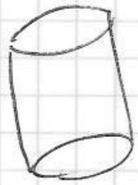
Homotopiinvarians av vektorbunter

$Vect_n(X)$ ← parakompakt

X_1



X_0

$$X \xrightarrow{i_0,\, i_1} X\times I$$

Prop La $E \to X\times I$ være v.b $\Rightarrow$ Da er $i_0^*E \cong i_1^*E$.

Ikke kanonisk isomorfi.

Korr • Hvis $f \simeq g : X \to Y \Rightarrow f^* = g^* : Vect_n(Y) \to Vect_n(X)$

• Hvis $f: X \to Y$ er homotopiekvivalens $\Rightarrow f^*$ bijeksjon.

EO $X \simeq * \Rightarrow$ alle v.b. på X trivielle.

Bevis La $H: X\times I \to Y$ homotopi mellom f og g

$$Vect_n(Y) \xrightarrow{H^*} Vect_n(X\times I) \overset{i_0^*}{\underset{i_1^*}{\rightrightarrows}} Vect_n(X)$$

$\Rightarrow f = g$ ∎

Klassifiserende rom

$V \subset W \Rightarrow Gr_k(V) \hookrightarrow Gr_k(W)$

Def er $Gr_n(\mathbb{R}^\infty) = \operatorname{colim}_k Gr_n(\mathbb{R}^k) = \bigcup^{k} Gr_n($

, direkte grense-topologi.

Tautologiske vektorbunten over $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$

$$\begin{tikzcd} \gamma_n = \left\{ (V,x) \,\middle|\, \begin{array}{c} V \subset \mathbb{R}^\infty \\ \dim V = n \\ x \in V \end{array} \right\} \arrow[d] \\ Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \end{tikzcd}$$

$\cup$

$$\begin{tikzcd} f^*\gamma_n \arrow[r] \arrow[d] & \gamma_n \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \end{tikzcd}$$

Får tilordning

$$Hom(X, Gr_n(\mathbb{R}^\infty)) \to Vect_n(X)$$
$$f \longmapsto f^*\gamma_n$$

Ved homotopi-invarians, får avbildning

$$[X, Gr_n(\mathbb{R}^\infty)] \to Vect_n(X)$$

homotopiklasser av avbildinger, bijektiv så

<u>klassifiserende rom for v.b</u>

<u>Lemma</u> La $j^{ev}, j^{odd} : \mathbb{R}^\infty \circlearrowleft$

$$j^{ev}(x_1, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, \dots)$$
$$j^{odd}(x_1 \dots) = (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$$

Da er $j^{ev} \simeq j^{odd} \simeq id$ via lineære embeddinger.

<u>Bevis</u> Se på j^{ev}. La $H : \mathbb{R}^\infty \times I \to \mathbb{R}^\infty$
$$(x,t) \longmapsto t\, j^{ev}(x) + (1-t)x.$$
La $t \in (0,1)$, og anta at $H(x,t) = 0$. Da er $x = 0$. ▯

Teorem

$$\phi : [X, Gr_n(\mathbb{R}^\infty)] \longrightarrow Vect_n(X)$$

er injektiv og surjektiv hvis X er kompakt Hausdorff. (parakompakt holder)

Bevis Injektivitet. Anta $f, g : X \to Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ og

isomorfi $\alpha : f^* \gamma_n \cong g^* \gamma_n$ som v.b. over X.

Ved lemma, kan erstatte f m/ $j^{ev} \circ f$ og g m/ $j^{odd} \circ g$.

$\Rightarrow$ kan anta at $f(X) \subset \mathbb{R}^\infty_{ev}$ og $g(X) \subset \mathbb{R}^\infty_{odd}$.

Definer $H : X \times I \to Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$

$(x,t) \longmapsto \{ tv + (1-t)\alpha(v) \mid v \in f(x) \}$

Må sjekke at er underrom av $\mathbb{R}^\infty$.

Da er $H_0 = f$ og $H_1 = g$.

Surjektivitet $E \xrightarrow{\text{rang } n} X$ Ved avrunding har vi en embedding (Munch for 2 uker siden)

$E \to \underline{N}$ for $N \gg 0$.

$\underline{N} = X \times \mathbb{R}^N \subset X \times \mathbb{R}^\infty$.

Får da $f : X \to Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$

$f(x) = j(E_x) \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^\infty$

Da er f kont. og $f^* \gamma^n = E$. ∎

(4)

Korollar $VB_1^{\mathbb{R}}(X) \simeq H^1(X; \mathbb{Z}/2)$

fordi $Gr_1(\mathbb{R}^\infty) = \mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}/2, 1)$.

Tilsvarende $VB_1^{\mathbb{C}}(X) = H^2(X, \mathbb{Z})$

fordi $Gr_1(\mathbb{C}^\infty) = \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$

Eilenberg-MacLane-rom (slå opp!)

Stabilisering av v.b.

$$\begin{array}{ccc} E & & E \oplus \underline{1} \\ \downarrow \text{rang } n & \longmapsto & \downarrow \quad \text{rang } n+1 \\ X & & X \end{array}$$

F.eks. $Vect_0(X) \xrightarrow{-\oplus \underline{1}} Vect_1(X) \xrightarrow{\cdots} Vect_2(X) \xrightarrow{\oplus \underline{1}} \cdots$

Injektive? Surjektive?

Prop X end. dim CW-kompleks.

Da er $Vect_n^{\mathbb{R}}(X) \to Vect_{n+1}^{\mathbb{R}}(X)$ bijeksjon for $n \geq \dim$, surjeksjon for $n = \dim X$

I tillegg $Vect_n^{\mathbb{C}}(X) \to Vect_{n+1}^{\mathbb{C}}(X)$ bijeksjon $n \geq \frac{1}{2} \dim X$, $n \geq \frac{1}{2}(\dim X - 1)$

Bevis Avbildningen $Vect_n(X) \to Vect_{n+1}(X)$

$$\begin{array}{ccc} Vect_n(X) & \longrightarrow & Vect_{n+1}(X) \\ \updownarrow & & \\ Gr_n(\mathbb{R}^\infty) & \to & Gr_{n+1}(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

$V \subset \mathbb{R}^\infty \mapsto \mathbb{R} \oplus V \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^\infty \simeq \mathbb{R}^\infty$

Inklusjonen $Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \hookrightarrow Gr_{n+1}(\mathbb{R}^\infty)$ er n-sammenhengende (5)
(Hatcher kap 4) (og derfor der)

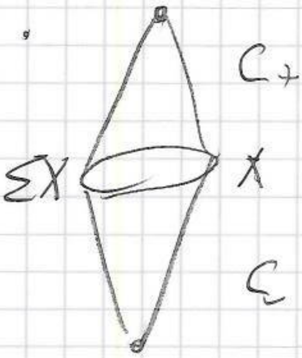
(for $\mathbb{C}$-bunter er 2n+1-sammenhengende)

Vektorbunter på sfærer

$Vect_n(S^k)$? For fiksert k, vil disse gruppene stabilisere

Bott-periodisitet: $\mathbb{R}$ 8-periodisitet
$\mathbb{C}$ 2- –〃–

La X rom. Kan lage løftingen av X ΣX



Anta gitt $f : X \to GL_n(\mathbb{R})$.

$E_n(f)$ limer sammen $\underline{n}/C_+$ og $\underline{n}/C_-$ langs X
$(x,v) \sim (x, f(x)\cdot v)$

„clutching"

Prop $f \simeq f' \Rightarrow E_n(f) \cong E_n(f')$.

- $$[X, GL_n(\mathbb{R})] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Vect}_n(\Sigma X)$$

(oppg.)

Dermed er $\mathrm{Vect}_n(S^k) \cong \pi_{k-1}(GL_n(\mathbb{R}))$

Gram-Schmidt

$$\cong \pi_{k-1}(O_n(\mathbb{R}))$$

$$\overset{k \geq 2}{\cong} \pi_{k-1}(SO_n)$$

$O_1 = S^0 = \{\pm 1\}$.

$SO_2 = S^1$ $\quad SO_3 \cong \mathbb{R}P^3$

Så:

Ex 1 $\mathrm{Vect}_n(S^1) = \pi_0(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2$

$\underline{n}$ og $M \oplus \underline{n-1}$

Ex 2 $\mathrm{Vect}_n(S^2) = \pi_1(SO_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=2 \\ \mathbb{Z}/2 & n \geq 3 \end{cases}$

For $n \geq 4$, så er

$$\pi_1(SO_n) = \pi_1(SO_{n-1}).$$

Ex 3 $\pi_2(SO_n)$ Enkelt for $n \leq 3$. Fibersekvens

$\mathrm{Vect}_n(S^3)$ $\quad SO_n \to S^{n-1}$

$\pi_2 SO_n = 0$ for alle n. $\Rightarrow \mathrm{Vect}_n(S^3) = 0$

7

Thm $\pi_2(\text{Lie-gruppe}) = 0$.

Ex $\mathrm{Vect}_n(S^4)$.

Regner ut $\pi_3(SO_n)$. For $n \not\leq 2$. Triviell!

$n=3$ $SO_3 \cong \mathbb{R}P^3$

$$\mathbb{Z}/2 \to S^3 \to \mathbb{R}P^3$$

$$\Rightarrow \pi_3\, \mathbb{R}P^3 \cong \mathbb{Z}$$

$SO_3 \hookrightarrow SO_4 \to S^3$.

$\Rightarrow$ Lang-eksakt sekvens i homotopi

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_4 S^3 & \xrightarrow{0} & \pi_3 SO_3 & \to & \pi_3 SO_4 & \to & \pi_3 S^3 & \to & \pi_2 SO_3 \\ \cong & & \cong & & \Downarrow & & \cong & & \| \\ \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z} & & \cong & & \mathbb{Z} & & 0 \\ & & & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}. & & & & \end{array}$$

$SO_4 \hookrightarrow SO_5 \to S^4$

kan vises

$$\pi_4 S^4 \to \pi_3 SO_4 \to \pi_3 SO_5 = \pi_3 SO_n$$

for $n \geq 6$

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

Kan vises at er injektiv.

Oppsummert: $\mathrm{Vect}_n(S^4) = \begin{cases} 0 & \\ \mathbb{Z} & n=3 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & n=4 \\ \mathbb{Z} & n\geq 5 \end{cases}$

Bott-periodisitet '50's

$$O_1 \subset O_2 \subset O_3 \subset \dots \subset O = O_\infty$$
$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da sier Bott-periodisitet følgende:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi_i O$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$ ...

8-periodisk

For $\mathbb{C}$-v.b., har ∞-unitær gruppe $U = U_\infty$.

$$\pi_i U = \begin{cases} \mathbb{Z} & \underline{i = \text{jevn}} \\ 0 & \underline{i \text{ odde}} \end{cases}$$

I.5 Algebraiske vektorbunter og lokalt frie $\mathcal{O}_X$-moduler

La A være ring og M en A-modul. La $T_A(M)$ være tensoralgebraen til M/A. Gradert A-algebra.

Kan definere $\mathrm{Sym}\, M = T_A(M) / \langle m' \otimes m - m \otimes m' \rangle$

kommutativ A-algebra gradert

Har venstreadjungert

glemsom funktor

$$\text{Komm. graderte } A\text{-algebra} \xhookrightarrow{i} A\text{-mod}$$

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M, B) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(\mathrm{Sym}(M), B)$$

Baseskifte $\varphi: A \to B$ ring-afb. Da får vi iso av B-algebraer.

$$\mathrm{Sym}_A(M) \otimes_A B \simeq \mathrm{Sym}_B(M \otimes_A B).$$

– funktoriell i M

$$\mathrm{Sym}_A(M \oplus M') \cong \mathrm{Sym}_A(M) \otimes_A \mathrm{Sym}_A(M').$$

NB M fri A-modul fri A-modul m/ basis $\{m_1, \ldots, m_r\}$,

Får

$$A[T_1, \ldots, T_r] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_A(M) \quad T_i \mapsto m_i$$

i grad n fri av rang $\binom{n+r-1}{r}$.

$(X, \mathcal{O}_X)$ ringa rom. $\mathcal{E}$ en $\mathcal{O}_X$-modul.

$$\text{prehippe} \quad U \mapsto \mathrm{Sym}_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)}(\Gamma(U, \mathcal{E}))$$

- knippifisering

Få symmetrisk algebra

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Sym}_n(\mathcal{E}).$$

komm. gradert $\mathcal{O}_X$-algebra.
Fremdeles har vi

$$\underset{\substack{\mathcal{O}_X\text{-alg} \\ \text{gradert}}}{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}), \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{A}).$$

Eks $X = \mathrm{Spec}\, A$ $\qquad \mathcal{E} = \widetilde{M}$ kvasikoherent knippe assosiert til

Mod $\quad B = A_f$

$$\mathrm{Sym}_A(M)_f = \mathrm{Sym}_{A_f}(M_f)$$

$$= \Gamma(D(f), \mathrm{Sym}(\mathcal{E}))$$

$\mathrm{Spec}(A[\frac{1}{f}])$

$X \xrightarrow{f} Y$ morf. av skjemaer. $\qquad \mathcal{E}$, $\mathcal{O}_Y$-modul, kvasikoherent

Da får vi baseskifte-isomorfi:

$$f^*\mathrm{Sym}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Sym}(f^*\mathcal{E}).$$

„inverse image functor"

H: Oppg III 2.4

$X = \operatorname{Spec} A$

B A-algebra

Bijeksjon T X-skjema

$$\operatorname{Hom}_X(T, \operatorname{Spec} B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A\text{-alg}}(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$$

funktoriell i T og B.

X-skjemaet $\operatorname{Spec} B$ representerer funktoren

$$T \longmapsto \operatorname{Hom}_{A\text{-alg}}(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$$

Prop. X skjema. $\mathcal{B}$ kvasikoherent $\mathcal{O}_X$-algebra. Den $\exists$ X-skjema $\operatorname{Spec} \mathcal{B}$ s.a. $\forall$ X-skjemaer $f: T \to X$ så finnes funktorielle bijeksjoner

$$\operatorname{Hom}_X(T, \operatorname{Spec} \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg}}(\mathcal{B}, f_* \mathcal{O}_T)$$

„direct image functor"

Mao: $\operatorname{Spec} \mathcal{B}$ representerer functoren $(X\text{-skj})^{op} \to \text{Set}$

$$(T \xrightarrow{f} X) \longmapsto \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg}}(\mathcal{B}, f_* \mathcal{O}_T)}_{= F(T)}$$

Bevis f_* og $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}$ er venstre-eksakte funktorer.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ knippe i Zariski-topologien.

eksakt
$\Rightarrow$ kan anta X er affin.

$\Rightarrow$ ok. ∎

Spec B = spektret til B'

Om B' er en annen k-k $\mathcal{O}_X$-algebra ($\mathcal{F} = \operatorname{Spec} B'$)

så $\operatorname{Hom}_X(\operatorname{Spec} B', \operatorname{Spec} B) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg}}(B, B')$.

$B \Rightarrow \operatorname{Spec}(B)$ full og trofast funktor.

Om $X' \xrightarrow{g} X$ skjema-avb $\Rightarrow$ iso av X'-skjemaer (funktoriell i B). Da er $\operatorname{Spec}(g^* B) \simeq \operatorname{Spec} B \times_X X'$.

Def La $\mathcal{E}$ være k-k $\mathcal{O}_X$-modul. La
$$\mathbb{V}(\mathcal{E}) \doteq \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathcal{E})).$$ Kalles den

kvasikoherente bunten til $\mathcal{E}$.

Avbildningen

$$(\mathrm{Q}\text{-}\mathcal{O}_X\text{-mod})^{op} \longrightarrow (\mathrm{Sch}_X)$$

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathbb{V}(\mathcal{E})$$

Får avbildning $\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbb{V}(-)} \mathrm{Hom}_X(\mathbb{V}(\mathcal{E}), \mathbb{V}(\mathcal{F}))$

er injektiv (trofast)

$\not\!\!\;$ „trenger ikke si det"

En avb. av X-skjemaer $\mathbb{V}(\mathcal{E}) \to \mathbb{V}(\mathcal{F})$ ~~kalles~~ er lineær hvis den er indusert fra en $\mathcal{O}_X$-modul-avbildning $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$.

Igjen, baseskifte:

$$\mathbb{V}(g^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_X X'.$$

Prop. La $\mathcal{E}$ k-k $\mathcal{O}_X$-modul. For alle $h : T \to X$, har bijeksjon

$$\mathrm{Hom}_X(T, \mathbb{V}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(T, h^*\mathcal{E}^\vee)$$

$$\mathcal{E}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$$

Så $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ repr. funktoren $T \mapsto \Gamma(T, h^*\mathcal{E}^\vee)$.

Bevis $\quad \mathrm{Hom}_X(T, \mathbb{V}(\mathcal{E})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-alg}}(\mathrm{Sym}\,\mathcal{E}, h_*\mathcal{O}_T)$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X\text{-mod}}(\mathcal{E}, h_*\mathcal{O}_T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(h^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_T)$$

$$\simeq \Gamma(T, h^*\mathcal{E}^\vee).$$

$\blacksquare$

$h = id_X$

(M)

Nullelementet i $\Gamma(X, \mathcal{E}^\vee)$ korresponderer til en seksjon $z: X \to \mathbb{V}(\mathcal{E})$. Vi kaller denne nullseksjonen til bunten, slik at $f \circ z = id_X$ hvor $f: \mathbb{V}(\mathcal{E}) \xrightarrow{f} X$

$\boxed{\text{Obs} \quad z \text{ er lukket immersjon.}}$

Eks $\mathcal{E} = (\mathcal{O}_X^n)^\vee$

$$\mathrm{Hom}_X(T, \mathbb{V}(\mathcal{E})) \simeq \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^n = \mathbb{A}^n_X(T)$$

$\mathbb{V}((\mathcal{O}_X^n)^\vee) \simeq \mathbb{A}^n_X$. affine rommet over X.