

# Notater

Fredrik Meyer

21. januar 2016

## 0.1 Tautologisk linjebunt på $\mathbb{P}^n$

Vi kan definere en tautologisk linjebunt på  $\mathbb{P}^n$ . Dette er en bunt hvis fiber over et punkt  $p$  er linjen i  $\mathbb{A}^{n+1}$  utspent av (de homogene koordinatene til)  $p$ . La  $q \in \langle p \rangle$  bety at  $q$  er med i spennet av  $p$ . Da er

$$\mathcal{T} := \{(q, p) \in \mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{P}^n \mid q \in \langle p \rangle\}.$$

Ved å regne overgangsfunksjoner kan en se at  $\mathcal{T} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ .

Det finnes også andre måter å se dette på, eksempelvis slik Mike Eastwood forklarte det på siste forelesning, men det har jeg glemt av nå (!!).

## 0.2 Embedding Grassmannian

Grassmannian har en tautologisk linjebunt  $\mathcal{E}$ , hvis seksjoner kan skrives som matriser. Fiberen over et punkt  $[V]$  i Grassmannian er nettopp det lineære underrommet punktet representerer.

Da vil  $\wedge^k \mathcal{E}$  være en linjebunt på Grassmannian, og seksjonene vil være utspent av alle minorene. Så dette er linjebunten Plücker-embeddingen svarer til.

## 0.3 Topologien til SR-skjemaer

La  $X = \mathbb{P}(\Delta)$  være et Stanley-Reisner-skjema. La  $f = (f_0, \dots, f_n)$  være  $f$ -vektoren, det vil si, antall  $f_i$  er antall  $i$ -dimensjonale fasetter i  $\Delta$ . Da er  $h^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\Delta), \mathbb{C}) = f_i$  om  $i$  er jevn, og 0 ellers. Dette er fordi  $X$  har strukturen til et CW-kompleks med bare celler i jevne grader.

## 0.4 Kotangentkohomologi på en oppblåsning

La  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  være oppblåsningen av en glatt flate  $X$  i et punkt  $P$ . La  $E \simeq \mathbb{P}^1$  være den eksepsjonelle divisoren. Vi ønsker å beregne kohomologien  $H^i(\Omega_{\tilde{X}/k}^1)$  gitt kjennskap til kohomologien til  $X$ .

Et standard teorem sier at vi har en eksakt sekvens

$$\pi^* \Omega_{X/k}^1 \rightarrow \Omega_{\tilde{X}/k}^1 \rightarrow \Omega_{\tilde{X}/X}^1 \rightarrow 0.$$

Påstanden er at denne er venstre-eksakt også. Siden  $\tilde{X} \setminus E \simeq X \setminus P$  er den første pila en isomorfi utenfor  $E$  (og dermed er høyre-leddet også null). Om vi er på  $Q \in E$ , har vi at  $\mathcal{G} = \pi^* \Omega_{X/k}^1$  er null langs  $E$ , siden stilken  $\mathcal{G}_Q = \Omega_{f(x)/k}^1$ , og kotangentknippet over et punkt er null.

Legg også merke til at  $\Omega_{\tilde{X}/X}^1 = i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$  siden  $E \simeq \mathbb{P}^1$  og knippet er null utenfor  $E$  (her er  $i : \mathbb{P}^1 \rightarrow \tilde{X}$  inklusjonen). Dermed har vi sekvensen

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_{X/k}^1 \rightarrow \Omega_{\tilde{X}/k}^1 \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \rightarrow 0.$$

Vi har også at  $H^i(\pi^* \Omega_{X/k}^1) = H^i(\Omega_{X/k}^1)$  (se beviset for Zariskis hovedteorem i Hartshorne).

Dermed har vi at  $H^0(\Omega_{\tilde{X}/k}^1) = H^0(\Omega_{X/k}^1)$ . For å regne ut de andre kohomologigruppene trenger vi mer presis informasjon om  $X$ . Så anta  $X = \mathbb{P}^2$ . Da følger det fra Euler-sekvensen at  $H^i(\Omega_{X/k}^1)$  er null for  $i = 0, 2$  og 1 for  $i = 1$ . Dermed følger det at  $H^i(\Omega_{\tilde{X}/k}^1)$  er null for  $i = 0, 2$  og 2 for  $i = 1$ .

Så å blåse opp i et punkt øker  $H^1$  med én.

## 0.5 Dobbel overdekning av $\mathbb{P}^2$ ramifisert i gitt kurve

Gitt et homogent polynom  $f(x_0, x_1, x_2)$  i  $\bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i))$ , konstruerer vi en flate som er en dobbel overdekning av  $\mathbb{P}^2$ , ramifisert i kurven definert ved dette polynomet.

Se på inklusjonen

$$k[x_0, x_1, x_2] \hookrightarrow k[x_0, x_1, x_2][u, v]/(u^2 - f v^2).$$

Vi ser på høyresiden som en bigradert ring, så høyresiden svarer til

$$X = \{(X, P) \in \mathbb{P}_{(x_0, x_1, x_2)}^2 \times \mathbb{P}_{(u, v)}^1 \mid u^2 = f(x_0, x_1, x_2)v^2\} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

Denne mengden kommer med en naturlig projeksjon til  $\mathbb{P}^2$ . Vi ser at så lenge  $f(x_0, x_1, x_2) \neq 0$ , er det to fibre, og langs  $V(f)$  er det én dobbel fiber.