -3    -6  
[2,]     4    12    15  
[3,]     5    11    18
```

```
C <- diag(c(1,2,3)) # matriu diagonal amb 1, 2, 3 a la diagonal  
D <- diag(c(2,-1, 0))  
D %*% C == C %*% D
```

```
      [,1] [,2] [,3]  
[1,] TRUE TRUE TRUE  
[2,] TRUE TRUE TRUE  
[3,] TRUE TRUE TRUE
```

La matriu identitat

Amb la funció *diag* que hem fet servir suara, podem construir la matriu identitat de la dimensió que ens interressi

```
I5 <- diag(1, nrow = 5)  
I5
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]  
[1,]     1     0     0     0     0  
[2,]     0     1     0     0     0  
[3,]     0     0     1     0     0  
[4,]     0     0     0     1     0  
[5,]     0     0     0     0     1
```

Com has vist, no cal que donem 1 cinc vegades, R recicla el que donem si li cal.

Potència de matrius quadrades

```
A <- matrix(c(1, 0, 3, 0.5), nrow=2)  
A %*% A
```

```
      [,1] [,2]
```

```
[1,] 1 4.50
[2,] 0 0.25
```

```
A %*% A %*% A %*% A
```

```
      [,1] [,2]
[1,] 1 5.6250
[2,] 0 0.0625
```

La transposada

Fem servir la funció `t()` per transposar matrius.

```
A <- matrix(c(1, 2, 3, 1, 1, 0, -2, 1, 0), byrow = TRUE, nrow = 3) # matriu 3 x 3
B <- matrix(c(-2, 1, 0, 5, 1, 1, 6, -1, 0), byrow = TRUE, nrow = 3) # matriu 3 x 3
C <- matrix(1:12, nrow = 3) # matriu 3 x 4 omplerta amb els nombres del 1 al 12 per columnes
C
```

```
      [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 1 4 7 10
[2,] 2 5 8 11
[3,] 3 6 9 12
```

```
t(C)
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 1 2 3
[2,] 4 5 6
[3,] 7 8 9
[4,] 10 11 12
```

```
t(A %*% B) == t(B) %*% t(A)
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,] TRUE TRUE TRUE
[2,] TRUE TRUE TRUE
[3,] TRUE TRUE TRUE
```

Matrius simètriques

```
A <- matrix(c(1, 2, 3, 1, 1, 0, -2, 1, 0), byrow = TRUE, nrow = 3) # matriu 3 x 3
TA <- A %*% t(A)
TA == t(TA) # és una matriu simètrica?
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,] TRUE TRUE TRUE
[2,] TRUE TRUE TRUE
[3,] TRUE TRUE TRUE
```

Traça d'una matriu quadrada

No hi ha una funció específica en R per calcular la traça, no cal. La funció `diag()` que abans hem fet servir per construir una matriu diagonal a partir dels nombres de la diagonal, també serveix per extreure la diagonal d'una matriu.

Aquí construirem una matriu amb nombres aleatoris de $[0, 1]$ i en farem la traça:

```
A <- matrix(runif(9), byrow = TRUE, nrow = 3)
diag(A)
```

```
[1] 0.8326269 0.3273397 0.9895629
```

```
sum(diag(A)) # serà la traça
```

```
[1] 2.149529
```

Exercicis

Ara et toca a tu.

1.- Comprova la propietat associativa del producte de matrius amb tres matrius de dimensions 2 per 3, 3 per 4 i 4 per 2.

2.- Producte de matriu i vector. Si entrem un vector en R fent servir la funció `c()`, R d'entrada l'interpreta com un vector fila (de fet com un vector sense dimensions). Però quan el fem servir en un producte matricial, R el "promou" a les dimensions adequades. Comprova-ho amb alguns exemples: fes una matriu de 3 per 4, pre-multiplica-la per `v <- c(1,0,-1)` i comprova si ha interpretat `v` com a un vector fila de 1 per 3. Post-multiplica-la per `w <- c(1,0,-1,-2)` i comprova si ha interpretat correctament `w` com a vector columna de 4 per 1.

Podeu trobar un resum de com treballar amb matrius en R al web (<https://www.statmethods.net/advstats/matrix.html>), amb més funcions de les que hem vist aquí.

Només per friquis del R

(o gent interessada en aprendre a programar)

Si volguéssim fer potències d'exponent més alt, podem definir

```
potencia.matriu <- function(matriu, exponent) {  
  if(exponent==1)  
    return(matriu)  
  else  
    return(matriu %*% potencia.matriu(matriu, exponent-1))  
}
```

```
A <- matrix(c(1, 0, 3, 0.5), nrow=2)  
potencia.matriu(A, 100)
```

```
      [,1]      [,2]  
[1,]  1 6.000000e+00  
[2,]  0 7.888609e-31
```

Hem definit la funció `potencia.matriu(A,n)` com a una funció *recursiva*, dient que A^1 és A i A^n és $A \cdot A^{n-1}$.