Polytechnique Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel

MTH3400 - Analyse mathématique pour ingénieurs
Automne 2021

Devoir 5

Nom : Laguë **Prénom :** Frédéric

Matricule : 1986131 **Section :** 01

Q1	Q2	Q3	Q4	Total

Question 1

a) Soit V un espace vectoriel normé sur un corps $\mathbb{F}$. L'espace dual de V est donc l'ensemble des formes linéaires $l : V \to \mathbb{F}$

$$V^* := \{l; \mid l(v) \in \mathbb{F},\ \forall v \in V\}$$

On veut montrer que $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V^*. On doit donc montrer i) la fermeture sous l'addition, ii) la fermeture sous la multiplication par un scalaire et iii) l'existence d'un vecteur nul dans $E^\perp$

i) Soient $l_1, l_2 \in E^\perp$, et $\mathbf{v} \in V$. Puisque $E^\perp \subset V^*$et par linéarité dans V^* ;

$$\begin{aligned}(l_1 + l_2)(\mathbf{v}) &= l_1(\mathbf{v}) + l_2(\mathbf{v}) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

On a donc $l_1 + l_2 \in E^\perp$

ii) Soit $l \in E^\perp$, $\mathbf{v} \in V$ et $\alpha \in \mathbb{F}$. On a, par linéarité dans V^*

$$\begin{aligned}(\alpha \cdot l)(\mathbf{v}) &= \alpha \cdot (l(\mathbf{v})) \\ &= \alpha \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

On a donc $\alpha \cdot l \in E^\perp$

iii) Par la définition de $E^\perp$, la fonctionelle nulle $l_0$telle que $(l_0 + l)(\mathbf{v}) = l(\mathbf{v})$ est dans $E^\perp$

Puisque E est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V et est fermé sous l'addition, la multiplication par un scalaire et contient le vecteur nul, E est un sous-espace vectoriel de V.

b) Soit

$$F_{\mathbf{v}}(l) : V^* \to \mathbb{F},$$

$$l \mapsto l(\mathbf{v})$$

, où $\mathbf{v} \in V$.

$$\ker(F) = F^{-1}(\{0\}) = \{l \in V^* \,|\, l(\mathbf{e}) = 0, \forall \mathbf{e} \in E\} = E^{\perp}$$

Puisque les fonctionnelles l sont bornées et donc continues, pour un $\mathbf{v} \in V$ fixé,

$$\ker(F_v(l)) = \{l \in V^* \,|\, F(l) = l(v) = 0\}$$

Donc,

$$E^{\perp} = \bigcap_{\mathbf{e} \in E} \ker(F_{\mathbf{e}})$$

est l'intersection d'ensembles fermés, et est donc fermé.

c) On a la définition de la fermeture de E dans V ;

$$\overline{E} = \bigcap_{A \text{fermé dans } V, A \subset E} A$$

Puisque les fonctionnelles $l \in V^*$ sont bornées, donc continues, $\ker(l)$ est fermé $\forall l \in V^*$. Soit $l_1 \in E^{\perp}$. On a donc

$$l_1(\mathbf{e}) = 0, \, \forall \mathbf{e} \in E$$

$$\implies E \subset \ker(l_1), \, \forall l_1 \in E^{\perp}$$

Donc, $E \subset \bigcap_{l \in E^{\perp}}$

ii) On doit montrer que $\exists \mathbf{w} \notin \overline{E}$ tel que $\mathbf{w} \notin \bigcap_{l \in E^{\perp}} \ker(l)$.

Prenons donc

$$G = \left\{ \mathbf{e} + \alpha \mathbf{w} \,|\, \mathbf{e} \in \overline{E}, \alpha \in \mathbb{F}, \mathbf{w} \notin \overline{E} \right\}$$

On remarque donc que $G/\overline{E} = \{\alpha \mathbf{w} \,|\, \alpha \in \mathbb{F}\}$ est de dimension un. On a donc, avec le théorème vu en classe, que

$$G = \overline{E} \oplus W$$

, où $W = \{\alpha\mathbf{w} | \alpha \in \mathbb{F}\}$ On peut donc écrire

$$\forall \mathbf{g} \in G,\, \mathbf{g} = \mathbf{e} + \alpha\mathbf{w}$$

Soit $l_2 : G \to \mathbb{F}$ une fonctionnelle sur G, telle que

$$l_1(\mathbf{g}) = l_1(\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}) = \alpha$$

On a donc $ker(l_1) = E$ et $l_2(\mathbf{w}) = 1 \iff l_1^{-1}(1) = \mathbf{w} + E$ On calcule la norme, avec l'aide du Théorème 2.14 et en utilisant que

$$||l_1||_{G^*} = \frac{1}{||\mathbf{w} - \mathbf{e}||}$$

En utilisant le Théorème de Hahn-Banach, on peut étendre l_1 de G

Question 2

a) Deux fonctions f et g sont orthogonales si leur produit scalaire est nul, *i.e.* $\langle f, g\rangle = 0$.
Sur $L^2([0,1])$, cela signifie donc que $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$ Premièrement,

$$\langle \psi_{1,1}, \psi_{2,1}\rangle = \int_0^1 dx\ \psi_{1,1}(x)\psi_{2,1}(x)$$

On remarque que

$$\psi_{1,1}(x)\psi_{2,1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}[\\ -1, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\\ 0, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies \int_0^1 \mathrm{d}x\ \psi_{1,1}(x)\psi_{2,1}(x) &= \int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}x\ 1 + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\ -1 \\ &= \Big[x\Big]_0^{\frac{1}{4}} + \Big[-x\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Similairement,

$$\psi_{1,1}(x)\psi_{2,2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\\ 1, & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies \langle \psi_{1,1}, \psi_{2,2}\rangle &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \mathrm{d}x\ -1 + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \mathrm{d}x\ 1 \\ &= \Big[-x\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} + \Big[x\Big]_{\frac{3}{4}}^{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $\psi_{1,1}$ est orthogonale à $\psi_{2,1}$ et $\psi_{2,2}$.

b) Soit les ondelettes d'indice i ;

$$\psi_{i,j} = \begin{cases} \psi_{1,1}(2^{i-1}x - (j-1)) & \text{si } x \in [2^{-i+1}(j-1), 2^{-i+1}j] \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Supposons que les $\psi_{i,j}$ forment un système orthogonal pour $i \leq N-1$ et $j \in \{1, 2, \ldots, 2^{i-1}\}$, *i.e.* $\langle \psi_{i,j}, \psi_{i',j'} \rangle = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$, $\forall i,' i \leq N-1$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, 2^{i-1}\}$, $\forall j' \in \left\{1, 2, \ldots, 2^{i'-1}\right\}$
On veut montrer que pour $\langle \psi_{N,k}, \psi_{i,j} \rangle = 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \left\{1, 2, \ldots, 2^{-N+1}\right\}$ et $\forall i \leq N-1$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, 2^{-i+1}\}$

$$\langle \psi_{N,k}, \psi_{i,j} \rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x \ \psi_{N,1}(x)\psi_{i,j}(x)$$

On commence par le cas $k = j$
On a donc

$$\langle \psi_{N,j}, \psi_{i,j} \rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x \ \psi_{N,j}(x)\psi_{i,j}(x)$$

Or,

$$\psi_{N,j}(x)\psi_{i,j}(x) = \begin{cases} \psi_{1,1}(2^{N-1}x - (j-1)) \cdot \psi_{1,1}(2^{i-1}x - (j-1)), & \text{si } x \in \\ & [(j-1) \cdot 2^{-N+1}, j \cdot 2^{-N+1}[\cup \\ & [(j-1)2^{-i+1}, j2^{-i+1}[\\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour $j \geq 2$ on a

$$(j-1) \geq 1 \iff (j-1)2^{-i+1} \geq 2^{-i+1}$$

Donc $[(j-1) \cdot 2^{-N+1}, j \cdot 2^{-N+1}[\cap [|(j-1) \cdot 2^{-i+1}, j \cdot 2^{-i+1}[= \{\emptyset\}$

$$\implies \int_0^1 \mathrm{d}\psi_{N,j}(x)\psi_{i,j}(x) = 0$$

Pour $j = 1$,

$$[(j-1)\cdot 2^{-N+1}, j\cdot 2^{-N+1}[\cup[(j-1)2^{-i+1}, j2^{-i+1}[= [0, 2^{-N+1}[\cup[0, 2^{-i+1}[= [0, 2^{-N+1}]$$

Donc

$$\psi_{N,1}(x)\psi_{i,1}(x) = \begin{cases} \psi_{1,1}(2^{N-1}x)\cdot\psi_{1,1}(2^{i-1}x) & , \text{ si } x \in [0, 2^{-N+1}] \\ 0 & , \text{ ailleurs} \end{cases}$$

L'intégrale devient donc

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\ \psi_{N,1}(x)\cdot\psi_{i,1}(x) = \int_0^{2^{-N+1}} \mathrm{d}x\ \psi_{1,1}(2^{N-1}x)\psi_{1,1}(2^{i-1}x)$$

Avec le changement de variable $u = 2^{N-1}x \implies x = 2^{-N+1}u$, on trouve finalement

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\ \psi_{N,1}(x)\cdot\psi_{i,1}(x) = \frac{1}{2^{-N+1}}\int_0^1 \mathrm{d}x\ \psi_{1,1}(u)\psi_{1,1}(2^{i-N}u) = 0$$

c) a. En prenant

$$b_{2,1}(x) = \frac{1}{2}(\psi_0(x) + \psi_{1,1}(x)) = \frac{1}{2} + \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -\frac{1}{2}, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

On trouve donc

$$b_{2,1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

Similairement,

$$b_{2,2}(x) = \frac{1}{2}(\psi_0(x) - \psi_{1,1}(x)) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

b. En prenant $b_{3,1}(x) = \frac{1}{4}(\psi_0(x) + \psi_{1,1}(x) + \psi_{2,1}(x) + \psi_{2,2}(x))$ On obtient

d) Supposons que pour tout intervale $[(j-1)2^{i+1}, j2^{-i+1}]$, il existe une combinaison linéaire finie des fonctions de Haar telle que cette combinaison est égale à 1 sur cet interval et 0 ailleurs. *i.e.*

$$\exists b_{i,j}(x) = \sum_{i,j} \psi_{i,j}(x) \text{ telle que } b_{i,j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [(j-1)2^{i+1}, j2^{-i+1}] \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Cela signifie donc qu'il existe a^* et b^* de la forme $a^* = (j-1)^{-i+1}$ et $b^* = j^{-i+1}$ tels que

$$b_{i,j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a^*, b^*[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On remarque d'abord que la longueur de l'intervalle sur lequel la fonction est égale à 1 est $b^* - a^* = 2^{-i+1}$

De cette façon, on en déduit donc que $|a - a^*| \leq 2^{-i+1}$.

Il existe donc un i tel que $|a - a^*| < \varepsilon$, si $2^{-i+1} < \varepsilon$

$$\iff (-i+1)\ln(2) < \ln(\varepsilon)$$

$$\iff -i < \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 1$$

$$\iff i > 1 + ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$$

Similairement pour b.

On peut ainsi choisir, en fonction de la longueur de l'intervalle et de ε, l'unique indice j tel que $a^* = (j-1)2^{-i+1} > a$ et $b^* = j2^{-i+1} < b$

Il existe donc $b_{i,j}(x)$, une combinaison linéaire des fonctions de Haar respectant ces conditions.

d. Toute fonction continue par morceaux $f \in L^2[0,1]$ peut-être écrite comme une combinaison linéaire de fonctions égales à 1 sur un intervalle et 0 ailleurs. *i.e.*

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \alpha_j b_{i,j}(x)$$

où α_j correspond à la valeur de la fonction dans l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ On doit donc montrer que toute fonction écrite ainsi converge vers une fonction de $L^2[0,1]$

$$||g - f_i|| = \int_0^1 |g - f_i|^2 dx$$

Puisque les fonctions de $L^2[0,1]$ sont continues, cela correspond à l'aire sous la courbe entre f et g. Puisque l'on a choisir les intervalles de telle sorte que $a_i^* < a_i$ et b_i^*, l'aire sous la courbe $g - f$, pour chaque intervalle i, correspond à

$$A = \alpha_i(a_i^* - a_i + b_i - b^*) < 2\alpha_i \cdot 2^{-i+1}$$

Il est donc toujours possible de prendre des intervalles de longueurs de plus en plus petite, de telle sorte que

$$||g - \lim_{i\to\infty} f_i|| \to 0$$