Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

14. november 2014

Oppgave 1. La $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (1 : 1 : 0)$, $R = (1 : 0 : 1)$ og $S = (1 : 1 : 1)$ være punkter i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Regn ut snittet av $\overline{PQ}$ og $\overline{RS}$. ■

Løsning 1. Vi finner først ligningen for linjen $\overline{PQ}$. Den mekaniske måten er å skrive ut determinanten

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Vi får $x_2 = 0$, som vi kunne gjettet oss til ved å se på punktene (...).

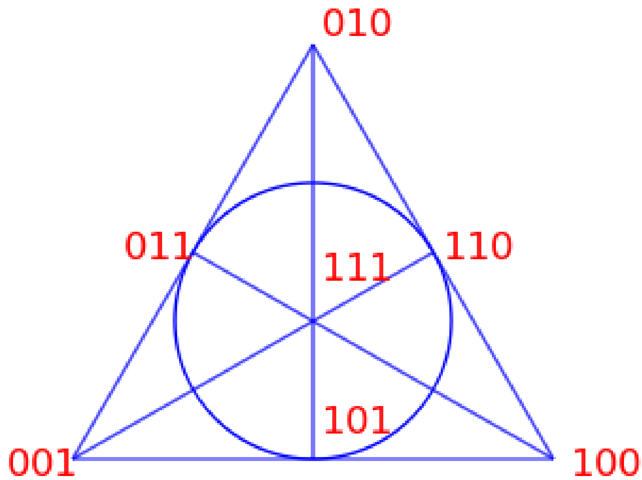
Tilsvarende finner vi at $\overline{RS}$ er gitt ved $x_0 - x_2 = 0$ (dette er riktig fordi ligningen $x_0 - x_2 = 0$ definerer en projektiv linje, og R, S begge ligger på denne linjen).

Dermed er snittet deres gitt av ligningssystemet $x_2 = 0, x_0 - x_2 = 0$. Altså $x_0 = x_2 = 0$. Med andre er snittet lik punktet $(0 : 1 : 0)$. ♡

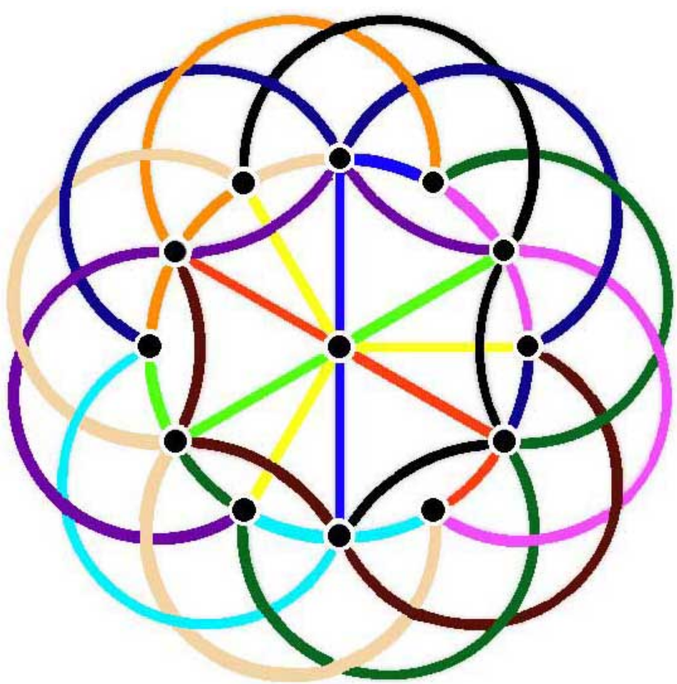
Oppgave 2. Lag et projektiv plan med 13 punkter og 13 linjer. ■

Løsning 2. Dette er vanskeligere enn det høres ut som. Mange har kanskje sett Fano-planet med syv elementer. Se Figur 1. Legg merke til at koordinatene. Legger du sammen to punkter på sammme linje får du det tredje punktet, så dette er en spesielt pen framstilling.

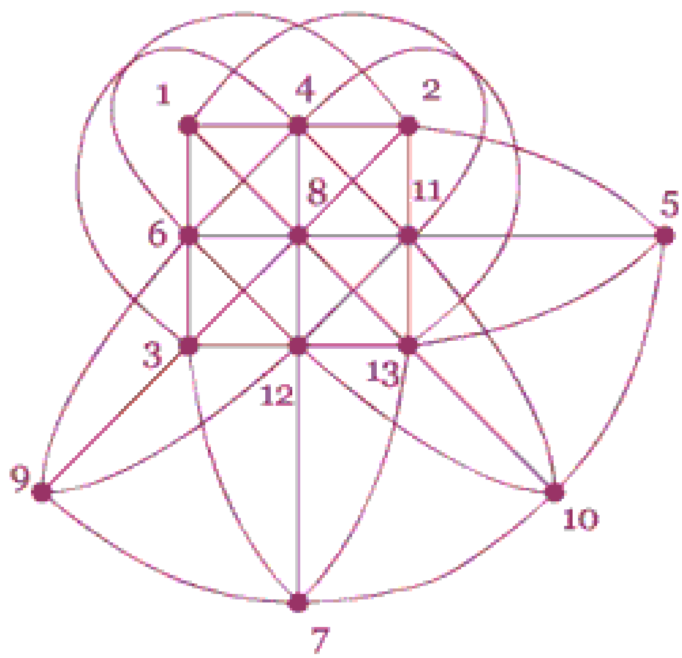
Det finnes også et projektiv plan med 13 elementer. Én mulighet er å tegne det på samme måte som Fano-planet, altså som en trekant med homogene koordinater og standardkoordinatene $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)$ og $(0 : 0 : 1)$ på hjørnene. Dessverre blir ikke dette bildet på langt nær så pent som Fano-planet. Se Figur 2 og 3 for to muligheter. Vi ser at Figur 2 er mer symmetrisk, men Figur 3 er mer oversiktlig.



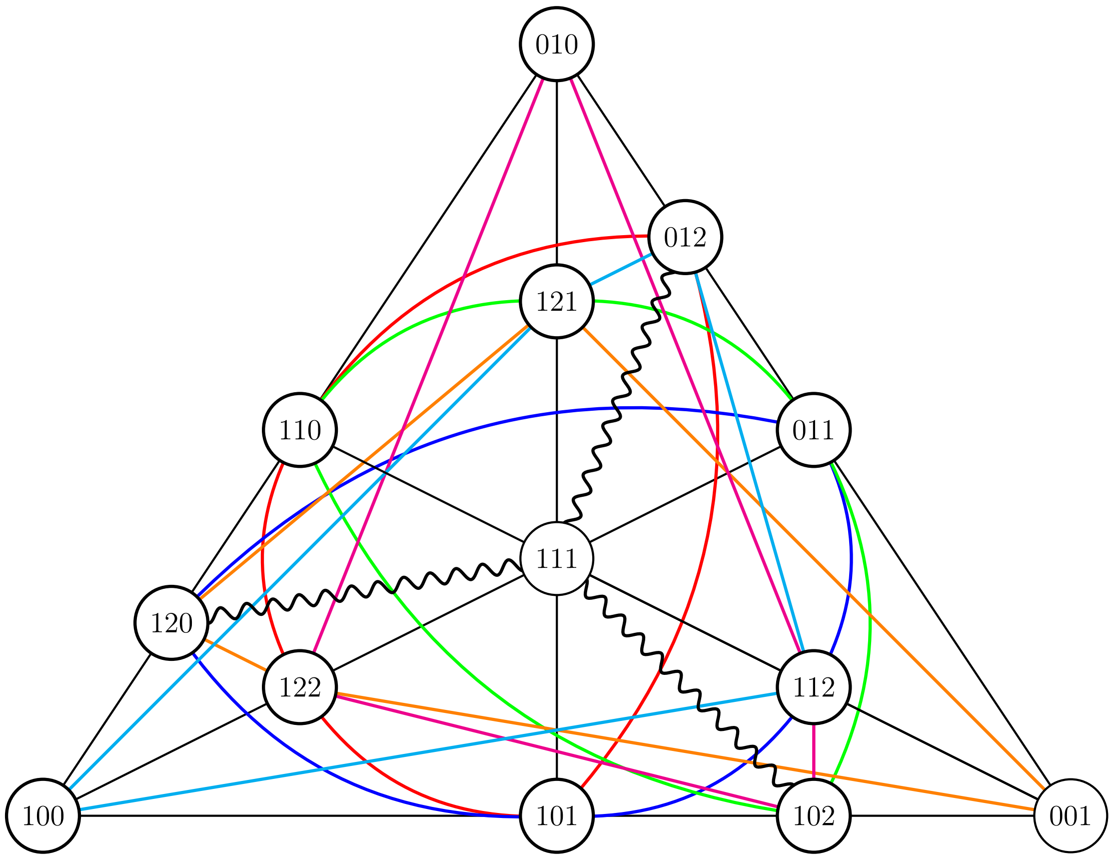
Figur 1: Fano-planet.



Figur 2: En veldig symmetrisk framstilling av $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_3}$.



Figur 3: En annen, kanskje mer oversiktlig framstilling.



Figur 4: Det projektive planet $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_3}$.

I Figur 4 er en versjon jeg laget, modellert etter den vanlige framstillingen av Fano-planet. Linjene blir ganske uoversiktlige, men om man studerer dette, ser man en del symmetri. ♡

Oppgave 3. Det projektive plan med 13 punkter og 13 linjer er $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_2}$, der $\mathbb{F}_2$ er kroppen med tre elementer (altså addisjon og multiplikasjon modulo tre). Vi har homogene koordinater $(x_0 : x_1 : x_2)$ der $x_i \in \mathbb{F}_2$, akkurat som i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Vis at man kan indeksere punktene $P_0, \ldots, P_{12}$ og linjene $\ell_0, \ldots, \ell_{12}$ slik at $P_i \in \ell_j$ hvis og bare hvis $i+j \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$. Lag en 13×13-matrise A med $A_{ij} = 1$ hvis $P_i \in \ell_j$ og 0 ellers. ■

Løsning 3. Vi hopper foreløpig over denne. ♡

Oppgave 4. Med notasjonen fra forrige oppgave, vis at trekantene $P_1P_2P_7$

og $P_3P_8P_4$ er i perspektiv fra P_0, det vil si at linjene $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_2P_8}$ og $\overline{P_7P_4}$ alle går gjennom P_0.

Verifiser Desargues teorem i dette tilfellet. Det vil si, finn $\overline{P_1P_2} \cap \overline{P_3P_8}$, $\overline{P_2P_7} \cap \overline{P_4P_8}$ og $\overline{P_3P_4} \cap \overline{P_1P_7}$, og vis at de ligger på en linje. ■

Løsning 4. Vi gjør en variant av oppgaven. Velg P_1, P_2, P_7 til å være de ytre hjørnene i Figur 4. Det vil si, $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 0 : 1)$ og $P_7 = (0 : 1 : 0)$.

Tilsvarende la P_3, P_8, P_4 være den "indre" trekanten, altså punktene $(1 : 2 : 2), (1 : 1 : 2)$ og $(1 : 2 : 1)$.

Da ser vi fra figuren at om vi lar $P_0 = (1 : 1 : 1)$, så er trekantene i perspektiv fra P_0. En annen måte er å finne ligningene til de forskjellige linjene. For eksempel er linjen $\overline{P_1P_3}$ gitt ved $x_1 = x_2$.

Nå kan vi se fra bildet at snittene $\overline{P_1P_2} \cap \overline{P_3P_8}$, $\overline{P_2P_7} \cap \overline{P_4P_8}$ og $\overline{P_3P_4} \cap \overline{P_1P_7}$ er henholdsvis $(1 : 0 : 2), (0 : 1 : 2)$ og $(1 : 2 : 0)$. Men disse ligger alle på den buete linjen, altså linjen $x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

Vi konkluderer med at Desargues teorem holder (ihvertfall for disse to trekantene). ♡

Oppgave 5. En perspektivitet med senter $C \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ er en avbildning $\alpha : \ell \to \ell'$ mellom to linjer i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ som sender $P \in \ell$ til $\overline{PC} \cap \ell'$. Vis at α er bijektiv, at det finnes nøyaktig ett fikspunkt, og at α^{-1} også er en perspektivitet. ■

Løsning 5. Se Figur 5.

Vi viser at α er bijektiv ved å finne en invers α^{-1}. Nemlig, vi definerer β til å være den motsatte perspektiviteten $\beta : \ell' \to \ell$ gitt ved $\beta(X) = \overline{XC} \cap \ell$.

Da er det "klart" fra bildet at $\beta = \alpha^{-1}$: $\beta(\alpha(X))$ er nemlig skjæringspunktet mellom $\alpha(X)C$ og ℓ. Men $\alpha(X)C = XC$, så dette skjæringspunktet er X.

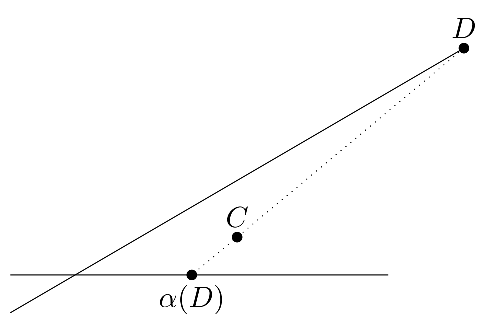
Det er også lett å se at skjæringspunktene mellom disse to linjene er et fikspunkt for α. ♡

Oppgave 6. Gitt en perspektivitet $\alpha : \ell \to \ell'$ med senter P, vis at det finnes en projektiv transformasjon $T : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ med P som fikspunkt slik at $T\big|_{\ell} = \alpha$. Det vil si, hvis $P \in \ell$, så er $T(P) = \alpha(P)$. ■

Løsning 6. Vi skal bruke Setning 6.5 i heftet, som sier at hvis $PQRS$ og $P'Q'R'S'$ er to firkanter i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, så finnes det en unik transformasjon som sender den ene på den andre.

La $C = \ell \cap \ell'$ og la $Q \in \ell$ være et vilkårlig punkt på linja.

Da finnes det en unik transformasjon som sender firkanten $(CQP\alpha(Q))$ på firkanten $(C\alpha(Q)PQ$. ♡



Figur 5: Perspektivitet med senter C.