Oxford : Smooth fit to log-odds ratios

Vincent Guitteny, Freddie Joly, Tom Léchappé et Elyes Zribi

05 avril 2022

Table des matières

1 Présentation du jeu de données

2 Présentation du modèle

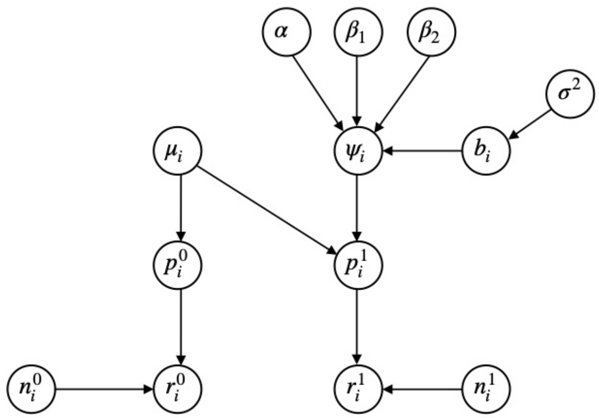

Figure 1: Modèle hierarchique

3 Calculs des lois conditionnelles pleines

On veut maintenant calculer les lois conditionnelles pleines de nos paramètres afin de mettre en oeuvre un échantilloneur de Gibbs sur ce modèle. Bien que la loi conditionnelle pleine de σ^2 soit identifiable, celles des autres paramètres ne sont pas identifiables. On donne ici un exemple de calcul pour le paramètre α, les autres calcul sont donnés en annexe. Les noeuds de notre modèle représentés par $log(\psi_i)$, p_i^0 et p_i^1 étant non stochastiques dans notre modèle, on peut les ignorer lors du calcul des lois conditionnelles pleines.

3.1 Calcul pour σ^2

On calcule la loi conditionnelle pleine du paramètre σ^2.

$$\begin{aligned}
\Pi(\sigma^2|...) &\propto \Pi(\sigma^2)\prod_{i=1}^{n}\Pi(b_i|\sigma^2) \\
&\propto \exp\left(\frac{-b_\sigma}{\sigma^2}\right)(\sigma^2)^{-a_\sigma-1}\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{-b_i^2}{2\sigma^2}\right)(\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\propto (\sigma^2)^{-a_\sigma-1-\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{-2b_\sigma-\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on identifie une loi inverse gamma :

$$\Pi(\sigma^2|...) \sim InvGamma(\frac{n}{2}+a_\sigma, \frac{2b_\sigma+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}{2})$$

3.2 Exemple de calcul pour une loi non identifiable

On calcule la loi conditionnelle pleine du paramètre α.

$$
\begin{aligned}
\Pi(\alpha|...) &\propto \Pi(\alpha)\prod_{i=1}^{n}\Pi(r_i^1|...) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\sigma_\alpha^2}\right)\prod_{i=1}^{n}\left((p_i^1)^{r_i^1}(1-p_i^1)^{n_i^1-r_i^1}\right)
\end{aligned}
$$

où $p_i^0 = sigmoid(\mu_i)$ et $p_i^1 = sigmoid(\mu_i + \alpha + \beta_1 year_i + \beta_2(year_i^2 - 22) + b_i)$.

4 Implémentation et résultats

5 Annexe

5.1 Loi conditionnelle pleine du paramètre β_1

$$
\begin{aligned}
\Pi(\beta_1|...) &\propto \Pi(\beta_1)\prod_{i=1}^{n}\Pi(r_i^1|...) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\beta_1^2}{2\sigma_{\beta_1}^2}\right)\prod_{i=1}^{n}\left((p_i^1)^{r_i^1}(1-p_i^1)^{n_i^1-r_i^1}\right)
\end{aligned}
$$

5.2 Loi conditionnelle pleine du paramètre β_2

$$
\begin{aligned}
\Pi(\beta_2|...) &\propto \Pi(\beta_2)\prod_{i=1}^{n}\Pi(r_i^1|...) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\beta_2^2}{2\sigma_{\beta_2}^2}\right)\prod_{i=1}^{n}\left((p_i^1)^{r_i^1}(1-p_i^1)^{n_i^1-r_i^1}\right)
\end{aligned}
$$

5.3 Loi conditionnelle pleine du paramètre b_i

$$
\begin{aligned}
\Pi(b_i|...) &\propto \Pi(b_i|\sigma^2)\Pi(r_i^1|...) \\
&\propto \exp\left(\frac{-b_i^2}{2\sigma^2}\right)\left((p_i^1)^{r_i^1}(1-p_i^1)^{n_i^1-r_i^1}\right)
\end{aligned}
$$

5.4 Loi conditionnelle pleine du paramètre μ_i

$$
\begin{aligned}
\Pi(\mu_i|...) &\propto \Pi(\mu_i)\Pi(r_i^0|\mu_i)\Pi(r_i^1|...) \\
&\propto \exp\left(\frac{-\mu_i^2}{2\sigma_\mu^2}\right)\left((p_i^0)^{r_i^0}(1-p_i^0)^{n_i^0-r_i^0}\right)\left((p_i^1)^{r_i^1}(1-p_i^1)^{n_i^1-r_i^1}\right)
\end{aligned}
$$