(fortsettelse av et eksempel)

1

Eks
$$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$$
$$I = (3, 1+\sqrt{-5})$$

Vi regner ut $I^{-1} = \mathbb{Z}\cdot 1 + \mathbb{Z}\tau$

hvor $\tau = \frac{1-\sqrt{-5}}{3}$

Gjør vi $\tau \cdot I = (1-\sqrt{-5}, 2) = (2, 1+\sqrt{-5}) =: J$.

Så vi har $I \simeq R$ som R-moduler, så $[I] = [J] \in \mathrm{Pic}(R)$.

Faktisk har vi at $\mathrm{Pic}\, R = \mathbb{Z}/2\{[I]\}$ (kan vises v/ Minkowski-Teori)

Siden I og J er komaksimale $\Rightarrow IJ = I \cap J$

får da k.e.s

$$(*) \quad 0 \to IJ \to I \oplus J \to R \to 0$$
$$c \longmapsto (c, -c)$$
$$(a, b) \longmapsto a + b$$

Vi har
$$IJ = (6, 2(1+\sqrt{-5}), 3(1+\sqrt{-5}), 2(\sqrt{-5}-2))$$
$$= (6, 1+\sqrt{-5}, 2(\sqrt{-5}-2))$$
$$= (1+\sqrt{-5})R \simeq R$$

Så fra $(*)$ får at $I \oplus J \simeq IJ \oplus R \simeq R^2$ og $I \oplus I \simeq R^2$.

Men I er ikke stabilt fri! For anta at $I \oplus R^n = R^{n+1} \Rightarrow$

$$R \simeq \Lambda_R^{n+1} R^{n+1} \simeq \Lambda_R^{n+1}(I \oplus R^n) \overset{\text{sum-formel}}{\simeq} \left(\Lambda_R^1 I\right) \otimes_R \left(\Lambda_R^n R^n\right) \simeq I,$$

Men I er ikke fri!

Mer generelt om $I \subset D$ (i Dedekind-område), ikke ②
hovedideal. Da er I en rang 1 proj. modul som
ikke er stabilt fri.

Cartier-divisorer — invertible idealer.

Spesielle eksempler er principale divisorer: om $f \in F^{\times}$, er $\mathrm{div}(f) = fR$
brudden ideal

For alb. $\mathrm{div}: F^{\times} \to \mathrm{Cart}(R)$

Prop 3.5 R komm. integritetsområde.

- Et hvert invertibelt ideal er en linjebunt
- (Også motsatt)

Om I, J er brudne idealer $\Rightarrow I \otimes_R J \simeq IJ$. Har eksakt sekvens

$$0 \to R^{\times} \to F^{\times} \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Cart}(R) \to \underbrace{\mathrm{Pic}(R)}_{\substack{R = \mathcal{O}_F \\ \Downarrow \\ |\mathrm{Pic}\, R| < \infty}} \to 0$$

Kommentar til bevis (i boka)

Linje 3/4. $R^n \to I \quad e_i \mapsto x_i$
$I \to R^n \quad a \mapsto (ay_1, \dots, ay_n)$

Dedekind-områder (se A/M kap 9)

Def Komm. integritetsområde, helavsluttet, noethersk
+ Krull-dim 1.

⟺ alle brudne idealer er invertible.

I et Dedekind-område har vi entydig faktorisering inn i produkter av potenser av primidealer.

Så $\mathrm{Cart}(R) = \mathbb{Z}\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R, \mathfrak{p} \neq (0)\}$.

- Endelig gen. torsjonsfrie moduler er projektive. (oppgave i AM

(se på fagsidene høst 2008 komm. alg.)

Eks – ~~Koordinatringen~~ til glatt, affin kurve
– $\mathbb{Z}$ (Simon), $\mathbb{Z}_p$ (Jones)
– $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (Håkon) ? $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ · DVR's
· $\mathcal{O}_F$

Weil-divisor-klassegruppen

La R være et normalt område (helavsluttet integritetsområde) m/ brøkkropp F. Hvis i tillegg R er noethersk er:

- $R_\mathfrak{p}$ er en DVR $\forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ av høyde 1 ($\dim R_\mathfrak{p} =$
- $R = \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} R_\mathfrak{p}$
- Enhver $r \in R \setminus \{0\}$ er m/ i kun endelig mange primidealer av høyde 1.

④

Et integritetsområde R som oppfyller ①-③ kalles er Krull-område.

Gruppen av Weil-divisorer

$$D(R) = \mathbb{Z}\{[\mathfrak{p}] \mid \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}$$

Vi sier at en Weil-divisor $D = \sum n_i [\mathfrak{p}_i]$ er effektiv hvis $n_i \geq 0$ $\forall i$.

Hvis I er invertibelt ideal i R (Krull-område). Vi har den $\mathfrak{p}$-adiske valuasjonen $v_{\mathfrak{p}}$ på $R_{\mathfrak{p}}$, def v/

$$I_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(I)} R_{\mathfrak{p}}.$$

Pga.

$$v(I) = \sum v_{\mathfrak{p}}(I)[\mathfrak{p}] \in D(R)$$

$\rightsquigarrow$ gr-art. $\operatorname{Cart}(R) \to D(R)$ (injektiv)

Divisorklassegruppen $Cl(R)$ er $D(R)$ delt ut på undergruppen generert av $v(fR)$ for $f \in F^{\times}$.

Prop 3.6 Har komm. diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & R^{\times} & \to & F^{\times} & \to & \operatorname{Cart}(R) & \to & \operatorname{Pic}(R) & \to 0 \\
& \| & & \| & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & R^{\times} & \to & F^{\times} & \to & D(R) & \to & Cl(R) & \to 0
\end{array}$$

m/ eksakte rader.

Korollar 3.8.1 Om R er regulær område
$\Rightarrow \quad \mathrm{Pic}(R) = \mathrm{Cl}(R)$.

Def En noethersk ring R er regulær hvis alle end. gen R-moduler M har en endelig resolusjon m/ P_i projektive og end.-gen.

Eks Lokale ringer til et punkt på et regulært skjema.

Merk $[M] = \sum (-1)^i [P_i] \in G_0 R$.

Gruppekompletering av end. gen R-moduler.

[pause]

Milnor-kvadrat
$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/I & \longrightarrow & S/I \end{array}$$

Se på $\beta \in GL_1(S/I)$

$\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}^{\mathrm{Milnor}}(S, \beta, R/I)$ bijektivt

m/ $\mathcal{L}_\beta \otimes_R S = S$

$\mathcal{L}_\beta / I\mathcal{L}_\beta = R/I$

Får:

$\partial : (S/I)^\times \longrightarrow \mathrm{Pic}\, R$

$\beta \longmapsto [\mathcal{L}_\beta]$

Teorem 3.10

For eksakt sekvens

$$0 \to R^\times \xrightarrow{\Delta} S^\times \times (R/I)^\times \xrightarrow{\pm} (S/I)^\times \xrightarrow{\partial} \operatorname{Pic} R \xrightarrow{\Delta} \operatorname{Pic} S \times \operatorname{Pic}(R/I) \xrightarrow{\pm} \operatorname{Pic}(S/I)$$

Eksempel Rim-kvadrat for $p=5$.

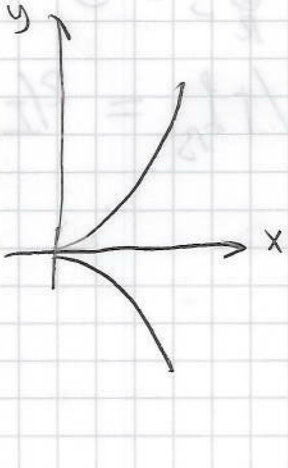
$$\begin{tikzcd} \overset{R}{\mathbb{Z}[C_5]} \arrow[r] \arrow[d] & \overset{S}{\mathbb{Z}[\zeta_5]} \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{F}_5 \end{tikzcd}$$

Da får vi

$$0 \to \mathbb{Z}[C_5]^\times \to \mathbb{Z}/10 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4 \to \operatorname{Pic} \mathbb{Z}[C_5] \to 0$$

Eks 3.10.1

cusp



$$R = k[x,y]/(x^3-y^2) \simeq k[t^2,t^3] < k[t] = S$$

$I = (t^2)S$ $\quad R/I = k.$

$S/I = k[t]/t^2$

$$(S/I)^\times = k^\times \times k$$

Enhets-Picard-sekv gir:

$$0 \to k^\times \to k^\times \times k^\times \to k^\times \times k \to \operatorname{Pic} R \to 0$$

Så $\operatorname{Pic} R \cong k$.

Siden $\operatorname{Pic}(k[t]) \overset{3.6.1}{=} 0$

Eks 2 $\quad R = k[x,y]/(y^2 = x^3 + x^2) \quad$ char $k \neq 2$

node

samme eks $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{Pic} R = k^\times}$,

Topologiske vektorbunter

(nytt avsnitt)

Def En familie av reelle vektorrom er en avbildning $p: E \to X$ sammen m/ operasjoner $+: E \times_X E \to E$

og $\mathbb{R} \times E \to E$

Vi krever at følgende diagrammer kommuterer:

$$\begin{tikzcd} E \times_X E \arrow[rr, "+"] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \times E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[dl] \\ X & \end{tikzcd}$$

og disse operasjonene gjør $p^{-1}(x)$ til et reelt vektorrom $\forall x \in X$.

X - baserom $\qquad E_x = p^{-1}(x)$ v.r over $\mathbb{R}$

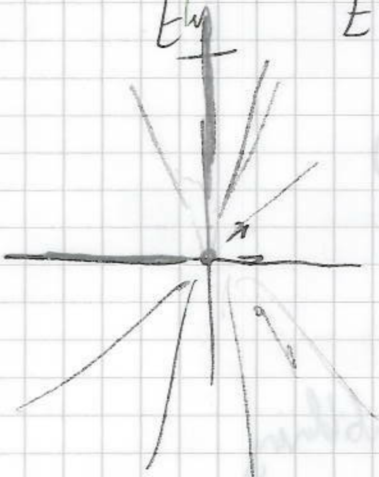
E - totalrom

$\mathrm{rk}_x(E) = \mathrm{rk}(E_x)$ som $\mathbb{R}$-vektorrom.

Vi definerer $\mathrm{rk}(E) = \sup_{x\in X} \{\mathrm{rk}_x(E)\}$

<u>Eks</u> $E = X \times \mathbb{R}^n$ og $p = \pi_1$ får vi den <u>trivielle familien</u> av rang n.

<u>Eks</u>



$$E = \{(x,v) \mid x \in \mathbb{R}^2,\ v \in \mathbb{R}\langle x\rangle\}$$

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$(x,v) + (x,v') = (x, v+v')$

$r(x,v) = (x, rv)$

(ikke lokalt fri!)

$\mathrm{rk}_{x\neq 0}(E) = 1 \qquad \mathrm{rk}_{x=0}(E) = 0$

<u>Def</u> En reell vektorbunt er en familie av reelle vektorrom $p: E \to X$ s.a. $\forall x \in X$ $\exists$ omegn $x \in U$ og $n \in \mathbb{N}$ s.a.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & \circ & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(lokal trivialisering)

(Så eks. over er <u>ikke</u> en vektorbunt)

Seksjon av vektorbunter

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} p \circ s &= id_X \\ p(s(x)) &= x \end{aligned}$$

$$\Gamma(E) = \text{seksjonene til } E$$

Vi sier at $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$ er lineært uavhengige hvis $s_1(x), \dots, s_n(x)$ e[r] lin uavh i E_x.

Lemma La $E \xrightarrow{p} X$ være en vektorbunt av konstant rang n. Da er p triviell $\iff$ lineært uavhengige seksjoner $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(E)$

Pf

$$X \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$$
$$(x, t_1, \dots, t_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} t_i s_i(x) \quad \rightsquigarrow \text{ trivialisering.}$$

Eks $\mathbb{R}^n \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathbb{R}^n$ iso. av vektorrom. La $E' = [0,1] \times \mathbb{R}^n$

La $E = E'/\sim$ hvor $(0, v) \sim (1, \varphi(v))$

$$S^1 = [0,1]/_{0 \sim 1}$$

Vi får avbildning $\begin{matrix} E \\ \downarrow \\ S^1 \end{matrix}$. Kan påstå dette er en vektorbunt.

Hvis $x \in (0,1)$, så er E lokalt triviell over x. For $x = 0 = 1 \in S^1$:

La $\{e_i\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^n$ og definer $s_i : [0, \frac{1}{4}) \to E'$ konstant seksjon m/ verdi e_i.

10

Tilsvarende, definer

$$s_i' : [\tfrac{3}{4}, 1] \to E' \quad - \text{"} \quad \text{———} \quad \text{vedi } \phi(e_i).$$

$\hat{s}$ er på projeksjonen til E. Her er $s_i(0) = s_i(1)$

Så seksjonene s_i og s_i' gir en seksjon

$$S_i : [0, \tfrac{1}{4}) \cup (\tfrac{3}{4}, 1] \to E$$

<u>Sjekk</u> $S_1 \ldots, S_n$ er lineært uavhengige $\Rightarrow$ lokal trivialisering. (Så V.Bunt)

$\hookrightarrow$ <u>Spesialtilfelle</u> $n=1$ $\phi = -id$ $\Rightarrow$ Möbius-bånd.

<u>Eks</u> Tautologiske linjebunten på $\mathbb{RP}^n$.

$$\mathcal{L} = \{(l, v) \mid l \in \mathbb{RP}^n, v \in l\}$$

$$\downarrow \quad \underline{\text{rang } 1} \qquad \text{(oppgave)}$$

$$\mathbb{RP}^n. \qquad (\text{om } n=1, \text{ så er } \mathcal{L}_{\mathbb{RP}^1} = M)$$

<u>Eks</u> V vektorrom, $k > 0$.

$$Gr_k(V) = \{k\text{-plan} \subseteq V\}$$

$$\eta = \{(W, x) \mid W \in Gr_k(V),\ x \in W\}$$

$$\downarrow$$

$$Gr_k(V)$$

Eks M mangfoldighet $\Rightarrow$ $\begin{array}{c} TM \\ \downarrow \\ M \end{array}$

Pullback av v-bunter

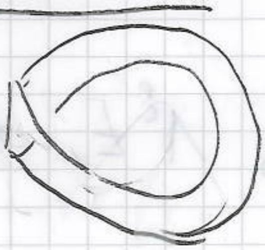
$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

addisjon $(y,e) + (y,e') = (y, e+e')$

mult $r(y,e) = (y, re)$

$$(f^*E)_y \cong E_{f(y)}$$

Eks (Möbius-bånder)



$$\begin{tikzcd} f^*M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ S^1 \arrow[r, "="] & S^1 \end{tikzcd}$$

Möbius

$z \longmapsto z^2$

Påstand $f^*M = 1$ ← triviell bunt av rang 1.

$$M = \left\{ \left(e^{i\theta}, re^{i\frac{\theta}{2}}\right) \,\middle|\, r \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

Så $f^*M = \left\{ \left(e^{i\theta}, re^{i\theta}\right) \,\middle|\, r \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi] \right\}$

opplagt triviell

$(e^{i\theta}, r)$ $S^1 \times \mathbb{R}$

(trenger å gange m/ 2 for å få vel-def avbildning)

Om $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$, så $(fg)^*E \simeq g^*(f^*E)$

Så om vi har $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(X) = \{$isomorfiklasser av rang n, v.b over $X\}$

da får vi funktor $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{R}}(-) : \mathrm{Top}^{op} \to \mathrm{Set}$.

—

<u>Direkte sum</u>

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd} \rightsquigarrow E \oplus E' \text{ m/ underliggende topologisk rom } E \times_X E.$$

$(e, e') \in E \oplus E'$ hvor $p(e) = p'(e')$, slik at

$$(E \oplus E')_x = E_x \oplus E'_x.$$

Har også $E \otimes E'$, $E^\vee$, $\underline{\mathrm{Hom}}(E, E')$, og $\Lambda^i E$, osv. Felles er ~~at~~ at de dannes punktvis i fibrene.

—

Som mengde er $E \otimes E'$ gitt m/ $\{(x,v) \mid x \in X, v \in E_x \otimes_{\mathbb{R}} E'_x\}$

$$\downarrow$$

$$X.$$

—

<u>Topologi på dette tensorproduktet</u>

La $x \in X$, og la U være en omegn slik at både E og E' er trivielle. Velg isomorfier $\phi : U \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\simeq} E|_U$

$\phi' : U \times \mathbb{R}^l \xrightarrow{\simeq} E'|_U$ ⇝ bijeksjon av mengder

$U \times (\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l) \longrightarrow (E \otimes E')|_U$ ⇝ lineær iso i hver fiber, gitt m/ $(u, v \otimes w) \longmapsto (u, \phi(u,v) \otimes \phi'(u,w))$. Overfør topologien fra VS til HS.