

Notater

Fredrik Meyer

27. januar 2016

0.1 Tautologisk linjebunt på \mathbb{P}^n

Vi kan definere en tautologisk linjebunt på \mathbb{P}^n . Dette er en bunt hvis fiber over et punkt p er linjen i \mathbb{A}^{n+1} utspent av (de homogene koordinatene til) p . La $q \in \langle p \rangle$ bety at q er med i spennet av p . Da er

$$\mathcal{T} := \{(q, p) \in \mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{P}^n \mid q \in \langle p \rangle\}.$$

Ved å regne overgangsfunksjoner kan en se at $\mathcal{T} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$.

Det finnes også andre måter å se dette på, eksempelvis slik Mike Eastwood forklarte det på siste forelesning, men det har jeg glemt av nå (!!).

0.2 Embedding Grassmannian

Grassmannian har en tautologisk linjebunt \mathcal{E} , hvis seksjoner kan skrives som matriser. Fiberen over et punkt $[V]$ i Grassmannian er nettopp det lineære underrommet punktet representerer.

Da vil $\wedge^k \mathcal{E}$ være en linjebunt på Grassmannian, og seksjonene vil være utspent av alle minorene. Så dette er linjebunten Plücker-embeddingen svarer til.

0.3 Topologien til SR-skjemaer

La $X = \mathbb{P}(\Delta)$ være et Stanley-Reisner-skjema. La $f = (f_0, \dots, f_n)$ være f -vektoren, det vil si, antall f_i er antall i -dimensjonale fasetter i Δ . Da er $h^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\Delta), \mathbb{C}) = f_i$ om i er jevn, og 0 ellers. Dette er fordi X har strukturen til et CW-kompleks med bare celler i jevne grader.

0.4 Kotangentkohomologi på en oppblåsning

La $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ være oppblåsningen av en glatt flate X i et punkt P . La $E \simeq \mathbb{P}^1$ være den eksepsjonelle divisoren. Vi ønsker å beregne kohomologien $H^i(\Omega_{\tilde{X}/k}^1)$ gitt kjennskap til kohomologien til X .

Et standard teorem sier at vi har en eksakt sekvens

$$\pi^* \Omega_{X/k}^1 \rightarrow \Omega_{\tilde{X}/k}^1 \rightarrow \Omega_{\tilde{X}/X}^1 \rightarrow 0.$$

Påstanden er at denne er venstre-eksakt også. Siden $\tilde{X} \setminus E \simeq X \setminus P$ er den første pilen en isomorfi utenfor E (og dermed er høyre-leddet også null). Om vi er på $Q \in E$, har vi at $\mathcal{G} = \pi^* \Omega_{X/k}^1$ er null langs E , siden stilken $\mathcal{G}_Q = \Omega_{f(x)/k}^1$, og kotangentknippet over et punkt er null.

Legg også merke til at $\Omega_{\tilde{X}/X}^1 = i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ siden $E \simeq \mathbb{P}^1$ og knippet er null utenfor E (her er $i : \mathbb{P}^1 \rightarrow \tilde{X}$ inklusjonen). Dermed har vi sekvensen

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_{X/k}^1 \rightarrow \Omega_{\tilde{X}/k}^1 \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \rightarrow 0.$$

Vi har også at $H^i(\pi^* \Omega_{X/k}^1) = H^i(\Omega_{X/k}^1)$ (se beviset for Zariskis hovedteorem i Hartshorne).

Dermed har vi at $H^0(\Omega_{\tilde{X}/k}^1) = H^0(\Omega_{X/k}^1)$. For å regne ut de andre kohomologigruppene trenger vi mer presis informasjon om X . Så anta $X = \mathbb{P}^2$. Da følger det fra Euler-sekvensen at $H^i(\Omega_{X/k}^1)$ er null for $i = 0, 2$ og 1 for $i = 1$. Dermed følger det at $H^i(\Omega_{\tilde{X}/k}^1)$ er null for $i = 0, 2$ og 2 for $i = 1$.

Så å blåse opp i et punkt øker H^1 med én.

0.5 Dobbel overdekning av \mathbb{P}^2 ramifisert i gitt kurve

Gitt et homogent polynom $f(x, y, z)$ i $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2n))$, konstruerer vi en flate som er en dobbel overdekning av \mathbb{P}^2 , ramifisert i kurven definert ved dette polynomet.

Den naive løsningen funker, men virker upraktisk å jobbe med. Betrakt nullpunktsmengden X til $f - u^2$ i $\mathbb{P}(1, 1, 1, n)$. Dette er en veldefinert varietet, siden polynomet er homogent i denne graderingen. Vi har en avbildning $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ gitt ved $(x : y : z : u) \mapsto (x : y : z)$. Dette er i utgangspunktet kun en rasjonal avbildning, men formen på ligningen viser at avbildningen er veldefinert: for anta at vi blir sendt til "punktet" $(0 : 0 : 0)$. Da er $x = y = z = 0$, som tvinger $u = 0$. Men dette er absurd, så avbildningen må være en morfi.

Anta at $P \notin V(f) \in \mathbb{P}^2$. Da er $f(P) \neq 0$. Dermed får vi at fiberen $\pi^{-1}(P)$ består av to forskjellige punkter. Om $f(P) = 0$, får vi kun ett punkt i fiberen.

Det eneste singulære punktet i $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ er $(0 : 0 : 0 : 1)$, og dette punktet ligger ikke på X . Det følger at X er glatt. Faktisk er $\mathbb{P}(1, 1, 1, 3)$ isomorf med den projective kjeglen over $\nu_3(\mathbb{P}^2)$ (den tredje Veronese-embedding av \mathbb{P}^2).

Legg merke til at avbildningen $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ er en affin avbildning (i betydningen at $\pi^{-1}(U_i)$ er affin for $i = 0, 1, 2$). Dette impliserer (oppgave III.8.2 i Hartshorne) at $H^i(X, \mathcal{O}_X) = H^i(\mathbb{P}^2, \pi_* \mathcal{O}_X)$ for $i \geq 0$. Derfor ønsker vi å regne ut $\pi_* \mathcal{O}_X$.

Vi har at den homogene koordinatringen til X er gitt ved $S = k[x, y, z, u]/(f - u^2)$, med gradene $(1, 1, 1, 3)$. La $T = k[x, y, z]$ være den homogene koordinatringen til \mathbb{P}^2 . Da har vi at

$$S = T \oplus uT(-3)$$

som homogene ringer.