INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

CÁLCULO NUMÉRICO

Aula: Raízes de Funções – Parte 2.

ENG. MECÂNICA – IFPE (RECIFE)
Prof. Frederico Duarte de Menezes
Contato: fredericomenezes@recife.ifpe.edu.br

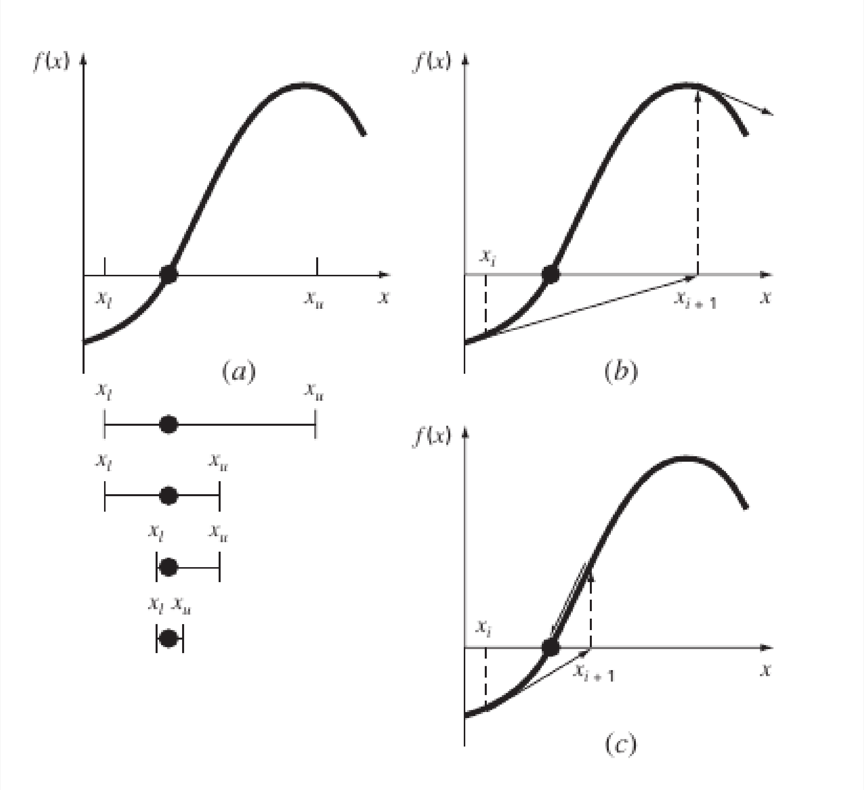
RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Necessitam de apenas um valor inicial para fazer a busca…
  - Podem divergir das soluções desejadas
  - Porém, se houver uma convergência, esta tende a ser mais rápida do que nos métodos intervalares.

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:



RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Iteração de ponto fixo
  - Suponha uma função f(x) = 0;
  - Reajustamos para x = g(x), desta forma conseguimos aplicar o método;
  - Ex.:

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \longrightarrow x = \frac{x^2 + 3}{2}$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Iteração de ponto fixo
  - A aproximação g(x) = x permite obter um x “novo”, a partir de um x “velho”.

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Iteração de ponto fixo
  - Ex.:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

i	x_i	ε_a (%)	ε_t (%)
0	0		100,0
1	1,000000	100,0	76,3
2	0,367879	171,8	35,1
3	0,692201	46,9	22,1
4	0,500473	38,3	11,8
5	0,606244	17,4	6,89
6	0,545396	11,2	3,83
7	0,579612	5,90	2,20
8	0,560115	3,48	1,24
9	0,571143	1,93	0,705
10	0,564879	1,11	0,399

0,56714329

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Iteração de ponto fixo
  - Convergência
  - A iteração de ponto fixo tende a ter uma convergência linear;
  - Uma abordagem gráfica pode ser utilizada para avaliar o ponto de convergência (raiz).

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

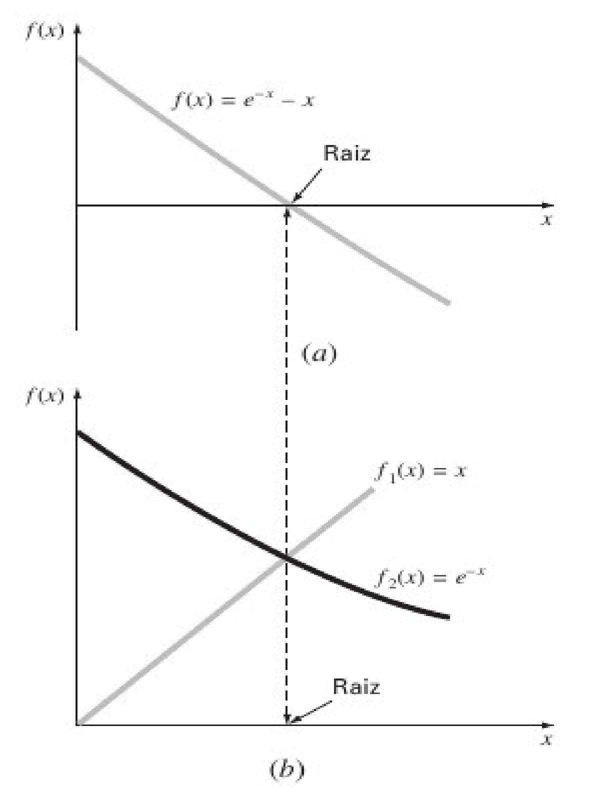
- Iteração de ponto fixo
  - Ex.: $f(x) = e^{-x} - x$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$y_1 = f_1(x)$$

e

$$y_2 = f_2(x)$$



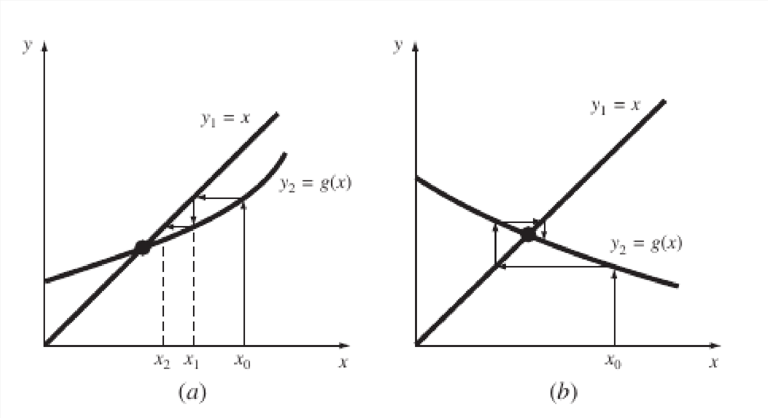
x	y_1	y_2
0,0	0,0	1,000
0,2	0,2	0,819
0,4	0,4	0,670
0,6	0,6	0,549
0,8	0,8	0,449
1,0	1,0	0,368

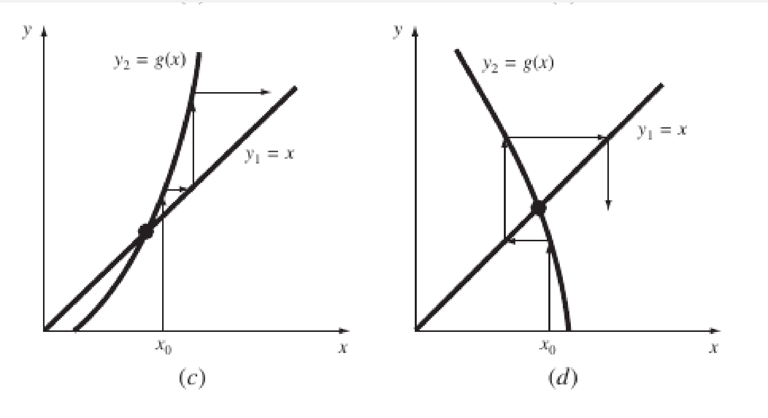
INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Iteração de ponto fixo
  - Convergência X Divergência





RAÍZES DE FUNÇÕES

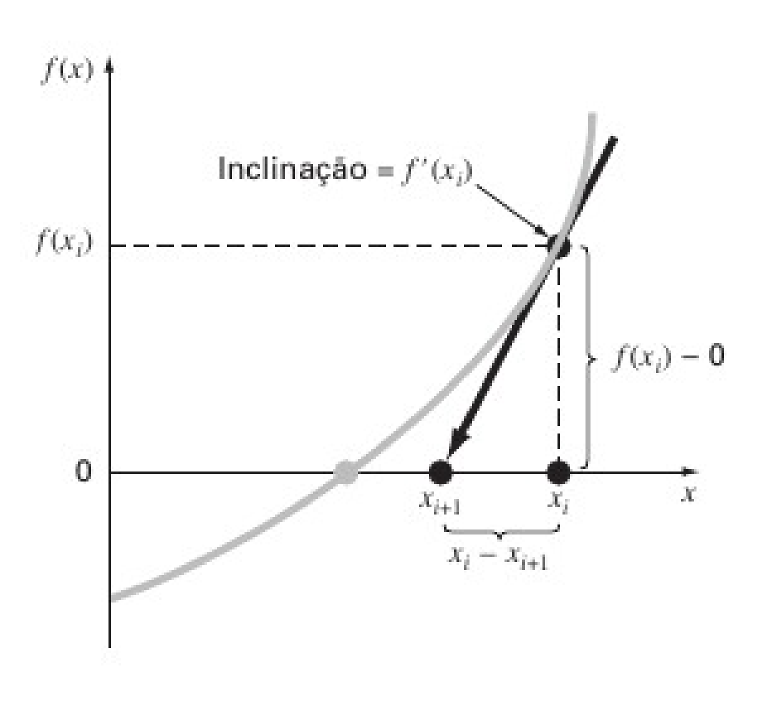
Métodos Abertos:

- Newton-Raphson
  - *Considere uma função f(x) contínua e diferenciável em [a,b];*
  - *Para cada ponto f(x), pode-se estender apenas uma tangente que através do ponto [x,f(x)];*
  - *O valor onde a reta tangente corta o eixo dos x é uma estimativa melhorada da raiz de f(x).*

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Newton-Raphson



RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Newton-Raphson
- *Fundamento do algoritmo:*

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Fórmula de Newton-Raphson

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Newton-Raphson
- *Estimativa do erro:*
    - *Baseando-se na expansão de Taylor:*

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Newton-Raphson
- *Estimativa do erro:*
    - *Baseando-se na expansão de Taylor:*

$$\boxed{0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_r - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_r - x_i)^2}$$

$$\boxed{0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)}$$

$$\boxed{0 = f'(x_i)(x_r - x_{i+1}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_r - x_i)^2}$$

$$\boxed{E_{t,i+1} = x_r - x_{i+1}}$$

$$\boxed{E_{t,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)}E_{t,i}^2}$$

Erro

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Newton-Raphson
- *Estimativa do erro:*
  - *Exemplo:*

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$E_{t,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

i	x_i	ε_a (%)	ε_t (%)
0	0		100,0
1	1,000000	100,0	76,3
2	0,367879	171,8	35,1
3	0,692201	46,9	22,1
4	0,500473	38,3	11,8
5	0,606244	17,4	6,89
6	0,545396	11,2	3,83
7	0,579612	5,90	2,20
8	0,560115	3,48	1,24
9	0,571143	1,93	0,705
10	0,564879	1,11	0,399

0,56714329

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

RAÍZES DE FUNÇÕES

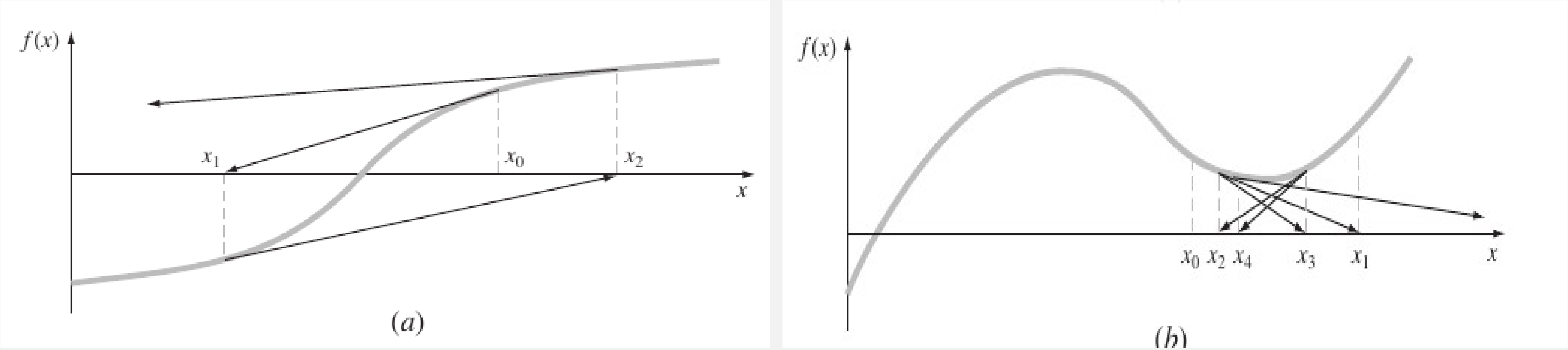
Métodos Abertos:

- Newton-Raphson
- *Armadilhas:*
    - *Convergência lenta pela natureza da função ($f(x) = x^{10}-1$);*
    - *Pontos de inflexão na curva ($f''(x) = 0$) na vizinhança;*
    - *Inclinação nula na curva ($f'(x)=0$);*
    - *Etc.*

RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Newton-Raphson
- *Armadilhas:*



RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

- Secante
- *Problema de Newton-Raphson → Cálculo de derivada;*
    - *Solução:*
    - *Aproximação da primeira derivada:*

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \longrightarrow \boxed{f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}}$$

RAÍZES DE FUNÇÕES

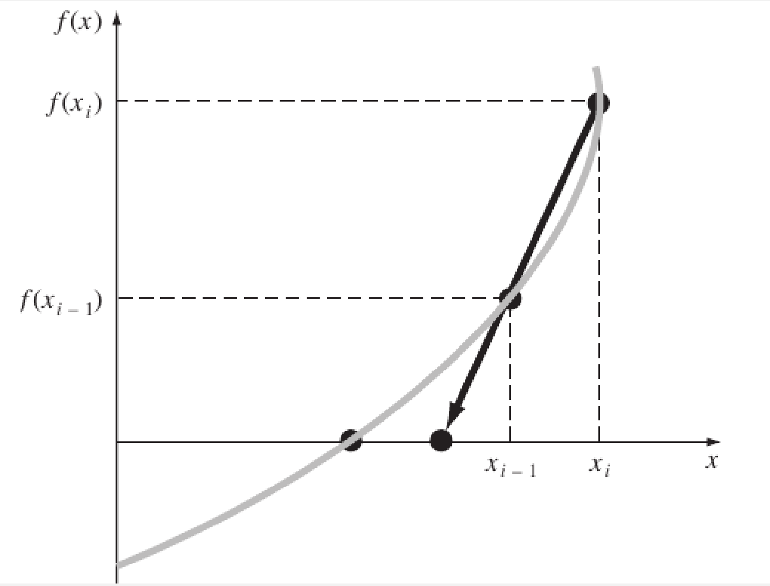
Métodos Abertos:

- Secante
- *Problema de Newton-Raphson → Cálculo de derivada;*
    - *Solução:*
    - *Aproximação da primeira derivada:*

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

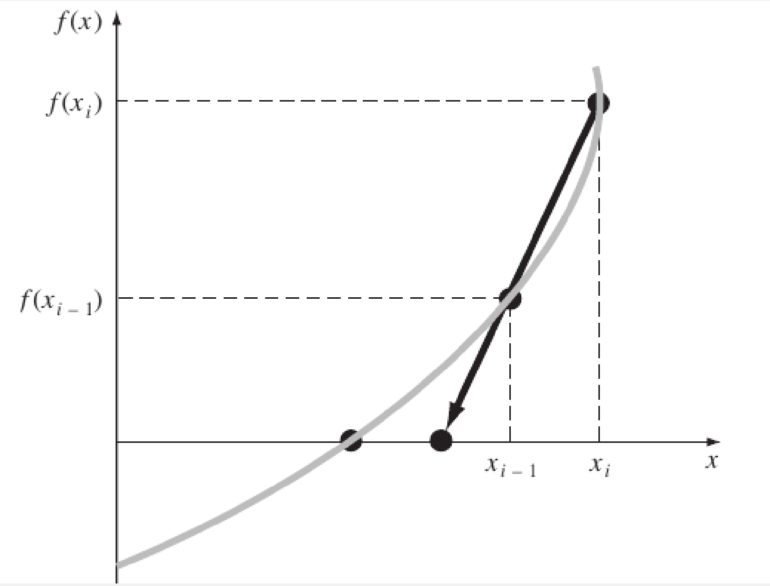


RAÍZES DE FUNÇÕES

Métodos Abertos:

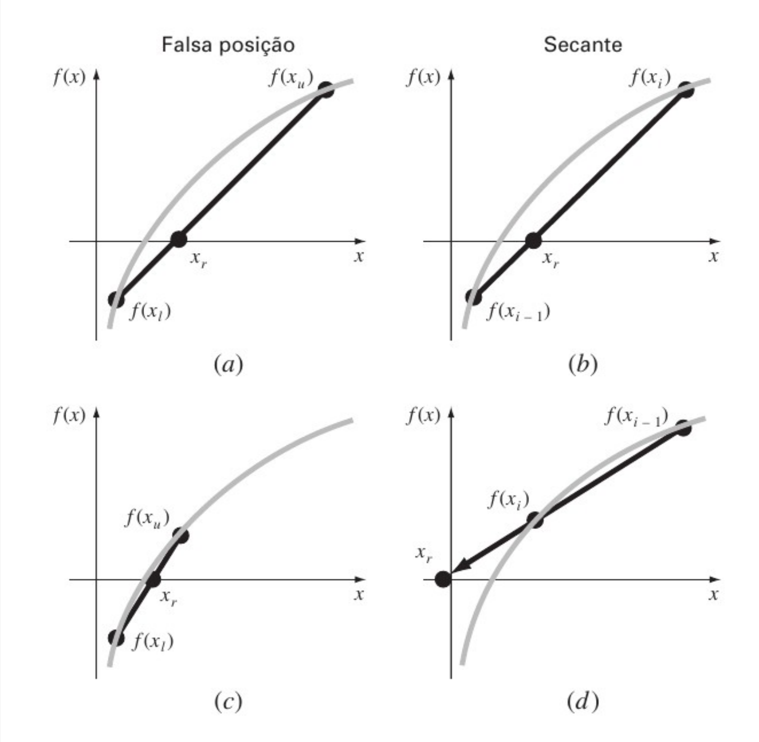
- Secante
- *Embora precisemos de dois valores iniciais, estes não necessitam gerar $f(x_i)f(x_{i-1})<0$*

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$



RAÍZES DE FUNÇÕES

Secante X Falsa Posição:



RAÍZES DE FUNÇÕES

Convergência dos Métodos: