Seminarnotater

Fredrik Meyer

April 29, 2015

1 Innledning

Vi husker litt notasjon.

- Γ er en gruppe som virker på $\mathbb{H}$, det øvre halvplanet.
- Vanligste eksemplene er $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, og kongruensundergruppene av denne: $\Gamma(N)$.

HUSK

1. **Modular functions**: modulære funksjoner er funksjoner invariant under Γ. Det er ikke nødvendigvis spesielt mange av disse. $f(\gamma z) = f(\gamma)$ for alle $\gamma \in \Gamma$. Vi krever at de er meromorfe på $\mathbb{H}$ og på "køspene".
2. **Modular forms**: modulære former er som "brøker", evt. som homogene polynomer på $\mathbb{P}^N$. Så gitt en gruppe Γ, så er en modulær form for Γ av vekt $2k$ gitt ved en funksjon på $\mathbb{H}$ slik at 1) $f(\gamma z) = (cz+d)^{2k} f(z)$ for $z \in \mathbb{H}$ og $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Vi krever at f er holomorf på $\mathbb{H}$ og på køspene.
3. Litt notasjon: $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ er vektorrommet av modulære former av vekt $2k$ for Γ. $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ er underrommet av køspformer (=null på køspene). Ved multiplikasjon av modulære former ser vi at

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{M}_k(\Gamma)$$

er en gradert ring. Kristian nevnte sist at

$$\dim \mathcal{M}_k(\Gamma) = \begin{cases} 0 & k \leq -1 \\ 1 & k = 0 \\ (2k-1)(g-1) + \nu_\infty k + \sum_P k\left[1 - \frac{1}{e_P}\right] & k \geq 1 \end{cases}$$

Her er ν_∞ antall ikke-ekvivalente køsper. Summen går over representanter for elliptiske punkter P av Γ. e_P er orden til en eller annen stabilisator...

4. Det viste seg at
$$\mathcal{M}(\Gamma(1)) \simeq \mathbb{C}[T^2, T^3].$$
(hehe, køsp på nytt)

På dette tidspunktet regner Milne ut Fourier-koffesientene for Eisenstein-serien til $\Gamma(1)$. Jeg tror vi hopper over dette.

Vi kan vel nevne resultatet og **betrakte** sammenhengen med tallteori. La
$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$
Da er (PROPOSISJON!!)
$$G_k(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n.$$
(trommevirvel)

2 Modulære former som seksjoner av linjebunter

TERMINOLOGI:

La X være en kompleks mangfoldighet. Da er en **linjebunt** på X gitt ved en avbildning $\pi : L \to X$ slik at for en overdekning $\{U_i\}$ av X, har vi at $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{C}$.

For $U \subset X$, la $\Gamma(U, L)$ betegne mengden av seksjoner av π over U. For den trivielle linjebunten er dette bare holomorfe funksjoner.

Betrakt følgende situasjon:

La Γ være en diskret gruppe som virker fritt og "ekte diskontinuerlig" på en Riemann-flate H. La $X = \Gamma \backslash H$.

La $\pi : L \to X$ være en linjebunt på X. Da er

$$p^*(L) = \{(h,l) \subset H \times L \mid p(h) = \pi(l)\}$$

en linjebunt på H (pullback).

$$\begin{tikzcd} p^*(L) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & H \arrow[d, "p"] \\ L \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

Dette kan sjekkes lokalt på en overdekning som trivialiserer både π og p (finnes det en mer kategorisk metode???).

Anta gitt en isomorfi $i : H \times \mathbb{C} \to p^*(L)$. Da kan vi overføre virkningen av Γ på $p * (L)$ til en virkning av Γ på $H \times \mathbb{C}$ over H. La $(t, z) \in H \times \mathbb{C}$. Vi skriver:

$$\gamma \cdot (t, z) = (\gamma t, j_\gamma(t) z)$$

hvor $j_\gamma(t) \in \mathbb{C}^x$.

Da er

$$\gamma\gamma'(t,z) = \gamma(\gamma' t, j_{\gamma'}(t)z) = (\gamma\gamma' t, j_\gamma(\gamma' t) j_{\gamma'}(t) z).$$

Så

$$j_{\gamma\gamma'}(t) = j_\gamma(\gamma' t) j_{\gamma'}(t).$$

En funksjon $j : \Gamma \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}^x$ som dette som er holomorf kalles for en **"automorfisk faktor"**.

Example 2.1. Enhver åpen delmengde av $\mathbb{C}$ med en gruppevirkning fra Γ kommer med en kanonisk automorfisk faktor $j_\gamma(t)$, nemlig:

$$\Gamma \times H \to \mathbb{C}, (\gamma, t) \mapsto (d\gamma)_t.$$

I ord: γ induserer en avbildning. Tangentrommet til $\mathbb{C}$ er $\mathbb{C}$ selv, så differensialen er bare gitt ved å multiplisere med et komplekst tall.

At dette er en automorfisk faktor følger fra kjerneregelen! Prøv selv :)

EKSEMPEL: Se på $\Gamma(1)$ som virker på $\mathbb{H}$. Om γ sender z til $\frac{az+b}{cz+d}$ følger det at

$$d\gamma = \frac{1}{(cz+d)^2} dz,$$

så $j_\gamma(t) = (cz+d)^{-2}$ og $j_\gamma(t)^k = (cz+d)^{-2k}$. ★

Vi har følgende:

Proposition 2.2. *Det er en 1-1-korrespondanse mellom par (L, i) hvor L er en linjebunt på $\Gamma \backslash H$ og i er en isomorfi $H \times \mathbb{C} \simeq p^* L$ og mengden av automorfiske faktorer.*

Proof. Vi har sett hvordan vi går fra $(L, i) \mapsto j_\gamma(t)$.

Gitt en automorfisk faktor j, bruk denne til å definere en virkning av Γ på $H \times \mathbb{C}$, og la L være gitt ved $\Gamma \backslash H \times \mathbb{C}$. □

Siden alle linjebunter på $\mathbb{H}$ er trivielle, har vi en "klassifikasjon" av linjebunter på $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. Den trivielle linjebunten svarer til $j = 1$.

[[Korrespondanse mellom seksjoner av L_k og modulære former av vekt $2k$.]]

2.1 Poincaré-rekker

...

2.2 Litt om geometrien til H

2.3 Indreprodukt + utspenning