Annexe A : Logique, Ensembles et Fonctions

RELATIONS LOGIQUES

Note: *Pour montrer $A \implies B$, on peut montrer non$B \implies$ non$A$*

A $\implies$ B	A implique B	Si A, alors B ou A est une condition suffisante pour B B est une condition nécéssaire à A.
A $\iff$ B	A si et seulement si B	Si A, alors B ET si B, alors A

— La **réciproque** de $A \implies B$ est $B \implies A$

— La contraposée de $A \implies B$ est non$(A) \implies$ non (B)

Note: *Puisque si j'ai A, j'ai nécessairement B, si je n'ai pas B, alors c'est que je n'ai pas A*

QUANTIFICATEURS

— La notation $\forall x\ P$ signifie **pour tout x, on a** P. La négation de $\forall x P$ est

$$\text{non}(\forall x P) \iff \exists x \text{ tel que (non } P)$$

Note: *Si on dit que $\forall x$, $\exists y$ tel que P est vrai, la négation est que $\exists x\ \forall y$ tel que non(P)*

— La notation $\exists x P$ signifie **il existe** x **tel que** P. La négation de $\exists x\ P$ est

$$\text{non}(\exists x\ P) \iff \forall x \text{ non}(P)$$

ENSEMBLES

Def A.1. Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **élément**. On dit que x *appartient* à A ; $x \in A$

Def A.2. Si A et B sont des ensembles, on dit que A est un **sous-ensemble** de B si tout élément de A est aussi un élément de B ; $a \in B\ \forall\ a \in A$

Def A.3. La **différence** entre deux ensembles $A \backslash B$ est l'ensemble de éléments $a \in A$ tels que $a \notin B$

Remarque: *On peut écrire $A = (A \backslash B) + (A \cap B)$*

Def A.4. Le **produit cartésien** de deux ensembles, noté $A \times B$ est l'ensemble des paires ordonnées :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Propriétés des ensembles

$$\begin{aligned}
A \cup B = B \cup A \text{ et } B \cap A = A \cap B &\quad \text{(Commutativité)}\\
A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ et } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C &\quad \text{(Associativité)}\\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) &\quad \text{(Distributivité)}\\
(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ et } (A \cap B)^c = A^c \cap B^c &\quad \text{(Lois de DeMorgan)}
\end{aligned}$$

ENSEMBLES QUOTIENTS

Def A.5. Une **relation d'équivalence** sur un ensemble A est un sous-ensemble $R \subset A \times A$ tel que $\forall\, a, b, c \in A$, respectent :

Note: *Donc s'agit d'un sous-ensemble de paires d'éléments de A, en remplaçant (a, b) par $a \sim b$*

$$\begin{aligned} a &\sim a && \text{(Réflectivité)} \\ a \sim b &\implies b \sim a && \text{(Symmétrie)} \\ \text{Si } a \sim b \text{ et } a \sim c&\text{, alors } b \sim b && \text{(Transitivité)} \end{aligned}$$

Def A.6. Une **classe d'équivalence** $\pi(a)$d'un élément $a \in A$ est l'ensemble des éléments en relation d'équivalence avec a :

$$\pi(a) = \{b \in A \mid b \sim a\}$$

Def A.7. L'**ensemble quotient**, noté $A/\sim$ d'un ensemble A est l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de A :

$$A/\sim = \{\pi(a) \subset A | a \in A\}$$

Attention: Ne pas confondre avec le groupe quotient, qui est un ensemble de *cosets*.

Exemple.alllo test

Def A.8. L'**ensemble des parties** ou **power-set** de A, noté $\mathcal{P}(A)$

Exercice.dpp

Références

[1] noob. Tamere, 2009.