



子目标。前推使用的规则为 F 规则, 后推使用的为 B 规则, 事实库和子目标库分别用前推系统的 F 规则和后推系统的 B 规则来扩展。

3.2 系统推理过程

```
双向系统推理过程的 C++ 语言描述如下:
void CReasoning::Proof( CInfoArray &conclusion, BOOL bHasCon,
BOOL bOnce)
{
    int oldCount; int mNum = 0;
    int nLemmaGount = m_lemma.GetSize();
    //将结论放入等价条件表中开始第一轮推理
    if( m_conclusion.GetSize() != 0 ) {
        m_fConclusion.Add( m_conclusion[ 0 ] );
        m_nfNewInfo++;
    }
    do{
        mNum++;
        //循环使用引理进行前向推理
        for( int k = 0; k < nLemmaGount; k++ ) {
            CString sTemp;
            CLemma* pLemma = m_lemma[ k ];
            if( ! pLemma->m_nCount || ! pLemma->GetLemmaUse() ) continue;
            LemmaPrf( pLemma );
        }
        if( FindInfo( m_conclusion[ 0 ] ) != NULL ) {
            pos = 0;
            return;
        }
        //后向推理
        for( int i = 0; i < m_fConclusion.GetSize(); i++ ) {
            CInfoArray array;
            fProve( m_fConclusion[ i ], array, i );
            for( int j = 0; j < array.GetSize(); j++ )
                if( ! isin( array[ j ], &m_fConclusion ) )
                    m_fConclusion.Add( array[ j ] );
            array.RemoveAll();
        }
        //检查前后推是否有结合点
        pos = CheckQianHou();
        if( pos != - 1 ) {
            //记下这个结合点, 转到提取证明过程
            m_pos = pos;
            return;
        }
    } while( oldCount != m_nInfoCount && ! bOnce );
}
```

3.3 系统流程图

双向推理系统流程图如图 2 所示。

3.4 几个关键技术的实现

3.4.1 子事实和子目标数据结构的设计

前向推理采用定理库中的前推规则 F 结合条件进行推理分析, 产生新事实, 添加到事实库。后向推理用定理库中的后推规则 B 对结论进行分析, 产生相应的子目标, 加入子目标库。子事实和子目标的数据结构可采用统一的形式:

(谓词, 几何信息 1, 几何信息 2, ..., 理由标志, 理由号

码) 其中, 谓词表示信息之间的相互关系, 可分为一般的类型和杂项两大类。对于子事实, 谓词为一般类型, 如相等、平行等, 分别用 equal, parallel 等表示。对于子目标, 如果该目标仅包含单个的几何信息, 则为一般类型; 如果此子目标包含两个或两个以上的几何信息, 则该子目标为杂项类型, 以 otherItem 表示。如 ( otherItem, ( parallel, A, B, C, D ), ( equal, A, B, C, D ), 0, n) 表示  $AB \parallel CD$  且  $AB = CD$ 。理由标志用来标志此子事实或子目标是否有理由, 如果这个子事实(子目标)是由条件(结论)直接分析得出的, 则没有理由, 其值为 - 1; 否则这个子目标一定是由子事实库(子目标库)中的某一个或几个子事实(子目标)推出的, 则有理由, 其值为 0。理由号码是该信息的父信息在子事实库或子目标库中的编码, 设定此编码以便在证明的生成过程中查找到此信息对应的理由。

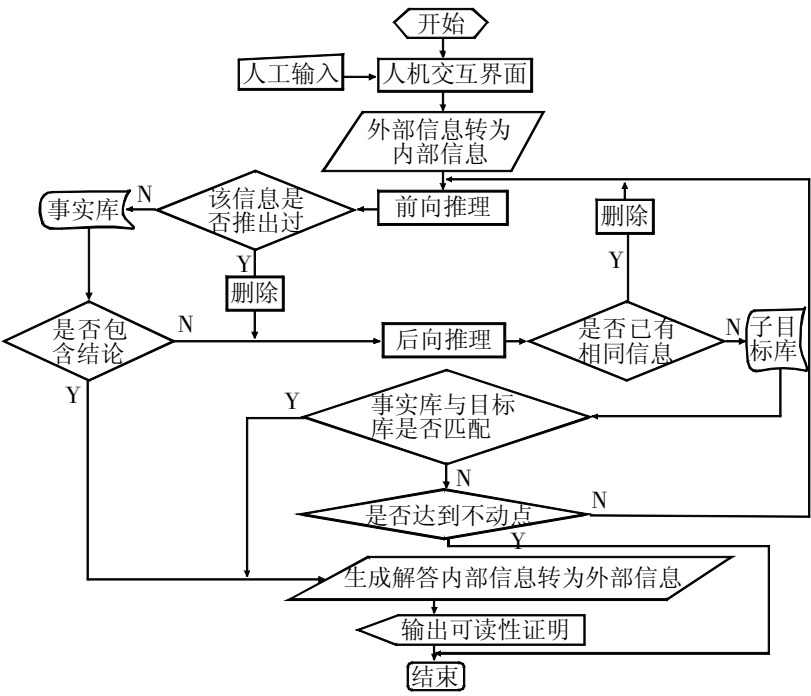


图 2 双向推理系统流程图

3.4.2 子目标的生成——条件组队

后向推理过程中, 对应一个结论, 使其成立的条件可能有很多种, 这就涉及到如何寻找使该结论成立的所有可能条件组。针对这个问题, 本系统采用递归、组队的思想方法, 即遇到有多个条件即谓词为 otherItem 的情况, 通过递归, 搜索到使各个信息成立的条件后组队, 每一队就是结论的一个等价条件。例如对“平行且相等”这一结论, 将使得平行成立的条件与相等成立的条件分别找出后进行组队, 组好后的每一队都是平行且相等成立的条件。对需要多个结论同时成立的问题组队方法相同。图 3 以平行四边形为例说明组队方法。

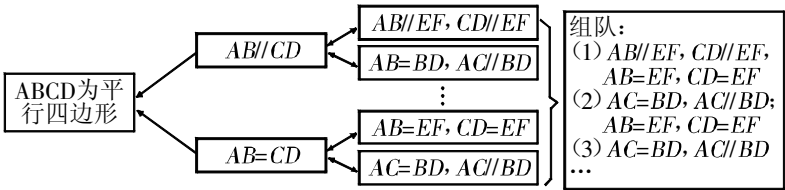


图 3 组队示意图

3.4.3 等价条件的搜索

条件组队需要找到结论的等价条件。等价条件分两种: 与已知事实无关的等价条件, 根据结论结合判定定理就能搜索出, 相对比较简单。如找平行四边形的等价条件, 根据这个结论, 结合平行四边形的判定定理就可以找到等价条件: 两组对边平行, 一组对边平行且相等, 两组对边分别相等, 对角线互相

平分等。与已知事实有关的等价条件,如证两直线平行,判定定理中有一条是“平行于同一条直线的两条直线互相平行”,寻找“同一条直线”这个中间量不是仅凭结论就能做到的,这种情况下还需要结合前推产生的事实库(该库包括原始的已知信息)进行分析,从库中搜索出能够匹配的项。

### 3.4.4 不动点的判断

如果系统推理至一定程度后前推过程与后推过程均不再产生新的信息,说明采用双向推理系统配合已有的定理库已无法得出问题的解答。不能继续产生新的信息的点即为不动点,到达不动点后系统结束推理循环,给出提示信息。不动点的判断采用广度优先的搜索法。

### 3.4.5 证明过程的提取

定义两个表分别存放前推链和后推链。前推链从结合点出发,按照传统的方式提取相关的信息,在此不作详述,有关内容可参阅参考文献[3]。后推链也是从结合点出发,将有用信息放进去后,在提取的时候用分析综合法的格式将其表示出来。结论放在后推链中的第一个,使结论成立的条件是这个链中的第二个,记为结论1,以此类推。即后推链是这样一个表:(结论,结论1,结论11,...,结合点),这就表示需要证明“结论”,就是要证明“结论1”,也就是要证明“结论11”...。采用分析综合法的方式显示的优点是证明过程与人脑的思维方式非常接近,容易使人理解。

证明提取过程(双实线箭头所指为提取后生成的证明过程)如图4所示。

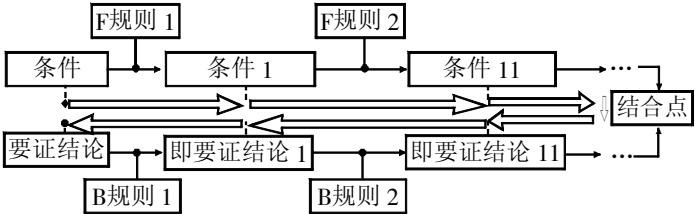


图4 可读证明产生示意图

下面是证明的提取过程的部分程序：

```
CString CReasoning::GetProve()  
{  
...  
CInfo * pInfo = m_fConclusion[ pos];  
prfInfoList.RemoveAll();  
prfList.RemoveAll();  
CString sNo(" ");  
/* 分别从前推链 prfInfoList 和后推链 prfInfoList1 中提取证明过程  
放到 prfList 和 prfList1* /  
if(!GetProve(pInfo, prfInfoList, prfInfoList1, prfList, prfList1)){  
CString sTemp;  
sTemp.LoadString(IDS_REASONING_3);  
sText += "\r\n" + sTemp;  
}  
...  
}
```

## 4 已取得的研究成果

该系统的实现使计算机解一些较为复杂的初等几何题的效率明显提高。例如九点共圆这道经典名题,由于条件很多,单纯运用前向推理法,证明其中一个四点共圆需要推四轮,得出2109个信息,所用时间为41s;而采用双向推理的方法只需

正向推理两轮逆向推理三轮便可证出,得出414个信息,所用时间为1s,由此可见,前后推理结合系统的优势所在(该数据是基于同一台机器、相同的推理平台实际测试得出的)。图5为使用前后推理结合系统证明九点共圆问题的其中四点共圆的解题结果。

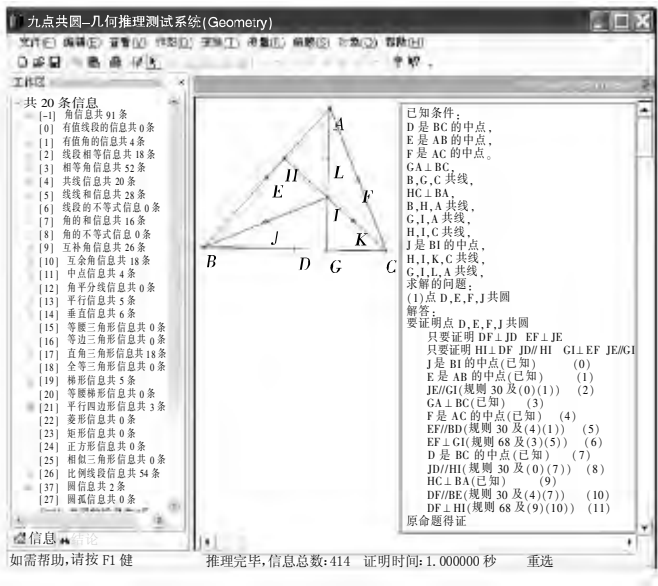


图5 求证九点共圆问题的其中四点共圆

类似的已知条件较多而求证结论较少的问题在初等几何中较为常见,求解这些问题采用双向推理系统可获得事半功倍的效果。该系统目前能够解决大量常见的初等几何问题,并能推理出一些单向推理系统难以解出的复杂问题。需要说明的是,从理论上来说本系统采取的这种后推实现思想是可以后推无限步的,但是递归的过程决定了后推步数不宜太多,否则将由于信息量太大,搜索空间膨胀导致推理难以有效进行。因此如何在 前推与后推的比重分配上取得最佳效果还需要进一步研究和探索。

## 5 结束语

在计算机解初等几何题领域,目前应用最多的是前向推理,也有少数采用后向推理。双向系统在推理效率上的优势是很明显的,但由于受系统数据结构和规则应用方法等局限,这方面的实际应用很少。本文对双向推理系统在初等几何问题自动求解中的实现进行了阐述,该系统的研究工作目前已取得了具有实际应用价值的成果。

### 参考文献：

[1] 张景中. 计算机怎样解几何题: 谈谈自动推理[M]. 广州: 暨南大学出版社; 北京: 清华大学出版社, 2000.  
[2] 张景中, 高小山, 周咸青. 基于前推的几何信息搜索系统[J]. 计算机学报, 1996, 19(10): 721.  
[3] 张景中, 杨路, 高小山, 等. 几何定理可读证明的自动生成[J]. 计算机学报, 1995, 18(5): 380.  
[4] ang L, Zhang J Z. Searching Dependency between Alge Braic: An Algorithm Applied to Automated Reasoning[C]. Artificial Intelligence in Mathematics, IMA Conference Proc., Oxford Univ. Press, 1994. 147-156.  
[5] 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)[M]. 北京: 科学出版社, 1984.  
[6] 蔡自兴, 徐光祐. 人工智能及其应用(第三版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.

### 作者简介：

徐茜, 女, 硕士, 主要研究领域为自动推理在教育软件开发中的应用。