11.614 Das Runge-Kutta-Verfahren

Ist die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

mit der Anfangsbedingung $P_0 (x_0, y_0)$ zu integrieren, so berechnet man der Reihe nach die Werte

$$
\begin{array}{llll}
x_I = x_0 , & y_I = y_0 & & \\
x_{II} = x_0 + \frac{1}{2} h , & y_{II} = y_0 + \frac{1}{2} k_I & \text{mit} & k_I = f(x_I, y_I)\, h \\
x_{III} = x_0 + \frac{1}{2} h , & y_{III} = y_0 + \frac{1}{2} k_{II} & \text{mit} & k_{II} = f(x_{II}, y_{II})\, h \\
x_{IV} = x_0 + h , & y_{IV} = y_0 + k_{III} & \text{mit} & k_{III} = f(x_{III}, y_{III})\, h \\
x_1 = x_0 + h , & y_1 = y_0 + k & & k_{IV} = f(x_{II}\; y_0 + k_{III})\, h \\
\end{array}
$$

$$\text{mit } k = \frac{1}{6} (k_I + 2k_{II} + 2k_{III} + k_{IV})$$

Das Verfahren läuft zweckmäßig in folgender Tabelle ab:

x_λ	y_λ	k_λ
x_0	y_0	$k_I = h \cdot f(x_0, y_0)$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{1}{2} k_I$	k_{II}
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{1}{2} k_{II}$	k_{III}
$x_0 + h$	$y_0 + k_{III}$	k_{IV}
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + k$	

Der Fehler des Runge-Kutta-Verfahrens ist von der Größenordnung h^5, nimmt also mit Verkleinerung der Schrittweite h stark ab. Eine genaue, einfach zu handhabende Fehlerabschätzung ist nicht angebbar.

Eine ständige Kontrolle der erreichten Genauigkeit, und damit eine Überprüfung der notwendigen Schrittweite h erreicht man, wenn neben der sog. Feinrechnung mit der Schrittweite h noch eine Grobrechnung mit der Schrittweite $2h$ geführt wird. Hierbei darf aber $2h$ nicht zu groß werden ($\leqq 0{,}3 \div 0{,}5$). Dann gilt näherungsweise für die Abweichung δy der erhaltenen y-Weite

$$\delta y \approx \frac{1}{15} [y_{(h)} - y_{(2h)}]$$

Diese Abschätzung kann auch verwendet werden zur Ermittlung des voraussichtlichen Fehlers, der sich bei Anwendung der Schrittweite $\frac{h}{2}$ ergeben würde. Sie hat somit den Charakter eines Korrekturgliedes.