傅立叶变换 Fourier Transform

傅立叶级数

以2π为周期的函数的傅立叶级数

对于一个以2π为周期的函数，可以表达为傅立叶级数的形式：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)]$$

其中：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(kt)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(kt)dt$$

以2T为周期的函数的傅立叶级数

对于一个以2T为周期的函数，可以表达为傅立叶级数的形式：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(\frac{n\pi t}{T}) + b_n sin(\frac{n\pi t}{T})]$$

其中：

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)cos(\frac{n\pi t}{T})dt$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)sin(\frac{n\pi t}{T})dt$$

傅立叶级数的复数形式

利用欧拉公式$e^{ix}=cosx+isinx$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n-ib_n)e^{i(\frac{n\pi t}{T})}+(a_n+ib_n)e^{-i(\frac{n\pi t}{T})}]$$

令：

$$C_0=\frac{a_0}{2},C_n=\frac{a_n-ib_n}{2},C_{-n}=\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}$$

有：

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_ne^{i\frac{n\pi t}{T}}$$

$$C_n=\int_{-T}^{T}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{T}}dx$$

傅立叶变换

对于傅立叶级数的复数形式，令$\omega=\frac{2\pi}{N}$,$\omega_x=n\omega$

则傅立叶级数可以转换为：

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2T}\sum_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-T}^{T}f(t)e^{-in\omega t}dt)e^{-in\omega t}\\&=\frac{1}{2T}\sum_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_x)e^{-i\omega_x t}\\&=\frac{N}{4\pi T}\sum_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_x)e^{-i\omega_x t}\frac{2\pi}{N}\\&=\frac{N}{4\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega_x)e^{-i\omega_x t}d\omega_x\end{aligned}\tag{1}$$

其中

$$F(\omega_x) = \int_{-T}^{T} f(t)e^{-i\omega_x t}dt$$

为$f(t)$的傅立叶变换。

离散傅立叶变换DFT

对傅立叶变换进行离散化，积分变为求和。令：

$$\omega_x = \frac{2\pi}{N}n$$

得到：

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{N}{4\pi T}\sum_{-\infty}^{+\infty}[F(\omega_x)e^{-i\omega_x t}\frac{2\pi}{N}] \\ &= \frac{1}{2T}\sum_{n=0}^{N}[F(n)e^{-i(\frac{2\pi n}{N}t)}] \\ &= \sum_{n=0}^{N}[\frac{1}{N}F(n)e^{-i(\frac{2\pi n}{N}t)}] \end{aligned} \tag{2}$$

下式为离散傅立叶变换DFT：

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N}[\frac{1}{N}F(n)e^{-i(\frac{2\pi n}{N}t)}]$$

其中$F(n)$可以表示为离散傅立叶逆变换iDFT：

$$F(n) = \sum_{t=0}^{N} f(t)e^{-i(\frac{2\pi n}{N})t}$$

离散傅立叶变换的矩阵形式

离散傅立叶变换可以表达为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^1 & W_2^1 & \cdots & W_N^1 \\ W_1^2 & W_2^2 & \cdots & W_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_1^N & W_2^N & \cdots & W_N^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(1) \\ F(2) \\ \vdots \\ F(N) \end{bmatrix}$$

其中

$$W_t^n = e^{-i(\frac{2\pi n}{N})t}$$

离散傅立叶变换的参数含义

- $F(n)$为实部，表示直流分量，虚部相加为零。
- a_0与各直流分量相加和表示信号强度。
- 在k_c点的频率分量，其频率为$2\pi k_c f_s/N = 2\pi f$。其中$X[k_c]$代表频率为$f = k_c f_s/N$的频率分量。f_s为采样频率，k_c为第k_c个点，f为真实频率。