Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

1. oktober 2014

Oppgave 1. Vis at om A, B, C, D er kollineære, så er

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0.$$

■

Løsning 1. Her mener vi altså med $\overline{AB}$ *fortegnslengden* til segmentet AB. For å gi en verdi til $\overline{AB}$ (etc.) må man velge en *retning* langs linja (for hvordan skal en ellers si om $\overline{AB}$ er positiv eller negativ?). Det som holder uansett er nemlig at $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ om A, B, C er kollineære.

Trikset her er dermed å bruke egenskapen over gjentatte ganger, og omskrive hver av lengdene over slik at de involverer A. For eksempel: $\overline{BC}$ kan skrive som $\overline{AC} - \overline{AB}$. $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$ og $\overline{CA} = -\overline{AC}$. Dermed er

$$\begin{aligned}
&\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB}. \\
&= \overline{AD} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) - (\overline{AD} - \overline{AB}) \cdot \overline{AC} + (\overline{AD - AC}) \cdot \overline{AB} \\
&= 0
\end{aligned}$$

På grunn av masse kansellering. ♡

Oppgave 2. Vis følgende generalisering av Menelaos' setning: for en firkant $ABCD$ vil punktene A', B', C', D' på linjene gjennom AB, BC, CD og DA være kollineære bare hvis

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} = 1$$

■

Løsning 2. Se på Figur 1.

Trikset er å merke at enhver firkant er satt sammen av to trekanter. Vi skal bruke Menelaos' setning på trekantene BCA og CDA.

Fra Menelaos' setning har vi følgende likhet:

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} = -1,$$

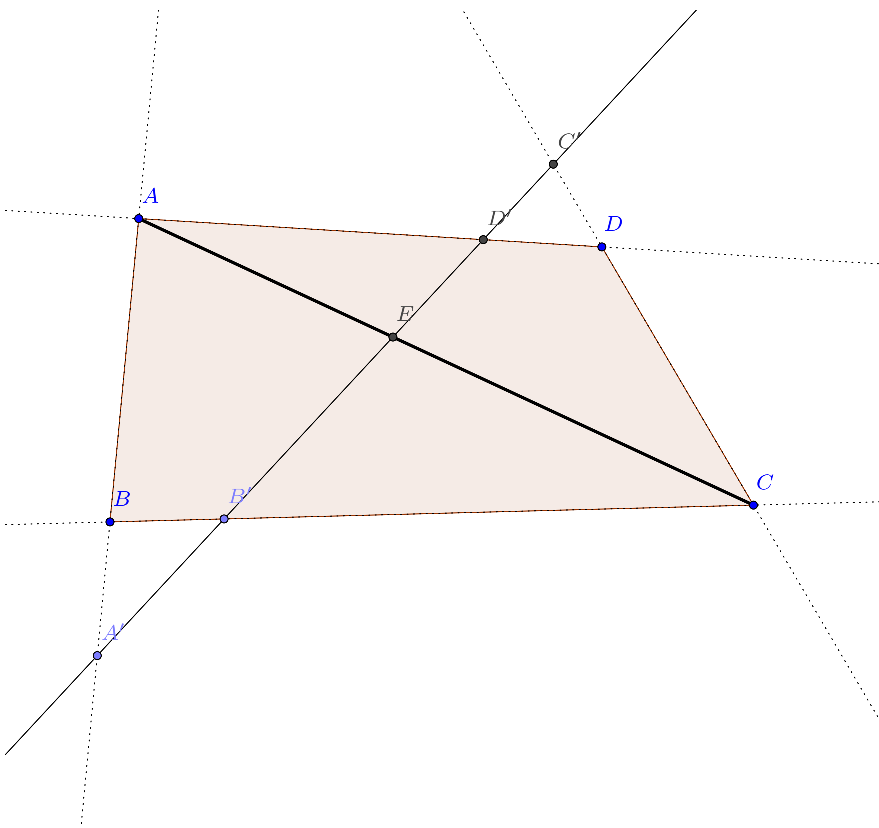
brukt på den nederste av de to trekantene. Vi har også likheten

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = -1$$

Ganger vi disse to uttrykkene sammen, får vi (etter litt omstokking):

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} \cdot \frac{-\overline{EC}}{-\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = 1$$

De to siste leddene kansellerer, og vi får uttrykket vi har lyst på. ♡



Figur 1: Oppgave 2.