Inlämningsuppgift 2: Absorberande Markovkedjor och betingade väntevärden

1 maj 2022

Låt oss ändra reglerna i slumpexperimentet "Silvias klänning" från första inlämningsuppgiften på så sätt att hon avslutar så fort det finns antingen en eller ingen klänning kvar efter någon omgång (hon fortsätter alltså bara så länge minst 2 klänningar är kvar). Kom ihåg att hon började med n stycken och singlar slant i varje omgång för varje klänning som är kvar (oberoende).

1) Markovkedja

Låt X_k beteckna antalet klänningar som är kvar efter omgång $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Argumentera varför $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ är en (tidshomogen) Markovkedja.

(b) Ange tillståndsrummet S och starttillståndet X_0 för denna och förklara vilka tillstånd som är transienta och vilka som är absorberande.

(c) Beräkna alla övergångssannolikheter, dvs. $p_{lm} = \mathbb{P}(X_k = m \mid X_{k-1} = l)$ för godtyckliga $k \in \mathbb{N},\ l, m \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

2) Succé eller inte?

Om Silvia avslutar experimentet med exakt en klänning kvar, kan det betraktas som framgångsrikt (hon vet nu vilken balklänning hon vill ha på sig till Carl Gustavs födelsedagskalas). Låt oss spika fast att hon har $n = 4$ klänningar från början.

(a) Ange motsvarande 5×5 övergångsmatris $P = (p_{lm})_{0\le l,m\le 4}$ i kanonisk form.

(b) Beräkna den förväntade tiden till absorption, dvs. väntevärdet av antalet omgångar tills Silvia avslutar experimentet.

(c) Beräkna sannolikheten för succé, alltså för händelsen att hon avslutar med exakt en klänning kvar.

3) Inget misslyckande

För att undvika besvikelsen av att inte ha valt ut en klänning ändrar Silvia reglerna av sitt experiment en smula till: Skulle det i omgång k (som börjar med $X_{k-1} \geq 2$ klänningar) hända att alla klänningar som är kvar åker på en krona och tillbaka in i garderoben, tar hon ut dessa X_{k-1} klänningar igen och fortsätter alltså med $X_k = X_{k-1}$ i omgång $k + 1$ (precis som om det hade kommit klave för varje). Slumpexperimentet avslutar därmed bara när exakt en klänning är kvar. Låt igen $n = 4$ vara antalet vid start.

(a) Vilket tillståndsrum har den ändrade kedjan? Ange motsvarande övergångsmatris P i kanonisk form.

(b) Beräkna igen den förväntade tiden till absorption, dvs. väntevärdet av antalet omgångar tills Silvia har valt ut sin klänning på detta sätt.

4) Wald's identity och betingade väntevärden

Matematikern Abraham Wald är bl.a. känd för följande resultat (i lite mer allmän form): Låt $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ vara en följd av oberoende likfördelade diskreta slumpvariabler och N en slumpvariabel som tar värden i $\mathbb{N}$ och är **oberoende** av hela följden. Låt vidare Z beteckna summan av de första N slumpvariabler i följden, dvs. $Z = \sum_{i=1}^{N} Y_i$. Så gäller (under förutsättningen att alla inblandade väntevärden existerar):

$$\mathbb{E}\, Z = \mathbb{E}\, N \cdot \mathbb{E}\, Y_1.$$

Vi vill visa detta i en rad enkla steg. Analogt vanliga väntevärden definerar man *betingade väntevärden* med avseende på betingade sannolikheter: För diskret Z och händelse A är då

$$\mathbb{E}\, Z = \sum_z z \cdot \mathbb{P}(Z = z) \qquad \text{och} \qquad \mathbb{E}[Z \mid A] = \sum_z z \cdot \mathbb{P}(Z = z \mid A),$$

där andra termen utläses som "väntevärde av Z givet A".

(a) Visa med hjälp av definitionen av betingad sannolikhet, $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, att det gäller för en partition $\{A_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ av utfallsrummet S att

$$\mathbb{E}\, Z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{E}[Z \mid A_n].$$

(b) Beräkna det betingade väntevärdet av $Z = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ givet händelsen $A_n := \{N = n\}$ i situationen ovan för godtyckligt $n \in \mathbb{N}$.

Ledning: Kom ihåg att $\{Y_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ och N är oberoende, $\{Y_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ är likfördelade samt hur man räknar ut väntevärdet av en summa av ett fixt antal slumpvariabler.

(c) Använd del (a) och del (b) för att visa Walds identitet.

5) Vänta på succé genom upprepning

Om Silvia – istället för modifikationen i 3) – upprepar experimentet i 2) så länge tills det slutar med succé (oberoende), dvs. när det avslutar med alla klänningar i garderoben börjar hon om med alla n stycken, ges den totala tiden tills hon fattar ett beslut genom $Z = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, där N är antalet gånger hon behövde upprepa experimentet tills det slutade med exakt en klänning kvar och Y_i är antalet omgångar i upprepning nummer i av experimentet.

(a) När det gäller Markovkedjan motsvarar det att man betraktar tillstånd 0 och tillstånd n som samma (och transient). Ange för $n = 4$ motsvarande övergångsmatris $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ i kanonisk form för denna kedja.

(b) Beräkna den förväntade tiden till absorption, dvs. väntevärdet på antalet omgångar tills Silvia avslutar experimentet (i tillstånd 1, som är igen det enda absorberande) på samma sätt som i 2) och 3).

(c) Vilken fördelning har slumpvariabeln N (använd 2(c) för att bestämma parametern)? Ange väntevärdet $\mathbb{E}\, N$.

(d) Använd 2) och 4) för att beräkna $\mathbb{E}\, Z$ under **förutsättningen** att N och $\{Y_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ är oberoende. Jämför med ditt resultat i del (b)

6) Ytterligare (ej obligatoriska) frågor

Här vill vi undersöka om N och $\{Y_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ faktiskt är oberoende i Silvias situation eller ej.

(a) Vilken slutsats kan man dra ifrån resultaten i 5(b) och (d)?

(b) Har tiden Y_1 tills första upprepning avslutas samma fördelning givet att det är sista $(N = 1)$ jämfört med givet att det inte är det $(N > 1)$?

Ledning: Beräkna först $\mathbb{P}(Y_1 = 1, N = 1)$ samt $\mathbb{P}(Y_1 = 1, N > 1)$. Med hjälp av 2(c) kan du sedan jämföra $\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid N = 1)$ och $\mathbb{P}(Y_1 = 1 \mid N > 1)$ för $n = 4$.

(c) Vad betyder det för den ovannämnda frågan om oberoende?