Übung 4

Das Hook'sche Gesetz

Frederik Zielke
frederik.zielke@tu-dortmund.de

Lennart Völz
lennart.voelz@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.11.2022 Abgabe: 15.11.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Das Ziel des Versuchs ist es, bei einer senkrecht eingespannten Feder die Federkonstante D zu bestimmen. Die Theorie hierzu besagt, dass die Kraft F, die auf die Feder wirkt, proportional zu der Auslenkung Δx ist:

$$F = D \cdot \Delta x \tag{1}$$

Um diesen theoretischen Zusammenhang zu prüfen, wird eine Feder senkrecht zwischen einen Seilzug und ein Kraftmessgerät eingespannt. Der Seilzug ist an einer Messskala befestigt, die die Auslenkung der Feder in cm angibt. Oben an der Feder ist das Kraftmessgerät befestigt, welches die auf die Feder wirkende Kraft (in N) auf zwei Nachkommastellen genau digital angibt. Es werden 10 Messwertepaare zur Bestimmung der Federkonstante aufgenommen. Die beiden Methoden zur Bestimmung sind:

1. Mittelwertbildung

2. Lineare Ausgleichsrechnung

1.1 Methode der Mittelwertbildung

$$\overline{D} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} D_i \tag{2}$$

1.2 Methode der linearen Ausgleichsrechnung

$$\underline{A}^T \cdot \underline{A} \cdot \vec{x} = \underline{A}^T \cdot \vec{b} \tag{3}$$

2 Durchführung

Der Versuch wird auf der Internetseite der Universität Duisburg durchgeführt. Hier kann mit einem Schieberegler die Auslenkung der Feder bzw. der Abstand auf der Messskala festgelegt werden. Das Kraftmessgerät zeigt die auf die Feder wirkende Kraft an. Wir nehmen 10 Messwertepaare auf, indem wir den Schieberegler in 5cm-Schritten bewegen und die zugehörige Kraft notieren.

3 Auswertung

3.1 Messwerte

Aus $F = D \cdot \Delta x \Leftrightarrow D = \frac{F}{\Delta x}$ folgt:

Δx [cm]	F [N]	D [N/cm]
5	0,15	0,030 00
10	0,29	0,029 00
15	0,44	0,029 33
20	0,59	0,029 50
25	0,74	0,029 60
30	0,89	0,029 67
35	1,04	0,029 71
40	1,19	0,029 75
45	1,34	0,029 78
50	1,49	0,029 80

Tabelle 1: Messdaten und Federkonstante D

3.2 Bestimmung der Federkonstante aus Mittelwertbildung

$$\begin{aligned}\overline{D} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} D_i \\ &= \frac{1}{10}(0.03000 + 0.02900 + 0.02933 + 0.02950 + 0.02960 \\ &\quad + 0.02967 + 0.02971 + 0.02975 + 0.02978 + 0.02980) \\ &= 0.02961\end{aligned} \tag{4}$$

3.3 Bestimmung der Federkonstante aus linearer Ausgleichsrechnung

Wir benutzen zur Berechnung die Methode der kleinsten Quadrate:

$$\underline{A}^T \cdot \underline{A} \cdot \vec{x} = \underline{A}^T \cdot \vec{b} \tag{5}$$

mit $$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \\ 1 & 20 \\ 1 & 25 \\ 1 & 30 \\ 1 & 35 \\ 1 & 40 \\ 1 & 45 \\ 1 & 50 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $\underline{A}^T \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & 275 \\ 275 & 9625 \end{pmatrix}$ und $\underline{A}^T \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 8.16 \\ 286.15 \end{pmatrix}$.
Daraus folgt nun das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 10 & 275 \\ 275 & 9625 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 8.16 \\ 286.15 \end{pmatrix}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}$ wobei b der y-Achsenabschnitt und m die Steigung der linearen Ausgleichsgerade ist.
Das Gleichungssystem kann nun beispielsweise mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden.
Wir erhalten $b = -\frac{3}{500}, m = \frac{411}{13750} \approx 0.02989$