

# Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

25. september 2014

**Oppgave 1.** La  $K$  være et tredimensjonalt konvekst polyeder. La  $V_K$  være mengden av hjørner,  $E_K$  mengden av kanter, og  $F_K$  mengden av sideflater. To 3-dimensjonale konvekse polyedre  $K$  og  $K'$  kalles *kombinatorisk like* det finnes bijeksjoner mellom hjørnemengdene  $\phi_V : V_K \rightarrow V_{K'}$ , kantmengdene  $\phi_E : E_K \rightarrow E_{K'}$  og sidemengdene  $\phi_F : F_K \rightarrow F_{K'}$  som bevarer inklusjon. Mer presist: vi krever at om et hjørne  $h \in V_K$  og en kant  $k \in E_K$ , så er

$$h \in k \Leftrightarrow \phi_V(h) \in \phi_E(k).$$

Det samme krever vi for kanter og sideflater. Altså hvis  $k$  er en kant i  $K$  og  $f$  en sideflate i  $K$ , så er

$$k \subset f \Leftrightarrow \phi_E(k) \subset \phi_F(f).$$

Vi sier at et polyeder er *simplisialt* om alle sideflatene er trekanter. Merk at den kombinatoriske typen til et simplisialt polyeder er bestemt av sideflatemengden. For eksempel kan hjørnene og kantene til tetraederet beskrives som alle undermengder av flatene

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

- a) Vis at det å være kombinatorisk like er en ekvivalensrelasjon på mengden av polyedre.
- b) Hvis  $K$  er et simplisialt polyeder, uttrykk antall sideflater,  $f$  som en funksjon av antall hjørner  $v$ . Gjør det samme for antall kanter  $e$ .
- c) Beskriv alle kombinatoriske typer av simplisiale polyedre med antall hjørner mindre enn eller lik 6.
- d) Realiser svaret over i  $E^3$ .

■

**Løsning 1.** a) Vi skal vise at det å være kombinatorisk lik er en ekvivalensrelasjon på mengden av polyedre. Skriv  $P \sim Q$  om to polyedre  $P$  og  $Q$  er kombinatorisk like. Vi må vise tre ting: at  $P \sim P$ , at hvis  $P \sim Q$ , så er også  $Q \sim P$ , og til slutt at om  $P \sim Q$  og  $Q \sim R$ , så er også  $P \sim R$ .

Første først: "Selvsagt" finnes det bijeksjoner  $V_P \rightarrow V_P$ ,  $E_P \rightarrow E_P$  og  $F_P \rightarrow F_P$ . Vi velger bare alle avbildningene til å være identitetsavbildningene (dette går an, siden det er snakk om samme mengde).

Anta nå at  $P \sim Q$ , det vil si, det finnes bijeksjoner  $\phi_V : V_P \rightarrow V_Q$ ,  $\phi_E : E_P \rightarrow E_Q$  og  $\phi_F : F_P \rightarrow F_Q$ . Dette er bijeksjoner, så det finnes inverser  $\phi_V^{-1} : V_Q \rightarrow V_P$ ,  $\phi_E^{-1} : E_Q \rightarrow E_P$  og  $\phi_F^{-1} : F_Q \rightarrow F_P$ . Nå har vi tre bijeksjoner mellom som i definisjonen, men vi må sjekke at de bevarer inklusjon: så la  $h$  være et hjørne i  $Q$  og  $k$  en kant i  $Q$ . Vi ønsker å se at  $\phi_V^{-1}(h) \in \phi_E^{-1}(k)$  hvis og bare hvis  $h$  er med i  $k$ . Siden  $P \sim Q$  er  $h' \in k'$  hvis og bare hvis  $\phi_V(h') \in \phi_E(k')$ , og dette skal gjelde for alle  $h', k'$ . Siden vi har bijeksjoner mellom hjørnemengdene og kantmengdene kan vi sette  $h' = \phi_V^{-1}(h)$  og  $k' = \phi_E^{-1}(k)$ . Dermed har vi at  $\phi_V^{-1}(h) \in \phi_E^{-1}(k)$  hvis og bare hvis  $h \in k$  siden  $\phi_V(\phi_V^{-1}(h)) = h$  og  $\phi_E(\phi_E^{-1}(k)) = k$ . Dermed er  $Q \sim P$ .

Anta nå at  $P \sim Q$  og  $Q \sim R$ . Vi må vise at  $P \sim R$ . Vi er altså gitt bijeksjoner  $\phi_V^{PQ} : V_P \rightarrow V_Q$ ,  $\phi_V^{QR} : V_Q \rightarrow V_R$ , og har lyst å finne en bijeksjon  $V_P \rightarrow V_R$ . Men dette klart: vi bruker  $\phi_V^{QR} \circ \phi_V^{PQ}$ , altså sammensetningen av de to bijeksjonene vi hadde. Det er klart at sammensetningen av to bijeksjoner er en bijeksjon. Vi gjør akkurat det samme for bijeksjonene av kant- og flatemengdene.

Vi må vise at hvis  $h, k$  er et hjørne og en kant i  $P$ , så er  $h \in k$  hvis og bare hvis  $\phi_V^{QR} \circ \phi_V^{PQ}(h) \in \phi_E^{QR} \circ \phi_E^{PQ}(k)$ . Men dette er klart:  $h \in k$  hvis og bare hvis  $\phi_V^{PQ}(h) \in \phi_E^{PQ}(k)$ , og siden  $\phi_V^{PQ}(h)$  er et hjørne i  $Q$  og  $\phi_E^{PQ}(k)$  er en kant i  $Q$ , så gjelder dette hvis og bare hvis  $\phi_V^{QR} \circ \phi_V^{PQ}(h) \in \phi_E^{QR} \circ \phi_E^{PQ}(k)$ .

- b) Hvis  $K$  er simplisial, betyr det per definisjon at alle flatene er trekanter. Det betyr at hver flate har tre hjørner som naboer, men fra hvert hjørne  $v$  er det  $\deg v$  flater, så vi har at

$$3f = \sum_{v \in V_P} \deg v.$$

Men fra setning 3.2 vet vi at  $\sum \deg v = 2e$ , slik at vi har at  $3f = 2e$ . Dermed er  $f = \frac{2}{3}e$ . Men fra Eulers formel er  $e = f + v - 2$ , og vi utleder at  $f = 2(v - 2)$ .

c) Et simplisialt polyeder med 4 hjørner må nødvendigvis være ekvivalent med et tetraeder. Et simplisialt polyeder med 5 hjørner må være en dobbeltpyramide på en trekant. Med seks hjørner er det to muligheter. Den ene muligheten er et oktaeder, mens den andre muligheten er for eksempel å sette sammen tre irregulære trekanter i planet, og ta pyramiden over disse. Eventuelt se på eksemplet fra Figur 3 fra forrige gang.

d) Dette har vi gjort før.



**Oppgave 2.** La  $G$  være en endelig gruppe som virker på en endelig mengde  $X$ . For en  $g \in G$ , la  $X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$ .

a) Bruk en insidenskorrespondanse til å vise at

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g|.$$

b) La  $m$  være antall forskjellige baner for virkningen på  $X$ . Bruk Setning 3.8 til å vise at  $\sum_{x \in X} |G_x| = m \cdot |G|$ , og konkluder med at

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

c) Tenk deg et kvadrat bygget av 4 kanter i tre forskjellige farger. Hvor mange mulige kvadrater er det mulig å lage?

Vi ser på to kvadrater som like om de blir like etter en stiv bevegelse i rommet. Mer presist: vi ser på to fargekombinasjoner som like hvis det finnes et element i  $D_4$  som sender den ene fargekombinasjonen på den andre.

La så  $X$  være mengden av fargekombinasjoner (det er  $3^4$  av disse). Vi er da interessert i antall baner for virkningen av  $D_4$  på  $X$ .



**Løsning 2.** a) La oss telle antall løsninger av “likningen”  $gx = x$ . Mer presist: vi har lyst til å telle antall par  $(x, g) \in X \times G$  slik at  $gx = x$ .

Om vi fikserer  $x \in X$ , så er løsningene gitt ved nettopp de  $g \in G$  som fikserer  $x$ , med andre ord, elementer i  $G_x$ . Dermed finner vi alle løsninger

ved å gjøre dette for alle  $x \in X$ , slik at på den ene siden er antall slike par gitt ved

$$\sum_{x \in X} |G_x|.$$

På den andre siden: fiksér  $g \in G$ . Da er de  $x$  som tilfredsstiller  $gx = x$  nettopp gitt ved elementer i  $X_g$ . Så for å telle slike par, må vi gjøre dette for alle  $g \in G$ , og vi får uttrykket

$$\sum_{g \in G} |X_g|.$$

Disse uttrykkene er like siden de teller samme ting.

- b) Setning 3.8 sier at  $|G| = |G_x| \cdot |Gx|$ . Her er  $G_x$  undergruppen av  $G$  som fikserer  $x$ <sup>1</sup>.  $Gx$  er banen til  $x$ , altså mengden  $\{g \cdot x \mid g \in G\}$ . Fra dette får vi at

$$\sum_{x \in X} |G_x| = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}.$$

Men  $|Gx| = |Gy|$  om  $x$  og  $y$  er i samme bane, så vi kan like godt summere over banene, og gange opp slik at vi summerer like mange ganger. Vi får

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{\text{baner } \mathcal{O}} \frac{|\mathcal{O}|}{|\mathcal{O}|} = m.$$

Dermed er  $\sum_{x \in X} |G_x| = m \cdot |G|$ . Vi deler på  $|G|$  på begge sider og bruker a), og får det vi har lyst på.

- c) Denne oppgaven skal egentlig vise at en av styrkene til gruppeteori er at man gjøre telling på smarte måter. Dessverre viser det seg, som vi skal se, at bare å telle naivt er enklere enn å bruke forrige deloppgave.

Hintet forklarer hvorfor vi har lyst til å finne antall baner av virkningen av  $D_4$  på  $X$  (mengden av fargede firkanter). Det vi må gjøre er å regne ut, for hvert element  $g \in D_4$ , hvor mange fargekombinasjoner som er fiksert av  $g$ .

For det første: alle mulige kombinasjoner er fiksert av  $e \in D_4$ . Det er kun kombinasjonen hvor alle fargene er like som er fiksert av  $\rho$  (rotasjon med  $90^\circ$ ). Det er tre farger, så  $|X_\rho| = 3$ . Fargekombinasjoner fiksert av  $\rho^2$  er de ensfargede (tre stykk) og de med samme farge på topp og bunn og samme

---

<sup>1</sup>Kalles ofte *stabilisatoren*.

venstre høyre. Dette gir 6 mulige kombinasjoner med to forskjellige farger. Dermed er  $|X_{\rho^2}| = 3 + 6 = 9$ .

På samme måte finner vi at  $|X_{\rho^3}| = 3$ . La  $s$  være speilingen om en diagonal. Igjen, konstante farginger er alltid bevart. En annen mulighet er at fargene er like i kantene som møter diagonalen vi speiler i. Dette gir igjen  $3 + 6 = 9$  muligheter.

For  $s\rho$  er det flere muligheter. Vi har de ensfargede (tre stykk), og vi har 6 mulige tofargede, og 6 mulige trefargede. Til sammen 15 muligheter.

For  $s\rho^2$  har vi 9 muligheter.

For  $s\rho^3$  har vi igjen femten muligheter.

Vi regner dermed ut at

$$m = \frac{1}{8} (81 + 6 + 27 + 30) = \frac{144}{8} = 18.$$

Dette ble mye telling, og det er ikke helt lett. Det hjelper å brette sammen et ark, og tegne fargede streker på det (det gjorde jeg).

Her er en enklere måte: Vi teller først at det er 3 mulige ensfargede firkanter. For tofargede har vi  $6 + 6$  muligheter: enten to like farger møtes i et hjørne, eller to like farger på motsatt side. For trefargede har vi bare muligheten hvor det er samme farge på to motstående kanter, og forskjellig på de to andre. Dette gir 3 muligheter. Til sammen får vi  $3 + 3 + 6 + 6 = 18$ .

♡

**Oppgave 3.** Beskriv banene for virkningen av  $G$  på mengden av poler når  $G$  er rotasjonsgruppen til tetraederet, oktaederet og ikosaederet. ■