Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH3400 - Analyse mathématique pour ingénieurs
Automne 2021

Devoir 2

Nom : Laguë **Prénom :** Frédéric

Matricule : VotreMatriculeIci **Section :** VotreGroupeIci

Q1	Q2	Q3	Q4	Total

Question 1

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Pour démontrer la convergence de la suite vers 0, on cherche à démontrer qu'il existe un n_ε tel que

$$n \geq n_\varepsilon \implies d\,(x_n, 0) < \varepsilon$$

$$\iff \quad |x_n - 0| = \left|(-1)^n \frac{2}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \frac{2}{n} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < n$$

Donc, pour $n_\varepsilon > \frac{2}{\varepsilon}$, tous les éléments x_n de la suite tels que $n \geq n_\varepsilon$ sont contenus dans la boule ouverte, $B_\varepsilon(0)$.

(2) Soit $\varepsilon > 0$. Pour démontrer la convergence de la suite vers $-\frac{2}{3}$, on cherche à démontrer qu'il existe un n_ε tel que

$$n \geq n_\varepsilon \implies d\left(x_n, -\frac{2}{3}\right) < \varepsilon$$

$$\iff \quad \left|\frac{1-2n}{3n+5} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{13}{9n+15}\right| < \varepsilon$$

Donc, pour $n_\varepsilon > \frac{13}{9\varepsilon}$, tous les éléments x_n de la suite tels que $n \geq n_\varepsilon$ sont contenus dans la boule ouverte, $B_\varepsilon\left(-\frac{2}{3}\right)$.

(3) Soit $\varepsilon > 0$. Pour démontrer la convergence de la suite vers $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on cherche à démontrer qu'il existe un n_ε tel que

$$n \geq n_\varepsilon \implies d\left(x_n, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \varepsilon$$

$$\iff \quad \left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{3n+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \left|\sqrt{\frac{n+1}{3n+1}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right| < \varepsilon$$

$$\iff \quad \left|\sqrt{\frac{n+1}{3n+1}}\right| + \left|\sqrt{\frac{1}{3}}\right| \leq \varepsilon$$

Question 2

1) Prenons la suite dans $\mathbb{R}^n$

$$(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(k\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), k\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), \ldots, k\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

On peut montrer que cette suite n'est pas bornée. Or, la sous suite

$$(\vec{x}_k)_{\{k\in\mathbb{N}\ |\ k\ est\ pair\}}$$

converge effectivement vers $(0, 0, ..., 0)$

2) Soient les suite ;

$$(\vec{x}_k) = (1, 1, 1, \ldots, 1 - R, \ldots, 1)$$

et

$$(\vec{y}_k) = (1, 1, 1, ..., 1 + R, ..., 1)$$

, en alternance pour chaque coordonné. La suite formée de l'union de ces deux suites est alternée, et bornée. Elle ne converge donc pas, mais est inclue dans la boule ouverte $B_R(e)$

3) Par exemple, la suite

$$(\vec{x_k})_{k\in\mathbb{N}} = ((-1)^k, (-1)^k, \ldots, (-1)^k)$$

est bornée. On y retrouve deux sous suites ;

$$(\vec{a}_k) = (\vec{x_k})_{\{k\in\mathbb{N}\ k\ est\ pair\}}$$

, qui converge vers 1 et

$$\left(\vec{b}_k\right) = (\vec{x_k})_{\{k\in\mathbb{N}\ k\ est\ impair\}}$$

, qui converge vers -1.

4) Une suite convergente vers x a toujours un nombre fini d'éléments dehors de $B_\varepsilon(x)$ Ainsi, les éléments de la suite qui ne sont pas bornées dans la boule ouverte sont dénombrables. On peut majorer et minorer chacun de ces éléments, et la suite doit donc être bornée.

Question 3

a) Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et soit $u \in U$. Par définition d'un ensemble ouvert ;

$$\exists \varepsilon_u > 0 \text{tel que } B_{\varepsilon_u}(u)$$

pour chaque $u \in U$. Alors ;

$$U = \bigcup_{u \in U} B_{\varepsilon_u}(u)$$

Selon le Théorème 1.6, un union d'ensembles ouvert est ouvert.
Supposons que U soit un union de boules ouvertes, mais pas un ouvert.
Donc, $\exists a \in U$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(a) \setminus U$ n'est pas vide.
Donc, $\exists u \in U$ et $\varepsilon_u > 0$ tels que $a \in B_\varepsilon(u)$
On peut donc trouver une boule ouverte plus petite autour de a ;
$\exists \varepsilon_a > 0$ tel que $B_{\varepsilon_a}(a) \subset B_{\varepsilon_u}(u)$. Donc U est ouvert.
Ce qui signifie que U est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ seulement si il est un union de boules ouvertes.

b) L'ensemble des rationnels est un sous ensemble dénombrable, car il existe une bijection avec les naturels De plus, il est dense dans $\mathbb{R}$, comme indiqué au Chapitre 1.

c)

Question 4

a) Soit $\varepsilon > 0$. Alors f_n converge vers f si,

$$n \geq n_\varepsilon \implies d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon,\ \forall x \in [0,1]$$

En prenant la fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, définie comme ;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 & , \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

On a donc

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) = \begin{cases} \left|\frac{x^n}{(x^n+1)}\right| & , \text{ si } x \in [0,1] \\ \left|\frac{x^n}{x^n+1}\right| & , \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Pour le cas $x = 1$, on a

$$d\left(f_n(1), f(1)\right) = \left|\frac{1^n}{1^n+1} - 1\right| = 0$$

On a donc que $\forall n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0$,

$$n \geq n_\varepsilon \implies d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon$$

Pour le cas $x \neq 1$, on a

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) = \left|\frac{x^n}{x^n+1} - 0\right| = \frac{x^n}{x^n+1} < \varepsilon$$

$$\iff x^n < \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

$$\iff n > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}{\ln x}$$

On doit donc distinguer le cas où $x = 0$.

On trouve également que $d(f_n(0), f(0)) = 0$.

Ainsi, on a donc que pour $n_\varepsilon > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}{\ln x}$;

$$n \geq n_\varepsilon \implies d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon,\ \forall x \in [0,1[$$

On a donc une fonction $f(x)$ vers laquelle $f_n(x)$ converge $\forall x \in [0,1]$ car

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que },n \geq n_\varepsilon \text{ implique } d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon,\ \forall x \in [0,1]$$

b)