Relatório de Física — Física da queda livre

Frederico Esch Pereira, Gabriel de Oliveira Correa Abreu, Ícaro Andries

Setembro 2021

Introdução

Calculamos uma aproximação da aceleração gravitacional e da velocidade de um objeto baseado em sua queda livre, sabendo que durante a queda $\frac{d^2}{dt^2}y(t) \approx g$. Sabemos que a aceleração é definida por $a = \frac{d^2}{dt^2}y(t)$ e a velocidade é definida por $v(t) = \frac{d}{dt}y(t)$, portanto à partir do deslocamento de um objeto em queda livre podemos especular a aceleração que ele está sofrendo (que no caso da queda livre é apenas a aceleração da gravidade) e a partir da aceleração calcular a função da velocidade utilizando as seguintes relações segue[1]:

$$a = g$$

$$a = \frac{d^2}{dt^2}y(t)$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}y(t)$$

$$g = \frac{d}{dt}v(t)$$

$$\int_0^t g dt = \int_0^t dv(t)$$

$$gt = v(t) - v(0)$$

Sabendo que $v(0) = 0$ já que estamos falando de queda livre, temos que:

$$v(t) = gt$$

Para estes cálculos, *plotting* dos gráficos e manipulação das tabelas utilizamos a linguagem de programação *python* e algumas de suas bibliotecas[2]

Objetivos

Esperamos conseguir uma descrição apropriada do movimento de queda livre do objeto em experimentação, descrição que aproxime-se da realidade e da função que descreve a posição em função do tempo, para que com tal consigamos calcular uma aproximação do valor da aceleração da gravidade, e de uma função que descreva apropriadamente a sua velocidade durante a queda.

Procedimento Experimental

Para parte da realização das medidas utilizamos o programa *tracker*[3], ele foi nossa ferramenta para marcar as posições em pontos chave de tempo.

Utilizamos essas posições como uma função discreta da posição, ou seja, $y(t)$ se tornou y_t. A partir destes dados calculamos numericamente a segunda derivada da posição para alcançar algumas aproximações da aceleração da gravidade, e tiramos a média destas aproximações, utilizamos as seguintes fórmulas[4]:

$$\frac{d^2}{dt^2}y_t \approx \frac{y_{t-1} - 2y_t + y_{t+1}}{\Delta t^2}$$

Para o Δt de cada experimento usamos a média da variação entra cada t.
Utilizamos então a média da gravidade encontrada em cada ponto, lembrando que $\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \sum a$, sendo $\sum a$ o somatório de todas as acelerações que o corpo sofre, portanto $\sum a \approx g$ só é valido durante a queda, quando esse corpo toca o chão ele experiencia outras acelerações, como a aceleração normal vinda do chão e resistindo a gravidade reduzindo sua velocidade a zero. Dessa forma nos experimentos em que o objeto tocou o chão um pouco antes foram desconsideradas essas posições no cálculo da gravidade, essa discrepância no tempo em que cada objeto tocou o chão é claramente resultado de forças/acelerações que desconsideramos como a resistência do ar.
Para o cálculo da velocidade usamos as relação previamente mencionada $v(t) = gt$ calculada à partir da definições de aceleração e velocidade.

Todos os nossos erros foram calculados com base no desvio padrão dos pontos similares nos outros experimentos.

Resultado e Discussão

Com base no dados coletados:

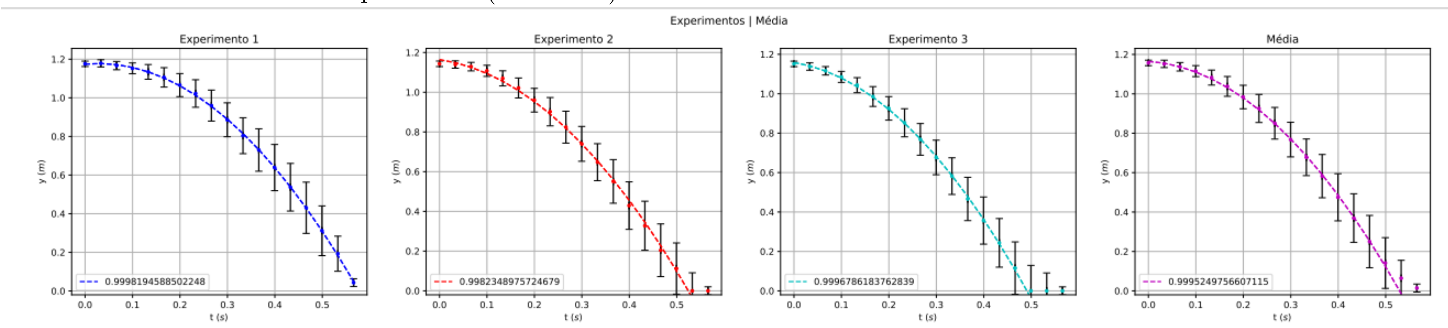
t_e_1	y_e_1	t_e_2	y_e_2	t_e_3	y_e_3
0	1.18	0	1.14	0	1.15
0.03	1.18	0.03	1.14	0.03	1.14
0.07	1.17	0.07	1.13	0.07	1.12
0.1	1.15	0.1	1.11	0.1	1.09
0.13	1.13	0.13	1.07	0.13	1.04
0.17	1.11	0.17	1.02	0.17	0.99
0.2	1.07	0.2	0.96	0.2	0.93
0.23	1.02	0.23	0.9	0.23	0.85
0.27	0.96	0.27	0.82	0.27	0.77
0.3	0.89	0.3	0.74	0.3	0.68
0.33	0.8	0.33	0.65	0.33	0.58
0.37	0.73	0.37	0.55	0.37	0.47
0.4	0.64	0.4	0.43	0.4	0.36
0.43	0.54	0.43	0.33	0.43	0.24
0.47	0.43	0.47	0.2	0.47	0.12
0.5	0.31	0.5	0.11	0.5	0
0.53	0.19	0.53	0	0.53	0
0.57	0.04	0.57	0	0.57	0

Conseguimos calcular as posições médias, e desvio padrão, expandindo nosso *dataset* para:

t_e_1	y_e_1	t_e_2	y_e_2	t_e_3	y_e_3	t_mean	y_mean	t_std	y_std
0	1.18	0	1.14	0	1.15	0	1.16	0	0.01
0.03	1.18	0.03	1.14	0.03	1.14	0.03	1.15	0	0.02
0.07	1.17	0.07	1.13	0.07	1.12	0.07	1.14	0	0.02
0.1	1.15	0.1	1.11	0.1	1.09	0.1	1.12	0	0.03
0.13	1.13	0.13	1.07	0.13	1.04	0.13	1.08	0	0.04
0.17	1.11	0.17	1.02	0.17	0.99	0.17	1.04	0	0.05
0.2	1.07	0.2	0.96	0.2	0.93	0.2	0.98	0	0.06
0.23	1.02	0.23	0.9	0.23	0.85	0.23	0.93	0	0.07
0.27	0.96	0.27	0.82	0.27	0.77	0.27	0.85	0	0.08
0.3	0.89	0.3	0.74	0.3	0.68	0.3	0.77	0	0.09
0.33	0.8	0.33	0.65	0.33	0.58	0.33	0.68	0	0.09
0.37	0.73	0.37	0.55	0.37	0.47	0.37	0.58	0	0.11
0.4	0.64	0.4	0.43	0.4	0.36	0.4	0.47	0	0.12
0.43	0.54	0.43	0.33	0.43	0.24	0.43	0.37	0	0.12
0.47	0.43	0.47	0.2	0.47	0.12	0.47	0.25	0	0.13
0.5	0.31	0.5	0.11	0.5	0	0.5	0.14	0	0.13
0.53	0.19	0.53	0	0.53	0	0.53	0.06	0	0.09
0.57	0.04	0.57	0	0.57	0	0.57	0.01	0	0.02

Essas imagens estão com números arredondados para facilitar a visualização, nossos dados tem algumas casas decimais a mais de precisão.

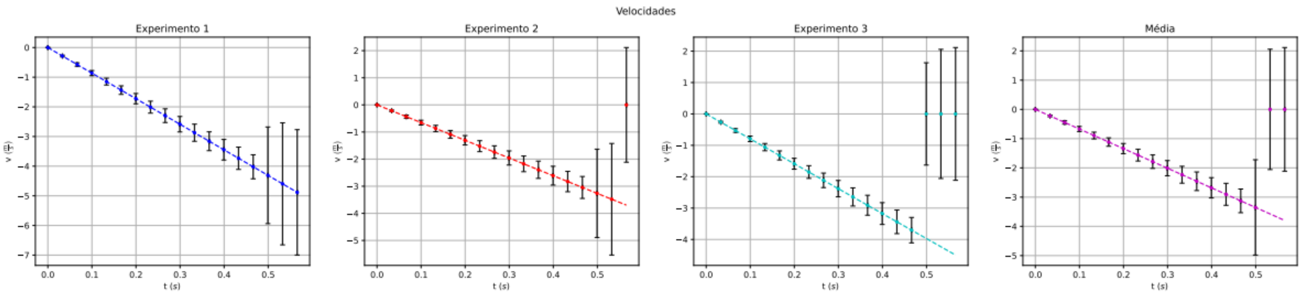
Utilizando estes dados fizemos regressões polinomiais (de segundo grau) para cada experimento (e a média):



Nossa polinomial encaixou muito bem com os dados coletados, ou seja, o movimento como um todo da amostra foi bem coletado, e encaixou bem com os resultados esperados.
Utilizando-os calculamos g para cada experimento, e a média, sendo:

$$\begin{aligned}
\text{Experimento 1} &: -8.629137473449681\frac{m}{s^2}\\
\text{Experimento 2} &: -6.534153395153145\frac{m}{s^2}\\
\text{Experimento 3} &: -7.944944676337065\frac{m}{s^2}\\
\text{Média} &: -6.711261909726238\frac{m}{s^2}
\end{aligned}$$

Nosso erro calculado em g foi de ± 0.8688713002904864
A gravidade, diferente da posição, tivemos uma discrepância maior entre o calculado e os $9.8\frac{m}{s^2}$ esperados, sabendo que o objeto escolhido tem um formato irregular e por ser bem leve sabíamos que a resistência do ar teria um efeito maior nos nossos resultados, somado ao fato de que nossas câmeras capturam poucas imagens por segundo resultando numa amostra pequena e imprecisa e com os cálculos de distancia do *tracker*, que por mais que permaneçam em uma escala boa, as vezes se distanciam dos valores reais, ainda sim acreditamos que a nossa aproximação numérica foi bem precisa, imaginando que o objeto sofreu uma aceleração de $\frac{1}{10}$ da gravidade não é muito fantasioso.
Para velocidade calculamos os pontos baseados em t, e fizemos a regressão linear (mesmo sendo redundante, dessa forma pudemos expandir a função pontual para uma linha que encaixasse exatamente), os resultados podem ser vistos a seguir:



Os pontos que não seguem a linha são os pontos em que o nosso objeto acertou o chão, e por isso a relação $v(t) = gt$ não pode ser seguida, por isso não incluímos estes pontos para a regressão.
Todos os pontos que calculamos, a média e os seus erros podem ser encontrados (de forma arredondada para facilitar a visualização) aqui:

t_e_1	y_e_1	t_e_2	y_e_2	t_e_3	y_e_3	t_mean	y_mean	t_std	y_std
0	1.18	0	1.14	0	1.15	0	1.16	0	0.01
0.03	1.18	0.03	1.14	0.03	1.14	0.03	1.15	0	0.02
0.07	1.17	0.07	1.13	0.07	1.12	0.07	1.14	0	0.02
0.1	1.15	0.1	1.11	0.1	1.09	0.1	1.12	0	0.03
0.13	1.13	0.13	1.07	0.13	1.04	0.13	1.08	0	0.04
0.17	1.11	0.17	1.02	0.17	0.99	0.17	1.04	0	0.05
0.2	1.07	0.2	0.96	0.2	0.93	0.2	0.98	0	0.06
0.23	1.02	0.23	0.9	0.23	0.85	0.23	0.93	0	0.07
0.27	0.96	0.27	0.82	0.27	0.77	0.27	0.85	0	0.08
0.3	0.89	0.3	0.74	0.3	0.68	0.3	0.77	0	0.09
0.33	0.8	0.33	0.65	0.33	0.58	0.33	0.68	0	0.09
0.37	0.73	0.37	0.55	0.37	0.47	0.37	0.58	0	0.11
0.4	0.64	0.4	0.43	0.4	0.36	0.4	0.47	0	0.12
0.43	0.54	0.43	0.33	0.43	0.24	0.43	0.37	0	0.12
0.47	0.43	0.47	0.2	0.47	0.12	0.47	0.25	0	0.13
0.5	0.31	0.5	0.11	0.5	0	0.5	0.14	0	0.13
0.53	0.19	0.53	0	0.53	0	0.53	0.06	0	0.09
0.57	0.04	0.57	0	0.57	0	0.57	0.01	0	0.02

O erro foi calculado através do desvio padrão das velocidades de tempos similares para cada experimento.

Conclusão

Os resultados obtidos como $g = -6.711 \frac{m}{s^2} \pm 0.869$, dado a quantidade de fatores desconsiderados foi bem próxima dos valores teóricos esperados, alguns dos experimentos (mais especificamente o 1º e o 3º) alcançaram uma proximidade surpreendente à valores reais, experimento 1 $= -8.630 \frac{m}{s^2} \pm 0.869$ e experimento 3 $= -7.945 \frac{m}{s^2} \pm 0.869$. Para as velocidades, os resultados foram bem consistentes com os dados coletados, portanto encontramos resultados melhores do que o esperado para uma experiência informal. Em relação á regressão polinomial aplicada na posição, esta mostrou que nossa coleta foi consistente, ou seja bem precisa, por mais que possamos especular que haja baixa exatidão já que utilizamos formas não profissionais de coleta de dados.

Bibliografia

1 : PDF escrito por Eduardo Jorge Barros de Deus e Mello Filho pela UFPB se aprofunda nas definições abordadas aqui e pode encontrado em https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7548/5/arquivototal.pdf

2 :As bibliotecas usadas foram:

- *numpy*: https://numpy.org/doc/stable/index.html
- *sklearn*: https://scikit-learn.org/stable/
- *pandas*: https://pandas.pydata.org
- *matplotlib*: https://matplotlib.org/stable/index.html

todas *open-source* e disponíveis gratuitamente.

3 :*Tracker* é um *software* gratuito e *open-source* que pode ser encontrado em https://physlets.org/tracker/

4 :Calculo de diferenciações finitas, calculadas numericamente podem ser encontradas em https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference