CÁLCULO NUMÉRICO

Aula: Erros de arredondamento – Parte 2.

ENG. MECÂNICA – IFPE (RECIFE)
Prof. Frederico Duarte de Menezes
Contato: fredericomenezes@recife.ifpe.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE ARREDONDAMENTO

Quais são os erros mais comuns de arredondamento?

Além da própria representação limitada de valores em ponto flutuante por computadores, a própria manipulação desses valores também podem gerar erros de arredondamento...

ERROS DE ARREDONDAMENTO

Operações aritméticas básicas:

- Soma:
  - Suponha a soma entre **$0{,}2318 * 10^{1}$** e **$0{,}3578 * 10^{-1}$**
  - Inicialmente devemos garantir o mesmo expoente dos valores, para fins de alinhamento dos pontos decimais...

ERROS DE SOMA

$0{,}2318 * 10^{1}$ **OK**

$0{,}3578 * 10^{-1} \rightarrow 0{,}003578 * 10^{1}$ **OK**

Regra: *deslocamos a vírgula do menor valor o número de vezes da diferença entre os expoentes (1-(-1) = 2).*

Agora procedemos com a soma...

ERROS DE SOMA

$$
\begin{array}{r}
0{,}2318 \quad * 10^{1} \\
+\ 0{,}003578 * 10^{1} \\
\hline
0{,}235378 * 10^{1}
\end{array}
$$

Até aqui tudo ok.

Mas, e se nosso computador só pudesse armazenar os valores em ponto flutuante com apenas quatro algarismos na mantissa e um expoente igual a 1?

ERROS DE SOMA

$$0{,}235378 * 10^{1} \rightarrow 0{,}2353 * 10^{1}$$

O valor *$0{,}000078 * 10^{1}$* é simplesmente **perdido**!!!

Mesmo em computadores que utilizam vários bytes para armazenamento, valores muito altos ou muito baixos também podem perder informações...

ERROS DE SOMA

Curiosidade:

Em **Python**, podemos “arredondar” valores em ponto flutuante de forma intencional usando algumas funções:

- `ceil(x)`: arredonda x para o valor inteiro superior mais próximo;
- `floor(x)`: arredonda x para o valor inteiro inferior mais próximo;
- `round(x,n)`: arredonda x para um valor com n casas decimais.
    - Obs.: para usar `ceil` e `floor`, devemos importar a biblioteca Math

ERROS DE SUBTRAÇÃO

- Subtração:
  - O comportamento da geração do erro de arredondamento é o mesmo da soma…

$$
\begin{array}{r}
0{,}2318 * 10^{1} \\
-\ 0{,}003578 * 10^{1} \\
\hline
0{,}228222 * 10^{1}
\end{array}
$$

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE SUBTRAÇÃO

Em nosso computador hipotético:

$$0{,}228222 * 10^{1} \rightarrow 0{,}2282 * 10^{1}$$

- Mais uma vez, $0{,}000022 * 10^{1}$ se transformando em erro de arredondamento.
- No caso de multiplicação e divisão, o entendimento é mais simples.

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE ARREDONDAMENTO

Multiplicação e Divisão:

Nestes casos, as operações se resumem a multiplicação das mantissas e soma dos expoentes em base comum:

$$(x_1 * 10^a) * (x_2 * 10^b) = x_1 * x_2 * 10^{(a + b)}$$

$$(x_1 * 10^a) / (x_2 * 10^b) = x_1 * x_2 * 10^{(a - b)}$$

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE ARREDONDAMENTO

$$(x_1 * 10^a) * (x_2 * 10^b) = x_1 * x_2 * 10^{(a+b)}$$

$$(x_1 * 10^a) / (x_2 * 10^b) = x_1 * x_2 * 10^{(a-b)}$$

Em ambos os casos, ao fim da operação devemos traduzir o valor obtido para um expoente e tamanho de mantissas pré-determinados, podendo resultar em erros maiores ou menores.

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE ARREDONDAMENTO

$$
\begin{array}{r}
0{,}1363 \ * \ 10^{3} \\
\times \ \ 0{,}6423 \ * \ 10^{-1} \\
\hline
0{,}08754549 \ * \ 10^{2}
\end{array}
$$

Ajustando para 4 dígitos e e = 1:

$$0{,}8754 * 10^{1}$$

ERROS DE ARREDONDAMENTO

Cálculos Grandes:

- Exemplo clássico:
  - Soma de um valor muito pequeno consigo mesmo sob um número elevado de repetições.
  - A medida que o número de repetições torna-se muito grande, o erro de arredondamento acumulado também se torna significativo.

ERROS DE ARREDONDAMENTO

Cálculos Grandes:

- Exemplo:
  - Escrever um programa que some 0,00001 com uma repetição de 100.000 vezes.
  - O valor esperado seria 1, mas será que um computador resulta no mesmo valor?

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE ARREDONDAMENTO

Adição de número grande com um número pequeno:

- Suponha a soma de 0,0010 ao valor 5.000. Pela comparação, podemos dizer que 5.000 é um número grande em relação a 0,0010.
- Se utilizarmos uma representação numérica de 4 algarismos na mantissa e 1 algarismo no expoente, nossa soma será...

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE ARREDONDAMENTO

Adição de número grande com um número pequeno:

$$5.000 \rightarrow 0{,}5000 * 10^4$$

$$0{,}0010 \rightarrow 0{,}0000001 * 10^4$$

Soma:

$$\begin{array}{rl} & 0{,}5000 \quad\quad * 10^4 \\ + & 0{,}0000001 * 10^4 \\ \hline & 0{,}5000001 * 10^4 \end{array} \rightarrow 0{,}5000 * 10^4$$

INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco
Campus Recife

ERROS DE ARREDONDAMENTO

Logo, podemos ver que o valor pequeno tornou-se não significativo…

Se este tipo de erro acontece em operações intermediárias, várias vezes antes do resultado final, o erro se torna muito significativo!!!