Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

5. september 2014

Oppgave 1. Bruk forrige oppgave til å vise at hvis m er orienteringsreverserende, så er m^2 en translasjon. (merk: forrige oppgave sa at alle isometrier er på formen $t_{\vec{a}}\rho_\theta$ eller $t_{\vec{a}}\rho_\theta s$.) ■

Løsning 1. Først, legg merke til at isometrier på den første formen er orienteringsbevarende (verken rotasjoner eller translasjoner endrer orientering). Så m må kunne skrives som $m = t_{\vec{a}}\rho_\theta s$. Vi viste også at

Dermed er

$$\begin{aligned} m^2 &= (t_{\vec{a}}\rho_\theta s)(t_{\vec{a}}\rho_\theta s) \\ &= t_{\vec{a}}\rho_\theta s t_{\vec{a}}\rho_\theta s \\ &\stackrel{*}{=} t_{\vec{a}} s \rho_{-\theta} t_{\vec{a}} \rho_\theta s \\ &\stackrel{**}{=} t_{\vec{a}} s \rho_{-\theta} \rho_\theta t_{\rho_\theta(t_{\vec{a}})} s \end{aligned}$$

Litt forklaring. Første likhet er bare å fjerne parenteser. I (*) brukte vi at $\rho_\theta t_{\vec{a}} = t_{\rho_\theta \vec{a}}\rho_\theta$, som vi viste i forrige oppgave. I (**) brukte vi at to translasjoner satt sammen er en translasjon ($t_{\vec{a}}t_{\vec{b}} = t_{\vec{a}+\vec{b}}$). I (***) brukte vi at $s\rho_\theta = \rho_{-\theta} s$, og i (****) brukte vi at $\rho_\theta\rho_{-\theta} = id$ og $s^2 = id$ (å rotere først $-\theta$ og så θ er det samme som å rotere ingenting, og å speile to ganger er det samme som å gjøre ingenting).

Vi ender opp med $t_{\vec{b}}$ hvor $\vec{b} = \vec{a} + \rho_\theta \vec{a}$, så m^2 er en translasjon. ♡

Oppgave 2. Gi en begrunnelse for hver likhet i utregningen til slutt i beviset for Setning 2.4. ■

Løsning 2. Det vi har lyst å vise er at $t_{\vec{a}} s_l = t_{\vec{w}_1} s_{l'}$. La oss huske hva alle disse bokstavene betyr. Tidligere i beviset ble det vist at en orienterings**reverserende** isometri kan skrives på formen $m = t_{\vec{a}} s_l$, hvor s_l er en speiling om en linje l.

Her hjelper det veldig å tegne en tegning.

La l være linjen utspent av vektoren $\vec{v}$. Siden $\mathbb{R}^2$ er 2-dimensjonal, er $\{\vec{v}, \vec{v}^\perp\}$ en basis for $\mathbb{R}^2$. Så vi kan skrive $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{a} \cdot \vec{v}^\perp)\vec{v}^\perp$. La $\vec{w}_1 \stackrel{def}{=} (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v}$ og $\vec{w}_2 \stackrel{def}{=} (\vec{a} \cdot \vec{v}^\perp)\vec{v}^\perp$. La l' være linja $\{\frac{1}{2}\vec{w}_2 + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Da påstår vi først at $s_{l'} = t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}$. Skriv $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ som $\vec{x} = c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2$. Da kan vi anvende isometriene over på $\vec{x}$ og håpe vi får det samme:

$$\begin{aligned} s_{l'}(\vec{x}) &= s_{l'}(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2) \\ &= c_1\vec{w}_1 + (1 - c_2)\vec{w}_2 \\ &= c_1\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - c_2\vec{w}_2 \end{aligned}$$

Også:

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}(\vec{x}) &= t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} s_l \left(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 - \frac{1}{2}\vec{w}_2 \right) \\ &= t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} \left(c_1\vec{w}_1 - c_2\vec{w}_2 + \frac{1}{2}\vec{w}_2 \right) \\ &= c_1\vec{w}_1 - c_2\vec{w}_2 + \vec{w}_2. \end{aligned}$$

Så høyresiden er lik venstresiden og alt er fint.

Neste steg er å se at $s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2} = t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} s_l$. Dette er ikke så vanskelig å se geometrisk. Her er en algebraisk måte å se det på:

$$\begin{aligned} s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}(\vec{x}) &= s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2) \\ &= s_l \left(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 - \frac{1}{2}\vec{w}_2 \right) \\ &= c_1\vec{w}_1 - c_2\vec{w}_2 + \frac{1}{2}\vec{w}_2. \end{aligned}$$

Dette var altså venstresiden (merk at å speile i l er det samme som å sette alle koeffisienter av $\vec{w}_2$ til det negative).

Så for høyresiden:

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} s_l(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2) &= t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2}(c_1\vec{w}_1 - c_2\vec{w}_2) \\ &= c_1\vec{w}_1 - c_2\vec{w}_2 + \frac{1}{2}\vec{w}_2. \end{aligned}$$

Så venstresiden er lik høyresiden og alt er fint.

Siste likhet som ble brukt i beviset var at $t_{\vec{w}_1} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} = t_{\vec{a}}$, men dette er åpenbart når vi husker at $\vec{a} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. ♡

Oppgave 3. Anta m er en isometri av planet som tar en linje l på seg selv, $m(l) = l$, og at $m\big|_l$ er en translasjon med en vektor $\vec{a}$. Gi et geometrisk argument for at m enten er en speiling, en glidespeiling eller translasjonen $t_{\vec{a}}$. ■

Løsning 3. For det første: vi kan bytte ut m med $mt_{-\vec{a}}$. Da blir $m\big|_l = id$, siden det ikke er noen translasjon langs linjen lenger. Så problemet blir nå: gitt at vi skal holde en hel linje fast, hvordan kan vi da flytte rundt på planet? Det er da "klart" at eneste mulighet er å speile om linja l (rotasjon og translasjon går ihvertfall ikke).

Konklusjon: om $\vec{a} = 0$, var dette allerede en speiling eller bare identitet. Om $\vec{a} \neq 0$, var dette enten en glidespeiling eller translasjon, avhengig om vi valgte å speile. ♡

Oppgave 4. ■