CÁLCULO NUMÉRICO

Aula: Erros de Truncamento.

ENG. MECÂNICA – IFPE (RECIFE)
Prof. Frederico Duarte de Menezes
Contato: fredericomenezes@recife.ifpe.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Quais os erros mais importantes?

- ~~Erros de Arrendondamento.~~
- Erros de Truncamento;

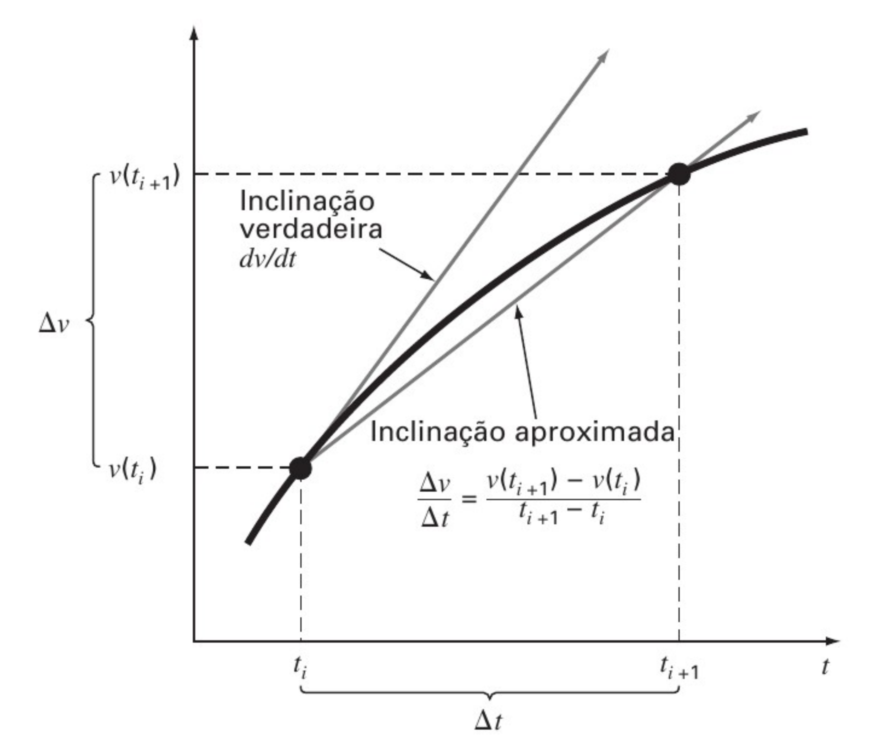
INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE TRUNCAMENTO

- Os erros de truncamento são inerentes aos modelos construídos e não a realização dos seus cálculos.
- Uma vez que os métodos numéricos são aproximações de modelos analíticos, na prática não podemos realizar aproximações infinitas...

ERROS DE TRUNCAMENTO

- Explicando melhor...



ERROS DE TRUNCAMENTO

Podemos explicar o erro de truncamento nos baseando na teoria de séries de Taylor, desde que os polinômios a serem aproximados sejam funções contínuas e diferenciáveis nos intervalos de valores estudados.

Brook Taylor (1685-1731)

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE TRUNCAMENTO

- Aproximando uma função através de uma série de Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

- Na teoria, poderíamos expandir a série infinitamente, desde que as derivadas de ordem superior permitam.
- Contudo, na prática não temos esse luxo...

ERROS DE TRUNCAMENTO

- Logo, em um dado momento devemos “truncar” a expansão:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

- Uma vez que truncamos a função, surge um termo $R_{n+1}(x)$, que representa o erro de truncamento, ou seja, a informação perdida ao se desprezar os termos superiores da expansão.

ERROS DE TRUNCAMENTO

- De maneira geral, o valor de R pode ser expresso como:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{com} \quad a \leq \xi \leq x.$$

- Onde ξ representa um valor desconhecido entre a e x. Na prática, normalmente atribui-se o erro de truncamento R para ξ=a.

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE TRUNCAMENTO

- Olhando novamente a nossa expansão:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

- Substituindo **x-a** por **h**, temos:

$$f(h+a) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}(x)$$

ERROS DE TRUNCAMENTO

- Com a substituição de h=x-a, a expressão de R passa a ser:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

- Observando a equação acima, podemos deduzir que:
  - 1: O erro de truncamento de uma expansão de Taylor torna-se menos significativo com o aumento de n;
  - 2: Quanto menor for h, menor o erro de truncamento.

ERROS DE TRUNCAMENTO

- Entendendo o resto da expansão:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

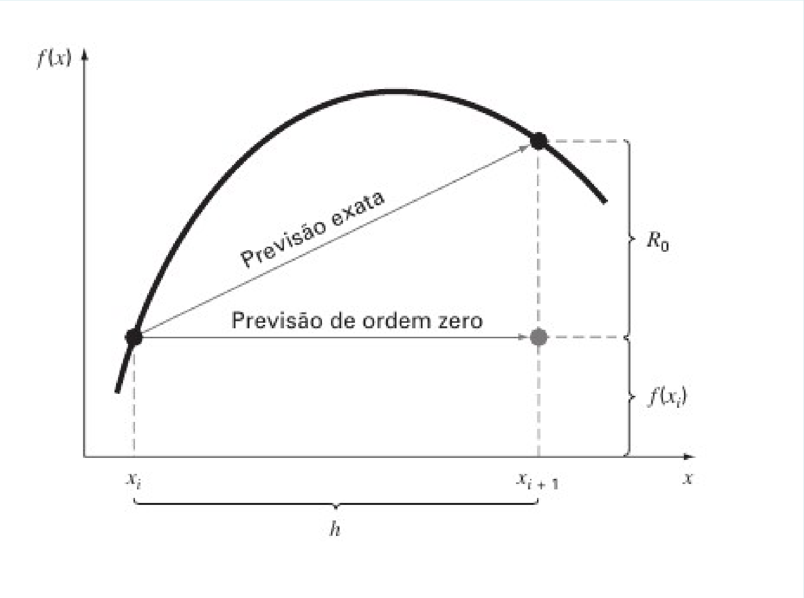
$$R_0 = f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots$$

$$R_0 \cong f'(x_i)h$$

ERROS DE TRUNCAMENTO

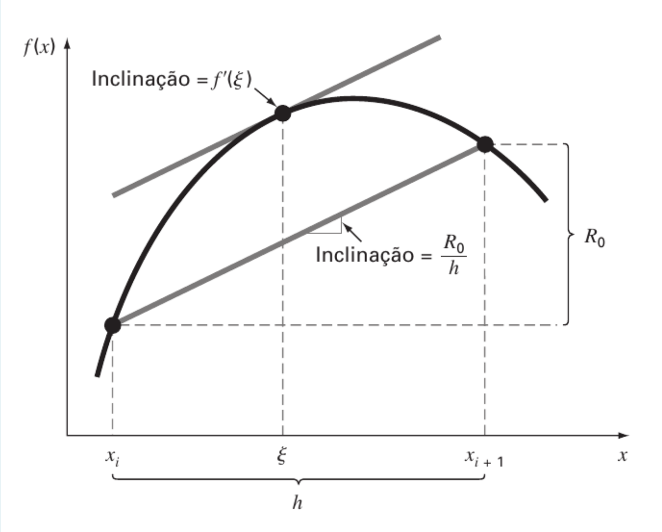
- Entendendo o resto da expansão (interpretação gráfica):

$$R_0 \cong f'(x_i)h$$



ERROS DE TRUNCAMENTO

- Entendendo o resto da expansão (interpretação gráfica):



$$f'(\xi) = \frac{R_0}{h}$$

Inclinação da Reta

$$R_0 = f'(\xi)h$$

ERROS DE TRUNCAMENTO

- Entendendo o resto da expansão:

$$R_0 = f'(\xi)h$$

Resto de Ordem Zero

$$R_1 = \frac{f''(\xi)}{2!}h^2$$

Resto de Primeira Ordem

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Resto de Ordem n