Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH3400 - Analyse mathématique pour ingénieurs
Automne 2021

Devoir 3

Nom : Lague **Prénom :** Frédéric

Matricule : 186131 **Groupe :** 01

Q1	Q2	Q3	Q4	Total

Question 1

Soit l'espace vectoriel

$$\ell^1 = \{x \in \mathbb{R}^\infty | |x|_1 < \infty\}$$

équipé de la norme additive

$$|x|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Soit le sous-ensemble

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^\infty \mid \forall n \ \in \ \mathbb{N}_0, \ |x_n| \leq 2^{-n}\right\} \tag{1}$$

On veut montrer que K est compact dans ℓ^1, donc que toute suite $(\mathbf{x}_n)_n$ possède une sous-suite qui converge dans K. C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \, n_\varepsilon \ \text{ tel que } n \geq n_\varepsilon \text{ implique } d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon$$

$$\iff \ ||\mathbf{x_n} - \mathbf{x}|| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \varepsilon$$

Soit $\left(\mathbf{x}_k^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de K. Chaque élément de cette suite est donc une suite de n éléments :

$$\mathbf{x}_k^{(0)} = ((x_k)_1, (x_k)_2, (x_k)_3, \ldots)$$

Soit $x_{k,j}^{(0)}$ le j-ème élément de la suite $\left(\mathbf{x}_k^{(0)}\right)$. La suite $\left(x_{k,j}^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty}$ est donc bornée entre $[-\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^j}]$, car tous les éléments $\mathbf{x}_k^{(0)}$ sont dans K et respectent 1. De plus, cette suite est dans $\mathbb{R}^k$.
Ainsi, en choisissant $j = 1$, la suite $\left(x_{k,1}^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty}$ des premières composantes des $\mathbf{x}_k^{(0)}$ est une suite dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}$.
Par exemple, on peut montrer que la suite $\left(x_{k,j}^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty}$ définie comme

$$x_{k,j}^{(0)} = \frac{1}{2^{-jk}} \tag{2}$$

respecte ces critères.
Alors, selon le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite convergente de $\left(x_{k,1}^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty}$
pour certains indices k. Le Théorème des intervalles emboités indique que cette limite de cette suite, x_1^* ,est dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Appelons $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$, la suite donc les indices k forment la sous-suite convergente mentionnée ci-haut. De plus, choisissons cette suite telle que

$$\mathbf{x}_{2k}^{(1)} = \mathbf{x}_k^{(0)}$$

On peut également montrer que la suite définie en 2 respecte également ces critères.

Similairement, prenons cette fois-ci la suite $\left(\mathbf{x}_{k,2}^{(1)}\right)_{k=1}^{\infty}$. Puisque

$$\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)_{k=1}^{\infty} \subset K,$$

cette suite des deuxièmes composantes de $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$ est donc dans $[-\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}] \in \mathbb{R}$, et toujours avec le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut montrer qu'il existe une sous-suite convergente de $\left(\mathbf{x}_{k,2}^{(1)}\right)$ pour certains indices k. De plus, la limite de cette suite, x_1^* est dans $[-\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}]$
Appelons cette sous-suite, $\mathbf{x}_k^{(2)}$, puis définissions-là telle que

$$\mathbf{x}_k^{(2)} = \mathbf{x}_{2k}^{(1)} = \mathbf{x}_{4k}^{(2)}.$$

La suite définie en (2) respecte également tous ces critères.

Il est à noter que, puisque la suite des premières composantes de $\mathbf{x}_k^{(1)}$ est une sous-suite de $\mathbf{x}_{k,1}^{(0)}$, qui converge, cette dernière converge également dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Finalement, on peut répéter le processus précédent pour la m-ième composante de chaque sous-suite précédente $\mathbf{x}_{k,m}^{(m-1)}$, en définissant $\mathbf{x}_k^{(i)}$ telle que

$$\mathbf{x}_k^{(i)} = \mathbf{x}_{2^i k}^{(0)}.$$

, dont les m premières composantes convergent vers une valeur $x_m^* \in [-\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^m}]$.

Avec l'argument diagonal de Cantor, on peut donc choisir la sous-suite dont tous les éléments sur la "diagonale" m, k infinie dont tous les éléments convergent. Bien que le nombre de composantes soit infini, on peut toujours construire une plus grande infinité de suites infinies afin d'en obtenir une convergente.

Pour terminer, puisque chaque composante x_n de la sous-suite converge dans $[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$, il est clair que cette sous-suite est dans K. Chaque composante x_n respecte

$$|x_n| \leq 2^{-n} \forall n in \mathbb{N}_0$$

Il est également possible de remarquer que la suite définie en (2) converge vers

$$\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, \ldots)$$

Question 3

a)

b)

c)

Question 4

a)

b)

c)