Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH3400 - Analyse mathématique pour ingénieurs
Automne 2021

Devoir 4

Nom : Laguë **Prénom :** Frédéric

Matricule : 1986131 **Section :** 01

Q1	Q2	Q3	Q4	Total

Question 1

Tout d'abord, pour montrer la linéarité de $T{-}1$ on doit montrer que, $\forall x, y \in U$:

i)
$$T^{-1}(x+y) = T^{-1}x + T^{-1}y,$$

et

ii)
$$T^{-1}(\alpha x) = \alpha T^{-1}x$$

Pour i), posons $x' = Tx, \in V$ et $y' = Ty, \in V$. On peut donc écrire

$$T^{-1}(x'+y') = T^{-1}(Tx+Ty)$$

Puisque T est linéaire,

$$T^{-1}(Tx+Ty) = T^{-1}(T(x+y)) = T^{-1}T(x+y) = x+y$$

On avait $x' = Tx$ et $y' = Ty$. Puisque T est bijectif, $x = T^{-1}x$ et $y = T^{-1}y'$ On trouve donc bel et bien

$$T^{-1}(x'+y') = T^{-1}x' + T^{-1}y'$$

Pour ii), on pose $x' = Tx$. Similairement,

$$T^{-1}(\alpha x') = T^{-1}(\alpha Tx)$$

Puisque T est linéaire,

$$T^{-1}(\alpha Tx) = T^{-1}(T(\alpha x)) = \alpha x$$

Puisque T est bijectif, $x' = Tx \implies x = T^{-1}x$. On trouve donc effectivement

$$T^{-1}(\alpha x) = \alpha T^{-1}(x)$$

Donc T^{-1} est donc linéaire.

Ensuite, pour la condition sur $||T^{-1}||$, on commence par écrire la définition de la norme de T^{-1}.

$$||T^{-1}|| = \sup\left\{\frac{||T^{-1}x||_U}{||x||_V} \,|\, x \in V \text{ tel que } x \neq 0.\right\}$$

Posons ensuite $x = Tx'$, $x \in V$, $x' \in U$. Puisque T est bijectif, on a $x' = T^{-1}x$. On peut donc réécrire

$$||T^{-1}|| = \sup\left\{\frac{||x'||_U}{||Tx'||_V} \,|\, x' \in U \text{ tel que } x' \neq 0\right\}$$

En utilisant $||Tx'||_V \leq ||T|| \ \cdot ||x'||_U$, (livre, p.53) on a que

$$\frac{1}{||T||} \leq \frac{||x'||_U}{||Tx'||V} \implies \sup\left\{\frac{||x'||_U}{||Tx'||V}\right\} \geq \frac{1}{||T||}$$

On trouve donc effectivement que

$$\frac{1}{||T||} \leq ||T^{-1}||$$

Question 2

a) L'opérateur T est borné si : $\exists M \in \mathbb{R}^+$, tel que

$$||Tf|| \leq M \cdot ||f||_\infty, \forall f \in C^0[-a,a]$$

$$\iff |f(0)| \leq M \cdot \sup_{x\in[-a,a]} |f(x)|, \forall f \in C^0[-a,a]$$

On remarque que pour $M = 1$, $|f(0)| \leq \sup_{x\in[-a,a]}|f(x)|$, si f n'est pas la fonction identiquement nulle. L'opérateur est donc borné par $||T|| \leq 1$

b) Puisque T est un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels, T est continue si et seulement si il est borné. On doit donc montrer que T n'est pas borné. C'est-à-dire que, $\forall M < \infty$, $\exists f \in C^0[-a,a]$ tel que

$$|f(0)| > M \int_{-a}^{a} |f(x)| dx$$

Soit la fonction $f_n(x)$ définie comme :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} n^2x + n, & \text{si } x \in [-\frac{1}{n}, 0] \\ -n^2x + n & \text{si } 0x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$. De plus, on peut calculer que :

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} |f(x)| dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{0} n^2x + n \, dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}} -n^2x + n \, dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall M < \infty$, $\lim_{n\to\infty} f_n(0) > M||f_n||_\infty$ et donc, on a montré que T n'est pas borné. Puisque T n'est pas borné, il n'est pas continu car il s'agit d'un opérateur linéaire, entre deux espaces vectoriels normés.

Question 3

a) Pour montrer que $\mathrm{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel on doit montrer

i) Fermeture sous l'addition :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(T) \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(T)$$

Pour prouver ceci, prenons $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(T)$. Alors, en utilisant la linéarité de T :

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Donc $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ est dans le noyeau.

ii) Fermeture sous la multiplication par un scalaire (du corps $\mathbb{F}$)

$$\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(T) \implies alpba\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(T)$$

Encore une fois, en utilisant le fait que T est linéaire :

$$T\alpha\mathbf{x} = \alpha T\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Donc, $\alpha\mathbf{x}$ est dans le noyeau.

iii) Existence du vecteur nul dans le noyeau Pour prouver ceci, on fait ressortir l'élément inverse de l'addition de vecteurs, et en utilisant la linéarité. Soit $\mathbf{x}\ in \mathrm{Ker}(T)$

$$T\mathbf{0} = T(\mathbf{x} + -\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) + T(-\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Le vecteur nul $\mathbf{0}$ est donc dans le noyeau.

$\mathrm{Ker}(T)$ est donc effectivement un sous-espace vectoriel.

b) Pour montrer que $\mathrm{Ker}(T)$ est fermé, on utilise le fait que T est linéaire et borné, donc continu. Supposons que $T \neq 0$, et prenons $\mathbf{x}_n \notin \mathrm{Ker}(T) \implies \mathbf{x}_n \in \mathrm{Ker}(T)^C$, défini comme :

$$\mathbf{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{x}}{n} | \mathbf{x} \notin \mathrm{Ker}(T)$$

Par la linéarité de T, on peut voir que $\mathbf{x}_n$ n'est pas dans le noyeau pour aucun n ;

$$T(\mathbf{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T(\mathbf{x}).$$

Cependant, $\mathbf{x}_n$ converge vers $\mathbf{x}' = 0 \notin \mathrm{Ker}(T)^C$. Cela signifie donc que la limite n'est pas dans le complément du noyeau. Le complément du noyeau est donc ouvert, et donc $\mathrm{Ker}(T)$ est fermé.

c) Tout d'abord, commençons par montrer que T est injectif $\implies$ $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Supposons que T est injectif. Par linéarité,

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(T)$$

Ensuite, prenons $\mathbf{x} \in U$. On a donc, si $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(T)$, que $T(\mathbf{x}) = 0$

$$\implies T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{0})$$

, puisque T est injectif,

$$\implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ainsi, $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(T) \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$ et donc

$$T \text{ est injectif } \implies \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$$

Montrons ensuite que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\} \implies T$ est injectif. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ tels que $T\mathbf{x} = T\mathbf{y}$. Ainsi,

$$\implies T\mathbf{x} - T\mathbf{y} = 0.$$

Par linéarité,

$$T\mathbf{x} - T\mathbf{y} = T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0.$$

Donc, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(T)$. Cependant, on avait $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$

$$\implies \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

On a donc que T est injectif. Donc, $\text{Ker}(T) = \{0\} \implies T$ est injectif.

Puisque T est injectif $\implies \text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$ et $\text{Ker}(T) = \{0\} \implies T$ est injectif, on a

$$\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\} \iff T \text{ est injectif}$$

Question 4

a) Tout d'abord, on peut commencer par réécrire :

$$||A\mathbf{u}||_2^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} (A\mathbf{u})_k^2\right)$$

En posant $\mathbf{x} = A\mathbf{u}$, on obtient $||\mathbf{x}||_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k^2$ Ou, de façon équivalente

$$||\mathbf{x}||_2^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$$

Donc,

$$\begin{aligned} ||A\mathbf{u}||_2^2 &= (A\mathbf{u})^T A\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T A^T A\mathbf{u} \end{aligned}$$

En posant $F = A^T A$, on peut écrire en termes matriciels

$$||A\mathbf{u}||_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} u_i F_{ij} u_j$$

Donc le gradient est

$$\frac{\partial}{\partial u_k} ||A\mathbf{u}||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} F_{kj} u_j + \sum_{i=1}^{n} u_i F_{ik}$$

Puisque $F^T = (A^T A)^T = A^T A = F$ On peut réécrire

$$\frac{\partial}{\partial u_i} ||A\mathbf{u}||_2^2 = 2\sum_{j=1}^{n} F_{ij} u_j = 2A^T A\mathbf{u}$$

Le lagrangien s'écrit sous forme matricielle

$$\mathcal{L}(u_i, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i F_{ij} u_j + \lambda \sum_{i=1}^{n} (u_i^2 - 1)$$

Les dérivées sont donc, en utilisant le résultat précédent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 2\sum_{j=1}^{n} G_{ij}u_j - 2\lambda u_i$$

ou

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{L} =$$

Et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 - 1$$

b) On trouve les points critiques en posant

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Donc,

$$2\sum_{j=1}^{n} G_{ij}u_j - 2\lambda u_i = 0$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} G_{ij}u_j = \lambda u_i$$

$$\iff G\mathbf{u} = A^T A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

Donc les points critiques correspondent à un vecteur propre de $A^T A$. Puisque G est réelle et symétrique, elle est Hermitienne. On a montré en classe que les valeurs propres d'une matrice Hermitienne sont réelles.

$$\mathbf{u}^* A^T A\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \lambda\mathbf{u}$$

$$\iff (A\mathbf{u}^T)A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}^T\mathbf{u}$$

$$\iff ||A\mathbf{u}||_2^2 = \lambda||\mathbf{u}||_2^2$$

On doit donc avoir que $\lambda \geq 0$, car $||A\mathbf{u}||_2^2, ||\mathbf{u}||_2^2 \geq 0$ On peut donc prendre la racine des deux côtés

$$||A||_2||\mathbf{u}||_2 \geq ||A\mathbf{u}||_2 = \sqrt{\lambda}||\mathbf{u}||_2$$

On trouve donc bien que $||A||_2 \geq \sqrt{\lambda}$ où λ est une valeur propre réelle et positive. On a

$$\begin{aligned} ||A||_2 &= \sup_{||\mathbf{u}||_2=1} \{||A\mathbf{u}||_2\} \\ &= \sup_{||\mathbf{u}||_2=1} \left\{\sqrt{\lambda}||\mathbf{u}||_2 \,|\, \text{il existe } \mathbf{u} \text{ tel que } A^T A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\right\} \\ &= \max\left\{\sqrt{\lambda} \,|\, \text{il existe } \mathbf{u} \text{ tel que } A^T A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\right\} \end{aligned}$$