Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

18. september 2014

Oppgave 1. Beskriv et polyeder med 5 hjørner og 6 sider der alle sidene er trekanter. Beskriv to polyedre med 6 hjørner og 8 sider der alle sidene er trekanter. ■

Løsning 1. Vi vet fra Eulers formel at det alltid gjelder at

$$v - e + f = 2$$

for konvekse polyedre. Her er v antall hjørner, e er antall kanter, og f er antall flater. Dermed finner vi at den første figuren må ha 9 kanter. Dette gir oss en ide om hva det kan være, og etter litt tenking skjønner vi at et svar er den rette dobbelpyramiden på en trekant. Se Figur 1.

På samme måte ser vi at et polyeder med 6 hjørner og 8 sider må ha 12 kanter. Ett slikt polyeder er oktaeder, som vi har tegnet i Figur 2.

Vi har derimot to muligheter. Den andre muligheten er ikke regulær, da det her finnes to hjørner som møter 5 kanter (i oktaederet møter alle hjørner 4 kanter). Se Figur 3.

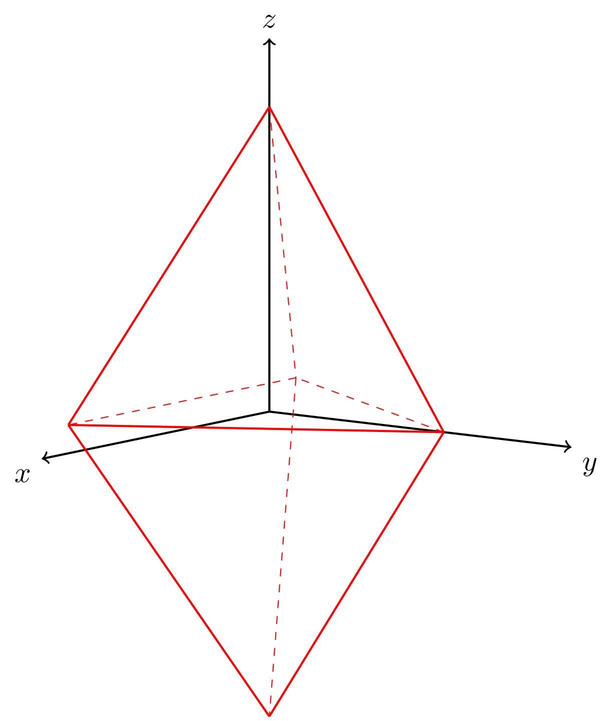
♡

Oppgave 2. Tegn Schlegel-diagrammer for de 5 platonske legemene. ■

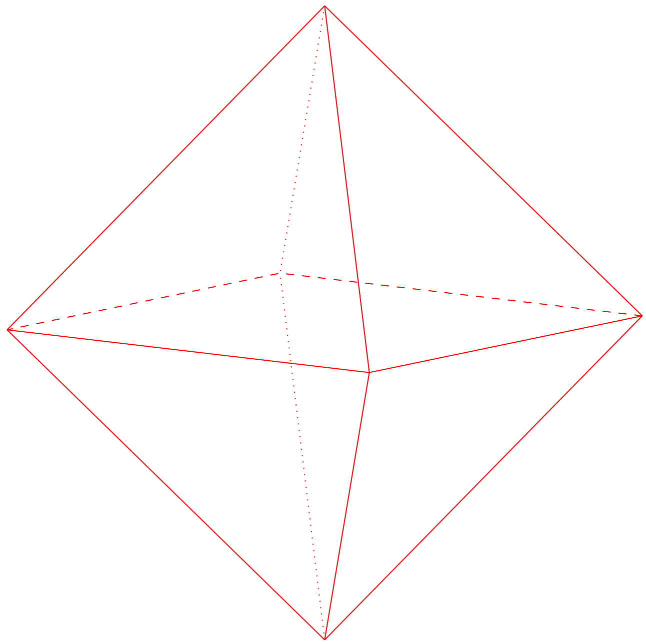
Løsning 2. Å gjøre dette nøyaktig er en så tidkrevende jobb at selv datamaskiner puster tungt. Det som er interessant i Schlegel-diagrammet er den kombinatoriske strukturen til polytopene, og dette kan vi lett tegne inn.

Se Figurene 4,5,6. Teknikken for de to siste er slik: legg merke til at i alle hjørnene møtes et fast antall mangekanter. Dette bestemmer hele strukturen, og du kan arbeide deg innover. (prøv selv!)

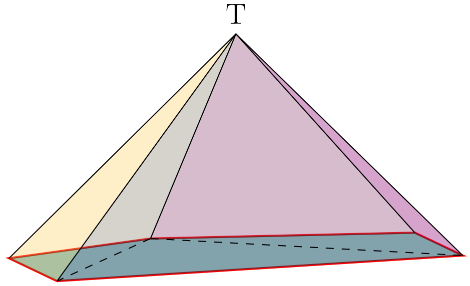
♡



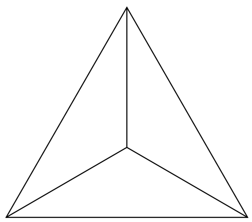
Figur 1: Den rette bipyramiden på en regulær trekant.



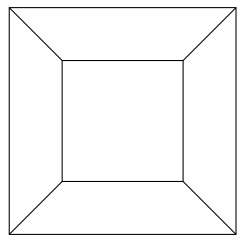
Figur 2: Et oktaeder.



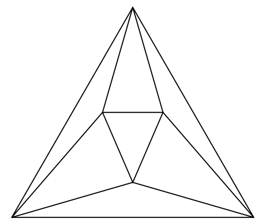
Figur 3: Pyramide på et “skjevt” pentagon.



(a) Tetraeder.

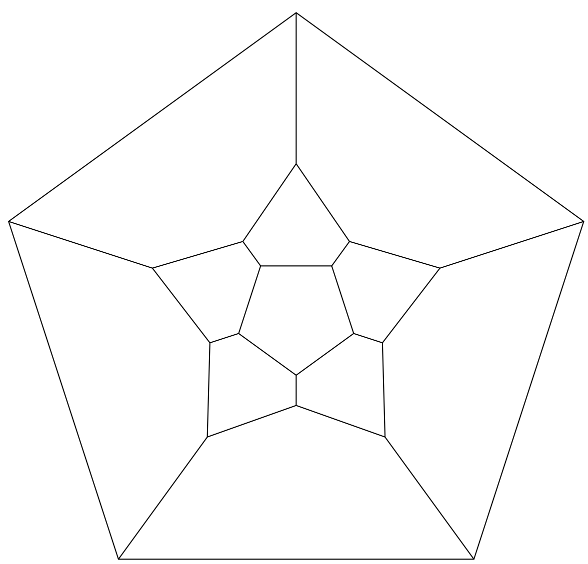


(b) Kube.

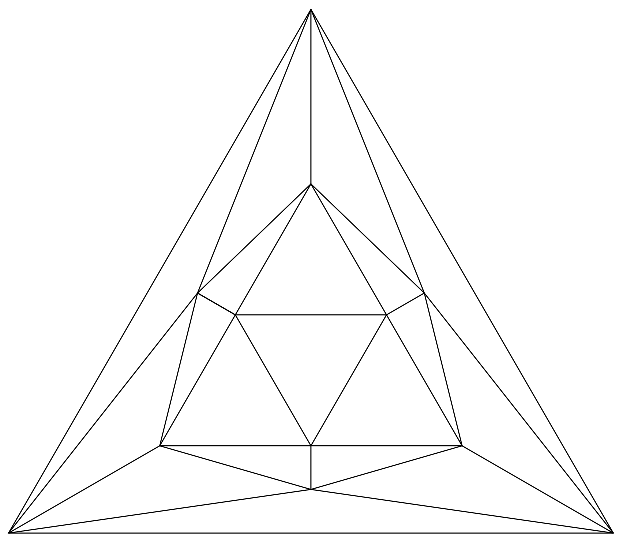


(c) Oktaeder.

Figur 4: Schlegel-diagrammer for de tre første platonske legemene.



Figur 5: Dodekaeder.



Figur 6: Ikosaeder.

Oppgave 3. La $\{p, q\}$ være Schläfli-symbolet til et regulært polyeder P. Vis at hvis e er antall kanter, så er

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

■

Løsning 3. For det første: hver flate ligger på p kanter, og det er f flater. Men hver kant ligger på to flater, så $pf = 2e$. For det andre: hvert hjørne møter q kanter, men hver kant har to hjørner, så $qv = 2e$. I tillegg har vi Eulers formel som sier at $v - e + f = 2$. Vi ønsker å eliminere v og f, og få et uttrykk med bare e, p, q.

Vi har at $v = \frac{2e}{q}$ og at $f = \frac{2e}{p}$, så

$$\frac{2e}{q} - e + \frac{2e}{p} = 2.$$

Gang uttrykket med qp og få

$$2ep - epq + 2eq = 2qp.$$

Del på $2epq$:

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{e}.$$

Som var det vi ønsket. ♡