Workout 2

Fredrik Mattisson

April 19, 2020

1

$$y' + 1000\cos y - 100t = 0$$
$$\Longrightarrow$$
$$y' = -1000\cos y + 100t$$
$$\Longrightarrow$$
$$y_{i+1} = y_i + (100t_{i+1} - 1000\cos y_{i+1})h$$
$$\Longrightarrow$$
$$y_{i+1} + (1000\cos y_{i+1} - 100t_{i+1})h - y_i = 0$$

Låt $f(y_i) = y_i + (1000\cos y_i - 100t_i)h - y_{i-1} \implies f'(y_i) = 1 - (1000\sin y_i + 100)h$.
Newton-Raphson ger då

$$y_i^{n+1} = y_i^n - \frac{f(y_i^n)}{f'(y_i^n)} = y_i^n - \frac{y_i^n + (1000\cos y_i^n - 100t_i)h - y_{i-1}}{1 - (1000\sin y_i^n + 100)h}$$

Med $y_1^0 = y_0 = y(0) = -0.5$ och $h = 0.01 = t_1$ beräknar vi då

$$y_1^1 = y_1^0 - \frac{y_1^0 + (1000\cos(y_1^0) - 100t_1)h - y_0}{1 - (1000\sin(y_1^0) + 100)h} = -2.3284$$
$$y_1^2 = y_1^1 - \frac{y_1^1 + (1000\cos(y_1^1) - 100t_1)h - y_0}{1 - (1000\sin(y_1^1) + 100)h} = -1.1294$$
$$y_1^3 = y_1^2 - \frac{y_1^2 + (1000\cos(y_1^2) - 100t_1)h - y_0}{1 - (1000\sin(y_1^2) + 100)h} = -1.5312$$
$$y_1^4 = y_1^3 - \frac{y_1^3 + (1000\cos(y_1^3) - 100t_1)h - y_0}{1 - (1000\sin(y_1^3) + 100)h} = -1.4666$$
$$y_1^5 = y_1^4 - \frac{y_1^4 + (1000\cos(y_1^4) - 100t_1)h - y_0}{1 - (1000\sin(y_1^4) + 100)h} = -1.4730$$
$$\varepsilon_a^5 = \left|\frac{y_1^5 - y_1^4}{y_1^5}\right| = 0.0043 < 0.005\ .$$

2

a) Ett styvt problem är en ekvation som har termer som varierar kraftigt i kombination med långsamt varierande termer. Det leder till explicita metoder blir instabila om inte steglängden är tillräckligt liten.

b) Vi skulle tvingas använda en mycket liten steglängd.

c) Förutsatt att metoden också är implicit så är det mycket fördelaktigt, eftersom steglängden kan vara väldigt stor på de intervall där lösningen varierar långsamt, och behöver endast minskas vid kraftiga variationer. Med en explicit metod är det av samma anledning fortfarande bättre om den är adaptiv, men den maximala steglängden kommer fortfarande i regel att vara mycket liten.

3

Låt $\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) = \alpha < 0$ och $y' = \lambda y$. Med Euler framåt har vi då $y_{i+1} = y_i + \lambda y_i h = y_i(1 + \lambda h)$, vilket get att

$$Re|1 + \lambda h| > 1 \implies Re|y_{i+1}| > Re|y_i| \implies \lim_{i\to\infty} Re|y_i| = \infty \ .$$

För att metoden ska vara stabil måste vi alltså ha $|1 + \alpha h| < 1 \implies \alpha h > -2 \implies h < \dfrac{2}{-\alpha}$.

4

Låt $\lambda \in \mathbb{R}^-$ och $y' = \lambda y$. Med implicit Euler har vi

$$y_{i+1} = y_i + \lambda y_{i+1} h \implies y_{i+1}(1 - \lambda h) = y_i \implies y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - \lambda h} = \frac{y_i}{1 + \epsilon} < y_i$$
$$\therefore \lim_{i\to\infty} y_i = 0 \ .$$

5

$y(t)$ är en kontinuerlig funktion, medan $y_k \mapsto y_k + f(t_k, y_k)$ definierar ett diskret system. $y(t_k)$ är den (okända) funktionens värde i $t_k = t_0 + kh$, som vi approximerar som $y_k \approx y(t_k)$, dvs $y(t_k) = y_k + E_k$, där E_k är det globala felet vid steg k. Det lokala trunkeringsfelet ε_k är felet som introduceras vid steg k, dvs $\varepsilon_k = E_k - E_{k-1}$. Taylorutvecklingen av y kring t_k

$$y(t_k + h) = y(t_k) + \frac{y'(t_k)}{2}h + \cdots = y(t_k) + \frac{f\big(t_k, y(t_k)\big)}{2}h + R_2$$

säger oss att det lokala trunkeringsfelet är i samma storleksordning som resttermen $R_2 \in O(h^2)$. Det globala trunkeringsfelet vid steg n är

$$E_n = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i = \varepsilon_0 + n\,O(h^2) = 0 + \frac{t_n - t_0}{h} O(h^2) = (t_n - t_0)O(h) \in O(h) \ .$$