G. Ellingsrud 26/2 - 2015 (1)

1907 Koebe + Poincaré

- uniformeringsteoremet.
  - ↳ Om X sammenhengende Riemann-flate og enkeltsammenhengende. Da er

$$X = \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{H} \end{cases} \qquad \mathbb{H} = \text{øvre halvplan} \simeq \mathbb{D}$$

„skisserer bevis m/ mange fysikkord"

Om Y vilkårlig Riemann-flate, sammenhengende, så $\exists$ universell overdekningsrom

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ Y \end{array}$$

X RF, så X er en av disse.

$\Gamma = \pi_1(Y)$ virker på X og $Y = X/\Gamma$.

- Γ virker fritt.
- $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X) = \{\text{Biholomorfe } X \to X\}$.
- Γ virker diskontinuerlig. (diskret)

	K		
$\hat{\mathbb{C}}$	1	sfærisk	$\hat{\mathbb{C}}$
$\mathbb{C}$	0	flat	elliptiske kurver
$\mathbb{H}$	-1	hyperbolsk.	Vilt kaos

annuli ◎ ②

Brudne lineærtransformasjoner (Möbius-transformasjoner)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \qquad \tilde{A}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\downarrow$$

$\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, men har kjerne!

Så $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \subseteq PGL_2(\mathbb{C})$. Thm De er like. (E skriv bare „=")

Tilsvarende, $PSL_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. $(= \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}))$

Thm $=$.

≤ kalles Fuchsiske $\qquad \mathbb{Z}/2 \qquad$ diskrete undergr. kalles Kleinske

$$SL(2,\mathbb{Z}) \subseteq SL(2,\mathbb{R}) \subseteq SL(2,\mathbb{C})$$

modulære gruppen

$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$

$SL(2,\mathbb{C}) \to SO^{\uparrow}(1,3)$

universell overdekningsrom for Lorentz-gruppen

isometrigruppen til $\mathbb{H}^3$, øvre halvrom

Se litt på elliptiske kurver. (bytter tavla med papir) ③

Om $E/\mathbb{C}$ er elliptisk kurve. (kompakt Riemannflate av genus 1)
m/ $0 \in E$
utvalgt punkt

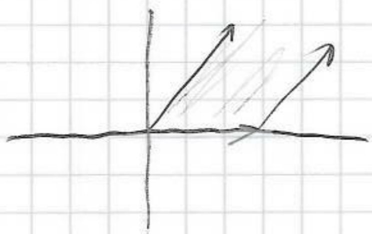
① Finnes gitter $\Lambda \leq \mathbb{C}$, $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \omega_2 \mathbb{Z}$

så $E \simeq \mathbb{C}/\Lambda$.

② $E \simeq E' \iff \exists a \in \mathbb{C}$ m/ $a\Lambda = \Lambda'$.

③ $\Rightarrow$ elliptiske kurver klassifiseres av klassifikasjon av gitre:

Anta $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ m/ $\operatorname{Im}\tau > 0$.



Når er $E/\Lambda_\tau \simeq E/\Lambda_{\tau'}$?

$\Rightarrow \exists \alpha$ m/ $\alpha\Lambda_{\tau'} = \Lambda_\tau$.

$\Rightarrow$ $\alpha\tau' = a\tau + b$
$\alpha = c\tau + d$ $\Rightarrow \tau' = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Betingelsen $\operatorname{Im}\tau > 0$ gir $A \in SL(2,\mathbb{Z})$.

<u>Prop</u> Så <u>isomorfiklasser</u> av elliptiske kurver $\simeq \mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$

Eksempler

∘ Prinsipale kongruensgrupper $N \in \mathbb{N}$

Se på $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to \Gamma(N) \to SL(2,\mathbb{Z}) \to SL(2,\mathbb{Z}/N) \to 0$$

lemma: surjektiv

∘ Tilfellet $N=2$

To opplagte elementer m/ i kjernen:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Med litt arbeid vises at $\Gamma(2) = \langle g, h \rangle$.

Prop $\Gamma(2)$ er fri.

Tilsvarende Möbius-avbildninger er $z \mapsto z+2$, $z \mapsto \frac{z}{2z+1}$.

Fun fact: Monsteret er generert av 2 elem.

Ping-pong-lemma $g, h \in Aut(X)$.

$$X_1 \subset X, \quad X_2 \subset X, \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset.$$

Om $g^n X_1 \subset X_2 \quad \forall n \neq 0$ ping

og $h^n X_2 \subset X_2$ pong $\boxed{g^2 \neq id}$

$\langle g, h \rangle$ er da fri

"Nesten alle simple gr. er generert av to elementer.

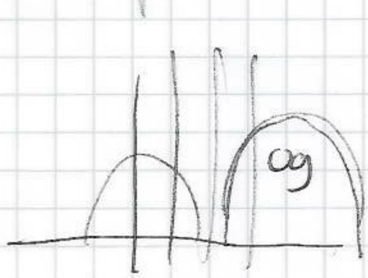
~~Anta~~ Her funker:

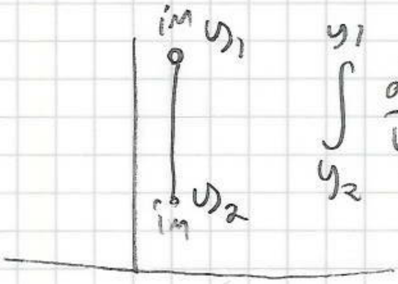
$$X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < |y| \right\}$$

$$X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| < |x| \right\}.$$

Hyperbolsk metrikk på $\mathbb{H}$: $\quad ds = \dfrac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$

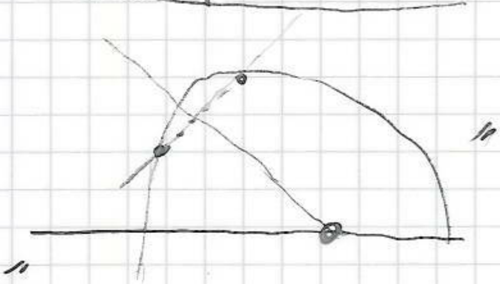
Geodetiske linjer





$$\int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y} = \log\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$$

„Finne geodet mellom to punkter"



① $A = \dfrac{az+b}{cz+d}$

tar sirkler på sirkler

② A er en hyperbolsk isometri:

$$\operatorname{Im} Az = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

③ Derivere rett fram eller no sa:

$$\frac{\det A}{(cz+d)^2}.$$

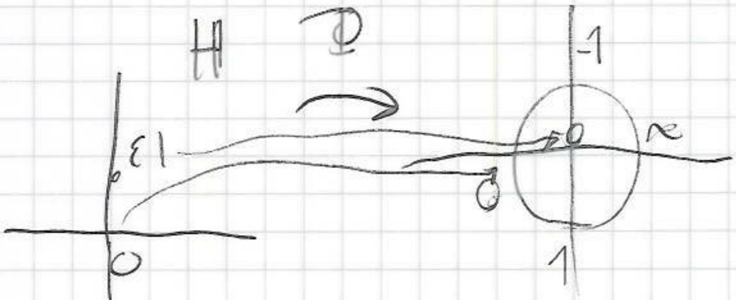
Så $\quad \dfrac{|dA(z)|}{\operatorname{Im}(Az)} = \dfrac{|A'(z)||dz|}{\operatorname{Im} Az} = \quad$ ——— $\quad \checkmark$

6

<u>Prop</u> $PSL(2,\mathbb{R}) = Aut(\mathbb{H})$

Har BV $\mathbb{H} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{D}$

$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$



<u>Reformulering</u>

Om $f \in Aut(\mathbb{D})$, så er f en Möbius-transformasjon?

<u>Schwarz lemma</u> ("ikke sikkert Schwarz visste om dette")

La $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. $f(0)=0$. Ett av to er

<u>riktig</u>: Enten

① $|f(z)| < |z|$ og $|f'(0)| < 1$ $\forall z \in \mathbb{D}$. $z \neq 0$

② $f(z) = kz$ for $k \in S^1$.

<u>Bevis</u> Maksimumsprinsippet ("analytiske avb. er åpne"). La

$g(z) = \frac{f(z)}{z}$. Denne er analytisk i $\mathbb{D}$.

På $|z|=r$,

$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{r} < \frac{1}{r} \Rightarrow |g(z)| \leq \frac{1}{r}$ $\forall z$ $|z| < r$.

La $r \to 1$. Da er $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < 1$. $(z \neq 0)$

Om $\frac{|f(z)|}{|z|} = 1$, så er $\frac{f(z)}{|z|}$ konstant. ∎

7

Prop Om $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$, $f(0) = 0$,

$\Rightarrow$ $f(z) = kz$ $|k| = 1$.

Følger enkelt.

Om $a \in \mathbb{D}$, så definer

$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \qquad \phi_a(a) = 0.$$

⋮

Prop Isotropigruppa til 0 $\simeq S^1$.

Har $SL_2(\mathbb{R}) / \mathrm{Iso}(i) \simeq \mathbb{H}$.

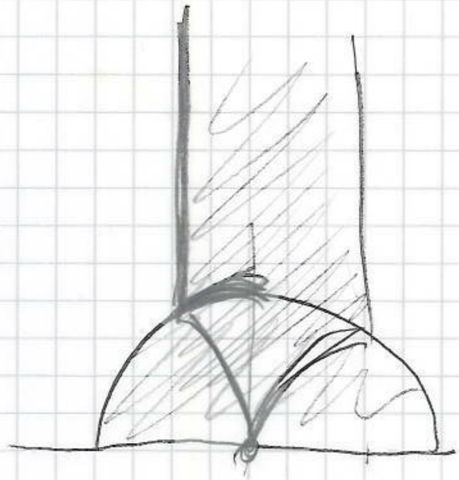
$\mathrm{Iso}(i) \simeq S^1$

Topologisk $SL_2(\mathbb{R}) \simeq S^1 \times \mathbb{H}$

⋮

Fundamentalområdet til Γ

$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$



0 er en „cusp"

„ikke noe m/ singulariteter å gjøre"

„skissering av bevis"