

V353

Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Frederik Zielke

frederik.zielke@tu-dortmund.de

Lennart Völz

lennart.voelz@tu-dortmund.de

Durchführung: 20.12.2022

Abgabe: 10.01.2023

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Kondensator	3
2.2 Relaxationsphänomene bei periodischer Auslenkung	4
2.3 RC-Kreis als Integrator	6
3 Durchführung	6
3.1 Aufbau	6
3.2 Messung	6
4 Auswertung	8
4.1 Bestimmung der Zeitkonstante eines RC Glieds mit angelegter Rechteckspannung	8
4.2 Bestimmung der Zeitkonstante mit angelegter Sinusspannung	9
4.3 Bestimmung der Zeitkonstante über die Phasenverschiebung	11
4.4 RC-Glied als Integrator	14
5 Diskussion	15
Literatur	16

1 Zielsetzung

Im Versuch 353 wird das Relaxationsverhalten eines RC-Schwingkreises untersucht. Die RC-Konstante des Kreises soll mithilfe des an einem Oszilloskop gemessenen Spannungsabfalls bestimmt werden. Außerdem soll die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannungsamplitude in einem RC-Kreis untersucht werden.

2 Theorie

Wenn ein System aus seinem Ausgangszustand ausgelenkt wird und es nicht-oszillatorisch wieder in diesen zurückkehrt, wird dies als Relaxation bezeichnet. Die Änderungsrate der betrachteten Größe A ist meist proportional zur Abweichung des Endzustandes $A(\infty)$

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)]. \quad (1)$$

Integriert vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t ergibt sich

$$\int_{A(0)}^{A(t)} \frac{dA'}{A' - A(\infty)} = \int_0^t c dt'. \quad (2)$$

Die Gleichung (2) nach $A(t)$ aufgelöst ist

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] e^{(ct)}$$

gültig mit $c < 0$.

2.1 Kondensator

Konkret betrachtet wird der Be- und Entladungsprozess eines Kondensators über einen Widerstand. Für die Spannung an einem Kondensator gilt

$$U_C = \frac{Q}{C}. \quad (3)$$

Mit den Ohmschen Gesetzen ergibt sich der Strom

$$I = \frac{U_C}{R}. \quad (4)$$

Die zeitliche Änderung der Kondensatorladung Q ist durch die Gleichung

$$dQ = -Idt \quad (5)$$

gegeben. Mithilfe der Gleichungen (3) und (4) wird diese Gleichung in die Form von (1) gebracht

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t),$$

wobei $Q(\infty) = 0$ gilt.

Mit einer Integration wie in (2) ist

$$Q(t) = Q(0) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Mit den Randbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$ wird der Aufladevorgang durch die Gleichung

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

beschrieben. Unter Verwendung von (3) kann die Gleichung umgeformt werden zu

$$\ln \left(\frac{U_C}{U_0} \right) = -\frac{t}{RC}.$$

Wird der $\ln \left(\frac{U_C}{U_0} \right)$ gegen die Zeit t aufgetragen ergibt der negative Kehrwert der Steigung die RC-Konstante.

2.2 Relaxationsphänomene bei periodischer Auslenkung

Unter sinusförmiger periodischer Auslenkung zeigen sich auch Relaxationsphänomene. Ist die Kreisfrequenz ω des Auslenkungssignals

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

ausreichend klein, also $\omega \ll \frac{1}{RC}$, so ist die Kondensatorspannung $U_C(t)$ jederzeit gleich $U(t)$. Mit steigender Frequenz verschiebt sich der Be- und Entladevorgang des Kondensators immer weiter hinter den Verlauf der Generatorspannung. Die Amplitude A der Kondensatorspannung nimmt ab und es bildet sich eine Phasenverschiebung φ zwischen den Spannungen aus. Um die Frequenzabhängigkeit der Phase und Amplitude von U_C herauszufinden eignet sich der Ansatz

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi\{\omega\}). \quad (6)$$

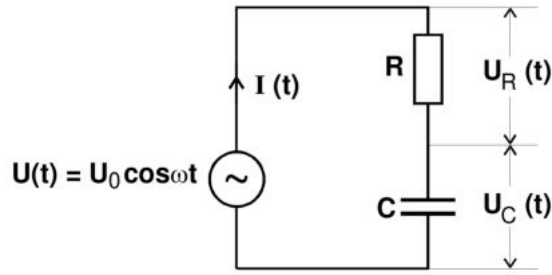


Abbildung 1: Beispielhafte Schaltskizze eines RC-Schwingkreises.[3]

Aus einer Schaltung wie in Abbildung 1 lässt sich mithilfe des zweiten Kirchhoffschen Gesetzes folgender Ausdruck für die Gesamtspannung herleiten

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t), \quad (7)$$

ausformuliert wird die Gleichung zu

$$U_0 \cos \omega t = I(t)R + A(\omega) \cos(\omega t + \varphi). \quad (8)$$

Die Gleichung ist nur unter der Voraussetzung gültig, dass der Innenwiderstand $R_i = 0$ ist, da sonst $U_R(t) = (R + R_i) \cdot I(t)$.

Der Strom $I(t)$ lässt sich mit Gleichung (3) und (5) umformulieren zu

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}. \quad (9)$$

Zusammen mit den Gleichungen (6), (8) und (9) ergibt sich

$$U_0 \cos \omega t = -A\omega RC \sin(\omega t + \varphi) + A(\omega) \cos(\omega t + \varphi). \quad (10)$$

Die Gleichung (10) muss für jedes t gelten.

Für $\omega t = \frac{\pi}{2}$ gilt dann

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi(\omega) = -\omega RC \quad \text{oder} \quad \varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \quad (11)$$

Für hohe Frequenzen geht φ also asymptotisch gegen $\frac{\pi}{2}$, für niedrige Frequenzen gegen 0.

Bei $\omega = \frac{1}{RC}$ ist $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Weiter folgt aus (10) mit $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ die Gleichung

$$A(\omega) = -\frac{\sin \varphi}{\omega RC} U_0. \quad (12)$$

Aus Gleichung (11) kann

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (13)$$

hergeleitet werden. Aus (13) lässt sich erkennen, dass die Amplitude $A(\omega)$ für $\omega \rightarrow 0$ gegen U_0 und für $\omega \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Bei einer Kreisfrequenz von $\frac{1}{RC}$ ist $A = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

2.3 RC-Kreis als Integrator

Zeitlich veränderliche Spannungen die wie in Abbildung 1 an einem Kondensator anliegen, können unter bestimmten Voraussetzungen durch einen RC-Kreis integriert werden. Die Gleichung (7) mit $I(t)$ durch (9) ersetzt ergibt

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t). \quad (14)$$

Wird $\omega \gg \frac{1}{RC}$ angenommen so ist $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$. Dann kann (14) angenähert werden als

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt}$$

oder als

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(\tau) d\tau.$$

Die Spannung $U_C(t)$ ist also proportional zum Integral über die Zeit von $U(t)$.

3 Durchführung

3.1 Aufbau

Für alle Versuchsteile wird ein Generator mit variablem Schwingungsmuster verwendet. Ein Tiefpassfilter wird an den Generator angeschlossen. Der Tiefpassfilter wird mit einem Kondensator und einem Widerstand realisiert. Die Kondensatorspannung wird mit einem Oszilloskop gemessen.

3.2 Messung

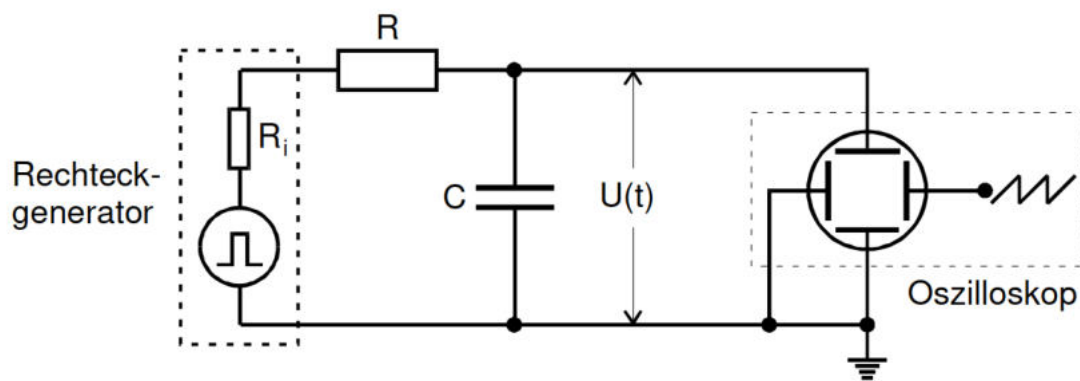


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des ersten Versuchsteils.[3]

Im ersten Aufgabenteil wird die Zeitkonstante eines RC-Gliedes ermittelt. Dazu wird eine Rechteckspannung an den Kondensator angeschlossen. Mit dem Oszilloskop wird

die Spannung U_C am Kondensator gemessen. Die Frequenz der Rechteckspannung und der Messbereich des Oszilloskops werden so gewählt, dass ein vollständiger Be- oder Entladevorgang auf dem Oszilloskop abgebildet werden kann. Es werden Messwertpaare der Form (t, U_C) aufgezeichnet.

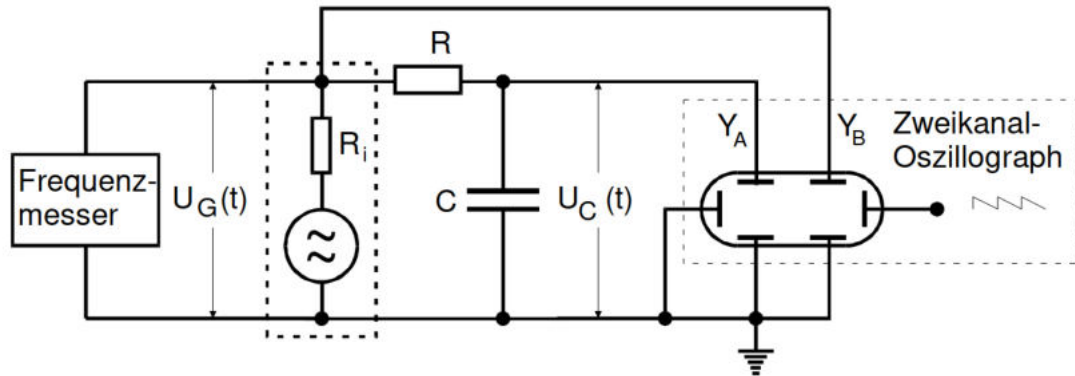


Abbildung 3: Schematischer Aufbau des zweiten Versuchteils.[3]

Im zweiten Aufgabenteil wird die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung U_C untersucht. Dazu wird eine Sinusspannung an den Kondensator angeschlossen. Mit einem Oszilloskop wird die Spannung $U_C(t)$ am Kondensator und die Generatorspannung $U_G(t)$ gemessen. Die Frequenz der Sinusspannung wird von 41.1 Hz bis 1 kHz gesteigert. Die Generatorspannung und die Kondensatorspannung werden auf dem Oszilloskop gegen die Zeit abgebildet. Es werden immer vier Messwerte aufgenommen. Die Frequenz f , die Generatorspannung U_G , der zeitliche Abstand a der beiden Nulldurchgänge der Schwinungen und die Schwinungsdauer b einer Schwinung werden gemessen.

Für den dritten Aufgabenteil wird die Frequenz des Generators $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gewählt, damit der Tiefpassfilter als Integrator wirkt. Nacheinander wird eine Dreieck-, Rechteck- und Sinusspannung auf das RC-Glied gegeben. Die Ausgangsspannung und die integrierte Spannung werden auf dem Bildschirm des Oszilloskops abgebildet. Es werden Bilder für die drei Spannungen aufgenommen.

4 Auswertung

Die in Abschnitt 4 gezeigten Grafiken und Ausgleichsrechnungen sind mithilfe der Python-Bibliotheken Matplotlib [2], Scipy [4] und Numpy [1] erstellt worden.

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante eines RC Glieds mit angelegter Rechteckspannung

Tabelle 1: Abgelesene Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Zeit.

t [ms]	U_C [V]
0.0	4.00
0.4	3.40
0.8	3.00
1.2	2.50
1.6	2.20
2.0	1.90
2.4	1.70
2.8	1.40
3.2	1.30
3.6	1.10
4.0	0.90
4.4	0.80
4.8	0.70
5.2	0.60
5.6	0.50
6.0	0.40
6.4	0.40
6.8	0.35
7.2	0.30
7.6	0.25
8.0	0.23
8.4	0.20
8.8	0.20
9.2	0.17
9.6	0.15
10.0	0.10
12.0	0.00

Die gemessenen Werte können nun als Funktion von t dargestellt werden. Wird der $\ln(\frac{U_C}{U_0})$ gegen t aufgetragen, so entsteht Abbildung 4.

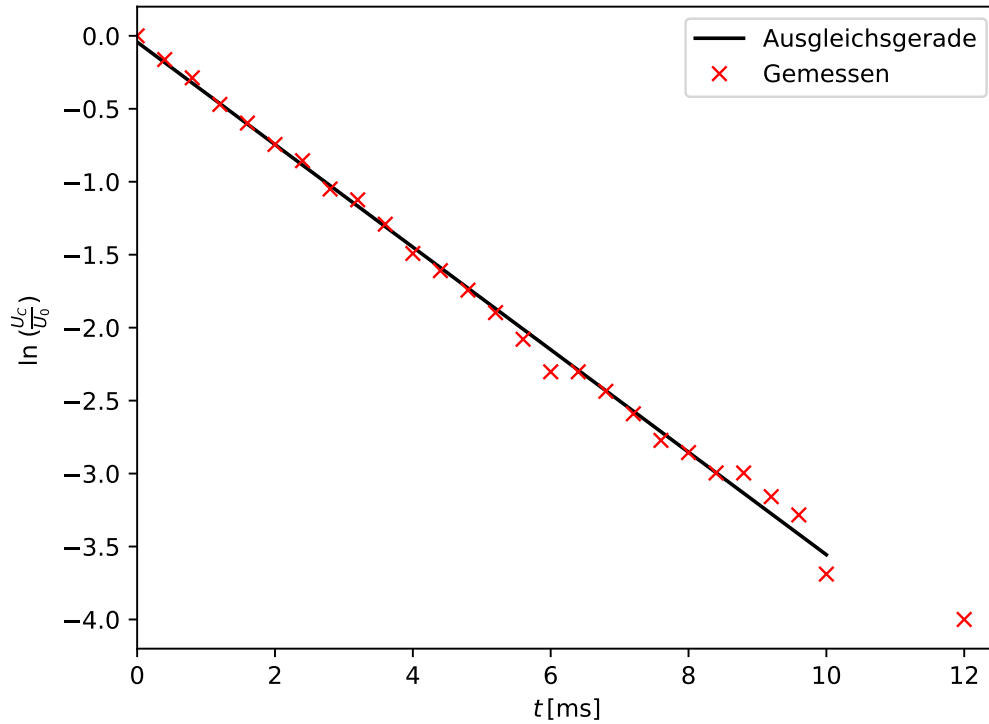


Abbildung 4: Amplitudenverhältnis $\frac{U_C}{U_0}$ logarithmisch gegen die Zeit t aufgetragen.

Durch eine lineare Ausgleichsrechnung wird die Funktion

$$f(x) = ax + b$$

an die Messwerte gefittet. Mit der Python Bibliothek SciPy [4] ergibt sich für die Koeffizienten $a = (-0.351 \pm 0.004) \frac{1}{\text{ms}}$ und $b = -0.04 \pm 0.02$. Mit dem Zusammenhang

$$\ln \frac{U_C}{U_0} = -\frac{t}{RC}$$

lässt sich RC zu $RC = -\frac{1}{a}$ bestimmen, wobei a die Steigung der Ausgleichsgeraden ist. Dadurch ergibt sich für die Zeitkonstante

$$RC = -\frac{1}{a} = (2.849 \pm 0.032) \text{ ms.}$$

4.2 Bestimmung der Zeitkonstante mit angelegter Sinusspannung

Wie Unterabschnitt 3.2 beschrieben, wird nun auf ein Sinussignal gewechselt. Die aufgenommen Messwerte sind in Tabelle 2 dargestellt.

Tabelle 2: Frequenz f des Signals, abgelesene Kondensatorspannung U_C , zeitlicher Abstand der Nulldurchgänge a und Intervalllänge b .

f [Hz]	U_C [V]	a [ms]	b [ms]
41.1	1.6	2.4	24.0
50	1.4	2.2	20.0
60	1.35	2.1	16.8
70	1.25	2.0	13.2
80	1.15	1.9	12.2
90	1.05	1.9	9.6
100	0.95	1.6	9.0
120	0.85	1.4	8.2
140	0.75	1.4	6.5
160	0.7	1.2	6.1
180	0.6	1.2	4.7
200	0.55	1.0	4.5
250	0.45	0.8	4.0
300	0.4	0.8	2.6
400	0.3	0.6	2.2
500	0.25	0.6	2.0
600	0.2	0.4	1.8
750	0.2	0.3	1.4
1000	0.2	0.1	1

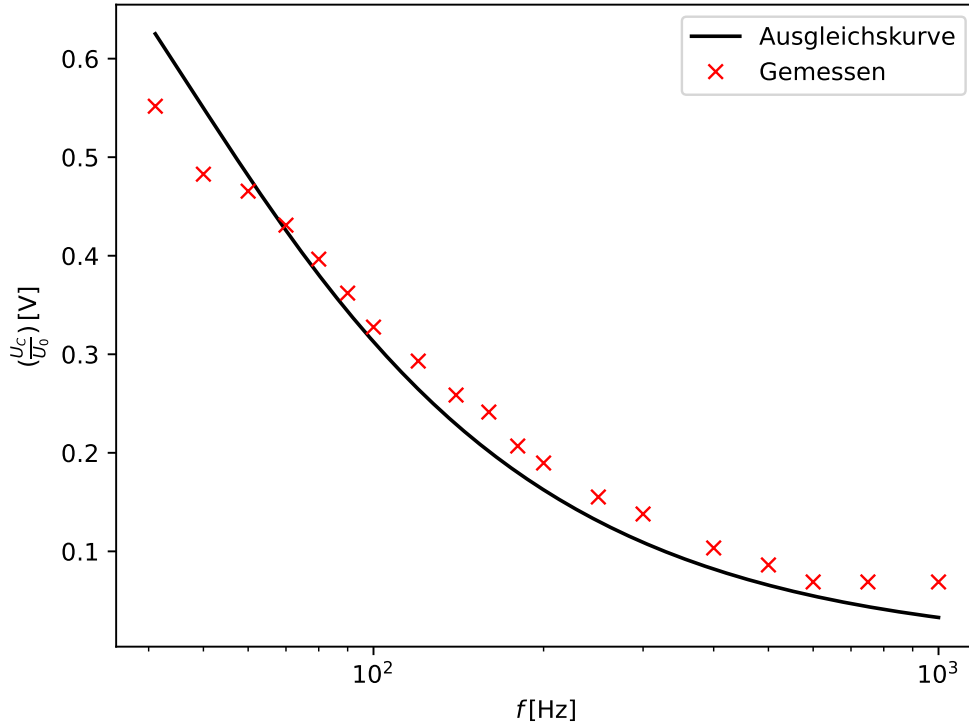


Abbildung 5: Amplitudenverhältnis $\frac{U_C}{U_0}$ gegen die Frequenz f auf einer logarithmischen Skala zur Basis 10 aufgetragen.

In Abbildung 5 ist das Amplitudenverhältnis $\frac{U_C}{U_0}$ (mit $U_0 = 2.9$ V) gegen die Frequenz f auf einer logarithmischen Skala zur Basis 10 aufgetragen. Durch umstellen von Gleichung 13 ergibt sich

$$\frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 (RC)^2}}.$$

Daraus lässt sich die Zeitkonstante RC bestimmen, indem man $RC = a$ setzt und die Funktion

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 (a)^2}}.$$

mit Parameter a an die Messwerte fittet. Die Ausgleichsrechnung mit SciPy [4] ergibt die Zeitkonstante

$$a = RC = (0.0048 \pm 0.0001) \text{ s} = (4.8 \pm 0.1) \text{ ms}.$$

4.3 Bestimmung der Zeitkonstante über die Phasenverschiebung

Die Zeitkonstante lässt sich ebenfalls über die frequenzabhängige Phasendifferenz ϕ zwischen der Generatorspannung und der Kondensatorspannung berechnen. Dazu wird

der Zusammenhang

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi$$

mit den Werten aus Tabelle 2 verwendet.

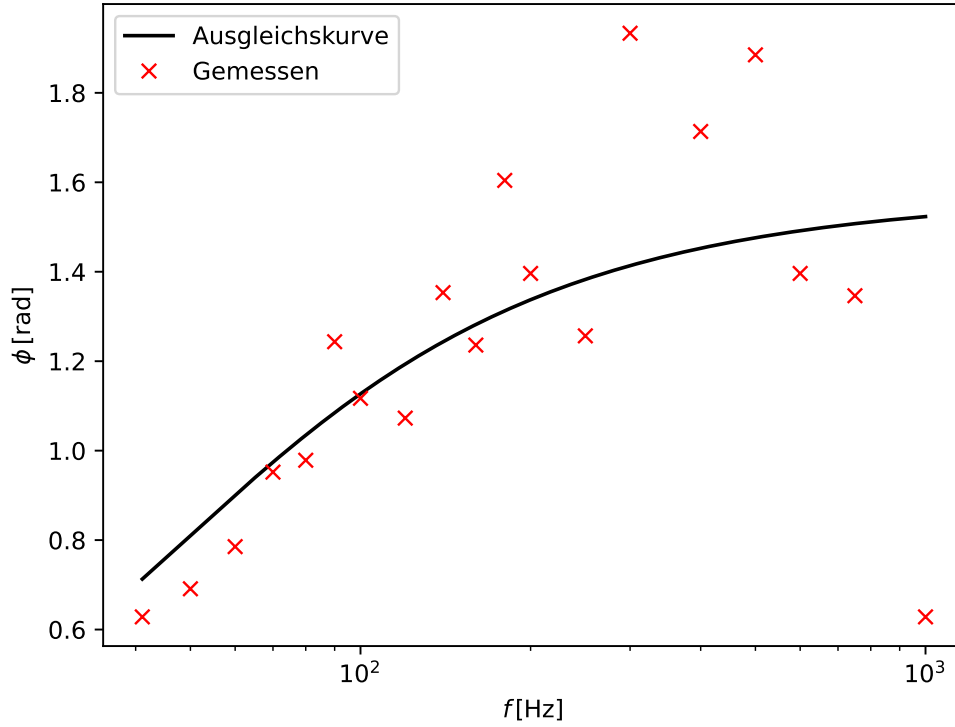


Abbildung 6: ϕ gegen die Frequenz f auf einer logarithmischen Skala zur Basis 10 aufgetragen.

Mit Gleichung 11 ergibt sich die in Abbildung 6 dargestellte Fitfunktion

$$G(f) = -\arctan(-2\pi f a).$$

Durch die Ausgleichsrechnung mit SciPy [4] ergibt die Zeitkonstante

$$a = RC = (0.0033 \pm 0.0007) \text{ s} = (3.3 \pm 0.7) \text{ ms}.$$

Anschaulich lässt sich die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit der Phasenverschiebung ϕ in einem Polarplot darstellen.

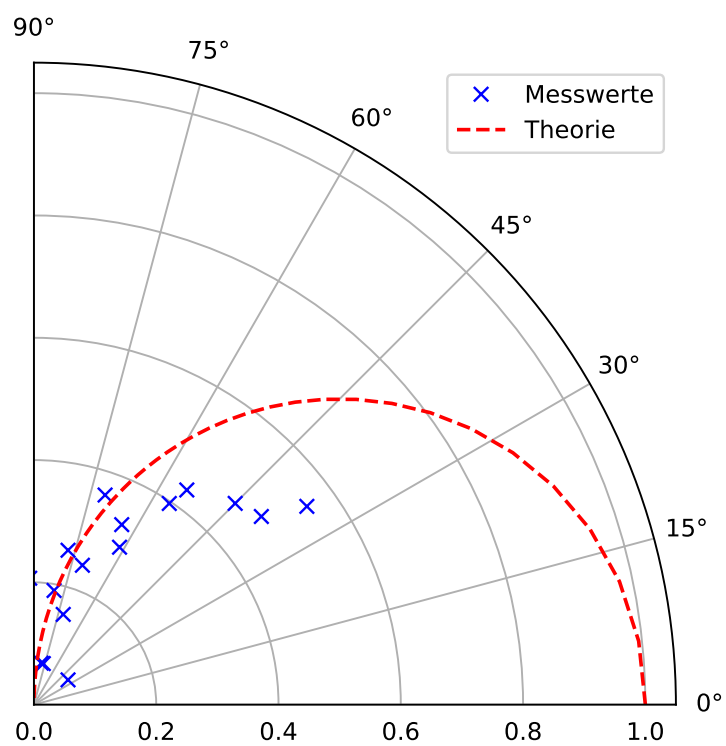
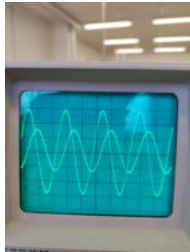


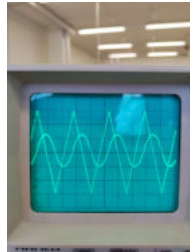
Abbildung 7: Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit der Phasenverschiebung ϕ

4.4 RC-Glied als Integrator

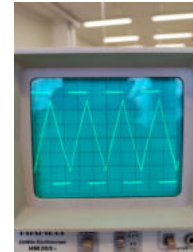
Wie in Unterabschnitt 3.2 beschrieben, muss die Frequenz f genügend groß gewählt werden. Da sich bei $f = 792 \text{ Hz}$ klare Bilder gezeigt haben, wurde diese Frequenz gewählt. In Abbildung 8 abgebildet, wird die Spannung integriert. Die Sinusspannung wird zu einer Cosinusspannung aufintegriert, eine Sägezahn- zu einer sinusförmigen Spannung und eine Rechteckspannung zu einer Sägezahnspannung.



(a) Sinus- und
Cosinusspannung



(b) Sägezahn- und
Sinusspannung



(c) Rechteck- und
Sägezahnspannung

Abbildung 8: Fotos der Integratorschaltung für eine Generatorfrequenz von 792 Hz und verschiedenen Generatorspannungen

5 Diskussion

Die in Abschnitt 4 berechneten Zeitkonstanten weichen voneinander ab. Die in Unterabschnitt 4.2 bestimmte Zeitkonstante RC_2 ist 68.4% größer als die in Unterabschnitt 4.1 bestimmte Zeitkonstante RC_1 . Die in Unterabschnitt 4.3 bestimmte Zeitkonstante RC_3 ist 15.8% größer als RC_1 . Die Zeitkonstante RC_2 liegt auch mit Beachtung des Fehlers weder im Bereich von RC_1 noch RC_3 . Die Zeitkonstante RC_3 liegt im Fehlerbereich von RC_1 . Ein Grund für die Abweichung können systematische Fehler bei der Messung sein.

Die mithilfe von Tabelle 2 berechneten Phasenverschiebungen sind zum Teil nicht in einem klaren Trend zu erkennen. Dies könnte auf Fehler bei der Aufnahme der Messwerte zurückzuführen sein. Es kam zu großen Ungenauigkeiten beim ablesen der Werte auf dem Oszilloskop, da sich der Messbereich aufgrund eines Defekts am Gerät nicht sinnvoll anpassen ließ. Um festzustellen ob die Fitfunktion mit \arctan tatsächlich die gemessenen Werten beschreibt, könnte mit mehr Messungen bei höheren Frequenzen überprüft werden. Auf den Polarplot aufgetragen ist erkennbar, dass die Messwerte etwas kleiner als theoretisch erwartet sind. Dieser Trend kann jedoch auch nur eindeutig mit mehr Messungen bestätigt werden.

Die integrierten Spannungen entsprechen der erwarteten Form. Die auffällige Amplitudendifferenz von U_C und U_0 lässt sich auf den $\frac{1}{RC}$ Faktor zurückführen. Qualitativ lässt sich damit die Funktionsweise eines RC-Gliedes als Integrator bestätigen.

Literatur

- [1] Charles R. Harris u. a. „Array programming with NumPy“. In: *Nature* 585.7825 (Sep. 2020), S. 357–362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55. URL: <http://matplotlib.org/>. Current version 3.4.3, DOI: 10.5281/zenodo.5194481.
- [3] *V353: Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [4] Pauli Virtanen u. a. „SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python“. In: *Nature Methods* 17 (2020), S. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.

sorting = presort

V353

a) $f = 41,1 \text{ Hz}$ Time = 2ms

$t [\text{ms}]$	$U [\text{V}]$	$t [\text{ms}]$	$U [\text{V}]$
0,2 0	4	12,8 $\frac{32}{5}$	0,4
0,4 $\frac{2}{5}$	$4 - \frac{3}{5}$	13,6 $\frac{34}{5}$	0,35
0,6 $\frac{4}{5}$	3	14,4 $\frac{36}{5}$	0,3
0,8 $\frac{6}{5}$	2,5	15,2 $\frac{38}{5}$	0,25
3,2 1,0 $\frac{8}{5}$	2,2	16 8	0,225
4 1,2 $\frac{12}{5}$	1,9	16,6 $\frac{42}{5}$	0,2
4,8 $\frac{12}{5}$	1,7	17,6 $\frac{44}{5}$	0,2
5,6 $\frac{14}{5}$	1,4	18,4 $\frac{46}{5}$	0,175
6,4 $\frac{16}{5}$	1,3	19,2 $\frac{48}{5}$	0,15
7,2 $\frac{18}{5}$	1,1	20 10	0,1
8 4	0,9	20,8 12	0
8,8 $\frac{22}{5}$	0,8		
9,6 $\frac{24}{5}$	0,7		
10,4 $\frac{26}{5}$	0,6		
11,2 $\frac{28}{5}$	0,5		
12 6	0,4		

führt weitere Werte von 0,1 bis 0

p.s.w ✓

f [Hz]	U_b [V]	a [m]	b [m]	
41,1	1,6	2,4	12,4	$\frac{U}{U_0}$ gegen f
50	1,4	2,2	20	ΔU gegen f
60	1,35	2,1	16,8	U_0 ändert sich
70	1,25	2	13,2	minimale n nicht
80	1,15	1,9	12,2	
90	1,05	1,9	9,6	
100	0,95	1,6	9	
120	0,85	1,5	8,2	
140	0,75	1,4	6,5	
160	0,7	1,2	6,1	
180	0,6	1,2	4,7	
200	0,55	1	4,5	
250	0,45	0,8	4	
300				
300	0,4	0,8	2,6	
350 400	0,3	$3/5 = 0,6$	2,2	
500	0,25	0,6	2	
600	0,2	0,4	1,8	
700				
750	0,2	0,3	1,4	
1000	0,2	0,1	1	$U_0 = 2,9$

p. 24 ✓