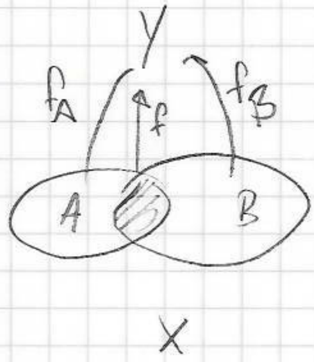
La $X = A \cup B$



Om $f_A|_{A \cap B} = f_B|_{A\cap B}$, så finnes

avbildning $f: X \to Y$ hvis

① A, B åpne

② A, B lukkede.

Prop La $E \to X$ være en familie av vektorrom.

a) Hvis $\{U_\alpha\}$ åpen overdekning av X og $E|_{U_\alpha}$ er en vektorbunt, så er E en vektorbunt.

B) Anta $\{A, B\}$ er en lukket overdekning av X. og anta $\forall x \in A \cap B$, $\forall$ åpne omegner $x \in U \subset X$, så $\exists$ omegn $V \subseteq U$ slik at

$$V \cap A \cap B \hookrightarrow V \cap B \quad \text{har en retraksjon.}$$

retraksjon

Dersom $E|_A$ og $E|_B$ er v.b., så er E en v.bunt.

__Korollar__ La $\{A, B\}$ være en overdekning av X.

La $E_A \to A$ og $E_B \to B$ være vektorbunter sammen

med en vektorbunt-isomorfi $\varphi: E_A|_{A \cap B} \xrightarrow{\cong} E_B|_{A\cap B}$

Da eksisterer det en vektorbunt $E \to X$ slik at $E_A \cong E|_A$ og $E_B \cong E|_B$,

dersom a) A & B åpne i X

B) som i B) i Prop.

$$\begin{tikzcd}
E_A|_{A\cap B} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & E_B|_{A\cap B} \arrow[r, hook] & E_B \arrow[d] \arrow[dd, bend left] \\
E_A \arrow[rr] \arrow[rrd, bend right] & & E \arrow[d, dashed, "\text{indusert}"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

„pushout"

Generalisering til en åpen overdekning $\{U_\alpha\}$ av X. Anta $E_\alpha \to U_\alpha$ vb. og isomorfier $\phi_{\beta\alpha}: E_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \xrightarrow{\simeq} E_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$.

Se på $E = \bigsqcup E_\alpha / \sim$ ← ekvivalensrelasjonene generert av $(\alpha, v_\alpha) \sim (\beta, \phi_{\beta\alpha}(v_\alpha))$

$v_\alpha \in \bigsqcup_\gamma E_\gamma$ $\quad \forall \alpha, \beta, \quad v_\alpha \in E_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$.

Ikke nødvendigvis riktig at $E|_{U_\alpha} \simeq E_\alpha$.

Anta $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ indekser s.a. $\alpha_0 = \alpha_n = \alpha$. Hvis $v \in E_\alpha$, skal vi identifisere v med $\phi_{\alpha_1, \alpha_0}(v)$ som igjen skal -"- m/ $\phi_{\alpha_2 \alpha_1}(\phi_{\alpha_1 \alpha_0}(v))$ osv. får $v \sim (\phi_{\alpha_n \alpha_{n-1}} \cdots \phi_{\alpha_1, \alpha_0})(v) \in E_\alpha$, så vi identifiserer ting i samme kart!

Så innfører noen ekstra betingelser:

---

① $\phi_{\alpha,\alpha} = id$

② Isomorfiene $\phi_{\gamma,\alpha} = \phi_{\gamma,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha}$ er like på snittet $E_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}$

„kosykelbetingelsen"

„Grunnen til koeykler er $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(X) \simeq \check{H}^1(X, GL_n(\mathbb{R}))$ (3)

Čech-kohomologi

Def $E \to X$ reell v.bunt. Et indreprodukt på E er en avbildning av v.b. $E \otimes E \to \underline{1}$ (triviell v.b. rang 1) som induserer en positiv definit symmetrisk bilineær form på hver fiber E_x.
V.bunt utstyrt m/ indreprodukt kalles „ortogonal".

Prop La X parakompakt + Hausdorff. Da har alle v.bunter på X et indreprodukt. (tilsv. for komplekse)

Bevis La $\{U_\alpha\}$ være en åpen overdekning hvor E er triviell på hver U_α. Da har vi $f_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. her har vi jo et indreprodukt.

$\rightsquigarrow$ indreprodukt på $E|U_\alpha$ $\langle , \rangle_\alpha$.

La $\{\phi_\alpha\}$ være en partisjon av enheten. For $x \in X$ og $v, w \in E_x$,

la $\langle v, w \rangle = \sum_\alpha \phi_\alpha(x) \cdot \langle v, w \rangle_\alpha$.

Kor $E \to X$ reell v.bunt X parakompakt + Hausdorff. Da er $E \simeq E^\vee$

Bevis $E \otimes E \to \underline{1}$

Fiberwise ikke-degen. symmetrisk bilineære former. $E_x \otimes_{\mathbb{R}} E_x \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $E_x \simeq E_x^\vee$

(For komplekse v.bunter $E \simeq \overline{E^\vee}$.)

Prop X et rom. Ethvert indreprodukt på $X \times \mathbb{R}^n$ er isomorft til det „konstante" indreproduktet, gitt v/ det Euklidske „ $\langle , \rangle$.

„ta som god fisk"

reell rom n v.b. E m/ indreprodukt

$$E \downarrow X$$

Velg trivialisering $\{U_\alpha\}$ og fikser $f_\alpha : E|_{U_\alpha} \to \underbrace{U_\alpha \times \mathbb{R}^n}_{\text{standard v.b.}}$.

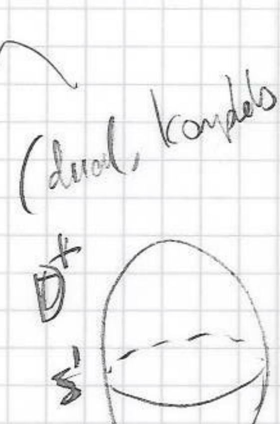
Har overgangsfunksjoner $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{c} GL_n(\mathbb{R}) \\ \cup\! | \\ O_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

fra over $\longrightarrow$

finnes s.t.h. „Reduksjon til strukturgruppen"

Eks (dual, kompleks setting)



Gitt $f : S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$ kan vi konstruere v.b på S^2.

Se på $\underline{n}_{D_+}$ og $\underline{n}_{D_-}$ og lim langs f. **presist:** for $z \in S^1$, $v \in (\underline{n}_{D_+})_z$ identifiseres m/ $f(z) \cdot v \in (\underline{n}_{D_-})_z$.

Får en vektorbunt $E(f)$ på S^2. En isomorfi mellom $E(f) \cong E(g)$ er ekvivalent m/ følgende data:

$$A : D_+ \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$$
$$B : D_- \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$$

slik at $\quad g(z) \cdot A(z) = B(z) f(z) \quad \forall\, z \in S^1.$

Med andre ord: $\quad A(z) = g(z)^{-1} B(z) f(z) \quad$ for $z \in S^1$.

Men $B|_{S^1} : S^1 \to Gl_n(\mathbb{C})$ nullhomotop fordi den utvides over D_-. (homotop til konstant avbildningen i 1)

$\Rightarrow$ avbildningen
$$z \longmapsto g(z)^{-1} B(z) f(z) \text{ er homotop}$$
til
$$g(z)^{-1} f(z)$$

Tilsvarende ~~er~~ er $A|_{S^1} : S^1 \to Gl_n(\mathbb{C})$ nullhomotop.

[Så hvis $E(f) \cong E(g)$ er $z \mapsto g(z)^{-1} f(z)$ nullhomotop.

Merk $\quad E(f) = E(\check{f}) : \check{f}(z) = \left(f(z)^T\right)^{-1} \in Gl_n(\mathbb{C})$

Så hvis $E(f) \cong E(\check{f})$, så er $z \mapsto f(z)^T f(z)$ nullhomotop

Her $f(z) = z = id.$ og $z \mapsto z^2$ har grad 2, så ikke nullhomotop!

Så $E(\check{id}) \neq E/S^1$

[Lemma X kpt. Anta $f : \underline{1} \to \underline{k}$ surjeksjon av trivielle bunter.
$\Rightarrow f$ har en splitting.

La $W = \{A \in M_{kn} \mid rk\, A = k\}$. (rommet av surjektive avb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$)

Se på $Z = \left\{ (A,B) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in M_{kn} \\ B \in M_{nk} \end{array}, AB = I \right\}$ (6)

Her er fiberbunt $\mathbb{R}^{n(n-k)} \to Z \xrightarrow{pr_1} W$ (krever et bevis)

$\mathbb{R}^{n(n-k)} \cong (*)$ ← kontraktibel, så pr_{1*} iso, i.e. pr_1 er π_*-isomorfi.

rommet av surjeksjoner pluss velge splitting.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "\sim"] \\ W \arrow[ur, "\exists r"] \arrow[r, equal] & W \end{tikzcd}$$

„svak homotopiekvivalens"

CW-kompleks (homogent rom)

(„f har en splitting")

Prop La X parakompakt + Hausdorff. Da har enhver surjeksjon av v.bunter $E \to F$ en splitting.

Bevis Velg trivialisering $\{U_\alpha\}$ for E og F. Har splittinger $\psi_\alpha : F|_{U_\alpha} \to E|_{U_\alpha}$. La $\{\phi_\alpha\}$ være partisjon av enheten, og la

$$X = \sum_\alpha \phi_\alpha X_\alpha \quad \leftarrow \text{splitting.} \quad \blacksquare$$

Prop $E \xrightarrow{f} F$ avb. av vektorbunter over et rom X. Hvis f har konstant rang, så er $\ker(f)$, $\operatorname{im}(f)$ og $\operatorname{cok}(f)$ v.b.

Korollar Hvis X parakompakt, Hausdorff, så til enhver injeksjon av vektorbunter $E \hookrightarrow F$ har en splitting.

7

Bevis

La $Q = F/E$. Er v. bunt.

Da har $F \twoheadrightarrow Q$ en splitting

$\Rightarrow$ Isomorfi $F \simeq E \oplus Q$

Sammensetningen $F \xrightarrow{\simeq} E \oplus Q \xrightarrow{pr_1} E$

gir splitting. ∎

Prop X kompakt + Hausdorff. Da er enhver v.b. over X en underbunt av en triviell bunt.

Bevis
$$\begin{array}{c} E \\ \pi \big\downarrow \\ X \end{array}$$
Velg trivialiseringer $f_i : E|_{U_i} \xrightarrow{\simeq} U_i \times \mathbb{R}^n$

La $F_i = \pi_2 \circ f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

La $\{\phi_i\}$ være partisjon av enheten.

La
$$\beta : E \longrightarrow X \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{s}$$
$$v \longmapsto \left(\pi(v),\ \phi_1(\pi v) F_1(v), \dots, \phi_s(\pi v) F_s(v)\right).$$

Merk $v \notin E|_{U_i}$ er ikke $F_i(v)$ definert, men $\phi_i(\pi(v)) = 0$.

$\rightsquigarrow$ gir en b. av bunter. ∎

Swans theorem (oppg 4.9 i Weibel) ⑧

X top. rom.

$C(X)$: $X \to \mathbb{R}$ ringen av kont' funksjoner.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"'] \\ X \arrow[u, bend right, dashed] \end{tikzcd}$$

seksjoner av E

$\Gamma(E)$ er $C(X)$-modul.

$f \in C(X)$, $s \in \Gamma(E)$, da er
fs gitt ved $x \mapsto f(x)s(x)$ (multiplikasjon i fibre)

Får funktor $VB(X) \longrightarrow C(X)$-moduler
$E \longmapsto \Gamma(E)$.

Prop X kompakt Hausdorff. Da er $\Gamma(E)$ nd. proj. $C(X)$-modul.

Bevis La $E \hookrightarrow \underline{N}$ embedding. Kvotienten Q er v.bunt. Så får
$$0 \to E \to N \to Q \to 0$$

$\rightsquigarrow$ $\Gamma(-)$ er venstreeksakt, så får

$$0 \to \Gamma(E) \to \Gamma(\underline{N}) \to \Gamma(Q) \qquad (*)$$

av $C(X)$-moduler. Men surjeksjonen $N \to Q$ har en splitting, så (*) er eksakt + split, så $\Gamma(E) \oplus \Gamma(Q) \cong \Gamma(\underline{N}) \cong C(X)^{\oplus N}$. ∎
Så $\Gamma(E)$ er projektiv.

(9)

Swans thm X kompakt Hausdorff.

$$\Gamma : VB_{\mathbb{R}}(X) \longrightarrow \mathbb{P}(C(X))$$ proj. moduler / $C(X)$

er en ekvivalens av kategorier.

– $P \in \mathbb{P}(C(X)) \Rightarrow \exists \; E \downarrow X$ s.a. $\Gamma(E) = P$.

– For $E, F \in VB_{\mathbb{R}}(X)$, Γ gir bijeksjon

$$\Gamma : Hom_{VB_{\mathbb{R}}(X)}(E, F) \xrightarrow{\sim} Hom_{C(X)}(\Gamma(E), \Gamma(F)).$$

„full og trofast"

„veldig vanskelig å være samtidig!"
Da er man snill gutt!

Bevis – Velg en splitting $p : C(X)^n \rightleftarrows P$ (s). La $e = sp$. Da er $e^2 = e$, og $P \cong im(e)$. e er av $C(X)^n \to C(X)^n$ som er en $n\times n$-matrise m/ elementer e_{ij} i ringen $C(X)$. For hver X, får $e(x) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$\alpha : \mathbb{R}^n \times X \longrightarrow \mathbb{R}^n \times X$$
$$(v, x) \longmapsto (e(x)v, x)$$

Ekvivalent schema av bunter

$$\underline{n} \xrightarrow{\alpha} \underline{n} \xrightarrow{1-\alpha} \underline{n}$$ siden $e^2 = e$

Påstand

$$E = \operatorname{im}(\alpha) \quad \text{v.b. over } X.$$
$$P \cong \Gamma(E)$$

$$\begin{tikzcd}
\ker\alpha \arrow[r, hook] & \underline{n} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \underline{n} \\
& \operatorname{im}\alpha \arrow[u, dashed, bend left, "\text{splittes}"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Bruker $\Gamma(-)$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\ker(\alpha)) \arrow[r, hook] & C(X)^n \arrow[r, "e"] \arrow[d] & C(X)^n \\
& \Gamma(\operatorname{im}(\alpha)) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Siden
$$0 \to \Gamma(\ker(\alpha)) \to C(X)^n \longrightarrow \Gamma(\operatorname{im}(\alpha)) \to 0$$
er eksakt og $\Gamma(\ker\alpha) \simeq \ker(\Gamma(\alpha))$ viser at e er kjernen til $\Gamma(\ker\alpha)) \to \Gamma(\operatorname{im}(\alpha))$ er iso m/ $\operatorname{im}(e)$ som er P.
(så Γ er surj. på isomorfiklasser)

For $x \in X$, $ev_x : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ $\quad \underline{m}_x = \ker(ev_x)$ maksimale ide…

I tillegg $ev_x : \Gamma(E) \longrightarrow E_x$. Undermodulen $\underline{m}_x \Gamma(E)$ sendes til…

Lemma Den induserte avbildningen $ev_x : \Gamma(E)/\underline{m}_x\Gamma(E) \to E_x$ er en isomorfi.

Bf Bruker følgende: (11)

(*) Hvis s er en seksjon i E definert i en åpen omegn U av x, så $\exists$ seksjon s' definert på X slik at s og s' er like på en omegn om x.

Må bruke Urysohns lemma. Velg først en omegn V om x ^{cU} slik at $\bar{V} \subset U$. Finn en kont. funksjon $f: X \to \mathbb{R}$ s.a.

$$f|_{\bar{V}} = 1 \quad \text{og} \quad f|_{X \setminus U} = 0$$

Da er $z \mapsto f(z)s(z)$ definert på X og gir den ønskede seksjonen.

Surj La $v \in E_x$. E lokalt trivell, så bruk en s s.a. $s(x) = v$ ved (d). Ved (*) finn s' / X s.a. $s'(x) = v$. ✓

Injektiv Anta $s \in \Gamma(E)$ og $s(x) = 0$. Vil vise at $s \in m_x \Gamma(E)$.

Velg uavhengige seksjoner $\{e_1, \dots, e_n\}$ definert på U. Ved (*) kan disse utvides til hele X (om vi erstatter ~~U~~ m/ en litt mindre en).

Har basis $e_1(y) \cdots e_n(y)$ basis for E_y $\forall y \in U$. Kan skrive

$s(y) = a_1(y)e_1(y) + \dots + a_n(y)e_n(y)$ for entydig bestemte $a_i(y)$.

$a_i \in C(\cancel{X})$, og kan betraktes som i den trivielle buntem $X \times \mathbb{R}$, og kan igjen utvides til $a_i \in C(X)$. Nå: $s(x) = 0 \Rightarrow a_i(x) = 0$

La nå $t = s - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \Gamma(E)$. 12

Merk $t|_U = 0$.

Urysohns lemma $\Rightarrow$ velg $b: X \to \mathbb{R}$ slik at

$$b(x) = 0 \quad \text{og} \quad b|_{X \setminus U} = 1.$$

Har at $s(y) = b(y)\,t(y) + \sum_{i=1}^{n} a_i(y)\, e_i(y) \quad \forall y \in X$.

$\Rightarrow \quad s \in m_x \Gamma(E)$.

(Ikke tid, „lite lemma")

Prop $\Gamma: \mathrm{Hom}_{VB(X)}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(X)}(\Gamma(E), \Gamma(F))$

Ok for E, F begge trivielle. Fordi: en ab $X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^l$ er unikt bestemt av en avb. $X \to M_{l \times k}(\mathbb{R})$.

Tilsv. $C(X)^k \to C(X)^l \longleftrightarrow M_{l\times k}(C(X))$.

Se på

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{VB(X)}(E,F) \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{C(X)}(\Gamma(E), \Gamma(F)) \arrow[d] \\
\prod_{x \in X} \mathrm{Hom}(E_x, F_x) \arrow[r, "\simeq", "\text{lemma}"'] & \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}\left(\Gamma(E)/m_x\Gamma(E), \Gamma(F)/m_x\Gamma(F)\right)
\end{tikzcd}$$

impliserer at Γ er injeksjon!