§1.2.1 Unimodulære rader og invertible matriser

(1)

Følger noen notater fra Magurn, „An algebraic introduction to K-theory".

$\rightsquigarrow$

<u>Eks</u>: <u>Rim-kvadrat</u> C_p syklisk gruppe av orden p, gen. av α

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}C_p \ni \alpha \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p = \mathbb{F}_p \end{tikzcd}$$

$\alpha \mapsto \zeta_p$, $\alpha \mapsto 1$

ζ_p: prim. p'te rot av 1

Feil utsagn fra en lærebok i rep. teori: Hvis G er endelig gruppe, så er alle projektive moduler over $\mathbb{Z}G$ er frie.

„Ihvertfall 150 år tilbake"

<u>Kummer</u>

p	$\mathrm{Pic}(\mathbb{Z}[\zeta_p])$ (entydig faktorisering)
≤ 19	0
23	$\mathbb{Z}/3$
29	$\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$
31	$\mathbb{Z}/9$
37	$\mathbb{Z}/37$
41	$(\mathbb{Z}/11)^2$
43	$\mathbb{Z}/211$
47	$\mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/139$

endelig abelske

Velg p s.a. $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ ikke er et PID. Velg (2)

P som ikke er hovedideal.

$\Rightarrow$ endelig-generert projektiv modul / $\mathbb{Z}[\zeta_p]$.

som ikke er fri.

I $\mathbb{Z}[\zeta_p]$, la

$$m_p = (1-\zeta_p)^{p-1} = (p)$$

$$m_p \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_p])$$

$$\mathbb{Z}[\zeta_p]/m_p \simeq P/m_pP \simeq \mathbb{F}_p$$

så ingen idealer mellom m_pP og P. (Entydig faktorisering av idealer i $\mathbb{Z}[\zeta_p]$)

Har en isomorfi

La kvadratet i minne

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}C_p \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[d, "j_2"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "j_1"] & \mathbb{F}_p \end{tikzcd}$$

$$\alpha: j_{1\#}\mathbb{Z} \simeq j_{2\#}P = P/m_pP$$

$$j_{1\#}\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \simeq \mathbb{F}_p$$

(se notater)

Milnor-patching $\Rightarrow$ $\tilde{P} \in \mathbb{P} \in \mathbb{P}(\mathbb{Z}C_p)$.

ikke fri fordi $i_{1\#}\tilde{P} = P$

($i_{1\#}(-)$ sender frie på frie (tensoring))

Eilenberg-Swindle

(3)

Som vi dropper kraver om endeliggenererthet, blir projektive moduler „for enkle"

Påst Hvis P projektiv modul, så $\exists$ fri modul F s.a $P \oplus F$ er fri-

Bevis Velg Q s.a $P \oplus Q$ er fri, og la

$$F = (P \oplus Q)^{\infty} = (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \dots$$

Da er
$$P \oplus F = P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus \dots$$
$$\cong F. \quad (\text{fri}) \qquad \boxtimes$$

Snart : §1.3 om Picard gruppen

Duale moduler M høyre R-modul.
$M \times R \to M$

$$\check{M} = \mathrm{Hom}_R(M, R) \quad \text{m/ venstre } R\text{-modul struktur}$$

$$R \times \check{M} \to \check{M}$$
$$(r, f) \mapsto r \cdot f \quad r f(m) = r f(m)$$

Får funktor $(-)^{\vee} : \mathrm{Mod}_R \to {}_R\mathrm{Mod}$

$$M \mapsto M^{\vee}$$
$$\alpha \mapsto (-) \circ \alpha$$
(additiv funktor)

Har

- $\check{R} \cong R$
- $(M \oplus N)^{\vee} = \check{M} \oplus \check{N}$
- $\check{R^n} = (\check{R})^n \cong R^n$

$\Rightarrow$ Hvis M end. gen. projektiv projektiv $\Rightarrow$ $\check{M}$ samme egenskap.

- Får indusert gruppeavbildning $K_0 R \xrightarrow{\cong} K_0 R^{op}$

= motsatte ringen

viser seg å være iso. for alle R.

~

Lemma $M \in P(R)$ m/ R kommutativ. $S \subset R$ mult. lukket mengde. Da er

$$S^{-1}(\check{M}) \cong (S^{-1}M)^{\vee}$$

Bevis $S^{-1}\mathrm{Hom}_R(M,R) \cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}R)$

For $s \in S$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$, definer
$s^{-1}\alpha \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(-,-)$ m/ $s^{-1}\alpha\left(\frac{m}{T}\right) = \frac{\alpha(m)}{sT}$.

injektiv trenger M end. gen.
surj. M projektiv $\square$

5

Cor Om $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $M \in P(R)$ $\Rightarrow$ $\check{M_{\mathfrak{p}}} = (\check{M})_{\mathfrak{p}}$

og $rk_{\mathfrak{p}}(M) = rk_{\mathfrak{p}}(\check{M})$

Bemerkning

- $rk_{\mathfrak{p}}(M)$ er bildet av $[M] \in K_0 R$ i $K_0(R_{\mathfrak{p}}) \cong \mathbb{Z}$.

Fordi $[R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M] = [M_{\mathfrak{p}}] = [R_{\mathfrak{p}}^n] \in K_0 R_{\mathfrak{p}}$.

$= n[R_{\mathfrak{p}}]$

$M_{\mathfrak{p}}$ er fri fordi $R_{\mathfrak{p}}$ er lokal.

Lemma Anta $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$. Da er

$$rk_{\mathfrak{p}}(M) = rk_{\mathfrak{q}}(M) \quad \forall M \in P(R).$$

Bevis

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[dr] & R_{\mathfrak{q}} \arrow[d] \\ & R_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

ring-avb. $\begin{tikzcd} K_0 R_{\mathfrak{q}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & K_0 R_{\mathfrak{p}} \arrow[d] \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$

(+ bemerkning over)

$\blacksquare$

Kor R integritetsområde $\Rightarrow$ $rk_{\mathfrak{p}}(M)$ konstant $\forall M \in P(R)$.

Bevis $(0) \in \operatorname{Spec} R$. $\Rightarrow$ $rk_{\mathfrak{p}}(M) = rk_0(M)$

6

Def. $M \in \mathbb{P}(R)$ har konstant rang hvis $rk_{\mathfrak{m}p}(M)$ konstant $\forall\, \mathfrak{m}p \in \mathrm{Max}(R)$.

Prop (1) $M \in \mathbb{P}(R)$ har konstant rang 1

$$\Updownarrow$$

(2) $\check{M} \otimes_R M \simeq R$ (som R-moduler)

Bevis Anta (1) $\Rightarrow$ $rk(\check{M}) = rk(M)$

$$\Rightarrow rk(\check{M} \otimes_R M) = rk(\check{M})\, rk(M) = rk(M)^2 = 1$$

Evalueringsavbildningen

$$F: \check{M} \otimes_R M \longrightarrow R \quad \text{er surjektiv.}$$

Bevis $F(\alpha \otimes m) = \alpha(m)$ $\rightsquigarrow$

$F_{\mathfrak{m}p}: (\check{M} \otimes_R M)_{\mathfrak{m}p} \to R_{\mathfrak{m}p}$ gitt ved

$$\frac{\alpha \otimes m}{s} \longmapsto \frac{\alpha(m)}{s} \quad s \in R \setminus \mathfrak{m}p.$$

$$(\check{M} \otimes_R M)_{\mathfrak{m}p} \simeq \check{M}_{\mathfrak{m}p} \otimes_{R_{\mathfrak{m}p}} M_{\mathfrak{m}p}$$

$$\frac{\alpha \otimes m}{s} \longmapsto \frac{\alpha}{1} \otimes \frac{m}{s} = \frac{\alpha}{s} \otimes \frac{m}{1}$$

Så $F_{\mathfrak{m}p}$ identifiseres med evalueringsavb. $\check{M}_{\mathfrak{m}p} \otimes_{R_{\mathfrak{m}p}} M_{\mathfrak{m}p} \to R_{\mathfrak{m}p}$

evalueringen

$R_{\mathfrak{p}}$ er lokal, så $M_{\mathfrak{p}}$ er fri. $\Rightarrow$ $F_{\mathfrak{p}}$ er surjektiv.

(16)

[**Påstand** $M, N \in P(R)$ begge har konstant rang n og $f: M \to N$ surjektiv $\Rightarrow$ f isomorfi. (nok å anta $rk_{\mathfrak{p}}(M) = rk_{\mathfrak{p}}(N)$ $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$)

Bevis hypotese $\Rightarrow$ $f: M \to N$ lokalt iso $\Rightarrow$ iso.

$\Leftarrow$ Motsatt, anta at (2) er sann.

Har isomorfier $\check{M} \otimes_R M \xrightarrow[g]{\simeq} R \xrightarrow[f]{\simeq} M \otimes_R \check{M}$

$$f(1) = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes f_i$$

Får indusert R-modul iso α:

$$M \longrightarrow R \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_R \check{M} \otimes_R M$$

$$m \longmapsto 1 \otimes m \mapsto \sum m_i \otimes f_i \otimes m \quad 1 \otimes g$$

$$\downarrow$$

$$\sum_i m_i \otimes g(f_i \otimes m) \qquad M \otimes_R R \longrightarrow M$$

$$\downarrow$$

$$\sum_i g(f_i \otimes m) m_i$$

Definer så $\beta_i : M \to R$ ved $m \mapsto g(f_i \otimes m)$. Har

$$\alpha(m) = \sum_i \beta_i(m) m_i.$$

α iso, så med $m_i' = \alpha^{-1}(m_i)$ får vi

$$m = \sum_i \beta_i(m) m_i' \quad \forall m \in M.$$

(8)

Definer $M \to R^n$
$m \mapsto (B_1(m), \dots, B_n(m))$

Definer $R^n \to M \quad (r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum r_i m_i$.

$\Rightarrow M \hookrightarrow R^n$ fordi sammensetningen er $\overset{id_M}{\text{identiteten}}$ på M.
$\Rightarrow M \in \mathcal{P}(R)$

Tilsvarende er $\check{M} \in \mathcal{P}(R)$.

$$rk_p(\check{M} \otimes_R M) = rk_{\mathfrak{p}} R = 1$$
$$\| $$
$$rk_{\mathfrak{p}}(M)^2 = rk_{\mathfrak{p}}(\check{M})\, rk_{\mathfrak{p}}(M) \quad \Rightarrow \boxed{rk_{\mathfrak{p}} M = 1} \ \forall \mathfrak{p}.$$

$\sim$

Oppg 2.7 $P, Q \in \mathcal{P}(R)$. ← kommutativ

$\Rightarrow P \otimes Q \in \mathcal{P}(R)$ og $rk_{\mathfrak{p}}(P \otimes Q) = rk_{\mathfrak{p}}(P) \cdot rk_{\mathfrak{p}}(Q)$

Bevis M projektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, -)$ eksakt.

Vi har $\mathrm{Hom}_R(P \otimes_R Q, -) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Hom}_R(Q, -))$

$\boxed{\text{Def } 3.11}$ Picard-gruppen $Pic(R)$ av en kommutativ ring R er isomorfiklasser av linjebunter over R, dvs rel. sm R proj. R-moduler av konstant rang 1.

<u>gruppestruktur</u> $\mathcal{L} \otimes_R \mathcal{M}$

$$id_{Pic(R)} = [R]$$

$$[\mathcal{L}]^{-1} = [\mathcal{L}^\vee].$$

<u>Prop 3.2</u> <u>Pic</u> : CRings $\to$ Ab funktor

$$(R \xrightarrow{f} S) \longmapsto \mathcal{L} \longmapsto \mathcal{L} \otimes_R S$$

<u>Bevis</u> $\mathcal{L} \otimes_R S$ linjebunt over S.

$$q \in \operatorname{Spec} S, \quad p = f^{-1}(q) \in \operatorname{Spec}(R)$$

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ \downarrow & \circ & \downarrow \\ R_p & \longrightarrow & S_q \end{array} \qquad \begin{aligned} (\mathcal{L} \otimes_R S) \otimes_S S_q &\simeq (\mathcal{L} \otimes_R R_p) \otimes_{R_p} S_q \\ &\simeq R_p \otimes_{R_p} S_q \\ &= S_q \end{aligned}$$

<u>(opg 7.12)</u>

<u>Indusert avb</u> $f_* : \operatorname{Pic} R \longrightarrow \operatorname{Pic} S$

$$[\mathcal{L}] \longmapsto [\mathcal{L} \otimes_R S]$$

<u>S-modul-iso</u> $(\mathcal{L} \otimes_R S) \otimes_S (\mathcal{L}' \otimes_R S) \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{L} \otimes_R \mathcal{L}') \otimes_R S$

$$(l \otimes s) \otimes (l' \otimes s') \longmapsto (l \otimes l') \otimes ss'$$

(10)

Så

$$f_*([\mathcal{L}]) \cdot f_*([\mathcal{L}']) = [(\mathcal{L} \otimes_R S) \otimes_S (\mathcal{L}' \otimes_R S)]$$
$$= [(\mathcal{L} \otimes_R \mathcal{L}') \otimes_R S]$$
$$= f_*([\mathcal{L} \otimes_R \mathcal{L}'])$$
$$= f_*([\mathcal{L}] \cdot [\mathcal{L}'])$$

✓ (!)

Videre er $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$. (sjekk selv (!))

Def
- Tensor-algebraer $T_R(M) = \bigoplus_{k \geq 0} M^{\otimes k}$
- R-algebra-struktur. (sammensetning / juxtaposition)

Eks $T_R(R) \simeq R[X]$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "R\text{-mod ab.}"] \arrow[d] & B \ (R\text{-algebra}) \\ T_R(M) \arrow[ur, "\exists!\ R\text{-algebra-ab!}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_{R\text{-mod}}(M, B) = \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(T_R(M), B)$

Def Ytre-algebraen

$I \subset T_R(M)$ generert av $m \otimes m \ \forall m \in M$.

$\Lambda_R M \stackrel{\text{def}}{=} T_R(M) / I$

Skriver $m_1 \wedge \ldots \wedge m_k$ for bildet av $m_1 \otimes \ldots \otimes m_k$ i kvotienten.

Eks $$\Lambda_R R = R[x]/(x^2)$$

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "f"] \arrow[dl] \arrow[d, "\bar{i}"] & B \\
T_R(M) \arrow[r] & \Lambda_R(M) \arrow[ur, dashed, "\exists! \text{ gradert } R\text{-alg}"'] &
\end{tikzcd}$$

gradert R-algebra s.a. $f(m)^2 = 0$ $\forall\, m \in M$

" $\mathrm{Hom}_{R\text{-mod}}(M, \Gamma(B))$ "

$$\parallel$$

$\mathrm{Hom}_{\substack{\text{Alt}\\ \text{grad } R\text{-alg}}}(\Lambda_R(M), B)$ "

Egenskaper til $\Lambda_R(M)$.

1) $\Lambda^k R^n$ fri R-modul av rang $\binom{n}{k}$.

Spesielt er $\Lambda^n R^n \approx R$ $\quad e_1 \wedge \dots \wedge e_n$

2) Om $R \to S$, så
$$\Lambda^k_R(M) \otimes_R S \cong \Lambda^k_S(M \otimes_R S)$$
„basisskifte"

3) $\exists$ naturlig iso. $\Lambda^k_R(P \oplus Q) \cong \bigoplus_{i=0}^{k} (\Lambda^i_R P) \otimes_R (\Lambda^{k-i}_R Q)$.

Bevis for 1 ok for $n=1$.

$$\Lambda^0_R R = R \quad \Lambda^1_R R = R \quad \Lambda^k_R R = 0 \quad \text{for } k\geq 2$$

$$\Lambda^k_R R^n = \Lambda^k_R(R\oplus R^{n-1})$$
$$\simeq \Lambda^k_R R^{n-1} \otimes \Lambda^{k-1}_R R^{n-1} \simeq R^{\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}} = R^{\binom{n}{k}}.$$

„dette tar dere raskt i hodet" ■

Lemma $M\in P(R) \Rightarrow \Lambda^k_R M\in P(R)$
og $\operatorname{rk}_p(\Lambda^k_R M) = \binom{\operatorname{rk}_p(M)}{k}$ $\forall$ $p \in \operatorname{Spec} R$.

„Hvis $M\oplus N$ fri, så er
$$\Lambda^k_R M \overset{(iii)}{\underset{\oplus}{\longrightarrow}} \Lambda^k_R(\underset{\text{fri av endelig rang}}{M\oplus N})$$

I tillegg $S^{-1}(\Lambda^k_R M) = \Lambda^k_{S^{-1}R} S^{-1}M$. ■

I tillegg om $P\in P(R)$ av konstant rang lik 1, så
$$\Lambda^n_R P \text{ linjebunt} \leftarrow \text{„determinantlinjebunten til } P\text{"}$$

Korollar Om $M\in P(R)$ har konstant rang m
$$\Rightarrow \Lambda^k_R M\in P(R) \text{ konstant rang } \binom{m}{k}.$$

13

R kommutativt integritetsområde.

m/ F tilhørende brøkkropp

<u>Brudent ideal</u> $0 \neq R$-undermodul

I av F s.a. $I \subseteq fR$ $\quad f \in F$,

Har produkter av brudne idealer.

Betegn m/ $\mathrm{Frac}(R)$ <u>monoiden</u> av brudne idealer. ($\mathrm{id} = R$)

$I \in \mathrm{Frac}(R)$ „invertibelt" om $\exists\, J \in \mathrm{Frac}(R)$ s.a. $IJ = R$.

(Hovedsakene holder disse for Cartier-divisorer)

Om $f \in F^\times$ ⇝ får brudent ideal $\mathrm{div}(f) = fR$ som er invertibelt (siden $(fR)\cdot(f^{-1}R) = R$).

Gir avbildning $\mathrm{div}: F^\times \longrightarrow \mathrm{Cart}(F) \subseteq \mathrm{Frac}(R)$

brudne invertible idealer

<u>Eks</u> $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. $\quad F = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

$I = (3, \; 1+\sqrt{-5})$. Hva er I^{-1}?

Ethvert element i I^{-1} er på formen $\dfrac{a+b\sqrt{-5}}{3}$ for $a, b \in \mathbb{Z}$,

fordi $3 \in I$. Betingelsen for at $x \in I^{-1}$ er at

$$(a+b\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5}) \in 3R$$

$$\Vert$$

$$(a-5b)+(a+b)\sqrt{-5} \in 3R$$

$$\Rightarrow \quad 3 \mid a+b \quad (\Rightarrow 3 \mid a-5b)$$

Slik $a = 3n - b$ for $n \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(3n-b)+b\sqrt{-5}}{3} = n - b\left(\frac{1-\sqrt{-5}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I^{-1} = \mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}r$$

hvor $r = \dfrac{1-\sqrt{-5}}{3}$.

$\blacksquare$