Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH3400 - Analyse mathématique pour ingénieurs
Automne 2021

Devoir 6

Nom : Laguë **Prénom :** Frédéric

Matricule : 1986131 **Section :** 01

Q1	Q2	Q3	Q4	Total

Question 1

Soient $E_{1,}, E_2, \ldots, E_n$ une collection dénombrable de sous-ensembles de mesures nulle de $\mathbb{R}^n$.
On peut construire une collection $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de sous-ensembles disjoints tels que

$$\dot{\bigcup_{k=1}^{n}} F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_n,$$

en prenant

$$F_1 = E_1$$

$$F_2 = E_2 \backslash E_1$$

$$F_3 = E_3 \backslash (E_1 \bigcup E_2)$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$F_n = E_n \backslash (E_1 \bigcup E_2 \bigcup \ldots \bigcup E_{n-1})$$

De la définition d'une mesure, la mesure d'une union dénombrable d'ensembles disjoints est

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{n}^{\infty}} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(F_n\right)$$

Or, par construction, chaque F_n est inclus dans E_n

$$F_n \subset E_n$$

$$\implies \mu(F_n) \leq \mu(E_n)$$

On a donc

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{n}} F_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(F_k\right) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu\left(E_n\right) = 0$$

Question 2

a) On peut écrire la fonction valeur absolue comme

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a $f \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction f définit donc un fonctionnelle $l_f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$l_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi(x) \mathrm{d}x$$

On peut choisir φ à support compact, telle que $\overline{\mathrm{supp}(\varphi)} = [-M, M]$, pour une constante M. On a donc la dérivée au sens large de f ;

$$\begin{aligned}
\partial_x l_f(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-M}^{M} \mathrm{d}x f(x) \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \\
&= -\int_{-M}^{0} \mathrm{d}x \ f(x) \frac{\mathrm{d}(\varphi(x))}{\mathrm{d}x} - \int_{0}^{M} \mathrm{d}x \ f(x) \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \\
&= -\int_{-M}^{0} \mathrm{d}x \ f(x) \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} - \int_{0}^{M} \mathrm{d}x \ f(x) \frac{\mathrm{d}(\varphi(x))}{\mathrm{d}x} \\
&= -\lim_{b \to 0^-} \left(\Big[|x| \varphi(x) \Big]_{-M}^{b} - \int_{-M}^{b} \mathrm{d}x \ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \varphi(x) \right) \\
&- \lim_{a \to 0^+} \left(\Big[f(x) \varphi(x) \Big]_{a}^{M} - \int_{a}^{M} \mathrm{d}x \ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \varphi(x) \right) \\
&= -\lim_{b \to 0^-} \left(\Big[-b \cdot \varphi(b) - (-M) \cdot \varphi(-M) \Big] - \int_{-M}^{b} \mathrm{d}x \ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \varphi(x) \right) \\
&- \lim_{a \to 0^+} \left(\Big[M \cdot \varphi(M) - a \cdot \varphi(a) \Big] - \int_{a}^{M} \mathrm{d}x \ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \varphi(x) \right)
\end{aligned}$$

Avec $\varphi(-M) = \varphi(M) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_x l_f(\varphi) &= \lim_{b\to 0^-}\int_{-M}^{b} \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\varphi(x) + \lim_{a\to 0^+}\int_{a}^{M} \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\varphi(x) \\ &= -\lim_{b\to 0^-}\int_{-M}^{b} \mathrm{d}x\ \varphi(x) + \lim_{a\to 0^+}\int_{a}^{M} \mathrm{d}x\ \varphi(x)\end{aligned}$$

En posant

$$g(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\partial_x l_f(\varphi) = \int_{-M}^{M} \mathrm{d}x\ g(x)\varphi(x)$$

$$\implies \partial_x l_f = \partial_x l_g$$

Puisque l'égalité est respectée pour toute fonction test φ, la dérivée au sens large de $f(x) = |x|$ est donc $g(x) = \mathrm{sign}(x)$

b) (i) Soit $\omega \in D(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \omega(x) = 1$. Alors, on peut définir

$$\psi(t) = \varphi(t) - \omega(t)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}s\ \varphi(s)$$

D'abord, on calcule la dérivée de ψ.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi(t) - \omega(t)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}s\ \varphi(s)\right) \\ &= \varphi'(t) - \omega'(t)\int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\mathrm{d}s = 0 \\ &\implies \psi \in C^{\infty}\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t\ \psi(t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(t) - \omega(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt - \int_{\mathbb{R}} \left(\omega(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \\
&= 1 - (1 \cdot 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Selon le théorème fondamental du calcul intégral,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}x\ f(x) = f(t)$$

Donc,

$$\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\varphi(r) - \omega(r) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}r\ \right) = \varphi(t) - \omega(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\mathrm{d}s\ = \psi(t)$$

(ii) On a

$$\begin{aligned}
l_f(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f(x)\varphi(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f(x) \left(\psi(t) + \omega(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\mathrm{d}s\ \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f(x)\psi(x) + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\ f(x)\omega(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\ f(x)\varphi'(x) + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ f(x)\omega(x) \\
&= 0 + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ Cf(x)\omega(x) \\
&= l_C(x)
\end{aligned}$$

Question 3

$$a^\dagger \left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle$$

$$\left|n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger\, n} \left|0\right\rangle$$

$$a_k^\dagger \left|0_1, 0_2, \ldots, 0_{k-1}, 0_k, \ldots\right\rangle = \left|0_1, 0_2, \ldots, 0_{k-1}, 1_k, \ldots\right\rangle$$

$$\left|n_1, n_2, n_3, \ldots\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} a^{\dagger\, n_1} \frac{1}{\sqrt{n_2!}} a^{\dagger\, n_2} \frac{1}{\sqrt{n_3!}} a^{\dagger\, n_3} \left|0, 0, 0, \ldots\right\rangle$$

$$n_k = a_k^\dagger a_k$$

$$n_k \left|n_1 n_2, \ldots, n_k, \ldots\right\rangle = n_k \left|n_1 n_2, \ldots, n_k, \ldots\right\rangle$$

$$N_{tot} = \sum_k a_k^\dagger a_k$$

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné. On veut montrer que

$$\int_\Omega \mathrm{d}x \; \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathrm{d}x \; (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v},$$

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ comme

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathrm{d}x \; \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \int_\Omega \mathrm{d}x \; (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

On montre d'abord que f est bilinéaire :

i)

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u_2},v) &= \int_\Omega \mathrm{d}x\ (\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2)\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) - \int_\Omega \mathrm{d}x\ (\nabla\times[\alpha\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2])\cdot\mathbf{v} \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}x\ \alpha_1\mathbf{u}_1\cdot(\nabla\times\mathbf{v})+\alpha_2\mathbf{u}_2\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) \\
&\quad - \int_\Omega \mathrm{d}x\ \alpha_1(\nabla\times\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{v}+\alpha_2(\nabla\times\mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}x\ \alpha_1\mathbf{u}_1\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) + \int_\Omega \mathrm{d}x\ \alpha_2\mathbf{u}_2\cdot\nabla\times\mathbf{v} \\
&\quad - \int_\Omega \mathrm{d}x\ \alpha_1(\nabla\times\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{v} - \int_\Omega \mathrm{d}x\ \alpha_2(\nabla\times\mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} \\
&= \alpha_1\int_\Omega \mathrm{d}x\ \mathbf{u}_1\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) - \alpha_2\int_\Omega \mathrm{d}x\ \mathbf{u}_1\cdot\nabla\times\mathbf{v} \\
&\quad - \alpha_1\int_\Omega \mathrm{d}x\ (\nabla\times\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{v} - \alpha_2\int_\Omega \mathrm{d}x\ (\nabla\times\mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} \\
&= \alpha_1\left(\int_\Omega \mathrm{d}x\ \mathbf{u}_1\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) - \int_\Omega \mathrm{d}x\ (\nabla\times\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{v}\right) \\
&\quad + \alpha_2\left(\int_\Omega \mathrm{d}x\ \mathbf{u}_2\cdot(\nabla\times\mathbf{v}) - \int_\Omega \mathrm{d}x\ (\nabla\times\mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v}\right) \\
&= \alpha_1 f(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)+\alpha_2 f(\mathbf{u}_2,\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{u}, \alpha 1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) &= \int_\Omega \mathrm{d}x\ \mathbf{u} \cdot (\nabla \times [\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2]) - \int_\Omega \mathrm{d}x\ \ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2) \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}x\ \mathbf{u} \cdot (\alpha_1 [\nabla \times \mathbf{v}_1] + \alpha_2 [\nabla \times \mathbf{v}_2]) \\
&\quad - \int_\Omega \mathrm{d}\ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \alpha_1\mathbf{v}_1 + (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \alpha_2\mathbf{v}_2 \\
&= \alpha_1 \int_\Omega \mathrm{d}\ \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_1) + \alpha_2 \int_\Omega \mathrm{d}\ \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_2) \\
&\quad - \alpha_1 \int_\Omega \mathrm{d}\ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}_1 - \alpha_2 \int_\Omega \mathrm{d}\ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}_2 \\
&= \alpha_1 (\int_\Omega \mathrm{d}\ \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_1) - \int_\Omega \mathrm{d}\ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}_1) \\
&\quad + \alpha_2 (\int_\Omega \mathrm{d}\ \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_2) - \int_\Omega \mathrm{d}\ (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}_2) \\
&= \alpha_1 f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)
\end{aligned}
$$

La fonction f est donc bien bilinéaire.
Ensuite, on montre que f est bornée.

On a

$$
\begin{aligned}
|f(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \int_\Omega \mathrm{d}x\ |\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})| + \int_\Omega \mathrm{d}x\ |(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}| \\
&\leq ||\mathbf{u}||_{L^2(\Omega)^3}\ ||\nabla \times \mathbf{v}||_{L^2(\Omega)^3} + ||\nabla \times \mathbf{u}||_{L^2(\Omega)^3} ||\mathbf{v}||_{L^2(\Omega)^3}
\end{aligned}
$$

, où l'on a utilisé l'identité de Cauchy-Schwarz.
Puisque les dérivées partielles sont continues, l'opérateur $\nabla \times : H_0^1(\Omega)^3 \to H_0^0(\Omega)^3$, en étant une combinaison linéaire des dérivées partielles est continue, donc borné.
Ainsi, il existe deux constantes $M_\mathbf{v}$ et $M_\mathbf{u}$ telles que

$$
||\nabla \times \mathbf{v}||_{H_0^1(\Omega)^3} \leq M_\mathbf{v} ||\mathbf{v}||_{H_0^1(\Omega)^3}
$$

et

$$||\nabla \times \mathbf{u}||_{H_0^0(\Omega)^3} \leq M_{\mathbf{u}}||\mathbf{u}||_{H_0^1(\Omega)^3}$$

De plus, on a par définition

$$||\mathbf{u}||_{H_0^1(\Omega)^3} \geq ||\mathbf{u}||_{L^2(\Omega)^3} \text{ et } ||\mathbf{u}||_{H_0^1(\Omega)^3} \geq ||\mathbf{v}||_{H_0^1(\Omega^3)}$$

On peut donc réécrire

$$|f(\mathbf{v})| \leq ||\mathbf{u}||_{H_0^1(\Omega)^3} M_{\mathbf{v}}||\mathbf{v}||_{H_0^1(\Omega)^3} + |f(\mathbf{v})| \leq ||\mathbf{v}||_{H_0^1(\Omega)^3} M_{\mathbf{u}}||\mathbf{u}||_{H_0^1(\Omega)^3}$$

$$\implies |f(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq (M_{\mathbf{v}} + M_{\mathbf{u}})||\mathbf{u}||_{H_0^1(\Omega)^3}||\mathbf{v}||_{H_0^1(\Omega)^3}$$

On a donc que f est une fonction bilinéaire et bornée entre deux espaces vectoriels normés, alors f est continue sur $H_0^1(\Omega)^3$
Ensuite, il est donnée que $\forall \phi, \psi \in C_0^1(\Omega)^3$, on a

$$f(\phi, \psi) = 0$$

Or, puisque H_0^1 est la complétude de $C_0 H^1$, on a $C_0^1 \subset H_0^1$. De plus, C_0^1 est dense. Ainsi, puisque $f = 0$ sur un sous-ensemble dense et f est continue sur $H_0^1(\Omega)^3$, alors

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \;\; \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$$