Notater til tredjesemestersrapportering

Fredrik Meyer

4. november 2014

1 Begreper

Gitt et simplisialkompleks $\mathcal{K}$ kan vi lage et ideal i polynomringen med like mange variabler som $\mathcal{K}$ har hjørner. Idealet $I_{\mathcal{K}}$ er da definert til å være generert av monomer med eksponenter som svarer til *ikke-fasetter* i $\mathcal{K}$.

La eksempelvis $\mathcal{K}$ være en firkant med hjørner x_1, x_2, x_3, x_4. Da er $_{\mathcal{K}}$ generert av x_1x_3 og x_2x_4.

Et monomideal er alltid gradert, så vi kan lage $\mathbb{P}(\mathcal{K}) := \mathrm{Proj}(P/I_{\mathcal{K}})$, som er et projektivt skjema utstyrt med en ampel linjebunt $\mathscr{O}(1)$. Det kan vises at $H^i(\mathbb{P}(\mathcal{K}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{K})}) \simeq H^i(\mathcal{K}, k)$, hvor venstresiden er knippekohomologi og høyresiden er simplisialkohomologi.

Dermed vil enhver deformasjon av $\mathcal{K}$ ha samme kohomologi som den topologiske realisasjonen til $\mathcal{K}$. Hvis for eksempel $\mathcal{K}$ er en sfære, og $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ er glattbar, så vil glattingen være Calabi-Yau, etc.

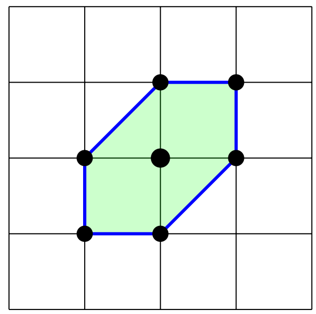
Deformasjonsteorien til Stanley-Reisner-skjemaer er godt beskrevet. Se for eksempel [1].

2 Hva jeg jobber med i dag

La D være en sekskant. La $\mathcal{K}$ være simplisialkomplekset $D * D$, altså simplisialkomplekset som har maksimale fasetter (f_1, f_2) hvor f_1, f_2 er kanter i sekskanten. Da er $\mathcal{K}$ en tredimensjonal sfære med f-vektor $(1, 12, 48, 72, 36)$.

Dette gir oss et Stanley-Reisner-ideal $I_{\mathcal{K}}$ med 18 generatorer. Vi har $I_K = I_{D_1} + I_{D_2} \subseteq k[x_1, \cdots, x_{12}]$.

La $\mathcal{K}'$ betegne $\mathcal{K} * \{v\}$, suspensjonen av $\mathcal{K}$. Dette er et nytt simplisialkompleks med et ekstra hjørne, og svarer til kjegla over en 3-sfære. Man kan forestille seg dette som en 4-dimensjonal ball med v som eneste indre punkt, og $\mathcal{K}$ som randa $\approx S^3$.



Figur 1: Et heksagon.

La dP være polytopet avbildet i Figur 1 og la $P = dP \times dP$ være produktet. Da får vi et polytop med 36 hjørner og f-vektor som er omvendt av f-vektoren til $\mathcal{K}$. Det følger da at P°, det polare polytopet, har samme f-vektor som $\mathcal{K}$, og faktisk viser det seg at $\mathcal{K}$ er abstrakt isomorf med en triangulering av randa til P°.

Det følger da fra standard teoremer at det finnes en flat deformasjon av $\mathbb{P}(\mathcal{K}')$ til den toriske varieteten X_{P° (som beskrevet i [2]. Siden $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ er et komplett snitt (hyperflate!) i $\mathbb{P}(\mathcal{K}')$, følger det at vi får en flat deformasjon av $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ til en hyperflate i den toriske varieteten X_{P°.

Denne hyperflaten er dermed en 3-dimensjonal projektiv varietet Y med trivielt kanonisk knippe, og med en mild definisjon av Calabi-Yau er dette en Calabi-Yau-varietet. Vi kan så gjøre en såkalt "MPCP-resolusjon" (*"maximal projective crepant partial resolution"*) av X_{P°, og få en glatt Calabi-Yau $\widetilde{Y}$ hvis Hodge-tall kan beregnes på en datamaskin (oppskriften er å telle gitterpunkter i fasetter til P°).

Proposition 2.1. *Stanley-Reisner-skjemaet $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ deformerer til en singulær Calabi-Yau Y som har en krepant resolusjon $\widetilde{Y}$ hvis Hodge-tall er $h^{11} = 44$ og $h^{12} = 8$. Dermed er Euler-karakteristikken $\chi = 72$.*

Det er også mulig å beskrive singularitetene til Y.

Proposition 2.2. *Y har 48 isolerte singulariteter, hvorav 36 er 3-dimensjonale noder (lokalt $xy - zw = 0$), og 12 er kjegler over sekskanter.*

Dette gir oss med en gang hva $H^0(Y, \mathcal{T}^1_{Y/k})$ er. Nodene har $T^1 = 1$, mens kjeglene over sekskantene har $T^1 = 3$. Dermed har vi at $\dim_k H^0(Y, \mathcal{T}^1_{Y/k})$ er 72. Dette er derimot ikke hele modulen av infinetesimale deformasjoner siden vi også kan ha bidrag fra $H^1(Y, \Theta_Y)$, men denne er vanskelig å beregne for singulære Y.

Så snart du har en Calabi-Yau-mangfoldighet er det interessant å gjøre speilsymmetri. Problemet er da å finne et "speil" Y° med speilede Hodge-tall. For toriske varieteter finnes det en standard måte å gjøre dette på (Batyrev-konstruksjonen), men det finnes andre, mer hypotetiske konstruksjoner.

Én er såkalte "extremal transitions": start med en glatt Calabi-Yau-varietet, og degenerer denne til en singulær varietet med ikke altfor gærne singulariteter. Gjør så en resolusjon av singulariteter, og få en ny glatt Calabi-Yau-varietet. Det viser at denne konstruksjonen ofte gir opphav til speilede varieteter (altså at Hodge-tallene $h^{ij}(Y) = h^{ji}(Y^\circ)$).

Vi står igjen med flere spørsmål som jeg jobber med å svare på:

1. Finnes faktisk en glatting av Y? Hvis så, hva er Hodge-tallene?

2. Stemmer denne glattingen overens med speilet spådd av Batyrev-konstruksjonen?

3. Speilsymmetri er relatert til kurvetelling på Calabi-Yau-ene, og dette er relatert til å løse noen differensiallikninger definert ved potensrekker. Disse kan løses for å teste speilsymmetriforutsigelsene.

Det gjenstår mye arbeid, og veldig mye tid har blitt brukt på å lære meg ting som torisk geometri, begreper i speilsymmetri, og generelt lære meg algebraisk geometri-resultater.

Referanser

[1] Klaus Altmann and Jan Arthur Christophersen. Deforming Stanley-Reisner schemes. *Math. Ann.*, 348(3):513–537, 2010.

[2] Bernd Sturmfels. *Gröbner bases and convex polytopes*, volume 8 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.