Hattori-Stallings sporavbildning

1

- R assosiativ ring

$$R \longrightarrow R/[R,R] \leftarrow \langle rs - sr \rangle_{r,s \in R}$$

universell mhp „sporegenskapen" $\overline{ab} = \overline{ba}$

Vil lage additiv avbildning

$$M_n(R) \xrightarrow[\text{sporavb.}]{\text{additiv}} R/[R,R]$$

$$(a_{ij}) \longmapsto \sum a_{ii}$$

$*$

- $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$
- $tr([A,B]) = 0$
- $tr\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix} = tr(M) + tr(M')$
- $M_n(R) \hookrightarrow M_{n+1}(R)$ kompatibel m/ sporavbildingen.
- Isomorfi

$$M_n(R) / [M_n(R), M_n(R)] \xrightarrow{\simeq} R/[R,R].$$

La nå $P \in P(R)$ end.gen projektiv R-modul. Velger en Basis $P \oplus Q \simeq R^n$. $\longmapsto$ R-modul avb. $R^n \longrightarrow R^n$

dvs elt i $M_n(R)$ som er idp restrikert til P og $0/Q$. (2)

$\Rightarrow$ $e \in M_n(R)$ s.a. $P = e(R^n)$ og $End(P) = eM_n(R)e$.

$\Rightarrow$ $tr(P)$ veldefinert i $R/[R,R]$, uavhengig av e, pga (*)

$\Rightarrow$ $tr: End(P) \longrightarrow R/[R,R]$.

Om $P' \in \mathbb{P}(R)$ rep v/ $f \in M_m(R)$

$\Rightarrow$ $P \oplus P'$ rep v/ $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ tr er additiv avb

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(R) \arrow[r, "tr"] \arrow[dr, "add"'] & K_0(R) \cong H_0 R = [\operatorname{Spec} R, \mathbb{Z}] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circ"] \\ & R/[R,R] \end{tikzcd}$$

La $f: \underbrace{\operatorname{Spec} R}_{\text{kvasi-kompakt}} \to \mathbb{Z}$ kontinuerlig.

$\Rightarrow$ $im(f) \subset \mathbb{Z}$ endelig delmengde

Si $im(f) = \{n_1, \dots, n_r\} \subseteq \mathbb{Z}$. $\{n_i\} \subseteq \mathbb{Z}$ åpen og lukka, så

$\exists$ idempotent $e_i \in R$ s.a. $f^{-1}(\{n_i\}) = D(Re_i)$. Her $e_i e_j = 0$

om $i \neq j$. (ortogonale idempotenter). Her $R = \sum Re_i = R_1 \times \dots \times R_r$.

Sjekk: Sporet til ~~[illegible]~~ $tr(Re_i) = e_i$

Så $tr(f) = \sum n_i e_i \in R$

Prop 2.5 For R kommutativ har vi en faktorisering

$$\mathrm{tr}: K_0 R \xrightarrow{\mathrm{rk}} H_0 R \longrightarrow R$$

Bevis

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}_0 R \arrow[r] & K_0 R \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{tr}"] & \prod_{p \in \operatorname{Spec} R} K_0 R_p \arrow[d, "\mathrm{tr}"] \\
& R \arrow[r, "\Delta"] & \prod R_p
\end{tikzcd}$$

kjerne

som også er kjerne til rang-avb. ∎

Kor Om G endelig gruppe $\Rightarrow \mathbb{Z}[G]$ har ingen idempotenter ulik $0, 1$.
($\Leftrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[G]$ er sammenhengende)

R fortsatt kommutativ. $P \in \mathbb{P}(R)$. Om P har konstant rang n er $\det P \triangleq \Lambda^n_R P$ (determinant-linjebunten til P).

- Om rangen ikke er konstant, se på $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{Z}$
  $R = R_1 \times \dots \times R_c$,

  $\Rightarrow P = P_1 \times \dots \times P_c$ m/ P_i konstant rang. Da definerer vi
  $\det P = \Lambda^{n_1}_R P_1 \times \dots \times \Lambda^{n_c}_R P_c$.

Prop Surjektiv gruppeavbildning $\det: K_0 R \longrightarrow \operatorname{Pic} R$.

Bevis $\det(P \oplus Q) = \det P \otimes_R \det Q$ ∎

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & SK_0(R) \arrow[d, "\det"] & & & \\
0 \arrow[r] & \widetilde{K_0} R \arrow[r] \arrow[d, "\det|_{\widetilde{K_0}(R)}"] & K_0 R \arrow[r, "rk"] \arrow[d, "\det"] & H_0 R \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left] & 0 \\
 & \operatorname{Pic} R \arrow[d] & \operatorname{Pic}(R) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Da er elementer i $SK_0(R)$ på formen $[P]-[R^m]$

m/ P konstant og m og $\Lambda^m_R P \cong R$.

Kor: $H_0(R) \oplus \operatorname{Pic} R$ er en (kommutativ) ring med kvadrat null ideal $\operatorname{Pic} R$ og surjektiv avbildning

$$rk \oplus \det : K_0 R \longrightarrow H_0 R \oplus \operatorname{Pic} R$$

m/ kjerne $SK_0(R)$.

(generell konstruksjon: gitt R-modul M, kan lage ring $R \oplus M$ m/ $(r,m)\cdot(r',m') = (rr', rm' + r'm)$. Kjernen $R \oplus M \to R$ er et kvadrat null ideal.)

$K_0 R = \widetilde{K_0} R \oplus H_0 R$ ring virker på $\operatorname{Pic} R$ via det.

Corr R 1-dim, kommutativ noethersk ring: $K_0 R = H_0 R \oplus \operatorname{Pic} R$
$\Rightarrow SK_0(R) = 0$.

Eks R Dedekind $\Rightarrow$ $K_0 R = \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic} R$

Så om $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ $\Rightarrow$ $K_0 R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$.

Morita-ekvivalens

def: Ringer R og S om $\exists$ funktorer

$$\text{mod-}R \rightleftarrows \text{mod-}S$$

Additive funktorer T og U s.a. $UT \simeq id_R$ og $TU \simeq id_S$.

La $P = T(R)$ og $Q = U(S)$ ←!

P blir en R-S-bimodul. høyre S-modul, venstre R-modul

via $R = \operatorname{End}_R(R) \xrightarrow[T]{\text{addit.}} \operatorname{End}_S(P)$

Q en S-R-bimodul.

Thm Anta R og S er Morita-ekvivalente.

a) P og Q er ad.gen. proj. som R- og S-moduler.

b) $\operatorname{End}_S(P) \simeq R \simeq \operatorname{End}_S(Q)^{op}$

$\operatorname{End}_R(Q) \simeq S \simeq \operatorname{End}_R(P)^{op}$

c) P og Q er duale S-moduler

$P \simeq \operatorname{Hom}_S(Q, S)$ $Q \simeq \operatorname{Hom}_S(P, S)$

d) $T(M) \simeq M \otimes_R P \quad \forall M \in \text{Mod-}R$

$U(N) \simeq N \otimes_S Q \quad \forall N \in \text{mod-}S$

<u>Korollar</u> Ekvivalens av kategorier $\mathbb{P}(R) \simeq \mathbb{P}(S)$.

Så $K_0 R \simeq K_0 S$.

[<u>Eks</u> R og $M_n(R)$ er Morita-ekvivalente.]

<u>Eks 2.8.1</u> $R \xrightarrow{f} S$ ring avb. Da er S en R-S-bimodul. (høyre S-modul og venstre R-modul)

$$f^*: K_0 R \longrightarrow K_0 S$$
$$P \longmapsto P \otimes_R S$$

Hvis S endl-gen projektiv høyre R-modul har vi en glemsom avbildning

$\mathbb{P}(S) \to \mathbb{P}(R) \quad \rightsquigarrow \quad f_*: K_0 S \xrightarrow{\text{glemsom}} K_0 R$

kalles "transfer-avbildningen"

<u>Oppg II 2.2</u> s78 Projeksjonsformelen: $f_*(x \cdot f^* y) = f_*(x) \cdot y$

Mayer-Vietoris

$$GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R) \qquad M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lad $\quad GL(R) = \mathrm{colim}\; GL_n(R) = \bigcup GL_n(R)$

Lad være givet et Milnor-kvadrat

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/I & \xrightarrow{\bar{f}} & S/I \end{array}$$

$g \in GL_n(S/I) \rightsquigarrow$ limer $(R/I)^n$ og S^n langs g (Milnor patching).

Definer $\quad \partial_n : GL_n(S/I) \longrightarrow K_0 R$

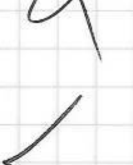
$$g \longmapsto [P] - [R^n]$$

Inducerer afbildning $\quad GL(S/I) \longrightarrow K_0 R$

Thm (Mayer-Vietoris) Eksakt sekvens

$$GL(S/I) \to K_0 R \to K_0 S \oplus K_0 R/I \longrightarrow K_0(S/I)$$

Eks 2.9.1 $\quad R = k[x,y]/(y^2 - x^3 + x^2) \qquad K_0 R = \mathbb{Z} \oplus \underbrace{k^*}_{\mathrm{Pic}\, R}$



$R = k[x,y]/(x^3 - y^2) \qquad K_0 R = \mathbb{Z} \oplus k$

§3! $K(X)$, $KO(X)$, $KU(X)$

8

(X parakompakt)

$VB_{\mathbb{R}}(X)$ $VB_{\mathbb{C}}(X)$

kommutative semiringer mhp $\otimes$

Eks $K(*) = \mathbb{Z}$
~~alle~~ bare trivelle $\leftrightarrow$ vektorrom

Også: Om $X \simeq \{*\}$, så $K(X) \simeq \mathbb{Z}$.

om avb $Y \to X \mapsto f^*: VB(X) \longrightarrow VB(Y)$
pullback / tilbaketrekning

(merk: kontravariant)

Har $\mathbb{Z} \oplus \to K(X)$ (direkte summand) v/ å „sammenligne" X m/ et punkt $*$.

$$\mathbb{N} \subset [X, \mathbb{N}] \subset VB(X)$$
trivelle komponentvis trivelle vektorbunter.

Har også en „dimensjonsavbildning"
$$\dim: VB(X) \longrightarrow [X, \mathbb{N}].$$

Ringavb $\dim: K(X) \longrightarrow [X, \mathbb{Z}]$ som splitter

Splitter, m/ kjerne $\widetilde{K}(X)$ – redusert K-teori av X.

så $K(X) \cong \widetilde{K}(X) \oplus [X, \mathbb{Z}]$ ← kan identifiseres m/ $H^0(X)$ (ihvertfall om X er kompakt)

homotopiklasser

$$\text{Se på } [X, \mathrm{Grass}_n] = VB_n(X) \longrightarrow \widetilde{K}(X)$$
$$E \longmapsto [E] - \underline{n}.$$

trivielle bunt av rang n.

Kompatibel m/ stabilisering ⇝ får avbildning

$$\operatorname{colim}_n [X, \mathrm{Grass}_n] = \operatorname{colim}_n VB_n(X) \xrightarrow{s} \widetilde{K}(X)$$

Thm 3.1 (Stabiliseringsteorem) X kompakt eller end.dim CW-kompleks $\Rightarrow$ s iso.

∞ $\widetilde{KU}(X) = \operatorname{colim}_n [X, BU_n]$

$\widetilde{KO}(X) = \operatorname{colim}_n [X, BO_n]$

$\widetilde{KSp}(X) = \operatorname{colim}_n [X, BSp_n]$

<u>Eks 3.1.1</u> (Sfærer) $KU(S^d) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{KU}(S^d)$

$$KO(S^d) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{KO}(S^d) \qquad \begin{cases} \mathbb{Z} & d>0 \text{ partall} \\ 0 & d \text{ odde} \end{cases}$$

$d \bmod 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widetilde{KO}(S^d)$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

<u>Teorem</u> X kompakt. $\widetilde{KO}(X) = [X, BO]$ — uendelig reell Grassmann

$$\widetilde{KU}(X) = [X, BU]$$

$$KO(X) = [X, \mathbb{Z} \times BO]$$

$$KU(X) = [X, \mathbb{Z} \times BU]$$

<u>Bevis</u> „bare rett frem"

Anta $Y \subset X$ kompakt underkompleks. Definer $K^0(X,Y) = K^0(X/Y)/\mathbb{Z}$

$$= [X/Y, \mathbb{Z} \times {BO \atop BU}]/\mathbb{Z}$$

(hvor $\mathbb{Z} \to K(X/Y)$)

Definer $\widetilde{K}(X/Y) = \widetilde{F}(X/Y)$.

Prop 3.3 $Y \subset X$ underkompleks av CW-komplekser.

$$K(X,Y) \to K(X) \to K(Y)$$

Tilsvarende for reduserte teorier.

Bem 3 $Y \subset X$ kofibrasjon. (???)

Eks 3.2.3 $X = \operatorname{colim} X_i$ X_i CW-komplekser

$$0 \to \varprojlim{}^1 K^{n-1}(X_i) \to K^n(X) \to \varprojlim K^n(X_i) \to 0$$

Milnors lim – lim^1 - eksakte sekvens.

Konsekvens $KU^0(\mathbb{CP}^\infty) \cong \mathbb{Z}[[x]]$ (eks 3.7)

Def La $n > 0$. Definer $KO^{-n}(X) = \widetilde{KO}^{-n}(X) \oplus \widetilde{KO}(S^n)$

$$\| \text{def}$$

$$\widetilde{KO}^0(S^n X) = [S^n X, BO]$$

Tilsvarende for $KU^{-n}(X)$ og $KSp^{-n}(X)$.

Kom m/ Bott-periodisitet utvides til positive grader.

(Involverer ∞-løkkeromsteori)

Thm 3.6 $Y \subset X$ underkompleks. mo lang eksakt sekvens

$$
\begin{tikzcd}
K^0(Y) & K^0(X) \arrow[l] & K^0(X/Y) \arrow[l] \\
\cdots \arrow[r] & K^{-1}(X) \arrow[r] & K^{-1}(Y) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Lemma (oppg 3.7) $KU(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}^{n+1}$

$KU^{-1}(\mathbb{C}P^n) = 0$

(2-periodisk v/ Bott-periodisitet, oppg II 3.5)

"muligens nok en oppgave"

Bevis Induksjon på n. $n=0$

Anta $KU^{-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$ $KU(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{Z}^n$.

Eksakt sekvens for $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{KU}^0(S^{2n}) = KU^0(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \arrow[r] & KU^0(\mathbb{C}P^n) \arrow[r] & KU^0(\mathbb{C}P^{n-1}) \arrow[d] \\
KU^{-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) & KU^{-1}(\mathbb{C}P^n) \arrow[l] & KU^{-1}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

$\widetilde{KU}^0(S^{2n}) = \mathbb{Z}$, Bott, $KU^0(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{Z}^n$, må splitte

eksakt $\Rightarrow$

$KU^{-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0 \Rightarrow KU^{-1}(\mathbb{C}P^n) = 0$

ved induksjonshyp.

$KU^{-1}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \cong KU^{-1}(S^{2n}) \cong KU^0(S^{2n+1}) = 0$

$KU(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[L_n]/(L-1)^{n+1}$

$\mathcal{O}(1)$

Gitt denne ringisomorfi + Milnor lim-lim^1 (13)

$$\Downarrow$$

$$KU(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}[[x]].$$

Opg 9
$$\left.\begin{aligned} KU^0(\mathbb{R}P^2) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \\ KU^{-1}(\mathbb{R}P^2) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ opg 3.10}$$

(ikke helt trivielt. Regnet ut av Adams)

"Før vi tar dagen, starter vi på"

§4 Lambda og Adams-operasjoner

K kommutativ ring kalles en λ-ring hvis $\exists$
$\lambda^k : K \to K$ for $k \geq 0$ s.a. følgende holder $\forall x, y$

① $\cdot\ \lambda^0 = $ $\cdot\ \lambda^1 = id_K$

② $\cdot\ \lambda^k(x+y) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i(x)\lambda^{k-i}(y)$

② Ekvivalent m/ ringhomomorfi $K \to W(K) = 1 + tK[[t]]$.

Eks 4.11 (binomiale ringer) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Definer $\lambda^k(n) = \binom{n}{k}$.
om K $\mathbb{Q}$-algebra $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$

(14)

En <u>binomial ring</u> er en underring av en $\mathbb{Q}$-algebra s.a. $\forall\, x \in K$ og $k \geq 1$, så er $\binom{x}{k} \in K$.

Om M semiring, så er M en λ-semiring om $\exists\, \lambda^k : M \to M$ slik at ① og ② holder.

(da er også $M^{-1}M$ en λ-ring)

<u>Eks</u> R komm ring. $K_0 R$ λ-ring m/

$$\lambda^k P = \Lambda^k_R P.$$

<u>Eks</u> $K(X)$ λ-ring på samme måte.

<u>Eks</u> $Rep_{\mathbb{F}}(G)$ — " —

<u>Siden påskeferie</u>

<u>Lekse</u> les gjennom avsnitt 4.