INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

CÁLCULO NUMÉRICO

Aula: Raízes de Funções – Parte 1.

ENG. MECÂNICA – IFPE (RECIFE)
Prof. Frederico Duarte de Menezes
Contato: fredericomenezes@recife.ifpe.edu.br

RAÍZES DE FUNÇÕES

Imagine que o nosso problema seja modelado como:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Fácil de resolver, correto?

RAÍZES DE FUNÇÕES

Imagine que o nosso problema seja [illegible] como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fácil de resolver, correto?

RAÍZES DE FUNÇÕES

E para outros tipos de funções mais complicadas?

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \ldots + f_1 y + f_0 = 0$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

E para outros tipos de funções mais complicadas?

$X^3 - 2x - 5 = 0$

$X^4 - x - 10 = 0$

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

RAÍZES DE FUNÇÕES

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

E para outros tipos de funções mais complicadas?

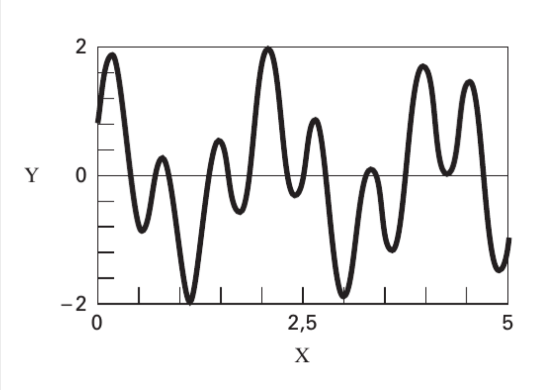
$$\tan(x) - \tanh(x) = 0$$

$$X - e^{-x} = 0$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Fácil de resolver???

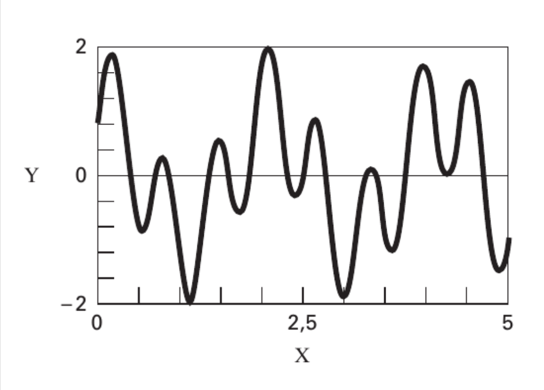
- Temos algumas abordagens…
  - Gráfica



RAÍZES DE FUNÇÕES

Fácil de resolver???

- Temos algumas abordagens...
  - Tentativa e Erro



RAÍZES DE FUNÇÕES

Fácil de resolver???

- Temos algumas abordagens...
  - Numéricas...

Bissecção

Falsa Posição

Iteração ponto fixo

Secante

Newton-Raphson

RAÍZES DE FUNÇÕES

Fácil de resolver???

- Temos algumas abordagens…
  - Numéricas…
    - Métodos Fechados (Intervalos)
    - Métodos Abertos

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

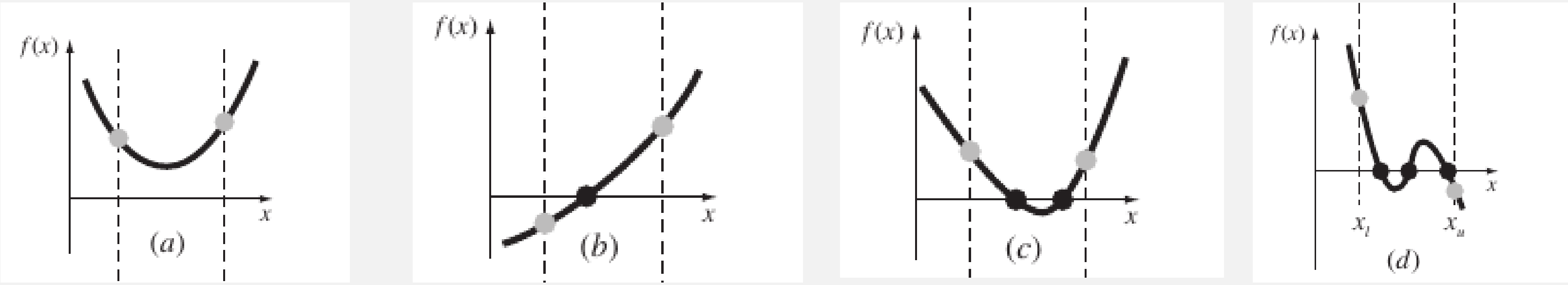
- “Tipicamente uma função contínua e diferenciável em um intervalo [a,b] muda de sinal na vizinhança de uma raiz.”

- Primeira abordagem → Método gráfico

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

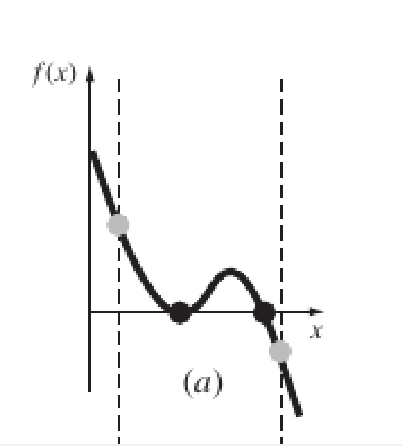
- Primeira abordagem → Método gráfico
  - Limitações
  - Vantagens



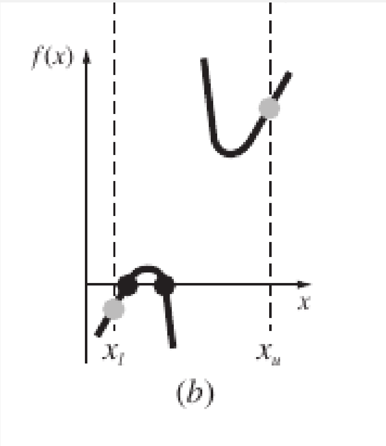
RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Primeira abordagem → Método gráfico
  - Cuidados com funções tangentes ou não contínuas



(a)



(b)

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Segunda abordagem → Método da Bissecção

  - *Dado uma função real e contínua em um dado intervalo* $[x_l,x_u]$*;*
  - *Se* $f(x_l)*f(x_u)<0$ *(sinais opostos), podemos afirmar que f(x) possui pelo*
  - *menos uma raiz real no intervalo* $[x_l,x_u]$*.*

- O método da bisseção divide esse intervalo pela metade de forma incremental, até obter a raiz desejada com uma precisão (erro) aceitável.

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Segunda abordagem → Método da Bissecção

Passo 1: Escolha as aproximações inferior x_l e superior x_u para a raiz de modo que a função mude de sinal no intervalo. Isso pode ser verificado garantindo que $f(x_l)f(x_u) < 0$.

Passo 2: Uma estimativa da raiz é determinada por

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Passo 3: Faça os seguintes cálculos para determinar em qual subintervalo a raiz está:

(a) se $f(x_l)f(x_r) < 0$, a raiz está no subintervalo inferior. Portanto, faça $x_u = x_r$ e volte ao passo 2.

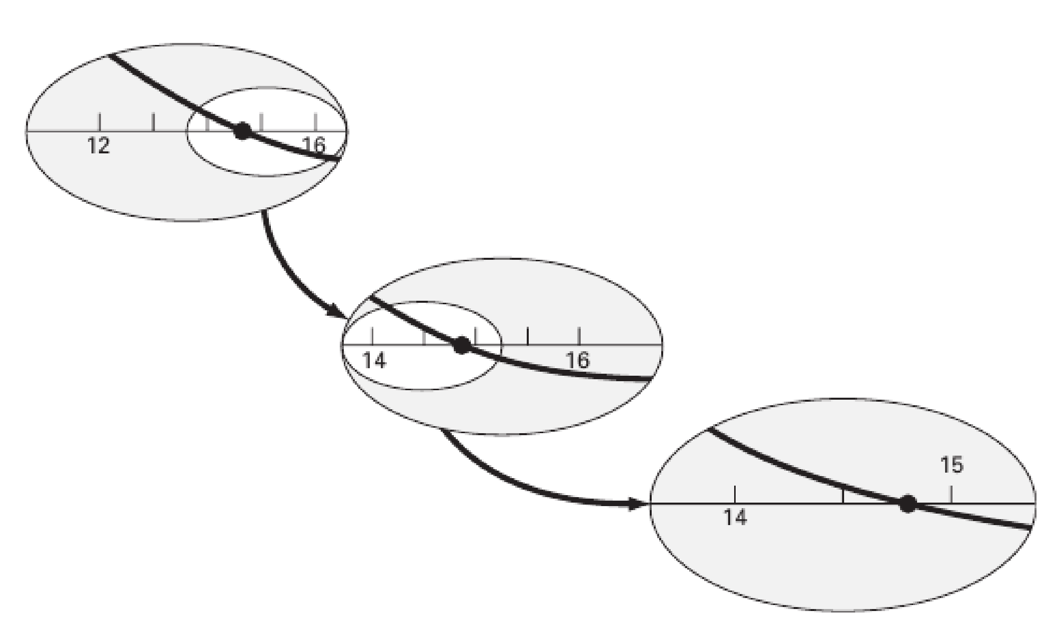
(b) se $f(x_l)f(x_r) > 0$, a raiz está no subintervalo superior. Portanto, faça $x_l = x_r$ e volte ao passo 2.

(c) se $f(x_l)f(x_r) = 0$, a raiz é igual a x_r; pare os cálculos.

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Segunda abordagem → Método da Bissecção



RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Segunda abordagem → Método da Bissecção

- O método da bisseção divide esse intervalo pela metade de forma incremental, até obter a raiz desejada com uma **precisão (erro) aceitável**.

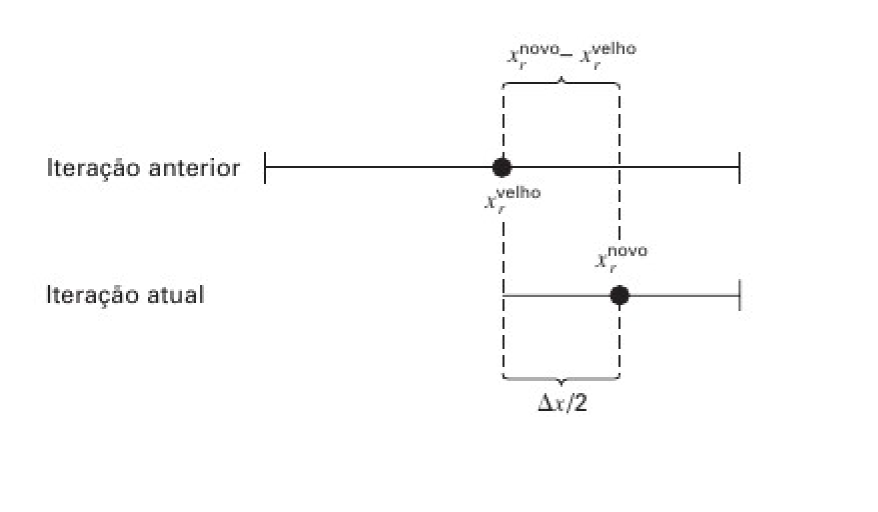
$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{\text{novo}} - x_r^{\text{velho}}}{x_r^{\text{novo}}} \right| 100\%$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Segunda abordagem → Método da Bissecção

- O método da bisseção divide esse intervalo pela metade de forma incremental, até obter a raiz desejada com uma **precisão (erro) aceitável**.



RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Segunda abordagem → Método da Bissecção

- Para aumentar a segurança do erro:

$$(x_u - x_l)/2 = \Delta x/2$$

$$x_r^{\text{novo}} - x_r^{\text{velho}} = \frac{x_u - x_l}{2}$$

$$x_r^{\text{novo}} = \frac{x_l + x_u}{2}$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_u - x_l}{x_u + x_l} \right| 100\%$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Segunda abordagem → Método da Bissecção

- Estimando número de iterações:

$$E_a^0 = x_u^0 - x_l^0 = \Delta x^0$$

$$E_a^n = \frac{\Delta x^0}{2^n}$$

$$E_a^1 = \frac{\Delta x^0}{2}$$

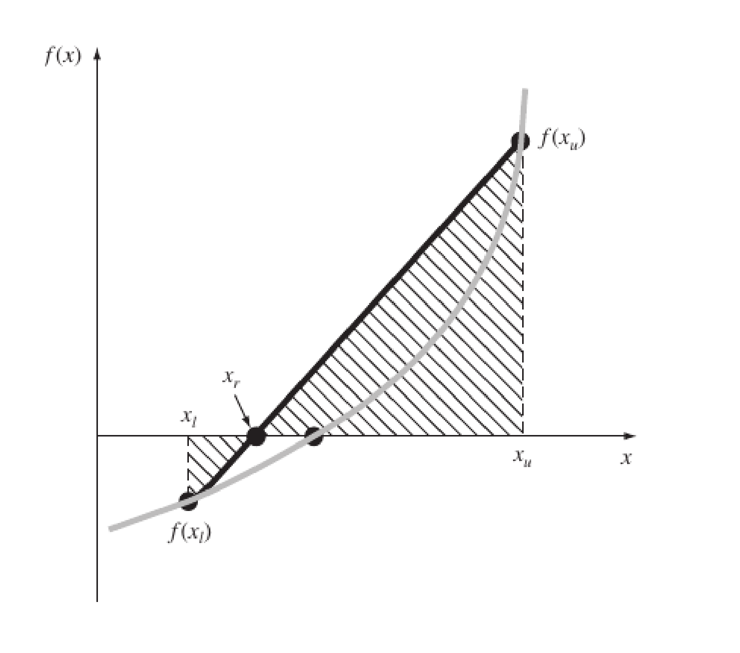
$$n = \frac{\log(\Delta x^0 / E_{a,d})}{\log 2} = \log_2\left(\frac{\Delta x^0}{E_{a,d}}\right)$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Terceira abordagem → Método da Falsa Posição

- Como funciona?

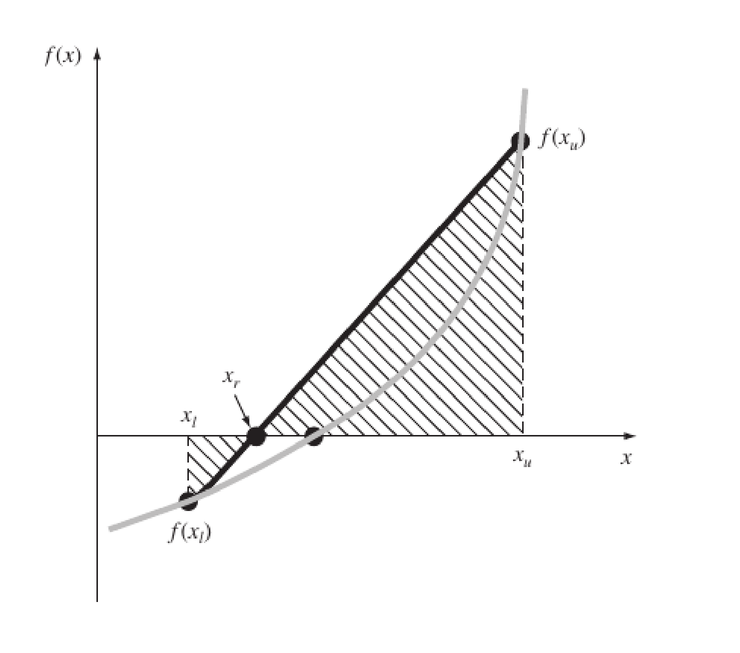


RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Terceira abordagem → Método da Falsa Posição

- Como funciona?



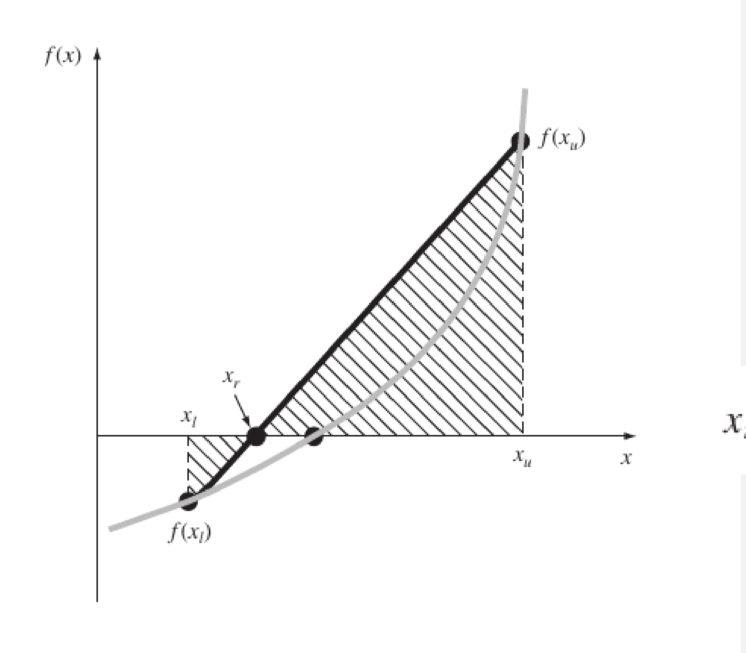
$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Terceira abordagem → Método da Falsa Posição

- Como funciona?



$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

$$f(x_l)(x_r - x_u) = f(x_u)(x_r - x_l)$$

$$x_r\,[f(x_l) - f(x_u)] = x_u\, f(x_l) - x_l\, f(x_u)$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Terceira abordagem → Método da Falsa Posição

- Como funciona?

$$\boxed{x_r\,[f(x_l) - f(x_u)] = x_u\,f(x_l) - x_l\,f(x_u)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x_r = \frac{x_u\,f(x_l) - x_l\,f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}}$$

- *Lembrando:*
  - *Verificar se $f(x_r) = 0$*
  - *Ou $f(x_l)*f(x_r)<0$*
  - *Ou $f(x_u)*f(x_r)<0$*

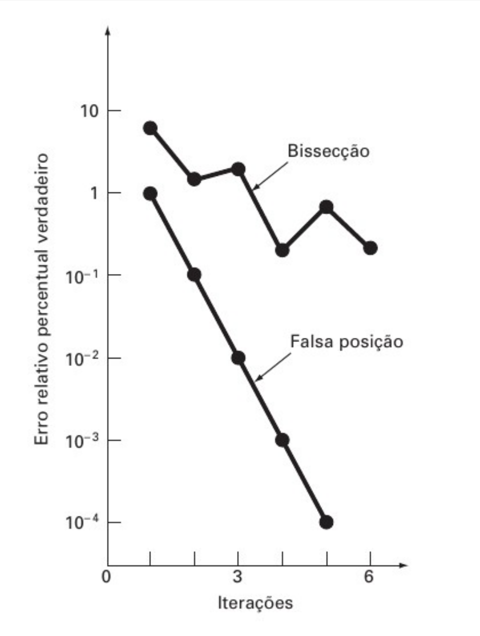
RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Terceira abordagem → Método da Falsa Posição

- Como funciona?

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$



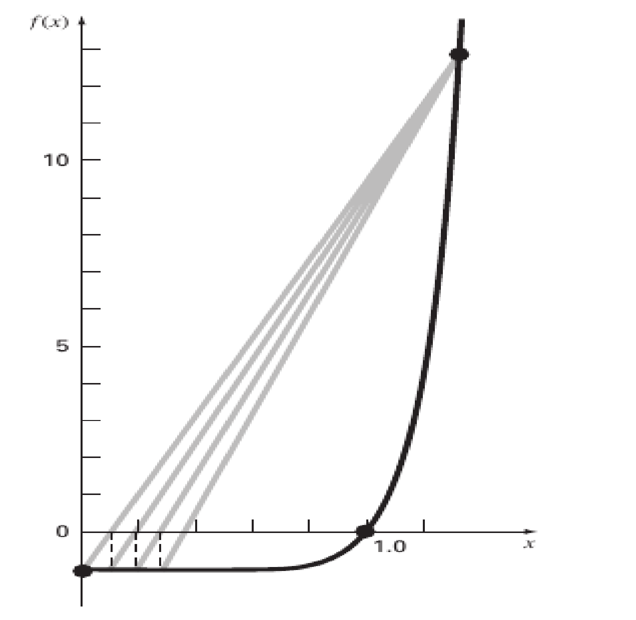
RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Terceira abordagem → Método da Falsa Posição

- Armadilhas…

$$f(x) = x^{10} - 1$$



RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Fechados:

- Terceira abordagem → Método da Falsa Posição

- Armadilhas... SOLUÇÃO?

- Podemos inserir no algoritmo uma instrução de verificação do número de iterações realizadas sem a modificação de um dos pontos limites do intervalo explorado.