Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

2. oktober 2014

Oppgave 1. Vis at om A, B, C, D er kollineære, så er

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0.$$

■

Løsning 1. Her mener vi altså med $\overline{AB}$ *fortegnslengden* til segmentet AB. For å gi en verdi til $\overline{AB}$ (etc.) må man velge en *retning* langs linja (for hvordan skal en ellers si om $\overline{AB}$ er positiv eller negativ?). Det som holder uansett er nemlig at $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ om A, B, C er kollineære.

Trikset her er dermed å bruke egenskapen over gjentatte ganger, og omskrive hver av lengdene over slik at de involverer A. For eksempel: $\overline{BC}$ kan skrive som $\overline{AC} - \overline{AB}$. $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$ og $\overline{CA} = -\overline{AC}$. Dermed er

$$\begin{aligned}
&\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB}. \\
&= \overline{AD} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) - (\overline{AD} - \overline{AB}) \cdot \overline{AC} + (\overline{AD - AC}) \cdot \overline{AB} \\
&= 0
\end{aligned}$$

På grunn av masse kansellering. ♡

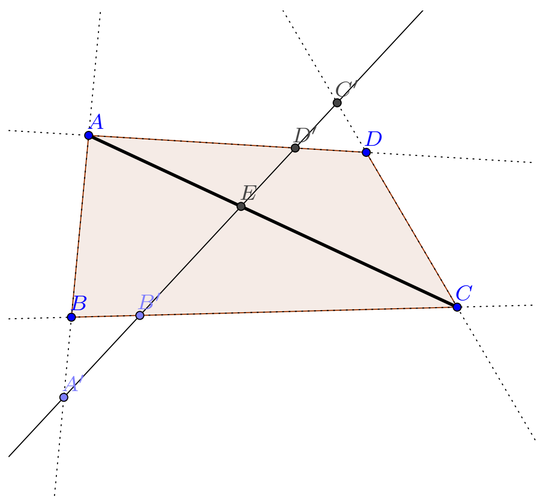
Oppgave 2. Vis følgende generalisering av Menelaos' setning: for en firkant $ABCD$ vil punktene A', B', C', D' på linjene gjennom AB, BC, CD og DA være kollineære bare hvis

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} = 1$$

■

Løsning 2. Se på Figur 1.

Trikset er å merke at enhver firkant er satt sammen av to trekanter. Vi skal bruke Menelaos' setning på trekantene BCA og CDA.



Figur 1: Oppgave 2.

Fra Menelaos' setning har vi følgende likhet:

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} = -1,$$

brukt på den nederste av de to trekantene. Vi har også likheten

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = -1$$

Ganger vi disse to uttrykkene sammen, får vi (etter litt omstokking):

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} \cdot \frac{-\overline{EC}}{-\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = 1$$

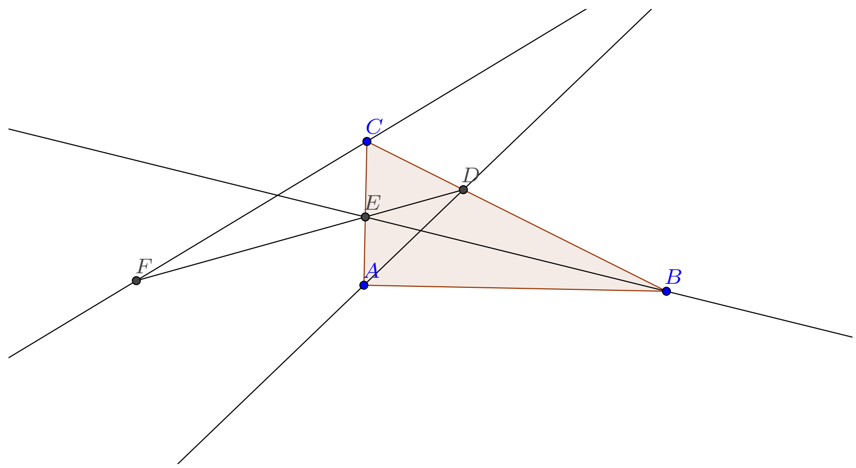
De to siste leddene kansellerer, og vi får uttrykket vi har lyst på. ♡

Oppgave 3. Vis at halveringslinjene til to vinkler i en trekant og halveringslinja til den utvendige vinkelen i det tredje hjørnet skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter. ■

Løsning 3. Strategien er å kombinere Menelaos' setning med setningen om halveringslinjer.

Se på Figur 2. Legg først merke til at punktene D, E, F er Menelaospunktet for henholdsvis sidene BC, CE og AB. Så ved Menelaos' setning holder det å vise at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$$



Figur 2: Oppgave 3.

Nå skal vi bruke setningen om halveringslinjer. Den sier at om en linje er en halveringslinje for en vinkel, så deler den den motsatte siden i et bestemt forhold: nemlig hvis linjen AD er en halveringslinje for vinkelen $\angle BAC$, så deler skjæringspunktet D med BC linjen BC i forholdet $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$. Det samme gjelder om en linje deler den utvendige vinkelen, men da må vi sette et minustegn foran forholdet.

Bruk dette resultatet på alle vinklene i trekanten. Da får vi i tillegg at

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$$

og

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

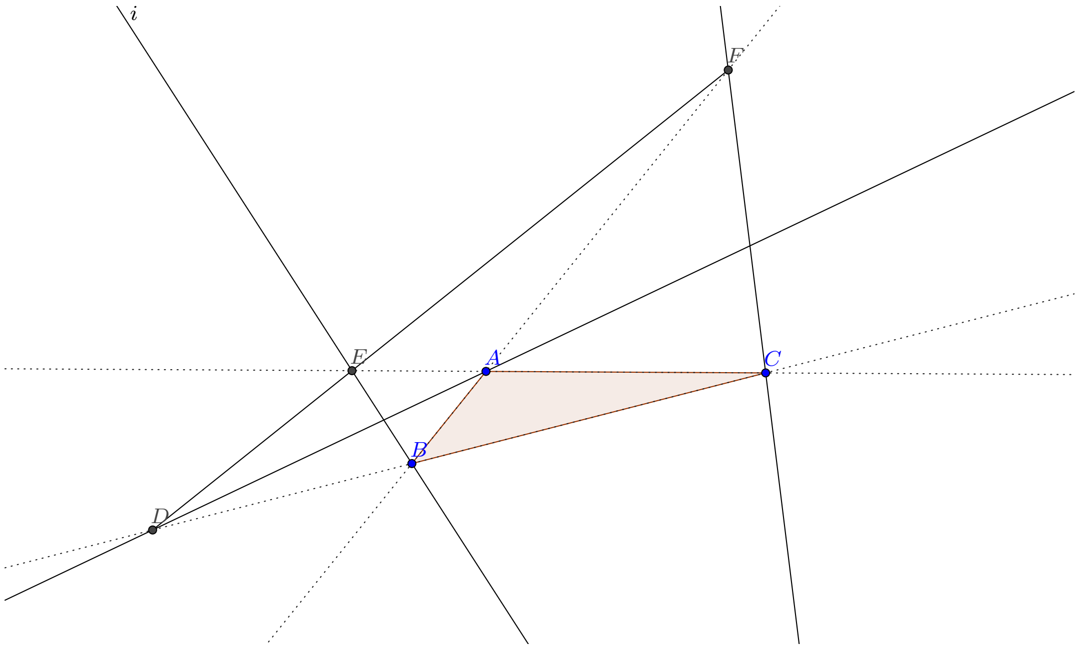
Dermed er:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} \cdot -\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -1.$$

Dermed følger det fra Menelaos setning at D, E, F er kollineære. ♡

Oppgave 4. Vis at halveringslinjene til de utvendige vinklene i en trekant skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter. ■

Løsning 4. Dette er bare nok en anvendelse av Menelaos' setning og setningen om halveringslinjer. Faktisk er løsningen helt lik forrige oppgave, så jeg gidder ikke skrive ned detaljene.



Figur 3: Oppgave 4.

Trikset er at $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$. Se Figur 3, og legg merke til at D, E, F er Menealaos-punkter her også.

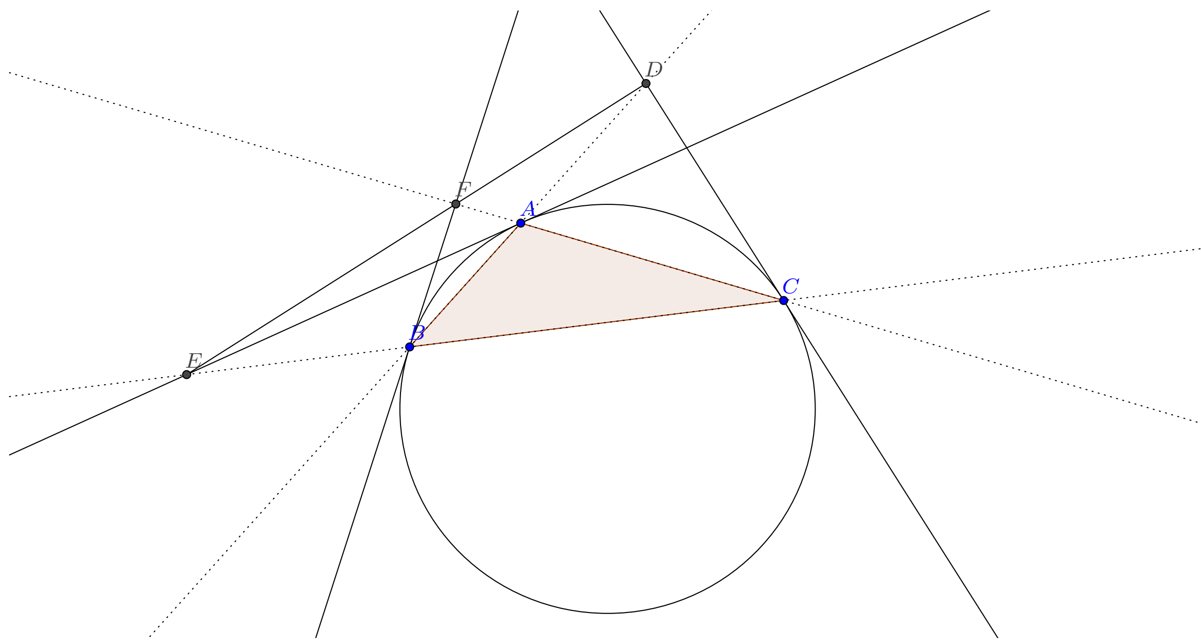
♡

Oppgave 5. Vis at tangentlinjene til den omskrevne sirkelen til en trekant i hjørnene skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter. ■

Løsning 5. Igjen skal vi bruke Menelaos' setning. Vi skal kombinere den med setningen om punktets potens. Faktisk skal vi utvide setningen til også å gjelde når $A = B$ (i notasjonen til setningen i heftet).

Husk at setningen sier følgende: at om P er et punkt utenfor sirkelen og om ℓ er en linje gjennom P som skjærer sirkelen i to punkter A, B, så er produktet $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ uavhengig av linjen ℓ. Lar vi nå linjen ℓ rotere slik at den blir en tangentlinje, vil A gå mot B. Kall skjæringspunktet der (tangent-)linjen møter sirkelen for C. Da får vi at $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Dette kan vi bruke sammen med Menelaos' setning. Se på Figur 4. Fra diskusjonen over får vi nå likhetene $\overline{EB} \cdot \overline{EC} = \overline{EA}^2$, $\overline{FA} \cdot \overline{FC} = \overline{FB}^2$, $\overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DC}^2$.



Figur 4: Oppgave 5.

Vi kan dermed sette inn i Menelaos' setning og få:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{DC}^2}{\overline{DB}^2} \cdot -\frac{\overline{EA}^2}{\overline{EC}^2} \cdot -\frac{\overline{FB}^2}{\overline{FA}^2}.$$

Men uttrykket til høyre er lik -1 fordi $DC = DB$, osv (tenk over hvorfor!).

♡