Monoide

- vektorbunter $Vb(X) \circlearrowleft$ Tromskjema
- $\mathbb{N}$
- $P(R) \circlearrowleft$ proj. end. gen. R-moduler

M abelsk monoide: gruppekompletering, $M^{-1}M$

$$\begin{tikzcd} & M^{-1}M \arrow[dl, dashed, "\exists!"'] \\ A & M \arrow[l, "\text{abelsk}"] \arrow[u, "\text{monoidemorf.}"'] \end{tikzcd}$$

Eks heltallene $\mathbb{N}^{-1}\mathbb{N} = \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\eta"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, bend left, "j"] \\ & \mathbb{N}^{-1}\mathbb{N} \arrow[u, "\bar{i}"] \end{tikzcd}$$

Påstand $\bar{i}$ er iso!

$\mathbb{Z}$ fri abelsk gruppe på generator 1. $\exists\ \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{N}^{-1}\mathbb{N}$, $j(1) = \eta(1) = [1]$

Da er $\bar{i} \circ j(1) = 1 \Rightarrow \bar{i} \circ j = id_{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow j$ injektiv.

Elementene i $\mathbb{N}$ genererer $\mathbb{N}^{-1}\mathbb{N}$ + 1 genererer $\mathbb{N} \Rightarrow j$ surjektiv. $\Rightarrow \bar{i}$ og j er inverse isomorfier.

Konstruksjon av $M^{-1}M$

$$F(M) = \left\langle \begin{array}{l}\text{fri abelsk gruppe på} \\ \text{symboler } [m],\ m \in M\end{array} \right\rangle$$

$$R(M) = \left\langle \begin{array}{l}\text{undergr} \subseteq F(M) \text{ generert av} \\ \text{relasjonen} \\ [m+n] - [m] - [n]\end{array} \right\rangle$$

Da er $M^{-1}M = F(M)/R(M)$. Gir funktor $[abMon] \to [abGrp]$

Prop 11 M abelsk monoide.

a) Alle elementer i $M^{-1}M$ er på formen $[m] - [n]$, for $m, n \in M$.

B) $[m] = [n]$ i $M^{-1}M \iff \exists\, p \in M$ s.a. $m + p = n + p$.

c) Monoide avb. $M \times M \to M^{-1}M$, $(m,n) \mapsto [m] - [n]$ er surjektiv.

d) $M^{-1}M = \dfrac{M \times M}{\sim}$ $\quad (m,n) \sim (m+p, n+p)$

Korollar • $M \hookrightarrow M^{-1}M \iff M$ er en kansellerings~~monoide~~ styrkemonoide.

$\hookrightarrow (\forall\, m, n, p \in M$ om $m + p = n + p \Rightarrow m = n)$

• $L \subset M$ kalles **kofinal** hvis $\forall m \in M$, så $\exists\, m' \in L$, s.a. $m + m' \in L$. (eks $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)

Corr. L kofinal i M.

a) $L^{-1}L \subset M^{-1}M$ undergr.

b) Ethvert element i $M^{-1}M$ er på formen
$[m]-[l]$, $m \in L$, $l \in L$.

c) Hvis $[m]=[n]$, så er $m+l=n+l$ for $l \in L$.

Eks $F(R) \subseteq P(R)$
fie moduler $\subseteq$ projektive moduler

Semiring $(M,+)$ ~~sammen~~ abelsk monoide sammen m/ assosiativ produkt (distributiv over $+$) (og 2-sidet mult. 1)
$(\mathbb{N},+,\cdot)$

$\Rightarrow$ $M^{-1}M$ blir en ring hvis $(M,+)$ er en semiring.

Funktor:

$$\left\{\begin{matrix}\text{kommutative} \\ \text{semiringer}\end{matrix}\right\} \longmapsto \left\{\begin{matrix}\text{kommutative} \\ \text{ringer}\end{matrix}\right\}$$

Eks X top rom. $[X,\mathbb{N}]$ kont. avb. til $\mathbb{N}$. Gruppekompletering er $[X,\mathbb{Z}]$.
Om X er kvasikompakt, da er $[X,\mathbb{Z}]$ er fri abelsk gruppe.

Eks Burnside-ringen til en endelig gruppe G.

$$M = \{\text{iso. klasser av endelige } G\text{-mengder}\}$$

monoideoperasjonen er disjunkt union

$X \times Y$ er produkt m/ faktorvis operasjon.

$\emptyset$ og $\{*\}$ er G-mengder på unik måte

$$G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G \}$$
$$G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$$

Som G-mengder er $G \cdot x \cong G/G_x$.

Anta det er c forskjellige G-baner. Enhver G-mengde er en disjunkt union av baner $\rightsquigarrow M \cong \mathbb{N}^c$.

c også antall konj.-klasser av undergr. av G.

Gruppekompletteringen av M, $A(G) \cong \mathbb{Z}^c$.

↳ Eks $G = C_p$. $\mathbb{Z}[x]/(x^2 = px)$

Eks G end. gruppe. $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ - end. dim repr. av G

Abelsk monoide under $\oplus$. $\rho \oplus \rho' : G \to GL_{n+n'}(\mathbb{C})$

Tensorprodukt $\rho \otimes \rho' : G \to GL_{nn'}(\mathbb{C})$

Så $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ er en semiring.

$\mathrm{Rep}_F(G) \xleftrightarrow{1:1} FG$ - moduler,

kupp

grupperingen till G,
fri F-modul gen av G. Gi F-algebra
via

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) \doteq \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\cdot k = g} r_h s_k\right)$$

- La $\rho: G \to GL_n(F)$. $g\in G$ virke på F^n via.

$$g\cdot v = \rho(g)v$$

utvidet til en FG-virkning lineært.

- Hvis M FG-modul av dim n som vektorrom / F.
  For $g\in G$, vil $g \mapsto (v \mapsto gv)$ være ~ i $GL(M)$

Thm (Maschke) F kupp. char $F \nmid |G|$.
$\Rightarrow$ FG artinsk, semisimpel.

hver ideal er en summand

$\Updownarrow$

enhver modul er projektiv

Korollar # simple FG-moduler = # konjugasjonsklasser i G $(F = \bar{F})$

$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) = \mathbb{N}^r$

$R_{\mathbb{C}}(G) = \mathbb{Z}^r$

Merk $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}G$ avh. av $\mathbb{C}$, 6

Bevis

semisimpel

$\Leftrightarrow$

enhver modul er projektiv

Bevis Et ideal i FG er også et F-underrom av FG, og $\dim FG = \#$
$\Rightarrow$ FG artinsk.

La M være en FG-modul. Har surj. FG-modul avb.

$$(FG)^I \xrightarrow{\theta} M \to 0$$

Ethvert vektorrom$/F$ har en basis. θ er en F lineær transformasjon.

Får en F-lineær transformasjon
$w: M \to (FG)^I$ som splitter θ v/ å
velge verdier for w på basiselementene til M.

Def $\phi: M \to (FG)^I$ v/

$$m \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} w(hm) \quad \forall m \in M.$$

Da er $\phi(gm) = \phi(m)$, og $w\phi = id_M$. ∎

???

Eks 2.1.2 semisimple ringer r.a. $\mathbb{Z} \to K_0 R$ ikke alltid splittes

- $K_0(R_1 \times R_2) = K_0 R_1 \times K_0 R_2$

Også ikke-trivielt som ringer om R_1, R_2 e kommutative.

- $K_0(\operatorname{colim}_{i \in I} R_i) \cong \operatorname{colim}_{i \in I} K_0(R_i)$ direkte rettede grenser

Lemma 2.2 Om $I \subset R$ nilpotent ideal. Så
$$K_0(R) \xrightarrow{\simeq} K_0(R/I)$$
Så om R kommutativ $\Rightarrow K_0 R \simeq K_0 R_{red}$.

Kommer fra monoideisomorfien
$$\mathbb{P}(R) \longrightarrow \mathbb{P}(R/I)$$

Obs I.2.I $I \lhd R$ radikalt ($I \subset \sqrt{R}$)

radikalt til R

$$= \begin{cases} \bigcap m_R & R \text{ komm.} \\ \text{ell. } a \in R/ a \text{ dreper simple } R\text{-moduler} \end{cases}$$

Hvis $P, Q \in \mathbb{P}(R)$, s.a.
$P/_{IP} \simeq Q/_{IQ}$. Så følger at $P \simeq Q$.

Bvs

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\exists f"'] & \\ & P/IP \arrow[d, "\cong\ \phi"] & \\ Q \arrow[r] & Q/IQ \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vis $q \in Q$, så $q + IQ = \phi(p + IP)$

$= f(p) + IQ$

Så $Q = f(P) + IQ$

Q end gen $\Rightarrow$ Nakayama $\Rightarrow$ $Q = f(P)$.

Så f er surjektiv.

Så har k.eksakt sekvens

$$0 \to K \to P \xrightarrow{f} Q \to 0$$

Splitter fordi Q er projektiv:

$\Rightarrow$ $0 \to K/IK \to P/IP \xrightarrow{\phi} Q/IQ \to 0$ er eksakt

men ϕ iso, så $K = IK$. $\Rightarrow$ $K = 0$.

Korollar $K_0 R \to K_0(R/I)$ er injektiv.

Oppg I2.7 Om I nilpotent, så ($\Rightarrow I$ nilideal)

$\rightarrow$ hvis $a \in R$ s.a. $\bar{a} \in R/I$ er idempotent, så

$\exists$ en idempotent $e \in aR$ s.a. $\bar{e} = \bar{a} \in R/I$.

Bevis For $b = 1-a$, så

$$ab = ba = a - a^2 \in I$$ som

er nilpotent, så $\exists$ $m \geq 1$ s.a.

$$(ab)^m = 0.$$

$$1 = (a+b)^{2m} = \underbrace{a^{2m} + r_1 a^{2m-1} b + \dots + r_m a^m b^m}_{e}$$

$$+ \underbrace{r_{m+1} a^{m-1} b^{m+1} + \dots + b^{2m}}_{f}$$

Sid $a^m b^m = b^m a^m = 0$, får vi $ef = 0$.

$$\Rightarrow \quad e = e(e+f) = e^2$$

$\Rightarrow$ e idempotent

$$e \equiv a^{2m} \equiv a \mod I.$$ ∎

Korollar $\mathbb{P}(R) \simeq \mathbb{P}(R/I)$. (via Ex I 2.1.2)

$$\boxed{\text{Rang og } H_0 R = [\operatorname{Spec} R, \mathbb{Z}]}$$

Lemma $M \in \mathbb{P}(R)$, så er avb. $f_M : \operatorname{Spec} R \to \mathbb{Z}$, $p \mapsto rk_{R_p} M$ er kontinuelig.

Bevis: V.a. $f_M^{-1}(m) \subset \operatorname{Spec} R$ er åpen $\forall$ heltall m. (11)

Si $M \oplus N \cong R^n \Rightarrow f_M(\mathfrak{p}) + f_N(\mathfrak{p}) = n.$

$\Rightarrow f_M^{-1}(m) = \emptyset$ hvis $m<0$ eller $m>n$.

Kan anta $0 \leq m \leq n$

$$f_M^{-1}(m) = \{\mathfrak{p} \mid rk_{\mathfrak{p}} M \leq m\} \cap \{\mathfrak{p} \mid rk_{\mathfrak{p}} M \geq m\}$$

$$= \{\mathfrak{p} \mid rk_{\mathfrak{p}} M \leq m\} \cap \{\mathfrak{p} \mid rk_{\mathfrak{p}} N \leq n-m\}$$

$$= \{\mathfrak{p} \mid rk_{\mathfrak{p}} \Lambda_R^{m+1} M = 0\} \cap \{\mathfrak{p} \mid rk_{\mathfrak{p}} \Lambda_R^{n-m+1} N = 0\}$$

$$= D(\operatorname{ann} \Lambda_R^{m+1} M) \cap D(\operatorname{ann} \Lambda_R^{n-m+1} N)$$

$= \text{åpen} \cap \text{åpen} = \text{åpen}.$ $\blacksquare$

$H_0 R$ er undering av $K_0 R$ (s. 71)

$L \subset \mathbb{P}(R)$ undermonoiden bestående av komponentvis frie moduler (kofinale).

L kan sees på som $[\operatorname{Spec} R, \mathbb{N}]$.

$$\Rightarrow L^{-1} L = H_0 R.$$

$$\begin{array}{ccc} \text{rank}: K_0 R & \to & H_0 R \\ \cup\!\mathsf{I} & \nearrow_{id} & \\ H_0 R & & \end{array} \Rightarrow H_0 R \text{ direkte summand av } K_0 R.$$

Def $\widetilde{K_0 R} = \ker(\mathrm{rank}: K_0 R \to H_0 K)$

$\widetilde{K_0 R}$ = på form $[P] - [R^n]$