Matematisk Statistik och Diskret Matematik, MVE051/MSG810, VT21

Timo Vilkas

Chalmers - Göteborgs Universitet

Föreläsning 7
21 april 2021

Hittills har vi undersökt stokastiska variabler med en given fördelning. I praktiken är den exakta fördelningen ofta okänd. Istället undersöker man data, antar en viss form av fördelning och skattar motsvarande parametrar.

I statistik delen av kursen vill vi titta närmare på:

1. **Beskrivande Statistik:** organisera, karakterisera och sammanfatta data
2. **Inferentiell Statistik:** dra slutsatser (statistisk inferens) om en population genom att undersöka ett representativt urval (stickprov)

Grundläggande Definitioner

- **Population:** Samling av alla enheter som är intressanta för undersökningen.
- **Slumpmässigt urval** (eng. random sample)**:** *Slumpmässigt valt* stickprov ur populationen, som undersöks för att samla information. Varje enhet i urvalet är en slumpvariabel med samma fördelning som hela populationen.
- **Data:** Informationen som samlas in i undersökningen (vanligtvis siffror, ibland kategorier)
- **Variabel:** Storleken som undersöks.

Grundläggande Definitioner

Vi skiljer på två olika typer av variabler:

1. **Kvantitativa** Variabler: värden ges som tal.
   (t.ex.: vikt, längd, ålder av patienter osv.)
2. **Kvalitativa** Variabler: värden ges som kategorier.
   (t.ex.: ögonfärg, blodgrupp, etc.)

Vi skiljer på två olika typer av statistiska mått:

1. mått på centraltendens/**lägesmått** *(medelvärde, median, kvantiler)*.
2. mått på **variation**/utspridning *(varians, standardavvikelse)*.

Exempel

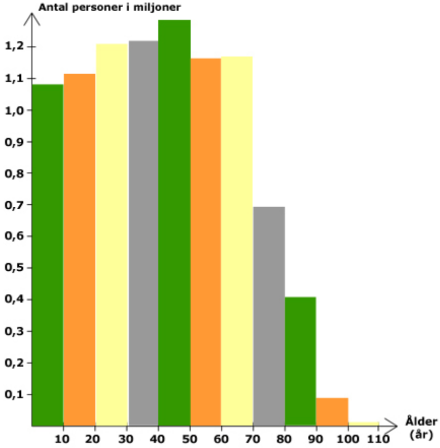
En undersökning av 250 patienter som blev inlagda på Sahlgrenska förra året visade att patienterna bor i medelvärde 20 kilometer ifrån sjukhuset.

Urvalet i undersökningen består av dessa 250 patienter som blev inlagda förra året, populationen består av alla patienter som blev inlagda på Sahlgrenska förra året och variablen vi undersöker är distansen mellan bostad och Sahlgrenska.

Data som samlades in kan visualiseras sammanställas grafiskt eller numeriskt:

- En **grafisk sammanställning** innebär en illustrering av data i ett histogram, en box-plot, polygon, ett cirkel- eller stapeldiagram etc.
- En **numerisk** analys innebär att man beräknar olika storlekar som beskriver datan, så som medelvärde, median eller varians. Dessa kallas i allmänhet **statistika** *(eng. statistics)*.
  Som nämnts ovan är de två mest relevanta typer mått på centraltendens och på variation.

Som data har vi ett numeriskt värde för varje enhet i populationen: $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Dessa kan illustreras med hjälp av **relativa frekvenser**:



Fördelningens parametrar: medelvärde, median

- **Populationsmedelvärdet** ges av

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i.$$

- **Medianen** $\tilde{x}$ av värdemängden $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ defineras som mellersta värde i mängden, närmare bestämt $\tilde{x} = x_m$ ifall $N = 2m - 1$ är udda och $\tilde{x} = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$ ifall $N = 2m$ är jämn.

Fördelningens parametrar: varians, variationsbredd

- Variansen av hela populationen ges av

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}$$

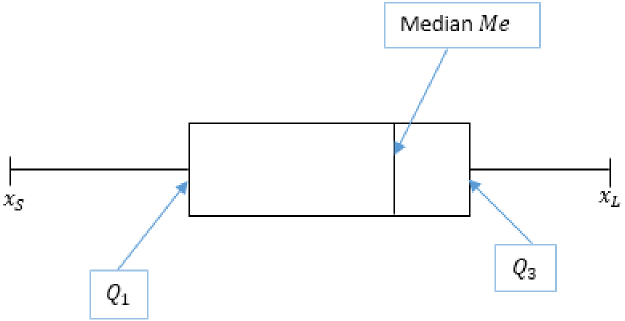
- **Standardavvikelsen** σ är som vanligt roten ur variansen.
- **Variationsbredd** *(eng. range)* är skillnaden mellan största och minsta värde, $x_L := \max\{x_1, \ldots, x_N\}$ resp. $x_S := \min\{x_1, \ldots, x_N\}$, $R = x_L - x_S$ (som blir $x_N - x_1$ ifall värden ges i stigande ordning).

OBS: Alla dessa parametrar är inte slump utan tal som framgår direkt ur datan och beskriver värdefördelningen.

Percentiler/Kvartiler

- En **percentil** P anger det värde på en stokastisk variabel nedanför vilket en viss procent andel av observationerna av variabeln hamnar. För $p \in [0, 100]$ är p-percentilen P_p alltså värdet så att $p\%$ eller färre av observationerna är mindre än P_p och $(100 - p)\%$ eller färre är större än P_p.
- De percentiler som delar in datan i fyra delar kallas kvartiler *(eng. quartiles)*: P_{25} eller Q_1 (**första kvartil**), P_{50} eller Q_2 (**andra kvartil** som motsvarar medianen) och P_{75} eller Q_3 (**tredje kvartil**).

Boxplot (eller Box-and-Whisker plot)



Lägesmått (eng. Location statistics): medelvärde, median

Låt $X_1, \cdots, X_n$ vara ett slumpmässigt urval av utfall med samma fördelning som X.

- **Stickprovsmedelvärdet** *(eng. sample mean)* ges av:

$$\overline{X} := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

  Detta är lätt att räkna fram dock mycket känsligt för extrema utfall (för lagom stor n).

- Precis som för hela populationen kan man bestämma medianen av ett stickprov (som också blir en slumpvariabel då). Den är mindre känslig för extrema utfall.

Spridningsmått (eng. measures of variability)

- **Stickprovsvariansen** *(eng. sample variance)* av $X_1, \cdots, X_n$ definieras som
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$
$S = \sqrt{S^2}$ kallas stickprovets standardavvikelse.
(Observera notationen: S för stickprovet, σ för populationen.)
- En enkel beräkning visar att stickprovsvariansen också kan skrivas som
$$S^2 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}.$$
- Stickprovets variationsbredd *(eng. sample range)* defineras precis som ovan, fast nu för mängden av observationer.

Exempel

Låt

$$18,\ 1,\ 20,\ 15,\ 12,\ 15,\ 14,\ 7,\ 11,\ 9,\ 6,\ 4$$

vara observationerna som utgör vårt stickprov. I stigande ordning har vi då värdemängden

$$1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 15,\ 18,\ 20$$

Medelvärde:

$$\overline{x} = \frac{20+18+15+15+14+12+11+9+7+6+4+1}{12} = 11$$

Median: Då $n = 12$ är jämn, ges medianen som medelvärdet av värde nummer 6 och 7: $Me = \frac{11+12}{2} = 11.5$.

Exempel

Variationsbredd: $x_L = 20$, $x_S = 1$, alltså $R = 20 - 1 = 19$.

Varians och standardavvikelse:

$$s^2 = \frac{(20-11)^2 + (18-11)^2 + \cdots + (-7)^2 + (-10)^2}{11} \approx 33.3$$

och

$$s = \sqrt{s^2} = 5.77$$

Kvartiler:

$$Q_1 = 6.5 \quad \text{och} \quad Q_3 = 15$$

Inferentiell Statistik

- Det finns två vanliga typer av **inferentiella statistika**: **skattning** och **hypotesprövning**.
- Det finns två vanliga typer av skattning: **punktskattning** och **intervallskattning** (konfidensintervall: osäkerhetsintervall kring en punktskattning).
- En **parameter** är en statistisk storhet, som beskriver fördelningen i populationen (t.ex. μ, σ, etc.)
- I en skattning försöker man uppskatta/approximera (minst) en parameter θ med hjälp av ett representativt stickprov.

Punktskattning

- En **punktskattning** ger ett numeriskt värde som approximerar en populationsparameter θ.
- En regel för att beräkna en skattning av en given parameter baserad på ett stickprov av observerade data kallas en **estimator**. Estimatorer ges vanligtvis genom en formel, t.ex. är
$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$
en estimator för populationsmedelvärdet μ.
- Observera att en estimator är en *slumpvariabel*. Ett enskilt numeriskt värde, som fås genom att beräkna formeln för ett givet stickprov (utfall) kallas en (upp)skattning av parametern.
- En estimator av parametern θ betecknas med $\hat{\theta}$.

Väntevärdesriktig

- Det finns olika önskvärda egenskaper hos en estimator. En viktig sådan är att den är väntesvärderiktig *(eng. unbiased)*.
- En estimator $\hat{\theta}$ kallas **väntevärdesriktig** om och endast om $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$, där $\mathbb{E}[\hat{\theta}]$ är väntevärdet av $\hat{\theta}$ (som motsvarar genomsnittet av skattningarna av θ som framgår ur alla möjliga val för stickprovet av en given storlek ur populationen).
- I ord betyder det att genomsnittet av ett större antal skattningar kommer ligga nära parametern så länge vi skattar med en väntesvärderiktig estimator.

Stickprovsmedelvärdet är väntevärdesriktigt

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov av storlek n ur en fördelning med väntevärde μ, och låt $\overline{X}$ vara stickprovsmedelvärdet.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\overline{X}] &= \mathbb{E}[\tfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)] \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

$\overline{X}$ är alltså en väntesvärderiktig estimator av parametern μ.

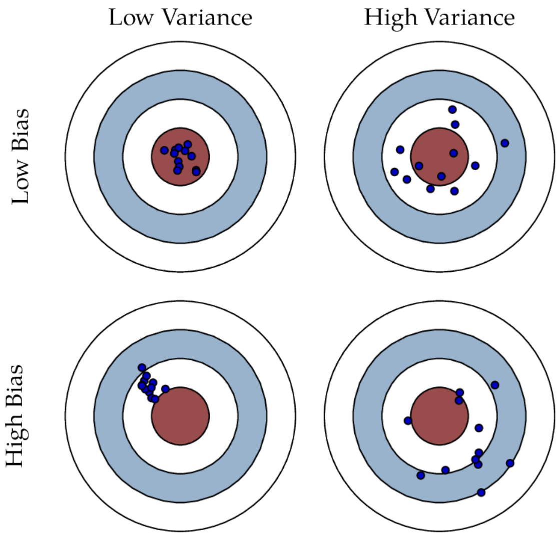
Konsistens

- En annan önskvärd egenskap är att estimatorn $\hat{\theta}$ har en liten varians när stickprovets storlek är tillräcklig (om den går mot 0 när $n \to \infty$ kallas estimatorn **konsistent**).
- Låt $\overline{X}$ som förr vara medelvärdet av ett stickprov av n stycken (oberoende) observationer ur en fördelning med väntevärde μ och varians σ^2. Då gäller $Var[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$.
- Följaktligen går $Var[\overline{X}]$ mot noll när man ökar stickprovets storlek tillräckligt mycket och $\overline{X}$ ligger då nära sitt väntevärde μ.
- $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, som är standardavvikelsen av $\overline{X}$, kallas också **medelvärdets standardfel** *(eng. standard error of the mean)*.

Stickprovsvariansen är väntevärdesriktig

Låt $X_1, \dots, X_n$ ett stickprov av storlek n ur en fördelning med väntevärde μ och varians σ^2

- En enkel beräkning visar att stickprovsvariansen $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ är en väntevärdesriktig estimator för σ^2.
- Standardavvikelsen S är däremot **inte** väntevärdesriktig som estimator för σ.
- Anledningen varför man delar med $n-1$ istället för n i formeln för S^2 är just att göra estimatorn väntevärdesriktig.


Low Variance
High Variance
Low Bias
High Bias

Stickprov ur en normalfördelning

Sats

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende, normalfördelade slumpvariabler med motsvarande väntevärde $\mu_1, \ldots, \mu_n$ och varians $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$. Då är också summan $X_1 + \cdots + X_n$ normalfördelad med väntevärde $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ och varians $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

- Bevis: t.ex. med entydighet av momentgenererande funktionen
- Vi visste redan att $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ medför $cX \sim \mathcal{N}(c\mu, c^2\sigma^2)$ för godtyckligt $c \in \mathbb{R}$, jfr. föreläsning 3.
- Om alltså $X_1, \cdots, X_n$ är ett stickprov av storlek n ur en normalfördelning med väntevärde μ och varians σ^2, så är $\overline{X}$ också normalfördelat med väntevärde μ och varians $\frac{\sigma^2}{n}$.