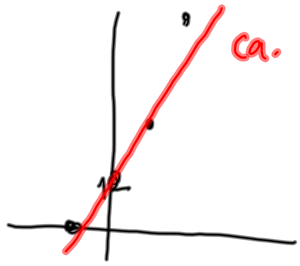
6.6.3 Plenum 12/11

Finn vha minste □-metode funksjon som passer best mulig til

$(-1,0), (0,1), (1,2), (2,4)$



$$y = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 x$$

$$\underset{4\times 2}{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\underset{2\times 4}{X^T}\,\underset{4\times 2}{X}}_{2\times 2}\vec{\beta} = X^T\vec{y}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X^T\vec{y} = \begin{bmatrix} - // - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Utvidet matrise, og radreduser:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.1 \\ 0 & 1 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Det betyr løsningen er $y = 1.1 + 1.3x$

6.6.6 Anta vi skal tilpasse en kvadratisk funksjon,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

og har tre eller flere datapunkter. Vis at minste $\square$-metoden gir unikt svar.

Vet at $\underbrace{X^T X}_{}\beta = X^T \vec{y}$

er invertibel hvis og bare hvis søylene er lin. uavhengige.

høyde = ant. datapkt.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ \hline \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}$$

søylene her er lin uavhige såsnart ant. datapkt ≥ 3 (og punktene er forskjellige)

6.6.7 Lag funksjon på formen

$$y = \beta_1 x + \beta_1 x^2$$

som passer til dataene.

a) $Y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$ ← ideell situasjon

Datapkter: $(x_1, y_1), \dots, (x_5, y_5)$

$$y_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \varepsilon_1$$

$$\vdots$$

$$y_5 = \beta_1 x_5 + \beta_2 x_5^2 + \varepsilon_5$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

observation vector

design matrix

ukjent

Ligningen blir da $X\vec{\beta} = \vec{y}$.

Så normal-ligningene blir

$$X^T X \vec{\beta} = X^T \vec{y}.$$

B) Løsn i MATLAB.

Svaret ble $y = 1.7604x - 0.1988x^2$

6.6.12 Blodtrykk p og vekt w, sammenheng

$$\beta_0 + \beta_1 \ln w = p$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_5 \end{bmatrix} = \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 & \ln w_1 \\ & \vdots \\ 1 & \ln w_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Der $(p_1, w_1) \dots (p_5, w_5)$ er måledata.

Løser $X^T X \vec{\beta} = X^T \vec{p}$ i MATLAB.

(se fil på nett)

Svar: $\beta_0 = 17.92$ $\beta_1 = 19.39$

Så om $w = 100$, får vi $p = 17.92 + 19.39(100)$

$= \underline{\underline{107.2142}}.$

nov 12-14:33

6.6.18 Anta $\sum x_i = 0$.

Vis at $X^T X$ er diagonal.

(i tilfellet lineær tilpasning
$y = \beta_0 + \beta_1 x$)

I dette tilfellet ser X ut som $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$

Da er

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & & & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \sum x_i^2 \end{bmatrix}$$ så $X^T X$ er diagonal.

6.7.1 $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 4u_1 v_1 + 5 u_2 v_2$

$\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$

$\bar{x} = (\overset{x_1}{1}, \overset{x_2}{1})$ $\quad \bar{y} = (\overset{y_1}{5}, \overset{y_2}{-1})$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{9} = 3 \quad |\langle x, y \rangle|^2 = 225$

$\|\bar{y}\| = \sqrt{4 \cdot 5 \cdot 5 + 5} = \sqrt{105}$
$= 5\sqrt{21}$

nov 12-14:40

6.73 p, q polynomer

$\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$

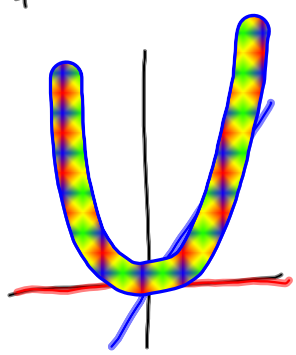
$p(t) = 4+t \qquad q(t) = 5-4t^2$

$\langle p,q\rangle = 3\cdot 1 + 4\cdot 5 + 5\cdot 1$

$= \underline{\underline{28}}$

6.79 $\langle p,q\rangle = p(-3)q(-3) + p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(3)q(3)$

$p_0 = 1 \qquad p_1 = t \qquad p_2 = t^2$



Regn ut projeksjonen av p_2 på rommet utspent av p_0 og p_1.

$$\hat{p}_2 = \frac{\langle p_2, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0 + \frac{\langle p_2, p_1\rangle}{\langle p_1, p_1\rangle} p_1$$

Regner ut indreproduktene:

$\langle p_2, p_0\rangle = (-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2$

$= 20$

$\langle p_0, p_0\rangle = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$\langle p_2, p_1\rangle = 9\cdot(-3) + 1\cdot(-3) + 9 + 3 = 0$

Så $\hat{p}_2 = 5p_0 + 0\cdot p_1 = 5$

nov 12-14:47

B) Skal finne ortogonal basis for Span$\{1, t, t^2\}$.

$$\langle p_0, p_1 \rangle = -3 + -1 + 1 + 3 = 0$$

Så lager $q = p_2 - \hat{p}_2 = t^2 - 5$

Deler på 4, og får $q = \frac{t^2 - 5}{4}$.

Sjekk at $\langle q, p_1 \rangle = 4 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-1) + (-4) 1 + 4 \cdot 3$

$= \underline{\underline{0}}$

nov 12-14:55

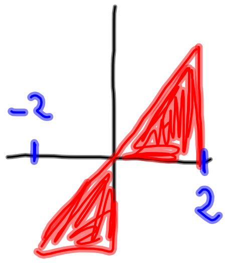
6.7.26 $\langle f, g \rangle = \int_{-2}^{2} f(t)g(t)\,dt$

Finn ortogonal basis for Span$\{1, t, t^2\}$.
(Legendre-polynomer)

Gram-Schmidt! (Kall $p_1 = 1$, $p_2 = t$, $p_3 = t^2$)

$v_1 = 1$

Sjekker hva $\langle v_1, p_2 \rangle$ er: $\int_{-2}^{2} t\,dt = 0$



$v_2 = t$

Da er
$$v_3 = t^2 - \frac{\langle v_1, p_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, p_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

Regner ut:
$$\langle v_1, p_3 \rangle = \int_{-2}^{2} t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \int_{-2}^{2} 1\,dt = \left[t\right]_{-2}^{2} = 2-(-2) = 4$$

$$\langle v_2, p_3 \rangle = \int_{-2}^{2} t^3\,dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_{-2}^{2} = \underline{0}$$

Så: $\underline{\underline{v_3 = t^2 - \frac{4}{3}}}$

nov 12-15:08

6.7.28 Finn ortogonal basis for $\mathrm{Span}\{1, \cos t, \cos^2 t, \cos^3 t\}$.

$v_1 = 1$ $\qquad \langle 1, \cos t\rangle = \int_0^{2\pi} \cos t = 0$

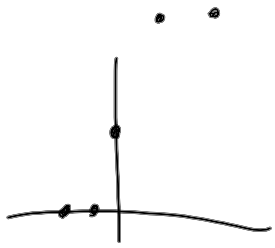
$v_2 = \cos t$ $\qquad \langle 1, \cos^2 t\rangle = \int_0^{2} \cos^2 t \, dt \neq 0$

$v_3 =$

... fortsett slik.

6.8.1 $y = \beta_0 + \beta_1 x$

$(-2,0)$
$(-1,0)$
$(0,2)$
$(1,4)$ $\quad (2,4)$



De tre midterste målepktr veie dobbelt så mye som de andre.

Så $W = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$. $\qquad X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\qquad \vec{\beta} =$ ukjent.

„Normal"-ligningen blir nå $(WX)^T W X \vec{\beta} = (WX)^T W \vec{y}$.

Ender opp m/ $(WX)^T W X = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

$(WX)^T W \vec{y} = \begin{bmatrix} 28 \\ 24 \end{bmatrix}$

Så $\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ $\qquad$ Så $y = 2 + \frac{3}{2}x$.

nov 12-15:21

6.8.2 Ja, samme resultat.

Så anta at $W' = 2W$.

Da er normalligningen $(W'A)^T W'A\vec{x} = (W'A)^T W'\vec{y}$

Kan flytte tallet ut:

$$2\cdot(WA)^T 2\cdot WA\vec{x} = 2(WA)^T 2\cdot W\vec{y}$$

$$\Rightarrow \quad (WA)^T WA\hat{x} = (WA)^T W\vec{y}$$

Så W og W' gir de samme løsningene.

6.8.8 Vil skrive $f(t)$ som en sum av sin og cos.

Spesifikt:
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos t + b_1 \sin t + a_2\cos 2t + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + b_3 \sin 3t + \ldots$$

Vil skrive $f(t) = t - 1$ som Fourier-rekke, opp til tredje ledd.

Fourier-transformasjon er lineær, så kan regne ut først $F_3(t)$ og $F_3(1)$ og så trekke fra.

Først for $f_1(t) = t$

Konstantledd:
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot t \, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{2\pi}$$
$$= \pi$$

nov 12-15:29

For $k>0$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \overset{u}{t} \overset{v'}{\cos kt}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin kt}{k}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\cos kt}{k^2}\right]_0^{2\pi} \right)$$

$$= 0$$

$$b_k \overset{\text{samme måte}}{=} = -\frac{2}{k}$$

Så $\underline{F_3(t)} = \pi - 2\sin t - \sin 2t - \frac{2}{3}\sin 3t$

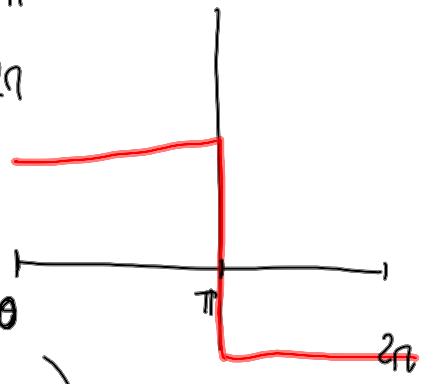
Men 1 står ortogonalt på alle $\cos(kt)$ og $\sin(kt)$ $(k \neq 0)$

så $F_3(1) = 1$.

Så $F_3(t-1) = \pi - 1 \; \underline{\underline{-2\sin t}} - \sin 2t - \frac{2}{3}\sin 3t.$

6.8.10

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq \pi \\ -1 & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int f(t)\,dt = 0$$

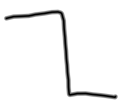
$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos kt\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos kt\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{\sin kt}{k}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin kt}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right] = \underline{\underline{0}}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin kt\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin kt\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left[\frac{\cos kt}{k}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos kt}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\begin{cases} -\left(\frac{-1-1}{k}\right) + \frac{1-(-1)}{k} = \frac{4}{\pi k} & k \text{ odde} \\ 0 & k \text{ jevn} \end{cases}$$



$$F_3(f(t)) = \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t$$

$$F_4 = F_3$$

$$F_5 = \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\sin(5t)$$

nov 12-15:41

6.8.15 Fyll inn W, X og $\bar{Y}$.

Se ex_6_8_15.m.

og ex_6_8_15.png