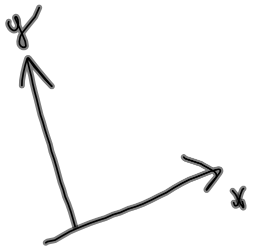
Forelesning 30/8-13

• kap 4.1 og 4.2

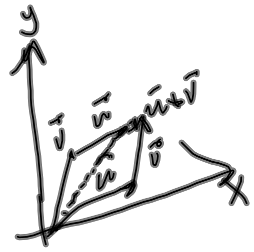
• Motivere vektorrom

$\mathbb{R}^2$



• Alle kjenner $\mathbb{R}^2$

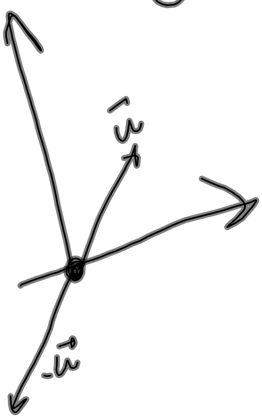
$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$



Kommutativitet

1. $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^2$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ Assossiativitet
4. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ Additiv identitet
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Additiv invers



6. $c \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}$

$c \in \mathbb{R}$ "er med i"

7. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
8. $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$
9. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
10. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Definisjon Et vektorrom er en ikke-tom mengde (elementene kaller vi vektorer), sammen m/ to operasjoner "+" og "gange med skalarmultiplikasjon". Disse tilfredsstiller aksiom 1-10 over.

$\boxed{\text{Eks 1}}$ Polynomer av grad $\leq n$.

$$= \mathbb{P}_n$$

Elementene er på formen

$$\vec{p}(t) = \underline{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n}$$

der $a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$.

$$\vec{q}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n$$

får lov til å være null...

$$(\vec{p} + \vec{q})(t) = \underbrace{(a_0 + b_0)}\, t^0 + \underbrace{(a_1 + b_1)} t + \dots + \underbrace{(a_n + b_n)} t^n$$

⑥ $cp(t) = (ca_0) + (ca_1)t + \ldots + ca_n t^n$.
$c \in \mathbb{R}$
er også et polynom av grad mindre enn (eller lik) n.

<u>Eks 2</u> $C(\mathbb{R}) = \{$ kontinuerlige funksjoner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

er et vektorrom.

① Summen av to kont' funksjoner er kont'.
② $f + g = g + f$ (fordi $f(t) + g(t) = g(t) + f(t)$)
③ $c \in \mathbb{R}$, så også $(c \cdot f)(t) = c \cdot f(t)$
osv. ...

Eks 3 $\mathcal{L} = \{$ løsningene til $y' = y \}$

(mer om dette i kap 5)

$y(t) = Ce^{t}$

$C \in \mathbb{R}$

① Hvis y_1 og y_2 er løsninger, så også $y_1 + y_2$ det.

$$\underbrace{(y_1+y_2)'}_{h'} = y_1' + y_2' = \underbrace{y_1 + y_2}_{h}$$

$$h' = h$$

② Skalarmultiplikasjon Hvis $c \in \mathbb{R}$ og y en løsning, så:

$$\underbrace{(c \cdot y)'}_{h'} = c \cdot y' = \underbrace{c \cdot y}_{h}$$

$$h' = h$$

Underrom

Def: Et underrom av et vektorrom V er en ikke-tom delmengde $H \subseteq V$ ← delmengde som tilfredsstiller følgende:

! ① Nullvektoren er med i H $(\vec{0} \in H)$

② H er lukket under addisjon.
$\vec{u} \in H$, $\vec{v} \in H$, så $\vec{u}+\vec{v} \in H$.

③ H er lukket under skalarmultiplikasjon.
$c \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in H$, så $c \cdot \vec{u} \in H$.

H er også et vektorrom: $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$ (*)
(fordi alle $\vec{u}$ i H, også er i V)

Eks La vi $H = \{\vec{0}\}$, er H et underrom av V.

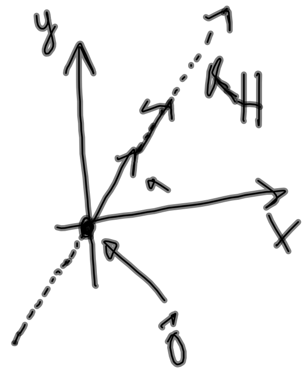
① Nullvektoren er med. ✓

② Om $\vec{u}, \vec{v} \in H$, så $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$. ✓
Vet at $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in H$. ✓

③ La $c \in \mathbb{R}$. Da er $c \cdot \vec{0} = \vec{0} \in H$. ✓

Eks 2 $V = \mathbb{R}^2$

$H = \left\{ c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$ ✓

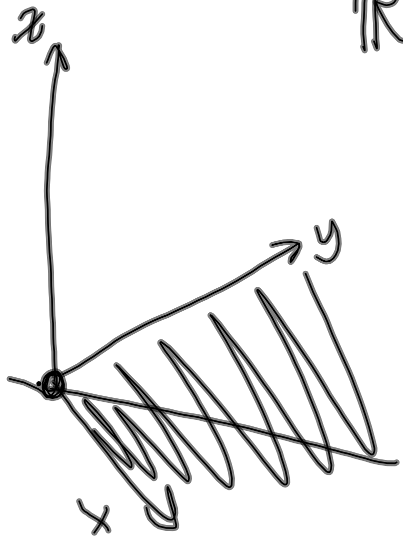


① $0 \in H$

② $\vec{u}, \vec{v} \in H$, så $\vec{u} + \vec{v} \in H$ ✓

③ $c \cdot \vec{u} \in H$ $\quad c \in \mathbb{R}$ ✓

$\mathbb{R}^3$



Underrom utspent av en mengde

Husk: Span$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ er mengden av alle lin. kombinasjoner med $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$

$$c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_r\vec{v}_r$$

Teorem $H = \text{Span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ er et underrom av V.

Bevis $r=2$

① $\vec{0} \in H$:

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{v}_1 + 0\cdot\vec{v}_2 + \ldots + 0\cdot\vec{v}_r \checkmark$$

② $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \in H$

$\vec{v} = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 \in H$

$$\vec{u} + \vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2$$
$$= \underbrace{(c_1+d_1)}_{i\ \mathbb{R}}\vec{v}_1 + \underbrace{(d_2+c_2)}_{i\ \mathbb{R}}\vec{v}_2$$

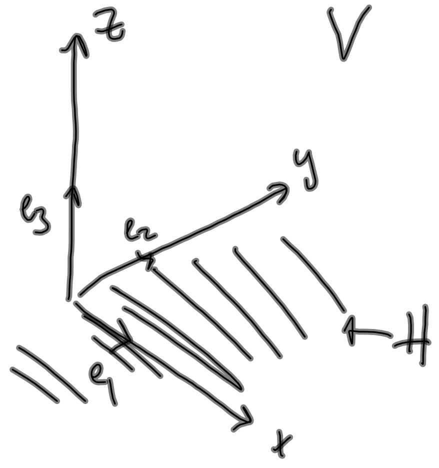
③ La $\vec{u} \in H$, og $c \in \mathbb{R}$

Kan skrive $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$

$$c\cdot\vec{u} = \underbrace{(c\cdot c_1)}_{i\ \mathbb{R}}\vec{v}_1 + \underbrace{(c\cdot c_2)}_{i\ \mathbb{R}}\vec{v}_2 \quad \square$$

Eks 1 $V = \mathbb{R}^3$

La $H = \text{Span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$



Eks 2 La $V = \mathbb{P}_4$.

La $H = \text{Span}\{1, t, t^2\}$.

Elementene ser ut som

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2$$

Altså polynomer av grad ≤ 2.

4.2 Nullrom, søylerom og lineærtransformasjoner

Eks La $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. La $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$M\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Motiver:

Def Nullrommet til en $m \times n$-matrise M er mengden av $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$M\vec{v} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

Spørsmål!

Hvordan finne Null M?

Svar: Radreduser. :)

Husk, skal løse $M\vec{v} = \vec{0}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 4x_4 \\ x_2 &= -3x_3 + 2x_4 \end{aligned}\right\}$$

Så nullrommet er

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2x_3 - 4x_4 \\ -3x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Null}(M) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad \square$$

Eks 2 $A\vec{x} = 0$?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2x_2$$
$$x_3 = 0$$
$$\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Søylerom til en matrise

Def Søylerommet til en $m \times n$-matrise $[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n] = A$ er $\mathrm{Col}\, A = \mathrm{Span}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\}$

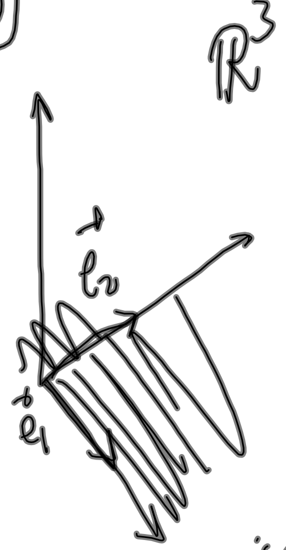
Thm 3 Søylerommet er et underrom av $\mathbb{R}^m$.

Bevis Fordi $\mathrm{Col}\, A = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_r\}$ og spennet er et underrom v/ Teorem 1. $\square$

Eks La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ være 3×2-matrise.

Beskriv $\mathrm{Col}\, A$.

xy-planet



$A = m \times n$-matrise

$\mathrm{Null}\, A =$ alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ som blir $\boxed{\text{drept}}$ av A

$\mathrm{Col}\, A =$ alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ som blir $\boxed{\text{skapt}}$ av A.

Lineærtransformasjon

Def Hvis V, W er to vektorrom og $T: V \longrightarrow W$ er en funksjon slik at:

1. Hvis $\vec{u}, \vec{v} \in V$, så $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
2. Hvis $c \in \mathbb{R}$, så $T(c\vec{v}) = c \cdot T(\vec{v})$.

M matrise

$$M(\vec{u}+\vec{v}) = M\vec{u} + M\vec{v}$$
$$M(c\vec{u}) = cM\vec{u}$$

Tenkeoppgave Vis at derivasjon er en lineærtransformasjon

$$D: \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$$