

Matte 2 Oblig

Fredrik Flo og Julian Nordang

April 2025

1 Introduksjon

Ideen bak denne obligen var å bruke matte til å beskrive lydbølger produsert av et rør med en varmekilde plassert i midten. Dette tilsvarer noe som heter en *Rijke Tube*, og kan lage en del lyd dersom du gjør det riktig. Du kan se en fin demonstrasjon av dette eksperimentet på YouTube (Lenke!!). Vi ønsker å sammenligne dette systemet med modellen sett i bølgeligningen samt kunnskap om Fourier-analyse. Det vil vises at det ikke er særlig mye som vi skal løse i dette tilfellet, men vi bruker dette som en unnskyldning for å gjøre en kul demonstrasjon, å krysse matte obligen fra listen i samme slengen.

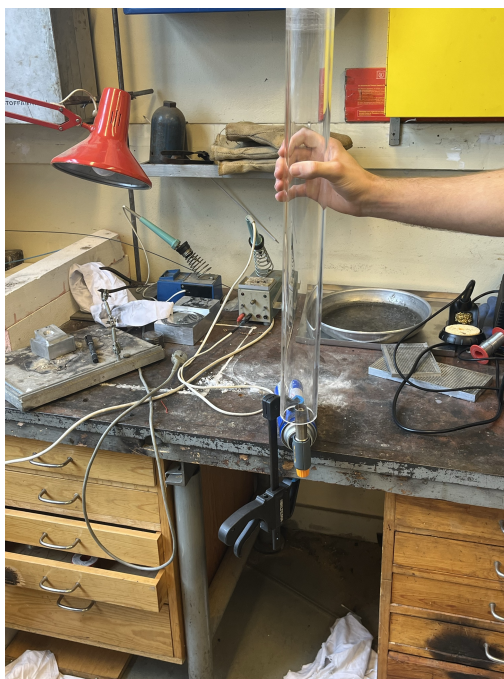


Figure 1: Ryddigste sted på mekansik verksted

Over i figur 1 ser du oppsettet av demonstrasjonen. Vi skrudde rett og slett på flammen og brukte mikrofonen i en pc til å lytte fra toppen av røret. (kanskje ikke den beste mikrofonen vi kunne brukt.) Denne dataen ble videre gitt til WaveForms (ELSYS programmet).

2 Matten

Hvis vi tenker på hva som egentlig skjer i denne demonstrasjonen, så er det sann at vi har et rør med en lyd på innsiden. Denne kan bli forklart på litt samme måte som du kan forklare hvordan vibrasjoner på en streng vil oppføre seg. Dersom du heter Morten Andreas Nome så vil du skaffe deg en slinky (aka. trappetroll) og prøve og vibrere den med ulike hastigheter og så se hva slags bølger som oppstår.

Jeg tar heller og tegner noen diagrammer på padden og deretter diskuterer hva de betyr. Se figur 2.

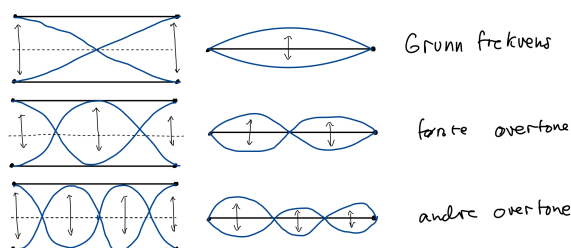


Figure 2: Ulike overtoner og hvordan de ser ut i rør og streng

Først og fremst om vi fokuserer på strengen fordi den er litt mer intuitiv. Så tenker vi at bølgen (avstanden strengen tar fra stabilitetspunktet) er fiksert i endepunktene, som gir mening. Dersom man prøver å tegne en bølge på denne strengen, er det fort gjort å få en av de vist i figuren. I et rør vises det seg at bølgen er fiksert i topppunktene. Hvorfor det, vet jeg ikke, fordi det ble bare fortalt til meg på videregående, men om man gjør som man blir fortalt så får man bølgene over. Hva de betyr, er litt annerledes enn tidligere, men det er faktisk forskyvning den og. Her er det bare at det er forskyvning til venstre og høyre, hvor i strengen var det forskyvningen opp og ned. Nå er jeg ikke helt sikker ennå fordi jeg har ikke gjort matten så grundig ennå, men jeg vil gjette at alle de mulige bølgeformene som tar plass inne i røret vil teoretisk sett kun være en sum av alle disse overtoner og ulike koeffisienter. Altså det samme som vi driver med i Fourier.

Det her var egentlig ikke så viktig men litt greit å forstå dersom vi skal prøve å sammenligne *Rijke Tuben* med bølgeligningen. Hvis vi sier at røret har en lengde på π blir det tydelig at røret følger Neumannrandkravet altså (Her er $u(x, t)$ naturligvis forskyvningen i partikkelen er langs røret (*longitudinal wave*)):

$$u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x) \quad \dot{u}(0, t) = \dot{u}(\pi, t) = 0 \quad \ddot{u} = c^2 \Delta u$$

Jeg tenkte først at jeg skulle gå gjennom alle stegene vi tok for å løse bølgelikningen med neumannrandkravene, men jeg merket fort at det ble nesten bare slitsomt og skrive så mye om det. Så jeg prøver heller bare å hoppe rett til den delen som faktisk er annerledes. Men først, her er noen viktige ligningene.

$$u(x, t) = v(x)w(t) \quad (1)$$

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = k \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = k \quad (3)$$

En av forskjellene som dukker opp er at neumannrandkravene endres. Dette har med det at røret vårt ikke er π meter langt, men heller 0.6 meter langt (Målte aldri dette, men gutta på mekanisk verksted sa de kutta opp 60 cm så vi stoler blindt på det). Da blir det slik at våre nye krav er:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x) \quad \dot{u}(0, t) = \dot{u}(L, t) = 0 \quad \ddot{u} = c^2 \Delta u$$

Den første endringen oppstår dersom vi løser den romavhengige delen i ligning 2. Når vi undersøker om $k < 0$ og vanligvis får vi leddet:

$$c_1 \sin(\sqrt{-k}\pi) = 0$$

I stedet for dette får noe tilsvarende under.

$$c_1 \sin(\sqrt{-k}L) = 0$$

Dette er egentlig null stress fordi vi ganger med en 1-er og ser at i stedet for å kreve at $\sqrt{-k} = n$ krever vi heller at:

$$\sqrt{-k} \frac{L}{\pi} = n$$

$$k = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

Da blir det slik at:

$$v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (4)$$

for samme grunner som i den normale utledningen. Nå hopper jeg over noen flere steg, og bare gir deg løsningen på den $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{(a_0 + b_0 t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (5)$$

Eneste problemet med dette er at vi egentlig trenger å vite hva $f(x)$ er og $g(x)$ er. Dette kommer vi tilbake til. Men først må vi tolke denne ligningen. Hvis du ser for deg eksperimentet der du har en varmekilde inne i et rør. Når denne kilden ligger inne i røret så er teoretisk sett systemet i konstant med tid. Hvis du tar ut kilden på tid lik null så vil ligningen kunne beskrive bølgen og hvordan den ser ut for en hver tid.

Som sagt er det lite vi for gjort med denne løsningen fordi koeffisienten er ukjent og kan bare løses på en måte, og det vil være å ha en formel for $f(x)$ og $g(x)$. For å beskrive situasjonen over så ville $g(x)$ bare være null, mens $f(x)$ ville være den bølgen i den stasjonære tilstanden. Denne bølgen vil være vanskelig å få på analytisk form, men ikke så vanskelig å få dersom han går ELSYS og har tilgang til WaveForms.

Litt kort fordi jeg glemte å nevne det, men jeg syntes at $\frac{n\pi}{L}$ var litt rart. Det vises at det er faktisk veldig likt ω bare i radianer. Dersom du ganger med $360/2\pi$ så får du $\frac{360n}{2L}$, dette var igjen litt rart fordi jeg husker fra videregående en formel på frekvens til en stasjonærbølge altså $f = \frac{nc}{2L}$ der c er lydens hastighet. Lydens hastighet varierer jo men den er ish 340 til vanlig. Dette var jo veldig likt den greia tidligere. Kan hende det har noe med den c -en i den andre formelen. Men jeg føler det er mye rart som skjer her som jeg ikke helt forstår.

3 Dataen

Samlingen av data var litt funky. Vi startet med å ta inn signalet gjennom Audacity. Der fikk vi et frekvensspekter, men den var litt upresis og ikke så fin. Derfor ble lydfilen heler eksportert å lagt til i WaveForms. Her fikk vi et tilsvarende frekvensspekter og bølge på scopen. Under ser du de bildene.

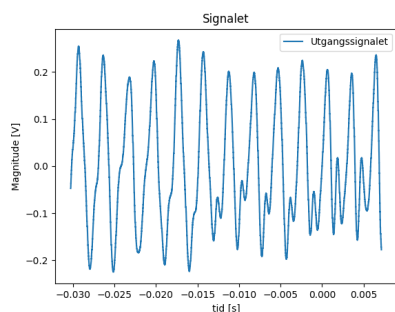


Figure 3: Dette er lydsignalet for en vilkårlig tid-

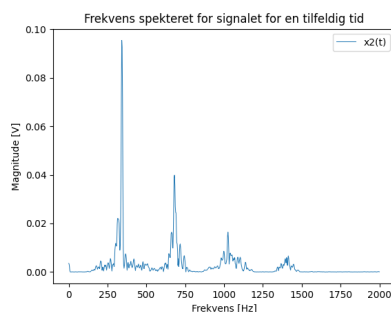


Figure 4: Dette er frekvensspekteret for en vilkårlig tid

Lysignalet ser delvis periodisk ut, det er nok på grunn av støyen at den oppfører seg slik. Dersom vi ønsker å finne en formel for $f(x)$ må vi nok ta hensyn til frekvensspekteret. Jeg er litt usikker, på helt hvordan fordi signalet til venstre er jo basert på tid, og vi vil ha noe basert på meter. Dette er sikkert noe jeg får svar på senere i livet akkurat nå så er jeg litt forvirret.

Ut i fra målingen vi tok av lydsignalet får vi et frekvensspekter også kalt et FFT-diagram. Hvis man ser bort ifra støyen så ser man at det dukker opp enkelte pulser i grafen samt den grunnfrekvensen. Dette kjenner man igjen som, (hvis man fulgte med i Fourier analyse I), overtonene til lydbølgen. Noe som gjør at rekonstruksjonen av selve lydbølgen kan beregnes med uttrykket 6.

$$f(t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(2\pi n f t) \quad (6)$$

Ligningen over er litt annerledes enn det vi har sett tidligere, men det er fordi det er helt vanlig bruk av fourier og ikke det tullet som skjedde tidligere. Her er f naturligvis grunnfrekvensen noe som vi finner fra målingene.

Måten formelen ble brukt for å lage plotten i figur 5 var å lese av høyden på frekvensspekteret og frekvensen dette tilsvarte og summere de komponentene sammen. Det blir ikke helt nøyaktig siden det er alt for mange frekvenskomponenter som utgjør signalet så vi tar kun med overtonene, (de som dukker opp med en avstand på rundt 300Hz) ble inkludert. Etter å ha gjort dette, får man ut et estimat av hvordan signalet faktisk så ut, ikke bare frekvensene som utgjør det. Dette plottet kan man se at likner litt på plottet fra figur 3 som i prinsippet viser det samme, men der har WaveForm blitt brukt til å rekonstruere det faktiske signalet.

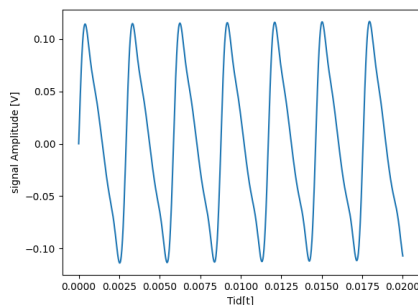


Figure 5: Rekonstruksjon med bruk av de 6 mest dominerende frekvensene

Vi har lagt til de to filene i giten. Syns det var litt gøy at den fourier-rekonstruksjonen av overtonene endte opp å høre ut som at den filtrerte all støyen. Hadde du vært på det mekaniske verkstedet der og da hadde kunne hørt at de var litt like. Som er ganske artig.

4 Diskusjon

Alt i alt så har dette vært en ganske kul måte å få litt praktisk eksponering for flere svært sentrale deler av matte 2 pensum. Til tross for at det viste seg å være litt utfordrende å fullstendig beherske andvendelsen av disse ideene.