Boolean Algebra

Frederik GJ

April 2024

1 The Algebra of sets

1.1 Grundlæggende teori omkring sæt

- Vi har ”sets” og ”elements”.

$$a \in X$$

- her siger vi at a er et element i sættet X.

$$X = Y$$

- her siger vi at sættet X er lig med sættet Y.

$$X \subseteq Y$$

- her siger vi a X er et subset i sættet Y.
- **Vi har to specielle set - det universelle og null sættet.**

$$1$$

- Det universelle sæt har symbolet 1. Vi siger at alle sæt er et subset til 1

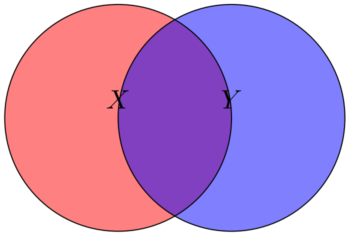
$$null\ set\ skrives\ 0$$

- sættet 0 har ingen elementer og er et subset af alle andre sæt.
- Det er vigtigt at huske at de specielle sæt noteret 1 og 0 ikke er tal.

$$x$$

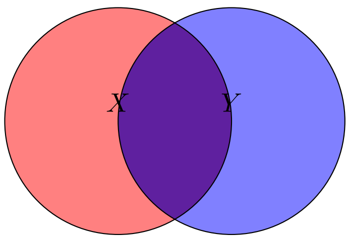
- Dette er *unit set* - som kun har et element.
- for hvert sæt fx X er der et komplementær sæt X'. Hvor X' er det sæt der indeholder alle elementer i det iuniversælle sæt som ikke er en del af X

- en union mellem to sæt skrives $X + Y$. og er sættet der består af alle elementer der er enten i X eller i Y eller i deres fællesmængde.



$X + Y$

- Vi skriver $X \cdot Y$ for en intersection mellem de to sæt. Dermed mener vi allelementer somer både i X og i Y.



$X \cdot Y$ kan også skrives XY

Vi ser nu at for et arbitræt sæt kaldet X at $X + X' = 1$ (Det universælle sæt) og at $XX' = 0$ (er det tomme sæt)

1.2 monomial

En monomial er enten et sæt som er repræsenteret ved et enkelt bogstav eller en intersection mellem flere sæt fx $XY'Z$

Primes in Boolean Algebra

In Boolean algebra, "primes" usually refer to prime implicants. Let's understand these terms:

- **Boolean Algebra**: A system dealing with logic operations (AND, OR, NOT) and Boolean values (True and False).
- **Implicant**: In a Boolean expression, an implicant is a product term (variables combined with the AND operation) that implies the entire expression. In other words, whenever the implicant is True, the whole expression must be True.
- **Prime Implicant**: A prime implicant is a product term that cannot be further simplified (by removing variables) while still being an implicant of the expression.

Example

Consider the Boolean expression: $AB + AC$

- Implicants: AB, AC
- Prime Implicants: AB, AC (they cannot be simplified further)

Why Prime Implicants Matter

Prime implicants are the essential building blocks for simplifying Boolean expressions. Techniques like Karnaugh maps and the Quine-McCluskey algorithm rely on identifying prime implicants for finding the most simplified form of a Boolean expression.