1

Oppg 1 (Eks 2008)

1a l er linjen mellom $A=(1:1:0)$ og $B=(0:1:1)$.

Hva er det duale punktet til l?

$\mathbb{R}P^2$

La m være linjen gitt v/ ligningen

$2x-y+3z=0$. Finn skjæringspunktet C mellom l og m.

a)

Linjen mellom A og B har ligning

$$\det\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x-y+z = 0.$$

Dermed er det duale punktet til l gitt v/ $(1:-1:1) \in \mathbb{P}^{2^\vee}$.

Andre del kan løses på to måter. Ene metoden er å løse ligningene for l og m samtidig. Andre er å bruke dualitet.

Nemlig, setningene

„ C ligger på l og m "

og

„ $l^\vee$ og $m^\vee$ ligger på $C^\vee$ " er duale.

Dermed vil vi først finne det duale punktet til m, og så finne linjen mellom $l^\vee$ og $m^\vee$. Dette er $C^\vee$. Dermed er $C=(C^\vee)^\vee$.

(2)

m har dualt punkt $(2:-1:3) = m^\vee$

Dermed er linjen mellom $l^\vee = (1:-1:1)$ og $m^\vee$ gitt v/

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x + y - z = 0$$

Dette er linjen $C^\vee$, som har dualt punkt $(2:1:-1) = C$.
Som er skjæringspunktet mellom l og m.

(1b) For hvilke punkter D er kryssforholdet definert?
(A, B, C som i a)).
Finn D slik at $(AB, CD) = 3$.

Kryssforholdet er definert for punkter på en linje, så vi må kreve at $D \in l$.

Vi ser at $C = 2A - B$. Sett $D = xA + yB$

Sett $\frac{x}{y} = z$

Dermed er kryssforholdet gitt ved

$$(AB, CD) = \frac{-1 \cdot x}{2 \cdot y} = -\frac{1}{2} z = 3$$

Dermed er $-z = 6$, $z = 6$. Så $x = 6y$. Sett $y = 1$.

Dermed er $D = 6A + B$

$= (6:6:0) + (0:1:1)$

$= \underline{\underline{(6:7:1)}}.$

$\boxed{\text{MM}}$

Oppgave 4 (Eksamen 2009)

La $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{P}^2$ være det reelle proj. planet.

a) La a være linja i $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{P}^2$ med

ligning $x + 2y + z = 0$,

og la b være linja $x - y + z = 0$. Finn skjæringspunktet P mellom a og b.

b) La $Q = (1:3:0)$ og finn en likning for linja c gjennom P og Q.

c) Med notasjon som ~~over~~, finn en fjerde linje d slik at de duale punktene til linjene a, b, c, d er harmoniske.

a) Vi gjør som i forrige oppgave. Å finne skjæringspunkter mellom linjer er dualt til å finne linjer mellom punkter. Vi har at $a^\vee = (1:2:1)$ og $b^\vee = (1:-1:1)$. Linja mellom dem er gitt ved

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3x - 0 - 3z$$

$$= 3x - 3z$$
$$= 3(x - z)$$

Denne linja har duale punkt $(1:0:-1)$, som dermed blir skjæringspunktet mellom a og b. (det er lett å sjekke at dette stemmer bare se at $(1:0:-1)$ ligger på både a og b)

(B) Vi skal finne ligning for linja gjennom P og Q. Dette har vi gjort mange ganger.

$$\det \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3x - \underline{\underline{y}} + 3z.$$

(C) La d ha duale punkt $\check{d}$. De duale punktene til a, b, c er $(1:2:1)$, $(1:-1:1)$, $(3:-1:3)$.

$$\underset{A}{\underset{\parallel}{(1:2:1)}}, \quad \underset{B}{\underset{\parallel}{(1:-1:1)}}, \quad \underset{C}{\underset{\parallel}{(3:-1:3)}}$$

Vi ser at $C = -\frac{2}{3}A + \frac{11}{3}B$. Dermed er

5

$$(AB, CD) = \frac{11/3\ y}{-2/3\ x} = \frac{-11y}{2x} = -\frac{11}{2}z = -1$$

Hvor $D = yA + xB$. Sett $z = \frac{y}{x}$.

Dermed må $z = \frac{2}{11}$. Sett $x = 1$. Dermed er

$$D = \frac{2}{11}A + B = \frac{2}{11}(1:2:1) + (1:-1:1)$$

$$= \left(\frac{13}{11} : -\frac{7}{11} : \frac{13}{11}\right) = (13 : -7 : 13).$$

(ikke så pent svar!)

Oppgave 3 (eksamen 2010)

La $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{RP}^2$ være det projektive planet.

a) Finn skjæringspunktet P til linjene med ligninger

$$2x_0 + 3x_1 - 6x_2 = 0$$

$$-x_0 + x_1 + 3x_2 = 0$$

b) La $Q = (9:0:4)$ og finn ligning for linjen l gjennom P og Q.

c) I hvor mange punkter vil l skjære kjeglesnittet

$$x_1 x_2 - x_0^2 = 0 \quad ?$$

6

Gi en tegning av snittet av l og kjeglesnittet med det affine planet hvor $x_2 \neq 0$.

a) Dette har vi gjort mange ganger allerede. Første linja har dualpunkt $(2:3:-6)$ og andre har $(-1:1:3)$. Linja mellom dem er gitt v/

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15x_0 + 5x_2 = 0$$

Denne linja har dualpunkt $(15:0:5) = (3:0:1)$, og dette er skjæringspunktet til linjene vi starter med.

B) Samme som over.

$$\det \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3x_1 = 0$$

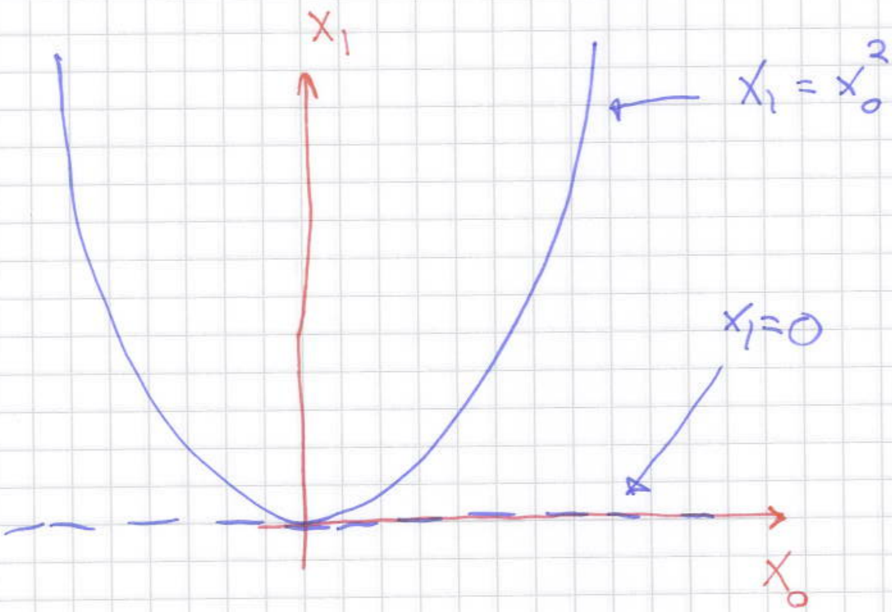
Dermed er l gitt ved $x_1 = 0$.

(c) Siden l er gitt v/ $x_1 = 0$, vil skjæringspunktet være gitt v/ $x_0^2 = 0$. $x_1 = 0$, altså

$$X = (0 : 0 : 1).$$

Om $x_2 \neq 0$, tar ligningene formen $X_1 = X_0^2$ og $x_1 = 0$

Tegner vi dette får vi



JM