Matematisk platonisme og den praktiserende matematiker

Fredrik Meyer

28. august 2015

Sammendrag

Vi snakker løst om matematisk platonisme, snakker litt om Kurt Gödel og hans teoremer, og ser på hvordan praktiserende matematikere ser på matematikk.

1 Matematisk platonisme

La oss sette oss i rollen til en matematiker. Vi kan definere en matematiker som en person hvis jobb det er å manipulere matematiske objekter. Allerede nå støter vi på et problem, ettersom det ikke er åpenbart hva begrepet "matematiske objekter" refererer til. Hva slags objekter er det snakk om? Er de fysiske eller abstrakte? Eksisterer de, eller er de bare en mental konstruksjon?

Dette er fundamentale spørsmål for en matematikkfilosof. Grovt sett finnes det to ekstreme standpunkter en kan ta. Vi kan bestemme oss for at matematikk kun er en formell "lek", hvor brikkene er symboler som vi flytter rundt på etter visse regler. Dette er altså *formalisme*, som er standpunktet David Hilbert tok [Hil13]:

> Mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on paper.

Matematikk blir som et parti sjakk, hvor et teorem korresponderer til en oppnåelig posisjon på brettet. De matematiske objektene får først mening når en anvender dem på fysiske problemer. Derfor kan en formalist være tilfreds med påstander uten sannhetsverdier (som kontinuumshypotesen, som vi skal snakke litt om etterhvert).

Den andre ekstreme retningen en kan ta, er å tro på *matematisk platonisme*. En matematisk platonist hevder at matematiske objekter er abstrakte objekter som har en objektiv eksistens uavhengig av det oppdagende mennesket.

Litt satt på spissen kan vi si at en formalist vil hevde at matematikere *finner opp* matematikk, mens en platonist vil hevde at det matematikere gjør er å *oppdage* matematikken.

Øystein Linnebo skriver i artikkelen [Lin13] at matematisk platonisme kan ses på som snittet av de tre påstandene "det eksisterer matematiske objekter", "matematiske objekter er abstrakte", og "matematiske objekter er uavhengige av intelligente agenter og deres språk, tanker og arbeider". På overflaten virker disse påstandene uproblematiske, men ser vi nærmere på dem, får vi en del forklaringsproblemer. Kombinerer vi nummer en og nummer to, hevder vi eksistensen av abstrakte objekter som matematikere jobber med. På hvilken måte kan vi få kunnskap om abstrakte objekter? Om vi dessuten også hevder at disse objektene er uavhengig av matematikeren, hevder vi at det finnes abstrakte matematiske objekter som eksisterer i en "uavhengig, ikke-fysisk verden". Dette vil mange hevde grenser til teologi. Nøyaktig hva er utforskningsmekanismen? Hva betyr det at påstander om abstrakte objekter har en sannhetsverdi?

Hva er så gode argumenter *for* matematisk platonisme? Vi skal kort skissere et av de mest kjente, et argument originalt fra Frege. Se [Lin] for en mer detaljert oppsummering. Argumentet går omtrent som følger: språket matematikere bruker refererer til matematiske objekter og bruker matematiske objekter. I tillegg er mange matematiske teoremer sanne (et argument for akkurat dette kan være å referere til andre naturvitenskaper som avhenger av matematikk, og empirisk konkludere med at siden matematikken leder til sanne resultater, er det plausibelt at matematikken selv er sann). Frege går videre, og konkluderer med at siden en setning ikke kan være sann uten at objektene den referer til faktisk eksisterer, så må matematiske objekter eksistere.

Om argumentet er korrekt, viser det at deler av matematisk platonisme er korrekt, nemlig *eksistens*-delen av definisjonen. Det gjenstår å overbevise om at disse objektene er abstrakte og at de er uavhengige. Vi definerer et objekt til å være *abstrakt* om det er utenfor tid-rommet. Eksempler er ting som bedrifter, lover og andre sosiale konstruksjoner. At matematiske objekter er abstrakte er rimelig ukontroversielt. Det andre kriteriet, uavhengighet, er hakket verre å argumentere for. Ett argument kan gå omtrent slik: matematiske argumenter er uunnværlige i flere fysiske teorier, og siden det er lettere å overbevise seg om uavhengigheten til fysiske objekter, burde det følge at også matematikken, og dermed også matematiske objekter, er uavhengige av de tenkende agentene.

Nå har vi prøvd å argumentere *for* matematisk platonisme. Hva er så de sterkeste argumentene mot? Ett motargument er et såkalt *epistemisk argument*. Jeg skal gjengi argumentet slik det framstilles i [Lin]. Det bygger på tre premisser. For det første, så kan vi anta at matematikere er pålitelige i den forstand at hvis en matematiker kommer med en påstand, så er påstanden (som regel) sann. Det andre premisset sier at hvis man skal rettferdiggjøre tro på matematiske resultater, så må påliteligheten i forrige premiss kunne forklares, ihvertfall i prinsippet. Til slutt påstår man at hvis matematisk platonisme er sann, så kan ikke denne påliteligheten forklares, selv ikke i prinsippet.

Det er klart at ikke alle tre premissene kan være sanne samtidig, så vi er nødt til å konkludere med at matematisk platonisme er galt. De to første premissene er lette å tro på. Den siste påstanden kan argumenteres for ved å si at hvis matematiske objekter eksisterer utenfor tid-rommet (og i tillegg er uavhengige av oss!), hvordan skal en da, uten noen kausal-relasjoner, få kunnskap om disse objektene?

Det finnes også et såkalt *metafysisk motargument* mot platonisme, utviklet av Benacerraf. Igjen gjengir jeg framstillingen i [Lin]. Benacerraf forsvarer et såkalt *strukturalistisk* syn på matematikken. Han sier at tall ikke er objekter i det hele tatt, de hører kun til i en "abstrakt struktur". Benacerraf mener at det ikke kan eksistere objekter som kun har strukturelle egenskaper, det vil si egenskaper som kun viser til sammenhengen mellom andre "objekter" av samme type. Alle objekter må ha noen ikke-strukturelle egenskaper i tillegg (som for eksempel en plassering i tidrommet). Argumentet går altså ut på at siden matematikk kun er en enorm abstrakt struktur, uten noen relasjoner til objekter utenfor denne strukturen, kan ikke matematiske "objekter" kalles objekter.

Også her finnes det argumenter både for og i mot det strukturalistiske synet på matematikken, men det skal vi ikke ta opp her.

Alt i alt ser vi at matematisk platonisme på ingen måte er godtatt eller avvist av matematikkfilosofer.

2 Kontinuumshypotesen og Kurt Gödel

På slutten av 1800-tallet og begynnelsen av 1900-tallet begynte det å bli klart at mengdelære var den beste kandidat-teorien til et grunnlag for all matematikk.

I mengdelære starter man med relativt få aksiomer om *mengder*, som intuitivt skal modellere samlinger av objekter. Den vanligste aksiom-samlingen kalles for *Zermelo-Fraenkel-aksiomene med utvalgsaksiomet*, som regel forkortet ZFC [Wik15]. Vi trenger ikke gå inn på nøyaktig hva disse aksiomene sier her, men nøyer oss med å si at dette er kraftige nok aksiomer til å utlede omtrent all moderne matematikk, og da spesielt *aritmetikk*, eller elementær tallteori.

Hilberts store ønske var å vite at all matematikk kunne hvile på en formell grunn - at alle teoremer kunne utledes fra en liten samling aksiomer. Spesielt ønsket han å vite om aritmetikken var både *komplett* og *konsistent*. Et system er komplett om alle dets sanne påstander er bevisbare, og et system er konsistent om det ikke er mulig å utlede noen selvmotsigelser.

Logikeren Kurt Gödel sjokkerte den matematiske verden da han publiserte sine *ufullstendighetsteoremer* i 1931 i [Gö31]. Dette er to resultater som sier noe om nettopp kompletteten og konsistensen til aritmetikk (og alle systemer som inneholder aritmetikk). Gödels første ufullstendighetsteorem sier at enhver sterk nok matematisk teori ikke kan være både konsistent og komplett. Siden vi gjerne ønsker konsistente teorier, så følger det at enhver konsistent teori er ikke-komplett: det finnes sanne påstander som ikke er mulig å bevise uten å legge til nye aksiomer.

Hilberts drøm ble dermed knust. Om aritmetikk er konsistent er den ikke-komplett. Det vil alltid finnes matematiske sannheter som er uoppnåelige med mindre vi legger til nye aksiomer.

Gödels andre ufullstendighetsteorem sier noe lignende: en matematisk teori kan aldri bevise sin egen konsistens. Med andre ord, om aritmetikk er konsistent, kan vi bare håpe på å vise dette ved hjelp aksiomer utenfor aritmetikken.

La oss si noen ord om hvordan Gödels beviste sitt første teorem (det andre følger som en relativ enkel konsekvens). Det Gödel gjør, er å formalisere setningen "Denne setningen er usann", kjent som "løgnerparadokset". Gödel utvikler et rimelig teknisk infløkt system for å oversette setninger og teoremer i et formelt språk til såkalte "Gödel-tall". Oversettelsen er slik at logiske deduksjoner svarer til aritmetiske operasjoner på naturlige tall. Dermed, om vårt logiske system er sterkt nok til å uttrykke aritmetikk, har det nå muligheten til å snakke om seg selv, siden sine egne sanne påstander er visse tall definert ved aritmetiske egenskaper. En formalisering av disse ideene leder til beviset av Gödels teorem.

Det er populært i populærvitenskapelig og populærfilosofisk litteratur å finne dype filosofiske konsekvenser av Gödels teoremer. For eksempel hevder Roger Penrose ved hjelp av Gödels teoremer i sin bok "The Emperor's New Mind"

[Pen89] at hjernen vår ikke kan være algoritmisk, og kan derfor ikke modelleres av en Turing-maskin.

Her er et sitat fra [Raa15] som utdyper dette:

> Sometimes quite fantastic conclusions are drawn from Gödel's theorems. It has been even suggested that Gödel's theorems, if not exactly prove, at least give strong support for mysticism or the existence of God. These interpretations seem to assume one or more misunderstandings which have already been discussed above: it is either assumed that Gödel provided an absolutely unprovable sentence, or that Gödel's theorems imply Platonism, or anti-mechanism, or both.

Som en platonist, hva tenkte Gödel om sine teoremer? Gödel så ingen motsetning mellom platonisme og et teorem som hevdet at det finnes påstander som ikke er bevisbare. Han mente at en del av jobben til en matematiker er ikke bare å utlede resultater fra aksiomene, men også å finne "de rette" aksiomene. Han følte at enhver matematisk påstand har en faktisk sannhetsverdi, så om vi fant en påstand som var ubestemmelig i et gitt system, var det bare fordi vi ikke hadde lagt til de riktige aksiomene ennå.

Vi skal utdype dette litt i et eksempel: kontinuumshypotesen. Kontinuumshypotesen er en påstand i mengdelære og handler om *størrelsen* på mengder. Georg Cantor lærte oss at uendeligheter kommer i forskjellige størrelser. Den første uendeligheten er størrelsen til mengden av de naturlige tallene, betegnet $\aleph_0$ ("aleph null"). Lager vi så de reelle tallene (desimaltall, som for eksempel π og e og $\sqrt{2}$), får vi en uendelighet som er større, betegnet $2^{\aleph_0}$. Vi definerer $\aleph_1$ til å være den neste uendeligheten, og det kan da vises at kontinuumshypotesen er ekvivalent med påstanden $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

I 1963 ble det vist av Paul Cohen (sammen med tidligere resultater av Gödel) at kontinuumshypotesen er *uavhengig* av ZFC i betydningen at verken den eller dens negasjon kan bevises i ZFC. En formalist ville tolket dette som at kontinuumshypotesen ikke har noe bestemt svar, og om vi legger til flere aksiomer, er det uten betydning om vi legger til kontinuumshypotesen eller dens negasjon.

Gödel derimot, hevder i [Göd47], at dette bare betyr at aksiomlisten vår er for liten, og at spørsmålet har et definitivt ja/nei-svar. For eksempel avslutter han med følgende sitat:

> Therefore one may on good reason suspect that the role of the continuum problem in set theory will be this, that it will finally lead to

> the discovery of new axioms which will make it possible to disprove Cantor's conjecture.

Selv om Gödel godtar at gitt ZFC-aksiomene, så er kontinuumshypotesen ikke avgjørbar, hevder han at det *er* mulig å finne et ja/nei-svar. Man må bare finne de riktige aksiomene.

Gödel er altså et eksempel på en matematiker som vil hevde at han *oppdager* matematikk.

3 Tanker fra den praktiserende matematiker

... og for den praktiserende matematiker, er det akkurat slik det *føles* å gjøre matematikk. Dette er ihvertfall det en uformell undersøkelse forfatterne og referansene til boken "The mathematical experience" [DHM12] hevder (og undertegnede kan si seg enig).

Jeg vil dele noen tanker om hvordan matematikk *oppleves*. Det å lære seg ny matematikk kan sammenlignes med å lese en turistguide for en ny by. Etterhvert som man blir mer kjent med matematikken, blir det som å besøke byen, og etterhvert begynner man også å kjenne bakgatene.

Vi kan gjøre metaforen noe mer konkret. La oss si at en lærer seg ikke-euklidsk geometri. Dette er en type geometri hvor parallelle linjer ikke finnes: alle linjer vil krysse. Her gjelder andre romlige regler og teoremer, og å lese om dette vil for en matematiker føles som å oppdage et nytt land.

For mange matematikere vil det å lære seg ikke-euklidsk geometri gå ut på å forestille seg at en lever i en ikke-euklidsk verden, hvor andre regler gjelder. Hvordan vil det føles? På hvilke måter er det annerledes å spasere i en ikke-euklidsk verden? Er lengdebegrepet det samme? Veldig mye av prosessen å lære seg ny matematikk går ut på å utvikle *intuisjon*, nemlig å bli kjent i den matematiske verden.

Også når en matematiker beviser teoremer, skjer dette som regel etter lengre utforsking over "dette landets" regler. Mange matematikere vil derfor si de "oppdager" teoremene de beviser.

Men det viser seg at det ofte er en forskjell på hvordan man intuitivt tenker på et problem og hva man tør innrømme offentlig. Et sitat fra [DHM12, side 359] går som følger:

> Most writers on the subject seem to agree that the typical mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays. That

> is, when he is doing mathematics he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of his reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.

Det er vanskelig å finne overbevisende argumenter for matematisk platonisme, så av de matematikerne som har tenkt filosofisk på disse spørsmålene, vil nok de færreste påstå at matematiske objekter faktisk eksisterer uavhengig av oss mennesker, men heller lene seg mot formalisme i en eller annen grad.

Det samme kan undertegnede (heretter "jeg") si. Jeg praktiserer vel det som kalles "working platonism" i [Lin]. Det vil si at jeg jobber *som om* matematisk platonisme stemmer. Jeg tenker på matematiske objekter som om de eksisterer, og bevisprosessen som en "oppdagelsesreise i fremmed land". Men rent formelt tror jeg matematikk kun er en formalistisk lek med symboler uten annen sannhetsverdi enn det aksiomene tillater oss å komme med. At matematikk ofte beskriver den fysiske verden rundt oss veldig godt, er ikke fordi matematikk har noen relasjon til virkeligheten, men fordi våre valg av *modeller* er såpass gode.

Referanser

[DHM12] Philip J. Davis, Reuben Hersh, and Elena Anne Marchisotto. *The mathematical experience, study edition.* Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, New York, 2012.

[Göd47] Kurt Gödel. What is Cantor's continuum problem? *Amer. Math. Monthly*, 54:515–525, 1947.

[Gö31] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1):173–198, 1931.

[Hil13] David Hilbert. Quotations by David Hilbert. `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Quotations/Hilbert.html`, 2013. [Online; sett 30-7-2015].

[Lin] Østein Linnebo. The nature of mathematical objects. `http://www.oysteinlinnebo.org/nmo.pdf`. Sett: 27-10-2015.

[Lin13] Øystein Linnebo. Platonism in the philosophy of mathematics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2013 edition, 2013.

[Pen89] R. Penrose. *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*. Penguin books. Penguin Books, 1989.

[Raa15] Panu Raatikainen. Gödel's incompleteness theorems. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2015 edition, 2015.

[Wik15] Wikipedia. Zermelo–fraenkel set theory — wikipedia, the free encyclopedia, 2015. [Online; sett 30-07-2015].