Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

10. september 2014

Oppgave 1. La $\{p_1, \cdots, p_n\}$ være hjørnene til en regulær n-kant med senter i origo. Vis at definisjonen av *tyngdepunktet* som

$$T := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$$

"stemmer". Det vil, si, vis at $T = \vec{0}$, origo. ■

Løsning 1. Tenk på $E^2 = \mathbb{R}^2$ som det komplekse planet, $\mathbb{C}$. Da kan vi identifisere en hjørnene til en regulær n-kant med enhetsrøttene

$$p_i = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$$

for $k = 1, 2, \ldots, n$.

La $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ være p_1. Da ser vi at $p_k = z^k$. Dermed er

$$T = \frac{1}{n}\left(z + z^2 + \cdots + z^n\right) = \frac{z}{n}(1 + \cdots + z^{n-1}) = \frac{z}{n}\frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

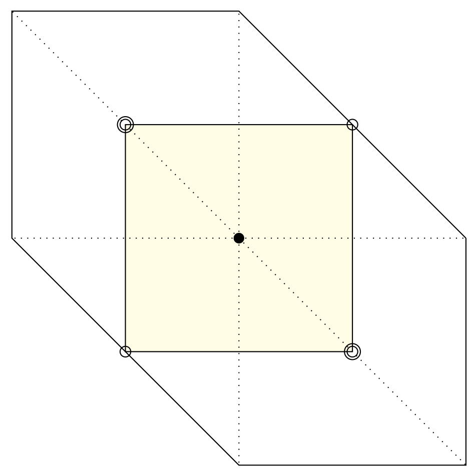
Men $z^n = e^{2\pi i} = 1$, så $T = 0$, akkurat som vi ønsket. ♡

Oppgave 2. La $M = \{m\vec{x} + n\vec{y} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \vec{x}\mathbb{Z} \oplus \vec{y}\mathbb{Z}$ være gitteret utspent av vektorene $\vec{x}$ og $\vec{y}$. La D være det tilhørende Dirichlet-området. Tegn D og beskriv symmetrigruppa til D.

a) Når $\vec{x} = (1, 0)$ og $\vec{y} = (0, 1)$.

■

Løsning 2. a) Vi starter med å tegne standardparallellogrammet. Dette består av seks trekanter, og vi skal finne omsentrene til disse trekantene[1]. I dette tilfellet sammenfaller flere av omsentrene, og vi får et kvadrat. Se



Figur 1: Dirichlet-området i a).

Figur 1, hvor Dirichlet-området er merket i gult. Dermed blir symmetrigruppen D_4, firkantgruppen.

b) I dette tilfellet er $\vec{x} = (1, 0)$ og $\vec{y} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$. Trekanten OAB er da en likesidet trekant, så Dirichlet-området blir en regulær sekskant. Symmetrigruppen blir da D_6.

c) Nå er $\vec{x} = (1, 0)$ og $\vec{y} = \frac{1}{2}(1, 2)$. Se Figur 2 for Dirichlet-området. Vi får en sekskant, men den er ikke regulær, så vi har ingen rotasjonssymmetri. Men vi ser at vi kan speile i x-aksen og i y-aksen. Sammensetningen av disse to speilingene blir en rotasjon på 180°. Så til sammen har vi fire symmetrier, og vi kan kalle gruppa for $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

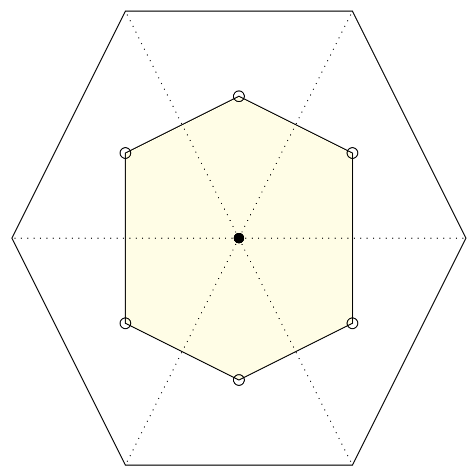
♡

Oppgave 3. Vis at en diskret undergruppe av $SO(2)$ er endelig. ■

Løsning 3. Husk at $SO(2)$ er gruppen av ortogonale operatorer på $\mathbb{R}^2$. Konkret er dette mengden av ortogonale 2×2-matriser. Disse kan alle dekomponeres som $M = SM_\theta$, der S er matrisen til speiling om x-aksen og M_θ er en rotasjon på θ grader om origo.

Husk at en undergruppe G av $SO(2)$ er *diskret* hvis det finnes en $\epsilon > 0$ slik at for hver rotasjon M_θ i G, så er $|\theta| \geq \epsilon$ (om $\theta \neq 0$). På mer forståelig norsk betyr dette at alle rotasjonene i G roterer mer enn ϵ grader.

[1] Husk at et *omsenteret* til en trekant er skjæringspunktet til midtnormalene.



Figur 2: Dirichlet-området i c).

Nå påstår jeg at dette impliserer at om M_θ, M_φ er to rotasjoner i G, så er $|\theta - \varphi| \geq \epsilon$. Siden G er en gruppe, er også $M_\varphi^{-1} \in G$, og følgelig også $M_\theta M_\varphi^{-1} = M_\theta M_{-\varphi} = M_{\theta-\varphi}$. Men siden G er diskret, følger det at $|\theta-\varphi| \geq \epsilon$.

Dermed har alle rotasjonene i G en avstand på større enn ϵ, noe som betyr at vi maksimalt kan ha $\frac{2\pi}{\epsilon}$ rotasjoner i G. Så en diskret undergruppe av $SO(2)$ kan bare inneholde endelig mange rotasjoner, og siden $SM_\theta = M_{-\theta}S$, følger det at maksimal størrelse på G er $\frac{4\pi}{\epsilon}$ (ved å putte inn maksimalt antall speilinger). ♡

Oppgave 4. Hvis $G \subset Isom_2$ er en diskret undergruppe og rangen til L_G er 2, vis at D_G, Dirichlet-området, er et fundamentalområde for L_G. ■

Løsning 4. For å vise at D_G er et fundamentalområde må vi vise to ting: Det ene er at $E^2 = \mathbb{R}^2$ er dekket av translasjoner/rotasjoner av D_G: $E^2 = \cup_{g \in G} g(D_G)$. Det andre er at når $g \neq h$, så er det indre av $g(D) \cap h(D)$ tom.

Først: Kall vektorene i gitteret for $\vec{x}$ og $\vec{y}$. La $\vec{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Siden $\vec{x}, \vec{y}$ utgjør en basis, kan vi skrive $\vec{a} = r_1\vec{x} + r_2\vec{y}$ for noen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Nå, skriv r_1 og r_2 som en sum av heltall pluss et tall i intervallet $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (dette kan vi alltid gjøre, og til og med unikt), altså som $r_1 = n_1 + s_1, r_2 = n_2 + s_2$, der n_1, n_2 er heltall, og s_1, s_2 er i intervallet over. Da er $\vec{x} = t_{n_1\vec{x}} t_{n_2\vec{y}}(s_1\vec{x} + s_2\vec{y})$.

Nå påstår jeg at $s_1\vec{x} + s_2\vec{y}$ ligger innenfor Dirichlet-området til G. ♡