Föreläsning 6

den 20 april 2021 15:29

Matematisk Statistik och Diskret Matematik, MVE051/MSG810, VT22

Timo Vilkas

Chalmers - Göteborgs Universitet

Föreläsning 6
7 april 2022

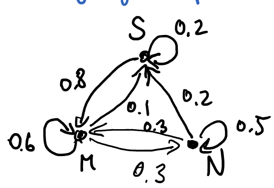
Exempel

Låt oss för enkelhetens skull anta att vädret i Göteborg kan beskrivas som ett av tre tillstånd: **soligt, molnigt, nederbörd**. Låt oss vidare anta att vädret imorgon bara beror på vädret idag: Om det regnar/snöar är sannolikheten 0.5 att det också gör det dagen efter, 0.3 för moln och 0.2 för sol. Vid fint väder är sannolikheterna för sol/moln/nederbörd dagen därpå 0.2, 0.8 resp. 0. Efter en molnig dag utan nederbörd är vädret soligt med sannolikhet 0.1, molnigt med slh 0.6 och medför nederbörd med slh 0.3. Dessa övergångssannolikheter kan representeras i en matris:

övergångsmatris

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} S & M & N \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ M \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

övergångsgraf



En sådan minneslös process kallas en (ändlig) **Markovkedja** (MK).

Markovkedjor

- Given mängd av tillstånd *(eng. states)* $S := \{s_1, \cdots, s_r\}$.
- Varje tidssteg: övergång *(eng. transition)* från ett tillstånd till ett annat (som får vara samma)
- Sannolikheten för att övergå från tillstånd s_i till tillstånd s_j betecknas p_{ij} och är lika med den betingande sannolikheten för att vara i tillstånd s_j, givet att man var i s_i steget innan.
- p_{ij} kallas **övergångssannolikhet** *(eng. transition probability)*, och matrisen $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$ kallas **övergångsmatrisen** *(eng. transition matrix)*.
- För övergångsmatrisen gäller
  1. $0 \le p_{ij} \le 1$ för alla $1 \le i, j \le r$.
  2. $\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1$, dvs. alla rader summerar sig till 1. (dvs. P är radstokastisk)

Markovkedjor

- Låt oss skriva $X^{(n)}$ för tillståndet vi befinner oss i vid tid n, där $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ och $\left[p_{ij} = \mathbb{P}(X^{(n+1)} = s_j \mid X^{(n)} = s_i) \text{ för alla } n \in \mathbb{N}_0,\ 1 \le i, j \le r\right]$

$$\mathbf{u}^{(n)} = \left(f_{X^{(n)}}(s_1), \dots, f_{X^{(n)}}(s_r)\right)$$

  för vektorn som motsvarar sannolikhetsfunktionen till $X^{(n)}$, dvs. $u_i^{(n)} = f_{X^{(n)}}(s_i) = \mathbb{P}(X^{(n)} = s_i)$ är sannolikheten att vi befinner oss i tillstånd s_i vid tid n.
- Då gäller $\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} P$:

$$u_i^{(n+1)} = \mathbb{P}(X^{(n+1)} = s_i) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X^{(n+1)} = s_i, X^{(n)} = s_k) = \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n+1)} = s_i \mid X^{(n)} = s_k)}_{p_{ki}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X^{(n)} = s_k)}_{u_k^{(n)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} u_k^{(n)} p_{ki} = (u^{(n)} \cdot P)_i \text{ för } 1 \le i \le r \implies u^{(n+1)} = u^{(n)} P$$

  och mer allmänt $\mathbf{u}^{(n+m)} = \mathbf{u}^{(n)} P^m$ för $n, m \in \mathbb{N}_0$.
- Elementet av matrisen P^n i rad i och kolumn j betecknas med $p_{ij}^{(n)}$ och är sannolikheten att vara i tillstånd s_j efter n steg, givet att man börjat från tillstånd s_i. $u_i^{(0)} = \mathbb{P}(X^{(0)} = s_i) =$ slh. kedjan börjar i tillstånd s_i
- Vektorn $\mathbf{u}^{(0)}$ brukar kallas **startvektor** eller startfördelning. (kan vara deterministiskt, dvs. inte slump)

Irreducibla/reguljära Markovkedjor

En Markovkedja kallas irreducibel om det är möjligt att gå ifrån varje tillstånd till alla andra (möjligtvis i flera steg). Markovkedjan kallas reguljär *(eng. regular)* om det existerar $n \in \mathbb{N}$ så att alla element av matrisen P^n är större än 0.

Uppenbarligen är en reguljär MK irreducibel, dock är den omvända implikationen fel i allmänhet! Markovkedjan i inledande exemplet är reguljär eftersom redan

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.64 & 0.24 \\ 0.14 & 0.53 & 0.33 \\ 0.17 & 0.49 & 0.34 \end{pmatrix}$$

inte har några nollor kvar.

[T.ex. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $s_1 \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} s_2$
$\rightsquigarrow P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^4 = P^6 = \ldots$
$P = P^3 = P^5 = \ldots$
är irreducibel, dock inte reguljär.]

- Om P är övergångsmatrisen till en reguljär Markovkedja, så gäller det att $P^n \to \Pi$ (för $n \to \infty$), där gränsvärdet ser ut som

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_r \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_r \end{pmatrix}$$

OBS: Detta betyder att $\mathbb{P}(X^{(n)} = s_j \mid X^{(0)} = s_i) = p_{ij}^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} \pi_j$ (oavsett starttillstånd s_i).

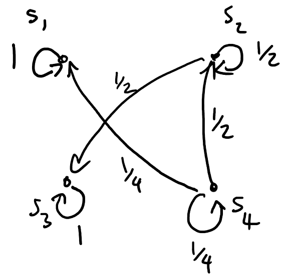
för någon sannolikhetsvektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r)$, som kallas **gränsfördelning**. π_j motsvarar då sannolikheten att vara i tillstånd s_j efter många tidssteg (oavsett startfördelningen!).

Ibland finns det en så kallad stationär fördelning, dvs. en sannolikhetsvektor π som uppfyller $\pi = \pi P$.
Denna sammanfaller med gränsfördelningen för en reguljär MK.

Absorberande Markovkedjor

- Ett tillstånd s_j kallas **absorberande** *(eng. absorbing)*, om det är omöjligt att lämna det, dvs. $p_{jj} = 1$.
- En Markovkedja kallas **absorberande** om den har minst ett absorberande tillstånd och det är möjligt att övergå från varje tillstånd till ett absorberande tillstånd (i ett eller flera steg).
- Ett tillstånd som inte är absorberande i en absorberande Markovkedja kallas **transient**.
- Exempel:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



inte i kanoniskt form,
s_1 och s_3 absorberande tillstånd.

- Övergångsmatrisen till en absorberande Markovkedja med a absorberande och $t(= r - a)$ transienta tillstånd kan skrivas som

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c|c} 1 \ldots t & t+1 \ldots t+a \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \ldots t \\ t+1 \ldots t+a \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline \mathbf{0} & I_a \end{array}\right) \end{array}$$

där vi har numrerat tillstånden så att de absorberande tillstånden ligger sist. I_a är identitetsmatrisen (av dimension $a \times a$), $\mathbf{0}$ är en matris med bara nollor, Q är en $t \times t$-matris och R är en $t \times a$ nollskild matris. Denna form kallas **kanonisk form** *(eng. canonical form)*.

- $P^n = \begin{pmatrix} Q^n & * \\ \mathbf{0} & I_a \end{pmatrix}$ där $*$ är en $t \times a$ matris.
- Q^n innehåller n-steg övergångssannolikheter från transienta tillstånd till transienta tillstånd:

För $1 \le i,j \le t$: $\mathbb{P}(X^{(n)} = s_j \mid X^{(0)} = s_i) = p^{(n)}_{ij} = (Q^n)_{ij}$

Antag att vi har en absorberande Markovkedja med övergångsmatris $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ \mathbf{0} & I_a \end{pmatrix}.$

Sats

Oavsett startfördelning är sannolikheten att en absorberande Markovkedja till slut landar i ett absorberande tillstånd lika med 1, dvs. $Q^n \to 0$ när $n \to \infty$.

Bevis: Då MK är absorberande finns det för alla transienta tillstånd s_i $(1 \le i \le t)$ ett absorberande tillstånd s_{t+j} $(1 \le j \le a)$ och m_i så att $p_{i,t+j}^{(m_i)} = \mathbb{P}(X^{(m_i)} = s_{t+j} | X^{(0)} = s_i) > 0$

Da kedjan inte kan lämna absorberande tillstånd är $p_{i,t+j}^{(n)}$ monotont växande i n.

Låt $m := \max\{m_i, 1 \le i \le t\}$ och $p := \min\{p_{i,t+j}^{(m)}, 1 \le i \le t\} > 0$

$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(X^{(m)} \in \{s_1, \dots, s_t\} | X^{(0)} = s_i)}_{= \sum_{j=1}^{t} (Q^m)_{ij}} = \sum_{j=1}^{t} p_{ij}^{(m)} \le 1-p$, för alla $1 \le i \le t$.

$= \sum_{j=1}^{t} (Q^m)_{ij} =$ slh. att inte vara absorberad efter m steg med start i s_i; är mon. avtagande

Upprepat: $\mathbb{P}(X^{(km)} \in \{s_1, \dots, s_t\} | X^{(0)} = s_i) \le (1-p)^k \to 0$ när $k \to \infty$ $\square$.

Matrisen $I_t - Q$ är inverterbar: Antag $\vec{x} \in \mathbb{R}^t$ så att $(I_t - Q)\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x} = Q\vec{x} = Q^2\vec{x} = \dots = Q^n\vec{x} \longrightarrow \vec{0}$ när $n \to \infty$, dvs. $\vec{x}$ måste vara nollvektor, alltså $(I_t - Q)$ inverterbar.

Desutom: $(I_t - Q) \cdot (I_t + Q + Q^2 + \dots + Q^n) = I_t - Q^{n+1}$. Multiplicera med $(I_t - Q)^{-1}$ från vänster och $n \to \infty$ ger $\underbrace{(I_t - Q)^{-1}}_{=: N} = I_t + Q + Q^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$, där $Q^0 := I_t$.

Låt $N := (I_t - Q)^{-1}$. N kallas den **fundamentala matrisen**.

Sats

Elementet n_{ij} av matrisen N är lika med väntevärdet av antalet gånger kedjan som startar i s_i besöker tillstånd s_j, där både s_i och s_j är transienta, innan den blir absorberad.

Bevis: Om $\mathbb{P}(X^{(0)} = s_i) = 1$ är $\mathbb{P}(X^{(n)} = s_j) = \mathbb{P}(X^{(n)} = s_j | X^{(0)} = s_i) = p_{ij}^{(n)}$

Låt $Y^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{om } X^{(n)} \ne s_j \\ 1 & \text{om } X^{(n)} = s_j \end{cases}$ (indikator-slumpv.) $\Rightarrow \mathbb{E}\, Y^{(n)} = \mathbb{P}(X^{(n)} = s_j) = p_{ij}^{(n)}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} Y^{(n)}$ räknar antalet gånger vi är i s_j (i princip för alltid, men enligt ovanstående tills kedjan absorberas $\to$ ändlig s.v.)

$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} Y^{(n)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \underset{\substack{s_i, s_j \\ \text{transienta, alltså } 1 \le i,j \le t}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (Q^n)_{ij} = (N)_{ij}$ $\square$.

Tid till absorption

Låt $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^t$ vara kolonnvektorn med bara ettor.

Sats

Vektorn

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_t \end{pmatrix} := N\mathbf{1}$$

anger den förväntade tiden till absorption i mån att d_j är väntevärdet av antalet steg kedjan gör, efter start i (det transienta) tillståndet s_j, $1 \le j \le t$, tills den absorberas.

Bevis: Då n_{ij} är det förväntade antalet besök i s_j (transient) tills absorption ges den förväntade tiden som $\sum_{j=1}^{t} n_{ij} = (N\mathbf{1})_i = d_i$.

$\square$.

Absorptionssannolikhet

Sats

Gränsvärdet av matrisen $*$, när $n \to \infty$, är matrisen NR och därmed

$$P^n \to \begin{pmatrix} \mathbf{0} & NR \\ \mathbf{0} & I_a \end{pmatrix}$$

Bevis: Låt s_k vara sista transienta tillstånd innan absorption i s_{t+j} $(1 \le j \le a)$ som sker vid tid $m+1 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (P^n)_{i,t+j} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{t} (Q^m)_{ik} \cdot \underbrace{R_{k,j}}_{= \mathbb{P}(X^{(1)} = s_{t+j} | X^{(0)} = s_k)} = \sum_{m=0}^{n-1} (Q^m R)_{ij} \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (Q^m R)_{ij} = (N R)_{ij}$$

konvergerar då $\sum_{m=0}^{\infty} Q^m$ gör det och $|R_{kj}| \le 1$ för alla k,j

Låt oss skriva $B := NR$.

$\square$.

Om man alltså startar i det transienta tillståndet s_i, så hamnar man i det absorberande tillståndet s_{t+j} med sannolikhet b_{ij}, där b_{ij} är element (i,j) från matrisen NR.

Exempel

Låt

$$P = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- s_1, s_2, s_3 transienta
- s_4, s_5 absorberande
- $p_{14} = p_{35} = \frac{1}{2} > 0$
  $p_{24}^{(2)} = p_{21} p_{14} = \frac{1}{4} > 0$

$\rightarrow$ kedjan absorberande

vara övergångsmatrisen av en absorberande Markovkedja. Alltså $t = 3, a = 2, r = 5$ samt

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad R = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exempel

Alltså

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Om man börjar med tillstånd s_1 (transient, första rad) är det förväntade antalet besök i tillstånd s_2 innan kedjan blir absorberad (dvs. hamnar i antingen tillstånd s_4 eller s_5) lika med 1. (se sats ovan)

Exempel

$$N\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Om man alltså börjar i tillstånd s_1, s_2 eller s_3, är den förväntade tiden tills absorption 3,4 resp. 3.

$$B = NR = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Om man börjar med tillstånd s_3 är sannolikheten att bli absorberad i tillstånd $\underbrace{s_4}_{= s_{3+1}}$ lika med $\underbrace{\frac{1}{4}}_{= b_{31}}$ och för tillståd $\underbrace{s_5}_{= s_{3+2}}$ är det $\underbrace{\frac{3}{4}}_{= b_{3,2}}$.