Først litt om hva K-teori dreier seg om.

- Ringer, skjema, osv...

„Gjør du matematikk lenge nok vil du komme over K-teori før eller senere."

Vi har sett dette allerede før uni!

<u>Grothendieck-konstruksjon / gruppekompletering</u>

Glemsom funktor $U: \underset{\text{ab-grp}}{Ab} \to \underset{\text{komm. monoide}}{cMon}$

Har en venstreadjungert $+ : cMon \to Ab$.

Så gitt en kommutativ monoide $M \overset{\text{avb. av monoider}}{\rightsquigarrow} M^+$

„mest generelle abelske gruppen som kan konstrueres fra M"

m/ egenskapen

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\forall"'] & M^+ \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \text{gr. homomorfi}"] \\ \underset{\text{abelsk gruppe}}{G} & \end{tikzcd}$$

Så M^+ er bestemt opp til entydig isomorfi.

Med andre ord

$$\mathrm{Hom}_{Ab}(M^+, G) \simeq \mathrm{Hom}_{CMon}(M, uG)$$

Vi kan konstruere M^+ slik:

$$M^+ := M \times M / (m,n) \sim (m',n')$$

hvor $\sim$ betyr $(m,n) \sim (m',n')$

$\Updownarrow$

finnes $k \in M$ slik at $m + n' + k = m' + n + k$.

Eks

- $\mathbb{N}^+ = (\mathbb{Z}, +)$: eksempelvis $-1 = (2,1)$

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +)^+ =$ triviell !

  $n + \infty = \infty$ Monoiden større, men gruppen mindre!

  (Eilenberg–Swindle)

- R ring. $K_0(R) = \mathrm{Proj}_{fg}(R)$ end. gen proj. R-moduler $/\sim$

Feks frie R-moduler.

-

(3)

Om X er parakompakt, Hausdorff topologisk rom. Skal se på reelle og komplekse vektorbunter over X.

$$VB_{\mathbb{R}}(X) \quad \text{og} \quad VB_{\mathbb{C}}(X)$$

Kommutative monoider under Whitney-sum av vektorbunter.

gruppekomplettering $\rightsquigarrow$ får resp. $KO(X)$ og $KU(X)$

(O for „ortogonal" og U for „unitær")

- „Tilbake til Helkos" (???) Om F kropp $\rightsquigarrow$ $SBil(F)$, symme... indreproduktrom (V,B), V end. dim F-vektorrom og $B: V\otimes V \to F$ er ikke-degenerert symmetrisk bilineær form $\Rightarrow$ kommutativ monoide under $\oplus$.

$\rightsquigarrow$ Grothendieck-Witt-gruppen (ring) $GW(F) = K_0(SBil)(F)$

Har en glemsom funktor $SBil(F) \to Proj_{fg}(F)$ $\quad (V,B) \to V$

$\rightsquigarrow \quad \varepsilon: GW(F) \to K_0 F = \mathbb{Z}$

Kjernen = „fundamentalidealet" til $GW(F)$.

Relatert til

„Milnor-formodningene 1970"

$\exists$ gradede ringisomorfier

$Gr_I^{\circ}(W(F)) \to H^*(F)$

ledet til Milnor-K-teori

4

Finnes også „høyere algebraisk K-teori" (etter Quillen).

Finnes $K_0 R, K_1 R, K_2 R, \ldots, K_n R, \ldots$

Er homotopigrupper av et K-teorirom av R.
(Quillens „+-konstruksjon")

Eksempel: $\mathcal{O}_F$ heltallsringen til en tallkropp:

$K_0 \mathcal{O}_F \cong \mathbb{Z} \oplus Cl(F)$ ← idealklassegruppen.

$K_1 \mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F^{\times} = \mathbb{Z}^{r+c-1} \oplus \mu(F)$

r = # reelle embeddinger
c = # antall par av $\mathbb{C}$-embeddinger

Vist også at $K_2 \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2$ $\Longleftrightarrow$ $K_2 \mathbb{Q} = \mathbb{Z}/2 \oplus (\mathbb{Z}/3)^* \oplus (\mathbb{Z}/5)^* \oplus (\mathbb{Z}/7)^* \oplus (\mathbb{Z}/11)^* \oplus \ldots$

$= \{\pm 1\} \oplus \bigoplus_{p \in P} \mathbb{F}_p^*$

$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ kvadratisk resiprositet
Gauss

Hva m/ $K_n \mathcal{O}_F$? Quillen endeliggenererte abelske grupper

(fremdeles F = tallkropp)

5

Teorem av Borel

$$\text{rang } K_n \mathcal{O}_F = \begin{cases} 1 & n=0 \\ r+c-1 & n=1 \quad \text{(Dirichlet)} \\ 0 & n=2i>0 \\ r+c & n=4i+1 \\ r & n=4i-1 \end{cases}$$

Dedekind ζ-funksjonen

$$\zeta_F(s) = \sum_{\substack{I \subset \mathcal{O}_F \\ I \neq 0}} N(I)^{-s} \qquad N(\mathfrak{a}) = \# \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$$

$$\mathrm{Re}(s) > 1$$

Har et Euler-produkt: $\zeta_F(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}.$

Finnes en analytisk fortsettelse til en meromorf funksjon m/ en enkel pol i $s=1$.

Teorem Om F er totalt reell (eks $\mathbb{Q}$) og $F/\mathbb{Q}$ abel

så $\zeta_F(1-2n) = (-1)^{nr} 2^r \dfrac{\# K_{4n-2} \mathcal{O}_F}{\# K_{4n-1} \mathcal{O}_F}$

torsjon

$\forall \ n \geq 1.$

⑥

Milnor

$\mathbb{Z}/2$

Eks $F = \mathbb{Q}$ $\quad n = r = 1$

$$\zeta(-1) = -1 \cdot 2 \frac{\# K_2 \mathbb{Z}}{\# K_3 \mathbb{Z}} = \frac{-1}{12}$$

$\mathbb{Z}/48$

Lee-Szczarba

VELKJENT

Grothendieck-Riemann-Roch

$X \xrightarrow{f} Y$ proper avb. mellom glatte quasiprojektive avbildninger over Spec (F)

$$\begin{array}{ccc} K_0 X & \xrightarrow{ch(-)\cdot td(X)} & A(X)_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow f_! & \circlearrowleft & \downarrow f_* \\ K_0 Y & \xrightarrow{ch(-)\cdot td(Y)} & A(Y)_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

chow-ringen til X

Algebraisk versjon av singulærkohomologi.

„Euler-karakteristikk for f"

$td(X)$ = Todd-klassen til X

$$f_! = \sum_{n \geq 0} (-1) R^n f_*$$

Så om $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$,

så $R^n f_* \mathcal{F} = \overbrace{H^n(X, \mathcal{F})}$

Eks

$$\begin{tikzcd} K_0 X \arrow[r, "ch(-)td(X)"] \arrow[d, "\chi(X,-)"'] & A(X)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \oplus Cl(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "\deg"] \\ \mathbb{Z} = K_0 \mathbb{F} \arrow[r, "ch(-)td(\mathbb{F})"] & \mathbb{Q} = A(\mathbb{F})_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

$\dim X = 1$

Beviset „kommer ned til" at $\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \deg(D) + 1 - g$

klassiske Riemann-Roch!

START PENSUM/KURSET

Ring = Assosiativ ring m/ enhet. $1 \neq 0$.

- Høyre R-moduler, R ring.

- Frie moduler R kropp eller divisjonsring. ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \cancel{\mathbb{O}}$)

$\boxed{\text{NB!}}$ Finnes ringer R hvor $R^n \simeq R^{n+r}$, $r > 0$.

Eks V $\mathbb{F}$-vektorrom av ∞ dimensjon.

$\Rightarrow V \simeq V \oplus V$

La $R = End_{\mathbb{F}}(V) = Hom_{\mathbb{F}}(V,V)$ ← ass. ring

Hva m/ $R \oplus R$? $R \oplus R = Hom_{\mathbb{F}}(V,V) \oplus Hom_{\mathbb{F}}(V,V)$

$\simeq Hom_{\mathbb{F}}(V \oplus V, V)$

$\simeq Hom_{\mathbb{F}}(V,V) = R$

Merk $K_0 R = 0$

$\boxed{1910}$

Teorem (Brouwer) $m \neq n \Rightarrow \mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$
homeomorfi

Def (IBN, IBP) • R oppfyller invariant-basis-egenskapen hvis
R^n og R^m ikke er isomorfe om $m \neq n$.
• I så fall er rangen til en fri R-modul en invariant

Merk $R^n \cong R^m \Rightarrow \exists$ $(n \times m)$-matrise A og $(m \times n)$-matrise B s.a. $AB = I_n$, $BA = I_m$.

Oppg Hvis $R \xrightarrow{(1 \neq 0)} S$ ringavb og S har IBP $\Rightarrow R$ har IBP.
(Hint: fra bemerkningen) ✓

Korollar R kommutativ ring $\Rightarrow$ R har IBP.
(Fordi R har maksimale idealer)

Def 1.2 En R-modul P kalles stabilt fri av rang $n-m$ hvis $P \oplus R^m \cong R^n$.

9

Eks $0 \to \ker \sigma \to R^n \xrightarrow{\sigma} R^m \to 0$

stabilt fri av rang $n-m$?

[$\boxed{\text{NB!}}$ Moduler kan ha negativ stabil rang!, selv over ringer m/ IBP.

[**Eks** $P = \mathbb{Z}/2$ ikke stabil fri $\mathbb{Z}/6$-modul.
(tell elementer)

[**Spm** Når er stabilt frie moduler frie?
Svaret kan være negativt selv om R kommutativ.

Eks $\boxed{1.2^2}$ $R = \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1)$

restklasser $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

Ser på

$g: R^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix}\bar x\\ \bar y\\ \bar z\end{pmatrix}} R$

$h: R \xrightarrow{(\bar x\ \bar y\ \bar z)} R^3$

Sammensetningen $g \circ h = id_R$, får splitt-kort-eksakt sekvens $0 \to P \to R^3 \xrightarrow{g} R \to 0$, så $P \oplus R \underset{\theta}{\cong} R^3$

$(p,r) \mapsto p + h(r)$

Så P stabilt fri.

Anta P er fri R-modul. R kommutativ $\Rightarrow R$ har IBP.

$\Rightarrow P$ har rang 2.

$\Rightarrow \exists$ Iso $f: R^2 \xrightarrow{\simeq} P$

$$\Rightarrow \quad \phi: R^3 \xrightarrow{\simeq} P \oplus R$$
$$(r,s,t) \longmapsto (f(r,s), t)$$

Da vil $\theta \circ \varphi: R^3 \overset{\simeq}{\circlearrowleft}$ sender $(0,0,1)$ til $h(1) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Så sammensetningen er gitt v/ en matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \in Gl_3(R)$$

$\det A = u \in R^{\times}$. Multipliser den første raden til A m/ $u^{-1} \Rightarrow$

matrise $\quad B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix}$ m/ $\det B = 1_R$.

La $C_{\mathbb{R}}(S^2)$ være $\mathbb{R}$-algebraen av kont. funksjoner fra S^2 til $\mathbb{R}$.

La $\pi_i: S^2 \to \mathbb{R}$ være projeksjonen på den i-te koordinaten.

Får ringavbildning $\tau: \mathbb{R}[x,y,z] \longrightarrow C_{\mathbb{R}}(S^2)$

$$x \longmapsto \pi_1$$
$$y \longmapsto \pi_2$$
$$z \longmapsto \pi_3$$

Får indusert ringavbildning

$$\mathcal{F} : R \longrightarrow C_{\mathbb{R}}(S^2)$$

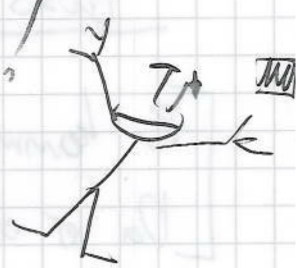
$\mathcal{F}$ anvendt på B gir ny matrise C i $C_{\mathbb{R}}(S^2)^{3\times 3}$.

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \in GL_3(C_{\mathbb{R}}(S^2)) = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \pi \end{pmatrix} \text{ radene}$$

hvor $\det C = 1_{C_{\mathbb{R}}(S^2)}$

Kryssproduktet $\beta \times \pi$ er et kontinuerlig vektorfelt på S^2 og ikke-forsvinnende (fordi $\det C \neq 0$)

Brouwer $\Rightarrow$ kontradiksjon! „kan ikke gre håret på en kokosnøtt" !



Anta $P \oplus R \approx R^n$, gitt v/ en radvektor σ, ← kalles en unimodulær rad av lengde n.

- Følgende er ekvivalent:
  - σ er unimodulær rad
  - $P \oplus R \approx R^n$, $P = \ker \sigma$, $\sigma : R^n \to R$
  - $1 = r_1 s_1 + \dots + r_n s_n$ for $s_i \in R$

Hvis P er fri, vil en basis for P gi en basis for R^n ⇝ invertibel matrise M, hvor første rad er gitt v/ σ.

- Så P fri $\Leftrightarrow$ den korresponderende unimodulære raden kan utvides til en invertibel matrise.

- Hvis R er kommutativ, så kan alle unimodulære rader av lengde 2 utvides til en invertibel matrise:

skriv $r = (r_1, r_2)$

Velg s_1, s_2 s.a. $1 = r_1 s_1 + r_2 s_2$.

La da $M = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ -s_2 & s_1 \end{pmatrix}$.

(Så $R^2 \cong P \oplus R \Rightarrow R \cong P$)

Viktig resultat

Bass' kanselleringsteorem for stabilt frie moduler

R kommutativ noethersk ring av Krull-dimensjon d.
Da er alle stabilt frie R-moduler av rang $\geq d$ fri.

Opps 1.5 ← (se på disse to) → Opps 1.6

„vi kan jo holde på litt til"

§2 Projektive moduler

• En R-modul P kalles <u>projektiv</u> hvis det finnes R-modul Q slik at $P \oplus Q$ er fri.

<u>Eks</u> $\mathbb{Z}/2$ & $\mathbb{Z}/3$ er proj. $\mathbb{Z}/6$-moduler.

• <u>Ekvivalent</u> (Projektiv løftingsegenskapen)

eksakte sekvenser

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists"'] \arrow[d, "\forall"] & \\ M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

<u>Ekvivalent</u> $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ eksakt funktor)

• Eksempler: alle frie moduler.

$\mathbb{P}(R)$ = kategorien av <u>endeliggenererte</u> projektive R-moduler

Dette er en <u>additiv</u> kategori

- Fordi hom-mengdene er abelske grupper.
- Komposisjon er bilineær
- endelige koprodukter gitt v/ $\oplus$