Mangfoldigheter

Fredrik Meyer

June 6, 2015

1 Mangfoldigheter

Mangfoldigheter er topologiske rom som er konstruert ved å lime sammen kopier av $\mathbb{R}^n$ på et kontinuerlig vis.

Presist:

Definition 1.1. Et metrisk rom M er en **topologisk mangfoldighet** hvis det for hver $p \in M$ finnes en åpen mengde $U \ni p$ og en homeomorfi $\varphi_{p,U} : U \to \mathbb{R}^n$. ■

Merk: Her krever vi at n er *ekvidimensjonal*, nemlig at dimensjonen er konstant. Merk også at den åpne mengden alltid kan velges til å være homeomorf med en åpen ball i $\mathbb{R}^n$.

Example 1.2. Alle $\mathbb{R}^n$ og alle åpne delmengder av $\mathbb{R}^n$. ★

Example 1.3. Produkter av mangfoldigheter er mangfoldigheter og disjunkte unioner også. ★

Example 1.4. Sfærene S^n: La $N = (0, \ldots, 0, 1)$ og $S = (0, \ldots, 0, -1)$, "nord- og sørpolen". Vi definerer *stereografisk projeksjon* fra N (og S) fra $S^n \backslash N \to \mathbb{R}^n$. Om $(a^1, \ldots, a^{n+1}) \in S^n \subset R^{n+1}$, sendes denne til

$$\left(\frac{a^1}{1 - a^{n+1}}, \ldots, \frac{a^n}{1 - a^{n+1}} \right).$$

Dette gir en homeomorfi med $\mathbb{R}^n$ med invers

$$(a^1, \ldots, a^n) \mapsto \left(\frac{2a^1}{1 + |a|}, \ldots, \frac{2a^n}{1 + |a|}, \frac{|a| - 1}{1 + |a|} \right).$$

DEtte gir oss en differensiabel struktur på alle sfærene S^n. Vi kan spørre oss om det finnes en unik differensiabel struktur på S^n. Dette er sant for $n \leq 6$, men Milnor viste at det er 28 differensiable strukturer på S^7, de såkalte "eksotiske sfærene". ★

Example 1.5 (Projektive rom)**.** La $\mathbb{P}^n$ være mengden av linjer gjennom origo i $\mathbb{R}^{n+1}$. Merk at hver linje kan gis ved et $n+1$-tuppel, men dette tuplet er bare unikt opp til multiplikasjon fra $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Vi kan definere et atlas for $\mathbb{P}^n$ på følgende hvis ($\mathbb{P}^n$ arver automatisk også topologien på dette viset). La U_i være mengden av linjer hvor den i'te koordinaten er ulik null. Da definerer vi en homeomorfi til $\mathbb{R}^n$ ved

$$\varphi_j : [a_1, \ldots, a^{n+1}] \mapsto \left(a_1/a^i, \ldots, a^{i-1}/a^i, a^{i+1}/a^i, \ldots, a^{n+1}\right) \in \mathbb{R}^n$$

Inversen er gitt ved $(a^1, \ldots, a^n) \mapsto [a^1, \ldots, 1, \ldots, a^n]$. Her er koordinatene i brackets en vektor som spenner linjen. Merk at avbildningen er veldefinert.

Anta nå $i \neq j$. Vi ser på den induserte avbildningen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gitt ved $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$:

$$(a^1, \ldots, a^n) \mapsto \left(\frac{a^1}{a^j}, \ldots, \frac{1}{a^j}, \ldots, \frac{a^n}{a^j}\right).$$

Her er $1/a^j$ posisjon i. ★

Vi kan utstyre mangfoldigheter med mer struktur. I dette kurset er vi interessert i "differensiable strukturer". Èn måte å introdusere dette på er ved hjelp av et *maksimalt atlas.*

[kan dette ekvivalent gjøres vha et knippe av funksjoner?]

Definition 1.6 (Glatt maksimalt atlas)**.** Et **kart** er en homeomorfi $\varphi : U \to V$ fra en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^n$ til en åpen delmengde $V \subset M$. Et **atlas** er en mengde kompatible kart, i betydningen at hvis $x : U \to M$ og $y : V \to M$ er to kart, så er $y^{-1} \circ x : U \to V$ glatt. Atlaset skal dekke mangfoldigheten, slik at hvert punkt $p \in M$ er dekket av et kart.

Et **maksimalt atlas** er et atlas som ikke kan utvides med flere kompatible kart. ■

Av tekniske grunner definerer vi så en **differensiabel mangfoldighet** (heretter bare kalt "mangfoldighet") til å være en topologisk mangfoldighet utstyrt med et glatt maksimalt kart.

1.1 Differensiabilitet og konsekvenser

En avbildning $f : M^n \to N^m$ mellom mangfoldigheter er differensiabel om den lokalt er differensiabel. Dette gir mening å si, siden vi vet hva differensiabilitet er for avbildninger $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Noe av det spesielle med differensialgeometri er eksistensen av glatte funksjoner med fine egenskaper (bytt ut "differensiabel" med det sterkere kravet "holomorf" for eksempel, og du er på langt dypere vann).

1. Definer $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved
$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$
Da er h glatt og $h^{(n)}(0) = 0$ for alle n.

2. Funksjonen $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definert ved
$$j(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} e^{-(x+1)^{-2}} & x \in (-1,1) \\ 0 & x \notin (-1,1) \end{cases}$$
er glatt og strengt positiv innenfor $(-1, 1)$. Ved skalering og translasjon kan vi få en funksjon $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er positiv på $(0, \delta)$ og null utenfor.

3. Definer
$$l(x) = \left(\int_0^x k(x)dx \right) / \left(\int_0^\delta k(x)dx \right).$$
Den er 0 for $x \leq 0$, stigende på $(0, \delta)$, og 1 for $x \geq \delta$.

4. Funksjonen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definert ved
$$g(x) = \prod_{i=1}^n j(x^i/\epsilon)$$
er positiv på $(-\epsilon, \epsilon)^n$ og null ellers.

Dette er det vi trenger for å bevise eksistensen av såkalte "bump"-funksjoner:

Proposition 1.7. *La $K \subset U \subset M$ være en kompakt mengde. Da finnes det en funksjon $g : M \to [0, 1]$ som er 1 på K og 0 utenfor U.*

Proof. For hver $p \in U$ kan vi finne et koordinatsystem $x : V \to \mathbb{R}^n$ med $x(U) \supset (-\epsilon, \epsilon)^n$. Funksjonen $x \circ g$ er glatt på V. La $\overline{g}$ betegne samme funksjonen definert på M, men 0 utenfor V. Denne er klart kontinuerlig og glatt.

Dette kan gjøres for hver $p \in U$. Siden K er kompakt, vil endelig mange V dekke K. Kall disse $V_1, \ldots, V_p$ med tilhørende funksjoner $g_1, \ldots, g_p$ som over.

Funksjonen $g_1 + \ldots + g_p$ er positiv på K, si større enn δ. La l være definert som i punkt 3 over. Da vil $l \circ (g_1 + \ldots + g_p)$ være 1 på K og 0 utenfor U. $\square$

1.2 Derivarberhet og sånn

Vi skal skille mellom når vi deriverer *i et koordinatsystem* og når vi deriverer på mangfoldigheten. For å gjøre dette må koordinatsystemet være bakt inn i notasjonen.

La $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være en funksjon (la oss heretter anta alle funksjoner er glatte, med mindre vi mot formodning skulle finne på å snakke om monstre). Vi definerer

$$D_i f(a) \triangleq \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(a^1, \ldots, a^i + h, \ldots, a^n) - f(a) \right).$$

Om $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ og $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, så sier kjerneregelen at

$$D_j (f \circ g)(a) = D_i(f(g(a))) D_j g^i(a).$$

(vi prøver oss på Einstein-notasjonen)

Anta nå at $f : M \to \mathbb{R}$ er en funksjon og at (x, U) er et koordinatsystem på M. Da definerer vi

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \triangleq D_i(f \circ x^{-1})(x(p)).$$

Notasjonen referer altså til koordinatsystemet (x, U), og måler "veksthastigheten" til funksjonen f langs den i'te koordinataksen.

Ved å fjerne punktet p fra notasjonen kan vi betrakte ligningene som ligninger mellom funksjoner.

Den deriverte av en funksjon i et koordinatsystem er relatert til den deriverte i et annet koordinatsystem:

Proposition 1.8. *Om (x, U) og (y, V) er koordinatsystemer og $f : M \to \mathbb{R}$ er deriverbar, så gjelder på $U \cap V$ at*

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y^i}(p) &= D_i(f \circ y^{-1})(y(p)) \\
&= D_i([f \circ x^{-1}] \circ [x \circ y^{-1}])(y(p)) \\
&= D_i(f' \circ g')(y(p)) \\
&= D_j(f'(g'(y(p)))) D_i {g'}^j (y(p)) \\
&= D_j(f \circ x^{-1}(p)) D_i [x \circ y^{-1}]^j (y(p)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p).
\end{aligned}$$

Legg merke til bruken av kjerneregelen. □

Remark. *Det er lett å sjekke at operatoren $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ som sender funksjonskimer til $\mathbb{R}$ er en derivasjon. Formelt, la $\mathscr{O}_p$ betegne ekvivalensklasser av funksjoner definert nær p. Da er $\ell = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ en lineær funksjon $\mathscr{O}_p \to \mathbb{R}$ som tilfredstiller Leibniz-regelen: $\ell(fg) = f(p)\ell(g) + g(p)\ell(f)$.*

1.3 Glatte avbildninger

Avbildninger har egenskaper. La $f : M^n \to N^m$ være en avbildning mellom glatte mangfoldigheter og la $p \in M$. La (x, U) være en kartomegn om p og la (y, V) være en kartomegn om $f(p)$. Da kan vi betrakte avbildningen $y \circ f \circ x^{-1}$, som er en avbildning $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Matrisen

$$J = \left(\frac{\partial y^i \circ f}{\partial x^j}\bigg|_p \right)$$

er Jacobi-matrisen til f i punktet p. Da kan J enten ha rang lik m eller mindre enn m. Om rangen er mindre enn m, kaller vi p et "**kritisk punkt**" for f, og om rangen er lik m kaller vi p for et "**regulært punkt**" for f.

Om p er kritisk, kaller vi $f(p)$ for en "**kritisk verdi**", og hvis ikke, kaller vi $f(p)$ for en "**regulær verdi**".

Det er et faktum at bildet av de kritiske verdiene til f alltid er "lite":

Proposition 1.9. *Om $f : M \to N$ er en glatt avbildning av mangfoldigheter. Da er mengden av kritiske verdier for f en mengde av mål null i N.*

Dette er Sards "sterke" teorem slik det er beskrevet i Spivak.

Om vi vet rangen til en avbildning i et punkt p, kan vi beskrive avbildningen lokalt.

Proposition 1.10.

1. *Om $f : M^n \to N^m$ har rang k i p, så finnes det koordinatsystemer (x, U) rundt p og (y, V) rundt $f(p)$ slik at*

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \ldots, a^n) = (a^1, \ldots, a^k, \psi^{k+1}(a), \ldots, \psi^m(a)).$$

2. *Om f har rang k i* et område *rundt p kan koordinatsystemene velges slik at*

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \ldots, a^n) = (a^1, \ldots, a^k, 0, \ldots, 0).$$

Proof. 1. Dette er litt grisete å skrive opp, så jeg skisserer ideen. La (u, U) være et koordinatsystem rundt p og la (y, V) være et system rundt $f(p)$. Siden f har rang k i p, finnes det en $k \times k$-undermatrise med determinant ulik null i J. Vi kan permutere søyler og rader slik at denne undermatrisen er øverst til venstre i J. Dette betyr at de k første koordinatene til f (uttrykt i (y, V)) kan brukes som koordinater.

Eksplisitt, definer et nytt koordinatsystem (x, U) ved $x^\alpha(a) = y^\alpha(f(a))$ for $\alpha \leq k$ og $x^r(a) = u^r(a)$ for $r > k$. Da er det lett å se at x definerer et koordinatsystem (følger fra Invers Funksjonsteoremet). La $q = x^{-1}(a^1, \ldots, a^n)$. Da er per definisjon $x^i(q) = a^i$. Da er $y^\alpha \circ f(q) = a^\alpha$ for $\alpha \leq k$ og $u^r(q) = a^r$ for $r > k$, per definisjon. Men da har vi at

$$yfx^{-1}(a^1, \ldots, a^n) = y \circ f(q) = (a^1, \ldots, a^k, ...).$$

Som er det vi skulle vise.

2. Denne er teknisk mer infløkt. $\square$

Proposition 1.11.

1. *Om $m \leq n$ og $f : M^n \to N^m$ har rang m i p, og (y, V) er et vilkårlig koordinatsystem rundt $f(p)$, så finnes et koordinatsystem (x, U) rundt p med*

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \ldots, a^n) = (a^1, \ldots, a^m).$$

Med andre ord, om f har maksimal rang, ser f lokalt ut som en projeksjon.

2. *Om $n \leq m$, og (x, U) er et vilkårlig koordinatsystem rundt p, kan vi finne koordinatsystem rundt (y, V) rundt $f(p)$ slik at*

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1, \ldots, a^n) = (a^1, \ldots, a^n, 0, \ldots, 0).$$

Med andre ord, om f har maksimal rang, så er f lokalt en injeksjon.

Det er flere måter en mangfoldighet kan inkluderes i en annen mangfoldighet.

Vi sier at en avbildning $f : M^n \to N^m$ er en **immersjon** om $n \leq m$ og f har maksimal rang (lik n) overalt.

Immersjon er likevel ikke alltid nok - bildet trenger ikke nødvendigvis være en mangfoldighet. Ta for eksempel 8. Dette kan realiseres som et bilde av en avbildning $S^1 \to \mathbb{R}^2$, men 8-tallet er ikke homeomorf med en sirkel.

En immersjon er alltid lokalt injektiv, men det er ikke nok å kreve injektivitet for å få "pene" undermangfoldigheter. Eksemplet $\mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ med irrasjonal stigning gir en injektiv immersjon av den reelle linja inn i torusen. Vi kaller disse for en "**immersed submanfold**" (norsk ord?)

1.4 Eksistens av partisjon av enheten

Her tror jeg vi kun beskriver.

La $\mathscr{O}$ være en åpen overdekning av M. Da eksisterer det en samling av glatte funksjoner $\phi_i : M \to [0, 1]$ slik at

1. Familien $\{p \mid \phi_i(p) \neq 0\}$ er lokalt endelig. (lokalt endelig støtte)
2. $\sum_i \phi_i(p) = 1$ for alle $p \in M$.
3. For hver i finnes $U \in \mathscr{O}$ med $\operatorname{supp} \phi_i \subset U$.

1.5 Viktigste ting i dette kapitlet

1. Definisjon av mangfoldighet.
2. Prop 1.8.
3. Kritiske og regulære verdier.
4. Struktur til avbildninger med gitt rang.
5. Embedding.
6. Partisjon av enheten.

2 Tangentbunten

2.1 Viktige ting i dette kapitlet

- Definisjon av tangentbunten.
- Definisjon av vektorbunter.
- Basis for T_pM.
- $\mathscr{F}$-struktur på $\Gamma(TM)$.
- Orientering.

3 Tensorer

3.1 Viktige ting

- Kotangentbunten og basis for denne.
- Pullback.
- 1-1 korrespondanse Theorem 2.
-

4 Vektorfelt og differensiallikninger

- Lokal eksistens av integralkurver.
- Lie-derivert av X og ω.
- Bracket.

5 Differensialformer

5.1 de Rham-kohomologi

La M og N være mangfoldigheter og la $I = [0, 1]$ betegne enhetsintervallet. Vi har lyst på et begrep som beskriver hvordan en avbildning kan "kontinuerlig forandres". Helt presist:

Definition 5.1. La $f : M \to N$ og $g : M \to N$ være to avbildninger. Da er en **homotopi** mellom dem en avbildning

$$F : M \times I \to N$$

slik at $f_0 = f$ og $f_1 = g$, hvor $f_t(p) \stackrel{\Delta}{=} F(p,t)$. ■

Nå kan vi formulare nok et begrep. Vi sier at en mangfoldighet M er **kontraktibel** om identitetsavbildningen og den konstante avbildningen $p \mapsto p_0$ (for en $p_0 \in M$) er homotope.

5.2 Poincaré-lemma

Vi sier at en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^n$ er **stjerneformet** om det finnes et punkt $p \in U$ slik at for alle andre punkter $q \in U$ er linjestykekt mellom p og q inneholdt i U.[1]

Lemma 5.2. *En stjerneformet mengde U er kontraktibel.*

Proof. Velg $p \in U$ som stjernens "sentrum". Da kan vi definere en homotopi ved

$$(q,t) \mapsto q(1-t) + tp$$

for $q \in M$ og $t \in [0,1]$. □

Poincaré-lemmaet er et lemma som egentlig burde vært et teorem om en tar konsekvensene i betrakning. Det er enkelt å formulere:

Theorem 5.3 (Poincare-lemma)**.** *Om $U \subset \mathbb{R}^n$ er en kontraktibel åpen mengde, er $H^k_{dR}(U) = 0$ for $k \geq 0$.*

Størstedelen av beviset vil gå med på å analyse avbildningen $i_\alpha : M \to M \times [0,1]$ gitt ved $p \mapsto (p, \alpha)$.

Merk først at om det er en naturlig funksjon t på $M \times [0,1]$, nemlig projeksjonen π_2. Om (x, U) er et lokalt koordinatsystem på M, er

$$(x^1 \circ \pi_1, \ldots, x^n \circ \pi_1, t)$$

et koordinatsystem på $M \times [0,1]$. Vi forkorter $x^i \circ \pi_1$ med $\overline{x}^i$. Da kan vi regne ut at

$$i_\alpha^* \left(\sum_{i=1}^n \omega_i d\overline{x}^i + f\,dt \right) = \sum_{i=1}^n \omega_i(-,\alpha) dx^i.$$

[1] Merk at dette er svakere enn *konveks*, siden i definisjonen av konveks er både p og q frie variable.

En generell 1-form på $M \times [0,1]$ ser ut som

$$\omega(p,t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p,t) d\overline{x}^i + f(p,t)dt.$$

Da er $d\omega$ gitt som

$$\begin{aligned} dw &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial \overline{x}^j} d\overline{x}^j \wedge d\overline{x}^i + \frac{\partial \omega_i}{\partial t} dt \wedge d\overline{x}^i \right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^k} d\overline{x}^k \wedge dt \\ &= (\text{ingen dt}) + \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial \omega_i}{\partial t} d\overline{x}^i \wedge dt + \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^i} d\overline{x}^i \wedge dt \right). \end{aligned}$$

Om vi krever at $d\omega = 0$, ser vi at

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^i}$$

for alle i. Dermed

$$\omega_i(p,1) - \omega_i(p,0) = \int_0^1 \frac{\partial \omega_i}{\partial t} dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^i} dt.$$

Dermed er

$$\sum_{i=1}^{n} (\omega_i(p,1) - \omega_i(p,0)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^i}(p,t) dt \right) dx^i.$$

Om vi definerer

$$g(p) = \int_0^1 f(p,t)dt,$$

sier dette at

$$i_1^* \omega - i_0^* \omega = dg,$$

siden $\frac{\partial g}{\partial x^i}(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^i}(p,t)dt$. Om vi kaller g for $I\omega$ (det er klart at g er en funksjon av ω), ser formelen slik ut:

$$i_1^* \omega - i_0^* \omega = d(I\omega).$$

Omtrent samme bevis, bare med mer notasjon fungerer mer generelt. Legg først merke til at $\Omega^k(M \times [0,1])$ splitter som en direkte sum. Enhver $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$ kan deles opp i $\omega_1 \in \ker \pi_1$ og $\omega_2 \in \ker \pi_2$. Bruker man den kanoniske koordinaten t på $M \times [0,1]$, ser vi at ω_1 kan skrives som $dt \wedge \eta$ for en $\eta \in \Omega^{k-1}(M \times [0,1])$. Med andre ord kan enhver ω skrives som

$$\omega = \omega_2 + dt \wedge \eta.$$

Vi definerer dermed

$$I(\omega)(p) \overset{\Delta}{=} \int_0^1 \eta(p,t)dt$$

For å være heeelt presis, for formelen over gir ikke uten godvilje mening, betyr dette:

$$I(\omega)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 \eta(p,t)(i_{t*}v_1, \dots, i_{t*}v_{k-1})dt.$$

I utregningene over ville dette altså vært g (mens $f = \eta$).

Vi har:

Proposition 5.4. *For hver k-form $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$ har vi at*

$$i_1^*\omega - i_0^*\omega = d(I\omega) + I(d\omega).$$

I homologisk algebra-språk sier dette at formene $i_1^*\omega$ og $i_0^*\omega$ er kjedehomotope. De har altså samme verdi på homologi.

Proof. La oss jobbe i et koordinatsystem.

Siden I er lineær har vi to tilfeller å sjekke.

1. Anta $\omega = f dx^I$, altså at det ikke er noen dt inolvert. Da er $I\omega = 0$. Så høyresiden er bare

$$\begin{aligned} I(d\omega)(p) &= I\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial d\overline{x}^i} dx^i \wedge dx^I + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^I\right)(p) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt\right) dx^I(p) \\ &= (f(p,1) - f(p,0))dx^I(p) \\ &= i_1^*\omega(p) - i_0^*\omega(p). \end{aligned}$$

Som var det vi skulle vise.

2. Anta $\omega = f dt \wedge dx^I$. Da er $i_1^*\omega = i_0^*\omega = 0$ siden $i_1^* dt = i_0^* dt = 0$. Vi har at

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= d((\int_0^1 f dt) \wedge dx^I) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\int_0^1 f dt \right) dx^i \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Men også

$$\begin{aligned} I(d\omega) &= I(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dt \wedge dx^I) \\ &= -I(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dt \wedge dx^i \wedge dx^I) \\ &= -\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} dt \right) dx^i \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Og vi ser at $I(d\omega) + d(I\omega) = 0$.

$\square$

Theorem 5.5 (Poincare-lemma)**.** *Om M er kontraktibel til $p_0 \in M$, så er hver lukket form ω eksakt, ekvivalent $H^k_{dR}(M) = 0$ for $k > 0$.*

Proof. Se på $H \circ i_0$ og $H \circ i_1$. Den førstnevnte avbildningen er identitetsavbildningen og den andre konstantavbildningen $p \mapsto p_0$.

La ω være slik at $d\omega = 0$. Da er $H^*\omega$ en k-form på $M \times [0,1]$, så vi kan bruke vårt forrige resultat:

$$i_1^*(H^*\omega) - i_0^*(H^*\omega) = d(I(H^*\omega)) + I(dH^*\omega) = d(IH^*\omega).$$

Men vi har jo at $i_1^* H^*\omega = (H \circ_1)^*\omega = \omega$ og $i_0^* H^*\omega = (H \circ i_0)^*\omega = 0$. Dermed sier formelen over at

$$\omega = d(IH^*\omega).$$

Så ω er eksakt. $\square$

Faktisk vil samme bevis gi den mye mer generelle påstanden:

Theorem 5.6. *Anta at $H : M \times [0,1] \to N$ er en homotopi mellom $f : M \to N$ og $g : M \to N$. Da induserer f og g samme avbildning på $H^k(N) \to H^k(M)$.*

Proof. På samme vis som over er $H \circ i_0 = f$ og $H \circ i_1 = g$. La ω representere en kohomologiklasse, dvs, $d\omega = 0$. Vi får samme formel som over:

$$i_1^*(H^*\omega) - i_0^*(H^*\omega) = d(I(H^*\omega)) + I(dH^*\omega) = d(IH^*\omega).$$

Og dermed også:

$$g * \omega - f^*\omega = d(IH^*\omega).$$

Dette betyr at $f^*\omega \equiv g^*\omega$ som elementer i $H^k(M)$. $\square$

Remark. *Husk at M og N er **homotopiekvivalente** om det finnes avbildninger $f : M \to N$ og $g : N \to M$ slik at $f \circ g$ og $g \circ f$ begge er homotope med identitetsavbildningen. Da følger det umiddelbart fra teoremet over at $H^k(M) \simeq H^k(N)$ for alle k.*

Example 5.7. Se på $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. La $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ være inklusjonsavbildningen. La $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to S^1$ være definert ved $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$. Da er $g \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ og $g \circ i = g$. Men g er selv homotop med identitetsavbildningen (via skalering), så $H^i(S^1) = H^i(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$. ★

5.3 Viktige punkter i dette kapitlet

- Overgangsformler.
- Kriterie for orienterbarhet.
- d
- Poincare-lemma

6 Integrasjon

Vi har lyst å integrere på mangfoldigheter. Siden mangfoldigheter er abstrakte objekter, gir det ikke mening å integrere direkte i kartene. Vi må ha et invariant objekt å integrere, og dette er akkurat differensialformene.

Vi begynner med definisjoner.

Definition 6.1. En glatt funksjon $c : [0,1]^k \to M$ kalles en **singulær k-kube**. Vi kaller inklusjonene $I^k : [0,1]^k \to \mathbb{R}^k$ for **standard k-kuben**. ■

Om ω er en k-form på $[0,1]^k$ og x^i er standard-koordinatene, så kan ω skrives unikt som

$$\omega = f dx^1 \wedge \ldots dx^k.$$

Vi definerer

$$\int_{[0,1]^k} \omega \triangleq \int_{[0,1]^k} f dx^1 \dots dx^k.$$

Videre, om ω er en k-form på M, og c er en singulær k-kube på M, så definerer vi

$$\int_c \omega \triangleq \int_{[0,1]^k} c^* \omega.$$

Vi starter med to enkle proposisjoner:

Proposition 6.2. *La* $c : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ *være en 1-1 singulær n-kube med* $\det c' \geq 0$ *på* $[0,1]^n$*. La* ω *være n-formen*

$$\omega = f dx^1 \wedge \dots dx^n.$$

Da er

$$\int_c \omega = \int_{c([0,1]^n)} f dx^1 \dots dx^n.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\int_c \omega &= \int_{[0,1]^n} c^* \omega \\
&= \int_{[0,1]^n} (f \circ c)(\det c') dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \int_{[0,1]^n} (f \circ c) |\det c'| dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \int_{[0,1]^n} (f \circ c) |\det c'| dx^1 \dots dx^n \\
&= \int_{c([0,1]^n)} f dx^1 \dots dx^n.
\end{aligned}$$

I siste linja brukte vi variabelskifte-formelen fra kalkulus. □

Proposition 6.3. *La* $p : [0,1]^k \to [0,1]^k$ *være en en-en på avbildning (bijeksjon) med* $\det p \geq 0$*. Da er*

$$\int_c \omega = \int_{c \circ p} \omega.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\int_{c\circ p}\omega &\overset{def}{=} \int_{[0,1]^k}(c\circ p)^*\omega = \int_{[0,1]^k} p^*(c^*\omega)\\ &= \int_p c^*\omega\\ &= \int_{[0,1]^k} c^*\omega\\ &\overset{def}{=} \int_c \omega.\end{aligned}$$

I nest siste linje brukte vi at p var surjektiv. □

Det er en randoperator for differensialformer, og vi skal nå definere en randoperator for singulære k-kuber.

Først utvider vi definisjonen av integralet til også å gjelde "k-kjeder". Dette er per definisjon formelle summer $\sum a_i c_i$ hvor c_i er k-kjeder og a_i er heltall.

Vi skal definere ∂c hvor c er en k-kube. Dette vil være en k-kjede.

Om I^n er standard k-kuben, så definerer vi

$$I^n_{(i,\alpha)}(x) = I^n(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{n-1}) = (x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^{n-1})$$

Om vi tenker oss hva randen til $\Box$ burde være, så er dette, med klokken, $I^2_{(2,0)}, I^2_{(1,1)}, I^2_{(2,1)}, I^2_{(1,0)}$.

For en singulær k-kube definer vi

$$c_{i,\alpha)} \overset{\Delta}{=} c\circ I^n_{(i,\alpha)}.$$

Så definerer vi

$$\partial c \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}c_{(i,\alpha)}.$$

Randa av en generell k-kjede definerer vi linearitet.

Kall mengden av k-kjeder for $S_k(M)$ Vi har vist at vi har en avbildnig $\partial : S_k(M) \to S_{k-1}(M)$.

Proposition 6.4.

$$\partial^2 = 0.$$

Proof. Bookkeeping. □

Dermed har vi et (homologisk) kompleks $(S_*(M),\partial)$. Legg merke til at om c er en singulær 1-kube, så er $\partial c = c_{(1,1)} - c_{(1,0)}$. Men $c_{(1,\alpha)} = c(\alpha)$ i dette tilfellet, så $\partial c = 0$ nøyaktig når c er en "lukket" kurve.

6.1 Stokes teorem

Theorem 6.5 (Stoke)**.** *If ω is a $(k-1)$-form on M and c is a k-chain in M, then*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

6.2 Viktige punkter

- Definisjon.
- $\partial^2 = 0$
- Stoke
- de Rham-kohomologi

7 Alg-top

Theorem 7.1 (Mayer-Vietoris)**.** *Suppose $M = U \cup V$ with U and V open. Then there is an exact sequence:*

$$0 \to H^0(M) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(M) \to \dots H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M) \to \dots$$

Proof. Beviset består av to deler. Del én består i å vise at det finnes en kort-eksakt sekvens av komplekser

$$0 \to C^k(M) \xrightarrow{i} C^k(U) \oplus C^k(V) \xrightarrow{j} C^k(U \cap V) \to 0.$$

Del to er ren algebraisk, for det er standard fra homologisk algebra at en slik kort-eksakt sekvens induserer en lang-eksakt sekvens på homologi. Dette unngår vi å bevise.

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & U \arrow[d, "i_2"] \\ V \arrow[r, "i_1"] & M \end{tikzcd}$$

Se på inklusjonene over. Gitt en differensialform ω på M kan vi sende den til $i_1^*\omega - i_2^*\omega$. Dette er avbildningen i. På samme vis, gitt et par (ω_1, ω_2), sender vi denne til $j_1^*\omega_1 + j_2^*\omega_2$.

Det er klart at dette gir oss et kompleks. Problemet er å vise at det er eksakt.

Første del er å se at i er injektiv. Men dette er lett. For om $i_1^*\omega$ og $i_2^*\omega$ er null, må også ω være null siden $U \cup V = M$.

Anta nå at $(\eta_1, \eta_2) \in \ker j$. Med andre ord er $\eta_1\big|_{U\cap V} = \eta_2\big|_{U\cap V}$. Men da er det klart at η_1, η_2 kommer fra samme form η.

Anta $\alpha \in C^k(U \cap V)$. For å vise at j er surjektiv, velg en partisjon ϕ_U, ϕ_V av enheten over $\{U, V\}$. Da kan vi definere $\phi_V\omega$ og $\phi_U\omega$ på U, V.

Da vil j sende $(\phi_V\omega, \phi_U\omega) \mapsto \omega$. $\square$

En av fordelene til kohomologi til forskjell fra homologi er eksistensen av et produkt. Om ω og η er k- og l-former, kan vi danne $\omega \wedge \eta \in C^{k+l}(M)$. Dette induserer faktisk en avbildning på kohomologi også.

For anta $d\omega = 0$ og $d\eta = 0$ være lukkede. Da er

$$d(\omega \wedge \eta) = d(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta = 0 + 0 = 0.$$

Så produktet definerer et element i $H^{k+l}(M)$. Det er også lett å se at vi også får et produkt på kohomologi med kompakt support, $H_c^k(M)$ på samme vis.

Theorem 7.2 (Poincaré-dualitet)**.** *Om M er en sammenhengende, orientert mangfoldighet av endelig type så er avbildningen*

$$PD : H^k(M) \to H_c^{n-k}(M)^\vee$$

en isomorfi for alle k.

1. Mayer-Vietoris
2. Euler-karakteristikk.
3. Mayer-Vietoris for H_c^*
4. Pointcare-dualitet og cup-produkt

8 Obligen

Exercise 1. Let G be a Lie group and let $\mathfrak{g}$ be its Lie algebra at the identity.

A smooth vector field X on G is called *left-invariant* if $(d_h l_g)(X_h) = X_{gh}$ for all $g, h \in G$. Here l_g is left-multiplication by g. A left-invariant vector field is completely determined by its value at $e \in G$. We denote the corresponding vector field by $X_g^v := (d_e l_g)(v)$. Every element $v \in T_e G = \mathfrak{g}$ arises this way.

The commutator of two left-invariant vector fields is again left-invariant (a short computation), and hence we get a Lie bracket on $\mathfrak{g}$ given by $[v, w] := [X^v, X^w]_e$.

1. For $v \in \mathfrak{g}$, let γ_v be the maximal integral curve of X^v such that $\gamma_v(0) = e$. Show that for every $g \in G$ the curve $\gamma(t) = g\gamma_v(t)$ is an integral curve of X^v such that $\gamma(0) = g$. Conclude that $\gamma_v(t)$ is defined for all $t \in \mathbb{R}$ and the flow $(\phi_t^v)_t$ defined by X^v is given by $\phi_t^v(g) = g\gamma_v(t)$.

2. Choose a coordinate chart $x : U \to \mathbb{R}^n$ on G containing $e \in G$ such that $x(e) = 0$. Let $f : V \times V \to \mathbb{R}^n$, where V is a small neighbourhood of $0 \in \mathbb{R}^n$, and f be the map describing the group law of G in these coordinates, so $f(a, b) = x(x^{-1}(a)x^{-1}(b))$. Consider the Taylor expansion of f at $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Vis at Taylor-rekka har formen

$$f(a, b) = a + b + B(a, b) + h.o.t.$$

where $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a bilinear map.

3. Show that in the chosen local coordinates the Lie bracket on $\mathfrak{g}$ is given by

$$[v, w] = B(v, w) - B(w, v).$$

4. Take $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Identify $\mathfrak{g}$ with $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Show that $[A, B] = AB - BA$.

♠

Solution 1. 1. It is clear that $\gamma(0) = g$. We need to see that $\gamma'(t) = X^v_{\gamma(t)}$. The key observation is that $\gamma = l_g \circ \gamma_v$, so that

$$\begin{aligned}(d\gamma)_t(1) &= d(l_g \circ \gamma_v)_t(1) \\ &= (dl_g)_{\gamma_v(t)} \circ (d\gamma_v)_t(1) \\ &= (dl_g)_{\gamma_v(t)}(X^v_{\gamma_v(t)}) \\ &\stackrel{!}{=} X^v_{g\gamma_v(t)} \\ &= X_{\gamma(t)},\end{aligned}$$

hvor vi i den merkede likheten har brukt at X er venstreinvariant.

2. Husk at Taylor-utviklingen er gitt ved å summere alle mulige ledd $\frac{\partial f}{\partial x^a} x^a$, hvor a er med i $\mathbb{N}^n$.

   Førsteleddet er verdien i origo, som er null. At neste ledd er $a + b$ er ekvivalent med at $\left.\frac{\partial f}{\partial a^i}\right|_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial b^i}\right|_0 = 1$.

Vi kan regne ut $\frac{\partial f}{\partial a^i}(0)$ fra definisjonen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a^i}(0) &\triangleq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(x(x^{-1}(he^i)x^{-1}(0)) - x(x^{-1}(0)x^{-1}(0))\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(he^i - 0) = e^i\end{aligned}$$

siden $x(x^{-1}(0)x^{-1}(0)) = x(ee) = x(e) = 0$.

Grad 2-leddene kan skrives på formen

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial a^i \partial a^j}(0)a^i a^j + \sum \frac{\partial^2 f}{\partial a^i \partial b^j}(0)a^i b^j + \sum \frac{\partial^2 f}{\partial a^i \partial a^j}(0)b^i b^j.$$

For at dette skal være bilineært i $\vec{a}$ og $\vec{b}$, må første og siste-leddet være null. Så vi må vise at

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial a^i \partial a^j}\right|_0 = 0.$$

HER ER JEG LITT STØKK.

3.

♡

9 Oppgaver gitt i kurset

9.1 Exercise3.pdf

Exercise 2. Betrakt den todimensjonale torusen T^2 som undermengden av $\mathbb{C}^2$ slik at at $|z^1| = |z^2| = 1$. For $\alpha \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{R}$, definer $f_\alpha : \mathbb{R} \to T^2$ ved

$$t \mapsto \left(e^{it}, e^{it\alpha}\right).$$

Vis at f_α er en injektiv immersjon med tett bilde. ♠

Solution 2. Først, sett $f = f_\alpha$. Vi viser at f er injektiv. Anta $e^{it} = e^{is}$. Da er $t = s + 2\pi k$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Men for den andre komponenten får vi at $t\alpha = s\alpha + 2\pi l$. Men dette impliserer etter litt regning at $\alpha = l/k \in \mathbb{Q}$, mot formodning. Så f er injektiv.

f er en immersjon om differensialen alltid er ikke-null. Men dette er klart. Den deriverte er gitt ved $(ie^{it}, i\alpha e^{it\alpha})$, og ingen av komponentene er noensinne null. Så f er en immersjon.

Å vise at f har tett bilde er litt mer pirkete, men egentlig ganske lett. Vi kan tenke oss T^2 som en firkant med identifiserte sider. La $p \in \square$. Vi skal vise at hver liten firkant rundt p inneholder et punkt fra bildet til f. Så la t ha samme x-koordinat som p. Da er enten $f(t)$ inneholdt i den lille firkanten eller ikke. Prøv så med $t + 2\pi$. Dette gir oss et nytt punkt $f(p)$ med nye y-koordinater. Men siden α er irrasjonal, vil vi til slutt treffe firkanten. $\heartsuit$

Exercise 3. Vis at mengden $\{(t, |t|) \mid t \in \mathbb{R}\}$ er bildet av en glatt avbildning $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. $\spadesuit$

Solution 3. La

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -e^{-x^{-2}} & x > 0 \end{cases}.$$

Da defineres f ved $t \mapsto (g(t), |g(t)|)$. Denne er glatt siden $g(x)$ er glatt og alle deriverte til $g(x)$ er på formen $p(x)e^{-x^{-2}}$ hvor $p(x)$ er et polynom med $p(x) \to 0$ når $x \to 0$. $\heartsuit$

Exercise 4. Vis at de to definisjonene av embedded undermangfoldighet er ekvivalente.

1. En undermangfoldighet er en injektiv immersjon $f : N \to M$ slik at $N \to f(N)$ er en homeomorfi.
2. En undermangfoldighet er en delmengnde $N \subset M$ som i passende koordinater er definert ved $a^1 = a^2 = \ldots = a^k = 0$.

$\spadesuit$

Solution 4. Dette burde følge fra Theorem 10.2 i Kapittel 2 i Spivak. Det sier at en immersjon lokalt ser ut som

$$(a^1, \ldots, a^n) \mapsto (a^1, \ldots, a^n, 0, \ldots, 0).$$

Dermed er $f(N)$ lokalt definert som $a^{n+1} = \ldots = a^m = 0$. Siden $N \to f(N)$ også er en homeomorfi, kan vi like gjerne si at N er slik definert.

Andre veien. Anta gitt en delmengde N som er definert slik. La $i : N \to M$ være inklusjonsavbildningen. Det er klart at dette gir en immersjon og er injektivt per definisjon. $\heartsuit$

9.2 exercise6.pdf

Exercise 5. La M være en mangfoldighet og la $p \in M$. La I_p være mengden funksjoner $f \in C^\infty(M)$ slik at $f(p) = 0$. Dette er et ideal i $C^\infty(M)$.

Vis at avbildningen $f \mapsto d_p f \in (T_pM)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM, \mathbb{R})$ definerer en lineær isomorfi

$$I_p/I_p^2 \simeq (T_pM)^*.$$

Dermed kunne vi like gjerne definert tangentrommet som dualen til I_p/I_p^2.

♠

Solution 5. Det er lett å se at vi har en lineær avbildning $I_p \to (T_pM)^*$. Det første vi må gjøre er å se at vi faktisk har en avbildning fra kvotienten I_p/I_p^2 til $(T_pM)^*$.

Anta $f, g \in I_p$ slik at $fg \in I_p^2$. Da er

$$d_p(fg) = f(p)d_p(g) + g(p)d_p(f) = 0 + 0 = 0.$$

Så vi har en veldefinert indusert avbildning.

Merk at om f og $\bar{f}$ er like i et område rundt p, så er $d_pf = d_p\bar{f}$. Dermed kan vi anta at vi jobber i en kartomegn om p, så vi kan anta $M = \mathbb{R}^n$. Vi kan også anta $p = 0$. Da kan vi skrive

$$f(\vec{x}) = \sum_i x^i g_i(\vec{x})$$

med $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$.

Da er

$$d_pf = \sum_i \left(x^i(p)d_pg_i + g_i(0)d_px^i\right) = \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_0 d_px^i.$$

Det er lett å se at d_px^i er lineært uavhengige vektorer i $(T_pM)^*$. Dermed vil $d_pf = 0$ implisere at $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_0 = 0$ for alle i.

Dette betyr igjen at f kan skrives på formen

$$f = \sum_{ij} g_{ij}x^{i+j}$$

med $g_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$. Men siden $g_{ij}x^i \cdot x^j \in I_p^2$, følger det at $f \in I_p^2$. Dermed er dette faktisk kjernen til avbildningen. Det gjenstår å vise at den er surjektiv.

Enhver $\omega \in (T_pM)^*$ kan skrives som $\sum_i a^i(p)d_px^i$. Så det er nok å la $f = \sum_i a^i(p)x^i$. ♡

Exercise 6. I notasjonen fra forrige oppgave, vis at en funksjon $f \in C^\infty(M)$ ligger i I_p^{n+1} hvis og bare hvis for hvert koordinatkart (x, U) som inneholder p, så har vi at $\partial^k f/\partial x^{i_1}\partial x^{i_2} \cdots \partial x^{i_k}$ up to order n vanish at p. ♠

Solution 6. Dette følger fra Lemma 2, siden 78 i Spivak.

Anta påstanden for $n-1$ og under. Den stemmer for $n = 0, 1$.

Anta $f \in I_p^{n+1}$. Da er f en sum av produkter av $n+1$ funksjoner f_i slik at $f_i(p) = 0$. Det er nok å betrakte hvert ledd. Så anta $f = f_1 \cdots f_{n+1}$. Da er $f = (f_1 \dots f_n) f_{n+1}$. Da er

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n f}{\partial^n x_1}(p) &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial^{n-1} x_1}\left(f_{n+1}\frac{\partial(f_1 \cdots f_n)}{\partial x_1} + (f_1 \cdots f_n)\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}\right)(p) \\ &= \frac{\partial^{n-2}}{\partial^{n-2} x_1}\left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial x_1} + f_{n+1}\frac{\partial^2(f_1 \cdots f_n)}{\partial^2 x_1}\right)(p)\end{aligned}$$

osv....

(altså, dette er bare notasjon. Tror vi dropper dette.)

♡

Exercise 7. Vis at en k-vektorbunt $\pi : E \to M$ er triviell hvis og bare hvis det finnes k seksjoner $s_1, \dots, s_k$ slik at $\{s_i(p)\}$ danner en basis for $E_p = \pi^{-1}(p)$ for hver p. ♠

Solution 7. Vi skal definere en vektorbuntisomorfi $E \to M \times \mathbb{R}^k \to E$.

Hvert punkt i E kan skrives unikt som $\sum a^i(p)s_i(p)$ for $p \in M$ og a^i kontinuerlige funksjoner $M \to \mathbb{R}$. Dermed kan vi la avbildningen være

$$\sum a^i(p)s_i(p) \mapsto (p, a^1(p), \dots, a^n(p)).$$

Det er klart at $p \mapsto a^i(p)$ er glatt. (??) ♡

Exercise 8. Husk at $\mathbb{P}^n$ kan defineres som kvotienten av S^n med ekvivalensrelasjonen $p \sim -p$. Vis at $T\mathbb{P}^n$ kan identifiseres med TS^n delt ut på $(p, v) \sim (-p, -v)$. ♠

Solution 8. Siden S^n er en 2:1-overdekning av $\mathbb{P}^n$ og en lokal diffeomorfi, vil den induserte avbildnigen $\pi_* : TS^n \to T\mathbb{P}^n$ også være en 2:1-overdekning. Spørsmålet er bare hva fibrene er.

Start med en tangentvektor $w_{[p]} \in T_{[p]}\mathbb{P}^n$. Denne vil ha to fibre, over $\pm p$.

Så la $v_p \in TS^n$. Spørsmålet er hvordan den andre w_{-p} må se ut for at denne skal være den andre fiberen. For at bildet skal være likt, må $\mathbb{Z}/2$-virkningen på TS^n ta v_p til w_{-p}. Den induserte virkningen på v_p er $-v_{-p}$ som kan sees ved å kreve at antipodalavbildningen og vektorfeltet skal være kompatible.

Dermed følger det $TS^n/v_p \sim -v_{-p}$ er i bijeksjon med $T\mathbb{P}^n$. ♡

Exercise 9. 1. Vis at om $f : M \to N$ er en glatt avbildning med konstant rang k, så har $f_* : TM \to TN$ konstant rang $2k$. Spesielt, om f er en immersjon, så er også f_* det.

2. Vis at TS^n er definert ved $p \cdot p = 1$ og $p \cdot q = 0$ i $\mathbb{R}^{2n+2}$.

♠

Solution 9. For 1., ser vi at vi kan anta at $M = \mathbb{R}^n$ og $N = \mathbb{R}^m$ siden dette er lokale spørsmål. Om $n \leq m$ ser dessuten f lokalt ut som $(a^1, \ldots, a^n) \mapsto (a^1, \ldots a^k, 0, 0, \ldots, 0)$.

Det er lett å regne ut at den induserte avbildningen på $TM \to TN$ ser ut som

$$(a^1, \ldots, a^n, b^1, \ldots, b^n) \mapsto (a^1, \ldots, a^k, 0, \ldots, 0, b^1, \ldots, b^k, 0, \ldots 0).$$

Den er altså identiteten på de første k koordinatene, null på de $n - k$ neste, identitet på de k neste og null sist. Det er klart at dette gir en avbildning med rang $2k$. 2. har vi allerede brukt i forrige oppgave, og ♡

9.3 exercise8.pdf

Exercise 10. Regn ut flow av vektorfeltet

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

på $\mathbb{R}^2$. ♠

Solution 10. Vi leter etter en avbildning $\varphi_t(p) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ slik at kurven $t \mapsto \varphi_t(p)$ for en fiksert p, kall denne, $c(t)$ (med $c(0) = p$), tilfredsstiller $X_{c(t)} = c'(t)$.

La $p = (a, b)$. Og la $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$. Da er $c'(t) = c_1'(t)\frac{\partial}{\partial x} + c_2'(t)\frac{\partial}{\partial y}$.

Betingelsen sier at $c^2(t) = c_1'(t)$ og $c_2'(t) = 1$. Så $c_2(t) = t + C$ for en konstant C og $c_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + Ct + D$ for en konstant D. Vi må ha $C = b$ og $D = a$, slik at flowen er definert ved

$$(a, b, t) \mapsto (\frac{1}{2}t^2 + bt + a, t + b).$$

♡

Exercise 11. La $f \in C^\infty(M)$ og la X, Y være vektorfelter med ϕ_t og ψ_t de tilhørende flowene. Vis at

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left(f(\psi_s(\phi_t(p))) - f(\phi_t(\psi_s(p)))\right) = L_{[X,Y]}(f)(p) = (XY - YX)(f)(p).$$

♠

Solution 11. Vi gjør kun første ledd.

Sett $g = f \circ \psi_s$. Per definisjon er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left(f(\psi_s(\phi_t(p))) - f(\phi_t(\psi_s(p)))\right) &= \frac{\partial}{\partial s} \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \left[f(\psi_s(\phi_h(p))) - f(\psi_s(p)) \right] \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} X(f \circ \psi_s) \\
&= X(\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \psi_s)) \\
&= X(\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(\psi_h(p)) - f(p)) \\
&= XY(f)(p).
\end{aligned}$$

Samme metode på andre ledd gir resultatet. ♡

Oppgave 1. La N være en lukket undermangfoldighet av M og anta X er et glatt vektorfelt som er tangensielt til N, nemlig at for $p \in N$ så er $X_p \in T_pN$. Vis at enhver integralkurve av X som snitter N ligger inneholdt i N. ■

Løsning 1. La $c : \mathbb{R} \to M$ være en integralkurve som snitter N, si i punktet p. Siden $X\big|_N$ er et vektorfelt på N, finnes det en **unik** integralkurve $d(t)$ gjennom p med $X\big|_{N_p} = d'(t)$. Men $c(t)$ er en slik kurve, så vi må ha $c = d$.

Dermed må c ligge totalt inneholdt i N. ♡

Oppgave 2. La $f : M \to N$ være en glatt avbildning og la X være et fektorfelt på M og Y et vektorfelt på N. Vi sier at X og Y er **f-relatert** om $f_{*p}(X_p) = Y_{f(p)}$ for hver $p \in M$.

Vis at dette skjer hvis og bare hvis $f \circ \phi_t = \psi_t \circ f$ for alle t, hvor ϕ_t er flow til X og ψ_t til Y. ■

Exercise 12. Vis at om M er en sammenhengende mangfoldighet, så finnes det for hvert par av punkter $p, q \in M$ en diffeomorfi ϕ med $phi(p) = q$. ♠

Solution 12. Anta først at p og q befinner seg i samme kart. La $\vec{v} = q - p$, og la X være det konstante vektorfeltet $X_p = v_p$. Da vil en integralkurve for X som starter i p tilfredsstille $c(1) = q$. Dermed vil flow-avbildningen være en diffeomorfi som sender p til q.

Ved å gange med en passende bump-funksjon, kan vi sørge for at X har support bare rundt en pølse rundt bildet av c.

Anta nå at p og q befinner seg i forskjellige kart. Da kan vi finne en endelig kjede av kart U_i med $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Vi får en liten haug med flow-avbildninger tilhørende kompakt støttede vektorfelt. Sammensetningen er svaret vi ønsker. ♡

9.4 exercise11.pdf

Oppgave 3. Vis at for vektorrom U, V, W så er den lineære avbildningen

$$\begin{aligned} \phi : \operatorname{Hom}(U \otimes V, W) &\to \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) \\ \psi &\mapsto [u \mapsto (v \mapsto \psi(u, v))] \end{aligned}$$

en isomorfi. ■

Løsning 2. Vi definerer en invers γ:

$$\begin{aligned} \gamma : \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) &\to \operatorname{Hom}(U \otimes V, W) \\ \varphi &\mapsto [u \otimes v \mapsto \varphi(u)(v)]. \end{aligned}$$

Da er

$$\begin{aligned} \gamma \circ \phi(\psi) &= \gamma([u \mapsto (v \mapsto \psi(u, v))]) \\ &= u \otimes v \mapsto \psi(u)(v) \end{aligned}$$

Samme formalisme andre veien gjør at $\phi \circ \gamma = \mathrm{id}$. Så disse vektorrommene er isomorfe. Det er også klart at begge avbildningene er lineære. ♡

Oppgave 4. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom.

1. Vis at den lineære avbildningen

   $$\psi : V^* \otimes V \to \operatorname{End}(V)$$

   definert ved $\psi(\gamma \otimes v)(w) = \gamma(w)v$ er en isomorfi.

2. Vis at det finnes en unik lineær avbildning $V^* \otimes V \to \mathbb{R}$ slik at $f \otimes v \mapsto f(v)$. Vis at for enhver lineær operator, så er bildet av $\psi^{-1}(A)$ under denne avbildningen lik $\operatorname{tr} A$.

■

Løsning 3. 1. Velg en basis $\{e_i\}$ for V og la $\{e_i^*\}$ være den duale basisen. På basistensorer ser avbildningen ut som $\psi(e_i^* \otimes e_j)(v) = e_i^*(v)e_j = a_i e_j$, om $v = \sum a_i e_i$.

Så en matrise (a_{ij}) blir truffet av $\sum a_{ij} e_i^* \otimes e_j$. Litt ettertanke sier da at resultatet er åpenbart.

(alternativt: vis at avbildningen er injektiv, og konkluder siden rommene har samme dimensjon)

2. At avbildningen finnes og er unik er bare universalegenskapen til tensorproduktet siden den er bilineær. En lineær avbildning er representert ved $\sum a_{ij}e_i^*e_j$. Da er bildet under avbildningen gitt ved

$$\sum a_{ij}e_i^*e_j \mapsto \sum a_{ij}e_i^*e_j = \sum_{i=j} a_{ij} = \sum_i a_{ii}.$$

Men dette er bare traseavbildningen. ♡

Oppgave 5 (7)**.** En endimensjonal vektorbunt kalles en *linjebunt.* Vis at for hver linjebunt ξ, så er $\xi^* \otimes \xi$ triviell. ■

Løsning 4. Punkter i $\xi^* \otimes \xi$ ser ut som $\lambda_p \otimes v_p$ (ingen valg gjort). Vi kan definere en avbildning $\xi^* \otimes \xi \to M \otimes \mathbb{R}$ ved $(\lambda_p \otimes v_p) \mapsto (p, \lambda_p(v_p))$. Denne er klart en isomorfi. ♡