Plenum 22/10

5.5.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Finn egenv. og basis for egenrom.

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$= \frac{4 \pm 2i}{2} = \underline{\underline{2 \pm i}}$$

$\lambda_1 = 2 + i \qquad \lambda_2 = 2 - i = \overline{\lambda_1}$

Egenrom $\begin{bmatrix} 1-(2+i) & -2 \\ 1 & 3-(2+i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & +1-i \end{bmatrix}$

konj. av $-1-i$

$\cdot(-1+i)I$ $\sim \begin{bmatrix} 2 & 2\cancel{+}2i \\ 1 & +1-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Så en egenvektor tilfredsstiller $x_1 + \underline{(1-i)}x_2 = 0$

Setter $x_2 = 1$ og får $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

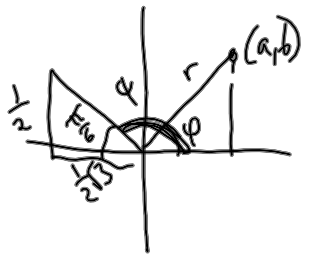
Så $E_1 = \text{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Følger at $E_2 = \text{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

(siden $\overline{A\vec{v}_1} = A\overline{\vec{v}_1}$, $\overline{A\vec{v}_1} = \overline{A\lambda_1} = A\overline{\lambda_1}$)

okt 22-14:09

5.5.11 $A = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ er på formen $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$



$$= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \end{bmatrix}$$

$r = 2 \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}$

5.5.16 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$. Finn P og C s.a. $A = PCP^{-1}$, der C er på formen $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

1. Finn egenverdier:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 10\lambda + 26 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 5 \pm i \qquad \lambda_1 = 5 + i$$
$$\lambda_2 = 5 - i$$

okt 22-14:26

Setter inn egenverdier i $A-\lambda I$:

$$\begin{bmatrix} 4-(5+i) & -2 \\ 1 & 6-(5+i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$\overset{\cdot(-1+i)I}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2-2i \\ 1 & 1-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

så $\vec{v}_1$ tilfredsstiller $x_1 + (1-i)x_2 = 0$. Setter $x_2 = 1$ og får

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ følger at $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$.

For å lage P, må splitte $\vec{v}_2$ i reelle og imaginære deler:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da sier boka/teoremet at $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$Re(v_2)$ $Im(v_2)$

og $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ der $\lambda_2 = a - bi$

$= 5 - i$

så $b = 1$

$a = 5$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

okt 22-14:33

Vil sjekke at $A = PCP^{-1}$.

Samme som å sjekke at $AP = PC$:

$$AP = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$PC = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \checkmark$$

FM

$\boxed{5.5.25}$ A reell matrise ($A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$)

$\vec{x} \in \mathbb{C}^n$

V.a. $\mathrm{Re}(A\vec{x}) = A(\mathrm{Re}\,\vec{x})$

$\mathrm{Im}(A\vec{x}) = A(\mathrm{Im}\,\vec{x})$

„A som kompleks matrise"

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{A \otimes \mathbb{C}} & \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow \mathrm{Re} & \circ & \downarrow \mathrm{Re} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R} \end{array}$$

Eks $\begin{bmatrix} 1+5i \\ 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Pf $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$.

$\vec{x} = \mathrm{Re}(\vec{x}) + i\,\mathrm{Im}(\vec{x})$

$$A\vec{x} = A(\mathrm{Re}\,\vec{x}) + i \underbrace{A(\mathrm{Im}(\vec{x}))}_{\text{totalt imaginær}}$$

Så realdelen til høyresiden $= A(\mathrm{Re}\,\vec{x})$

og realdelen til venstresiden $= \mathrm{Re}(A\vec{x})$"

(akkurat samme måte for imaginærdel)

FM

okt 22-14:39

$\boxed{5.5.26}$ A være 2x2 reell med komplekс
egenverdi $\lambda = a - bi \quad (b \neq 0)$
m/ egenvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$.

a) V.a. $A(\mathrm{Re}\,\vec{v}) = a\,\mathrm{Re}\,\vec{v} + b\,\mathrm{Im}\,\vec{v}$
og $A(\mathrm{Im}\,\vec{v}) = -b\,\mathrm{Re}\,\vec{v} + a\,\mathrm{Im}\,\vec{v}$

Skriv $\vec{v} = \mathrm{Re}\,\vec{v} + i\,\mathrm{Im}\,\vec{v}$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} = (a - ib)(\mathrm{Re}\,\vec{v} + i\,\mathrm{Im}\,\vec{v})$$
$$= (a\,\mathrm{Re}\,\vec{v} + b\,\mathrm{Im}\,\vec{v}) + i(-b\,\mathrm{Re}\,\vec{v} + a\,\mathrm{Im}\,\vec{v})$$

Så
$$\mathrm{Re}\,A\vec{v} = a\,\mathrm{Re}\,\vec{v} + b\,\mathrm{Im}\,\vec{v} = A(\mathrm{Re}\,\vec{v})$$
$$\mathrm{Im}\,A\vec{v} = -b\,\mathrm{Re}\,\vec{v} + a\,\mathrm{Im}\,\vec{v} = A(\mathrm{Im}\,\vec{v})$$

forrige oppg

☺ som var det vi skulle vise

okt 22-14:51

b) Sjekk at $AP = PC$ $\quad (\Leftrightarrow A = PCP^{-1})$

$$\lambda = a - ib$$

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\vec{v} & \mathrm{Im}\,\vec{v} \end{bmatrix}$$

$$AP = A\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\vec{v} & \mathrm{Im}\,\vec{v} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A(\mathrm{Re}\,\vec{v}) & A(\mathrm{Im}\,\vec{v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,\mathrm{Re}\,\vec{v} + b\,\mathrm{Im}\,\vec{v} \;\Big|\; -b\,\mathrm{Re}\,\vec{v} + a\,\mathrm{Im}\,\vec{v} \end{bmatrix}$$

høyde 2-vektor

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\vec{v} & \mathrm{Im}\,\vec{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = PC$$

5.5.27 A. $4\times4 \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$

Skriv $A = PCP^{-1}$ og C på formen

$$C = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

C_1 2×2

C_2 2×2

1. Lag A i MATLAB.
2. Egenverdier:

$\lambda_1 = -2+5i$ $\lambda_3 = -4+10i$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ $\lambda_4 = \overline{\lambda_3}$

3. Radreduserer $A - \lambda_1 I$.

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 + (1-i)x_3 &= 0 \\ x_2 + ix_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1+i \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (konjugerte av $\vec{v}_1$)

På samme måte: $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. og $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

okt 22-15:21

„Tenker på $\mathbb{R}^4$ som $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$"

Lager $P = \left[\operatorname{Re} \vec{v}_1 \quad \operatorname{Im} \vec{v}_1 \quad \operatorname{Re} \vec{v}_3 \quad \operatorname{Im} \vec{v}_3 \right]$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Og $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = -2 + 5i$

$\lambda_3 = -4 + 10i$

Sjekk at $AP = PC$. ✓

5.7.2 $A = \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}$ 2x2-matrise

$\lambda_1 = -3 \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1$

Løs ligm. $\vec{x}(t)' = A\vec{x}(t)$ der $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$X(0) = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$$

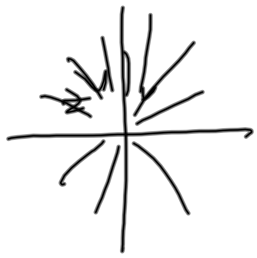
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}\text{II}}{\overset{\text{II}+\text{I}}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \overset{\text{I}-\text{II}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \qquad c_2 = \frac{5}{2}$$

Så

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \longrightarrow 0 \text{ når } t \to \infty$$



okt 22-15:37

5.73

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix} \qquad \vec{x}(0)=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix} = -\frac{5}{2}\vec{v}_1 + \frac{9}{2}\vec{v}_2$$

Egenverdier: $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -1$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix} \text{ og } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix}+\frac{15}{2}e^{t} - \frac{9}{2}e^{-t}\\ -\frac{5}{2}e^{t} - \frac{9}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

Spesiell ~~generell~~ løsning

Sadelpunkt fordi $\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$.

5.7.9

$$\vec{y}_1(t) = \left[\mathrm{Re}(\vec{v})\cos bt - \mathrm{Im}(\vec{v})\sin bt\right]e^{at}$$

$$\vec{y}_2(t) = \left[\mathrm{Re}(\vec{v})\sin bt + (\mathrm{Im}\,\vec{v})\cos bt\right]e^{at}$$

$$A = \begin{bmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -2+i \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -2-i$$

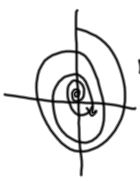
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1-i\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Så løsningene er

$$\vec{y}_1(t) = \left(\begin{bmatrix}\cos t\\ \cos t\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\sin t\\ 0\end{bmatrix}\right)e^{-2t}$$

$$\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix}\sin t - \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}e^{-2t}$$

$\vec{x}(t) = c_0\vec{y}_1(t) + c_1\vec{y}_2(t)$ ← generell løsning



← Typisk løsning går mot origo; spiral