Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

27. oktober 2014

Oppgave 1 (Eksamen 2008, oppgave 2)**.** La $\triangle ABC$ være en trekant i planet, og la de motstående sidene ha lengdene a, b, c. Punktet D på linjen BC er slik at $AD \perp BC$. La videre A' være det andre endepunktet av en diameter gjennom A i omsirkelen til $\triangle ABC$.

a) Vis at trekantene $\triangle ABD$ og $\triangle AA'C$ er formlike.

b) La AD ha lengden h og la R være radien i omsirkelen til $\triangle ABC$. Vis at $bc = 2RH$. Vis også at $abc = 4RF$ er F er arealet til trekanten $\triangle ABC$.

■

Løsning 1. Se på Figur 1.

a) Det er nok å finne to like vinkler i trekantene. Det er klart at vinkelen $\angle = ADB$ er $90°$. I tillegg er vinkelen $\angle ACA'$ lik $90°$ siden C ligger på sirkelen og AA' er en diameter.

   I tillegg er vinklene $\angle ABC = \angle AA'C$ siden begge har samme bue AC. Dermed har vi funnet to like vinkler i begge trekantene. Formlikhet følger.

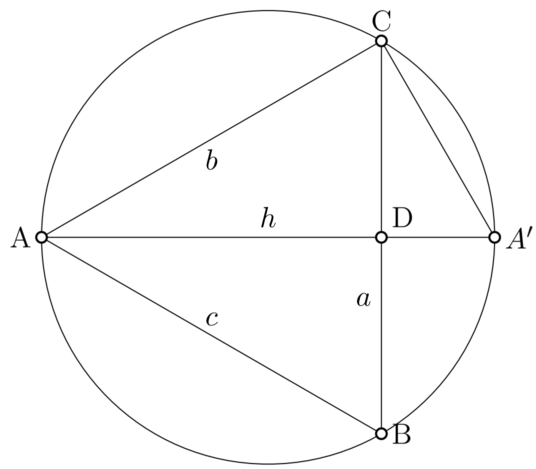
b) Ved formlikhet har vi at $\frac{c}{2R} = \frac{h}{b}$. Men dette er det samme som $bc = 2Rh$, som ønsket.

   I tillegg er $abc = 2Rha = 4R(\frac{1}{2}ah) = 4RF$, som ønsket.

♡

Oppgave 2 (Oppgave 1, eksamen 2009)**.** La $\mathbb{R}^2$ betegne det Euklidske planet.

a) La A, B, C være hjørnene i trekanten $\triangle ABC$. La A', B', C' være midtpunktene på henholdsvis sidene BC, CA, AB. Vis at trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ er formlike.



Figur 1: Oppgave 2, 2008.

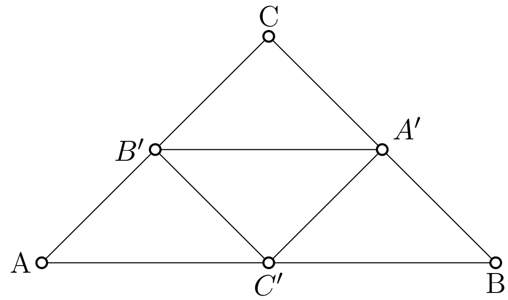
b) Anta gitt et regulært p-gon med sidekanter av lengde ℓ. La X og Y være midtpunktene på to tilstøtende sidekanter. Finn lengden til linjestykket XY.

■

Løsning 2. a) Den enkleste løsningen er med vektorregning. Om vi tenker oss at A er origo, så skriver vi de andre punktene som vektorer fra A. Dermed snakker vi om $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ som de to andre hjørnene. Da ser vi at B' er $\frac{1}{2}\vec{AC}$, C' er $\frac{1}{2}\vec{AB}$ og A' er $\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$. Dermed blir lengdene til sidene lik

$$\begin{aligned}
|\vec{A'B'}| &= |\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} - \frac{1}{2}AC| \\
&= |\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}| \\
&= |\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BA}| = |\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB}| \\
&= \frac{1}{2}|\vec{AB}|.
\end{aligned}$$

Og tilsvarende for de andre sidene. Dermed er alle sidekantene i $\triangle A'B'C'$ halvparten så stor som de tilsvarende sidekantene i $\triangle ABC$, og det følger at de er formlike.



Figur 2: Oppgave 1, 2009.

b) Denne var rar. Dette var rimelig enkelt. Finn ut hva de forskjellige vinklene i et regulært n-gon er, og legg merke til at svaret er halvparten av avstanden fra X til Y. Dermed blir svaret etter litt om og men $\sin\left((\frac{1}{2} - \frac{1}{n})\pi\right) \cdot \ell/2$.

♡

Oppgave 3. Start med en trekant $\triangle ABC$. La ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C være linjer gjennom hjørnene A, B, C som er parallele med de motstående sidene BC, AC, AB, henholdsvis. La A', B', C' være skjæringspunktene mellom ℓ_B og ℓ_C, ℓ_A og ℓ_C og ℓ_A og ℓ_B, henholdsvis.

1. Vis at $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ er formlike med $\triangle A'B'C'$ dobbelt så stor som $\triangle ABC$.

2. Vis at linjene AA', BB' og CC' er konkurrente.

■

Løsning 3.

1. Vi kan bruke Figur 2 på nytt. Bare bytt om alle A, B, C med A', B', C' og motsatt. En vinkeljakt avslører at trekantene er formlike, og faktisk at alle fire små trekantene er formlike. Dermed følger det at hver av de små er halvparten så store (i lengder, ikke areal!) som den store.

2. Linjene AA', BB', CC' er Ceva-linjer til $\triangle A'B'C'$. Da vet vi fra Cevas setning at vi vil ha
$$\frac{B'A}{AC'} \cdot \frac{C'B}{BA'} \cdot \frac{A'C}{CB'} \cdot = 1$$
Men dette er klart, fordi to og to "halv"-sider er like lange.

♡

Oppgave 4. La A være et punkt på parabelen $x = y^2$ og la B være det andre punktet på parabelen som har samme x-koordinat som A. La P være skjæringspunktet mellom tangentlinja til parabelen i A og linja gjennom origo og B. Finn ligningen til det geometriske stedet for P når A gjennomløper parabelen. $\blacksquare$

Løsning 4. La $A = (b^2, b)$ for $b \in \mathbb{R}$. Da er $B = (b^2, -b)$.

Første steg er å finne ligningene for de to linjene. Man kan regne ut at, for eksempel med implisitt derivasjon, at stigningstallet til linja gjennom A er $\frac{1}{2b}$. Dermed finner vi at linja er gitt ved $y = \frac{1}{2b}x + \frac{b}{2}$.

Linja gjennom B og origo er gitt ved $y = -\frac{x}{b}$.

Skjæringspunktet mellom disse linjene blir da gitt ved (etter litt regning) $\left(-\frac{b^2}{3}, \frac{b}{3}\right)$. Setter vi $b' = \frac{b}{3}$, får vi at skjæringspunktet kan skrives som $(-3b'^2, b')$, så det geometriske stedet er parabelen gitt ved $x = 3y^2$. $\heartsuit$