

Workout 3

Fredrik Mattisson

April 29, 2020

1

En deterministisk modell producerar alltid samma resultat givet samma parametrar. Den modellerar en slags ideal verklighet, där systemet i fråga utvecklas på ett deterministiskt sätt, dvs utan påverkan av slumpen. Samma initiala tillstånd och parametrar ger alltså alltid exakt samma utveckling.

En stokastisk modell är probabilistisk, den har slumpmässiga element som påverkar hur systemet utvecklas. Samma initiala tillstånd och parametrar kan generera olika utgångar. Slumpmässiga förlopp som påverkar systemets utveckling och/eller osäkerhet kring parametrars värden finns inbyggt i modellen i form av sannolikheter.

Deterministiska metoder för att simulera modeller går ut på beräkningar med de givna parametrarna, inga slumpvariabler används. Stokastiska metoder, t.ex. Monte-Carlo metoder, använder slumpvariabler i beräkningen av nästa tillstånd.

2

Om vi betraktar en integrand $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som vi vill integrera på ett intervall $[a, b]$, så vet vi att det finns någon punkt c i intervallet sådan att den bestämda integralen $I = f(c)(b - a)$, dvs f antar sitt medelvärde på intervallet i c . Alltså kan I approximeras genom att approximera integrandens medelvärde på domänen. Om vi utvärderar integranden i N slumpmässigt valda punkter så kommer medelvärdet av dessa att konvergera till det verkliga medelvärdet då $N \rightarrow \infty$.

Monte-Carlo metoder för integration är underlägsna vanliga deterministiska metoder när domänen har få dimensioner, men resonemanget ovan generaliserar till flerdimensionella domäner med polynom komplexitet, medan komplexiteten för de vanliga metoderna är exponentiell i antalet dimensioner.

3

Låt $f(x) = x^2 e^x$. Vi väljer fem likformigt distribuerade punkter i intervallet $[0, 1]$:
 $X = \{0.837, 0.942, 0.984, 0.399, 0.278\}$, och approximerar integralen som

$$I \approx \frac{1}{5} \sum_{x_i \in X} f(x_i) = 0.688$$

Det absoluta felet är $I - 0.688 \approx 0.7183 - 0.688 = 0.0303$.

En ytterligare beräkning med $X = \{0.514, 0.259, 0.732, 0.985, 0.182\}$ ger $I \approx 0.5344$, och det absoluta felet är då 0.1839.

I den första approximationen fick vi ett fel i samma storleksordning som trapetsmetoden, medan den andra gav en storleksordning större fel.

4

```
a) T = % sluttid
    N = % antal simuleringar
    x0 = % initiala värden

    x = zeros(1, N);
    for i = 1:N
        x(i) = sum(f(x0, T));
    end

    E = mean(x);

b) T = % sluttid
    N = % antal simuleringar
    M = % antal approximationer
    x0 = % initiala värden

    X = zeros(M, N);
    for i = 1:M
        for j = 1:N
            X(i,j) = sum(f(x0, T));
        end
    end

    E = mean(X, 2); % reducera M * N simuleringar till M approximationer
    s = std(E);
    e = 1.96 * s / sqrt(M)

    E = mean(E);
    I = [E - e, E + e];
```

$$F(t) = P(\tau \leq t) = \int_{-\infty}^t f(\tau; a_0) d\tau = \int_0^t a_0 e^{-a_0 \tau} d\tau = -e^{-a_0 \tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-a_0 t}$$

$$u = F(\tau) \implies 1 - u = e^{-a_0 \tau} \implies -a_0^{-1} \ln(1 - u) = \tau$$