Inlämningsuppgift 1: Silvias klänning

11 april 2022

Silvia har n olika balklänningar och har svårt att bestämma sig vilken hon vill ha på sig till Carl Gustavs födelsedagskalas. Hon överlåter urvalet därför till följande slumpexperiment: Hon tar på sig första klänningen och singlar slant (ett symmetriskt mynt, oberoende för olika klänningar/omgångar). Visar den klave är klänningen klar för nästa omgång, visar den krona istället åker klänningen tillbaka in i garderoben. Efter att hon gjort så med alla klänningar (en efter annan) avslutas första omgången. Sedan upprepar hon detta med alla klänningar som är kvar i urvalet (och inte tillbaka i garderoben) i nästa omgång.

Experimentet avslutas när alla klänningar är tillbaka i garderoben. Om det var exakt en klänning i sista omgång väljer hon den att ha på sig på kalaset. Var det fler än en, leder experimentet tyvärr inte till något beslut.

1) Antal klänningar per omgång – del I

Medans antalet klänningar i första omgången är n, är det slump i alla följande omgångar.

(a) Beräkna sannolikheten att någon specifik klänning (t.ex. första) är kvar efter omgång i, där $i \in \mathbb{N}$ är godtyckligt.

(b) Om det nu finns exakt k klänningar kvar efter någon omgång, på hur många olika sätt kan man välja vilka k klänningar som är kvar?

(c) Beräkna sannolikheten att det är exakt k klänningar kvar efter omgång nummer i, för godtyckligt $k \in \{0, \dots, n\}$ och $i \in \mathbb{N}$.

2) I värsta fall...

...är alla n klänningar kvar i nästsista omgång och försvinner sedan i garderoben allihopa.

(a) Beräkna sannolikheten att första klänningen inte är kvar i omgång i, för godtyckligt $i \in \mathbb{N}$.

(b) Beräkna sannolikheten att första klänningen åker in i garderoben i omgång i, dvs. är med i omgång i men åker på en krona sedan och med det tillbaka in i garderoben.

(c) Vad är sannolikheten av det värsta scenariot att alla n klänningar hängs tillbaka in i garderoben i samma omgång?

Ledning: Använd del (b) och att slanten singlas i oberoende försök. Själva händelsen som betraktas här kan skrivas som en förening över $i \in \mathbb{N}$ av händelserna att alla klänningar åker ut i omgång i. Förenkla resultatet så långt som möjligt.

3) Antal klänningar per omgång – del II

Låt oss hålla fast $i \in \mathbb{N}$ och låt X_i beteckna antalet klänningar som är kvar efter omgång i.

(a) I första delen beräknade vi $\mathbb{P}(X_i = k)$. Motivera vilken fördelning slumpvariabeln X_i har. Vilka är motsvarande parametrar för fördelningen här?

(b) Vad blir väntevärdet $\mathbb{E}(X_i)$ för godtyckligt $i \in \mathbb{N}$ då?

(c) Ange en slumpvariabel X (i termer av $X_i,\ i \in \mathbb{N}$) som räknar hur ofta Silvia singlar slant totalt (Obs: det är redan n gånger i första omgång).

(d) Använd del (b) och (c) för att beräkna det förväntade antalet gånger hon singlar slant i hela experimentet. Förenkla uttrycket så långt som möjligt.

4) Antalet omgångar

För $k \in \{1, \dots, n\}$, låt Y_k beteckna antalet omgångar klänning nummer k provas.

(a) I uppgift 2(b) beräknade vi $\mathbb{P}(Y_k = i)$. Vilken fördelning har Y_k då (glöm inte att ange motsvarande parameter också)? Skiljer sig fördelningen för olika k? Är $Y_1, \dots, Y_n$, oberoende slumpvariabler (motivera!)?

(b) Argumentera varför slumpvariabeln $Y = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$ räknar antalet omgångar som slumpexperimentet består av.

(c) Bestäm fördelningsfunktionen F till slumpvariabeln Y, alltså värden $F(i) = \mathbb{P}(Y \leq i)$, för alla $i \in \mathbb{N}$.

(d) Bestäm sannolikhetsfunktionen f till slumpvariabeln Y.

Ledning: Kom ihåg att det gäller $f(i) = F(i) - F(i-1)$ för diskreta slumpvariabler.

(e) Genom ett enkelt byte av summeringsordningen följer för en slumpvariabel Y som antar bara värden i $\mathbb{N}$ (och har sannolikhetsfunktion f samt fördelningsfunktion F):

$$\mathbb{E}Y = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} f(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} f(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq j) = \sum_{j=1}^{\infty} \big(1 - F(j-1)\big)$$

Använd denna formel och del (c) för att ange ett uttryck för det förväntade antalet omgångar $\mathbb{E}Y$. Beräkna med hjälp av datorn detta värde för $n = 2^m$ och olika m, t.ex. $m = 1, 2, \dots, 10$. Rita värden du kommer fram till mot $m = \log_2 n$ för att kunna dra en slutsats om hur $\mathbb{E}Y$ växer med n.