Def 6.4.1 $\forall s \in S,\ sr = rs\ \forall r \in R$

S sentral multiplikativ mengde i en ring R.

$$\mathrm{mod}_S(R) \underset{\text{undergruppe}}{\overset{\text{Serre}}{\subset}} \mathrm{mod}(R)$$

S-torsjonsmoduler.
$(\forall\, m \in M\ \exists\, s \in S \text{ m/ } ms = 0)$

$$\frac{\mathrm{mod}(R)}{\mathrm{mod}_S(R)} \simeq \mathrm{mod}(S^{-1}R)$$

end. gen. R-mod

Hvis R noethersk: $M_S(R) \underset{\text{undergruppe}}{\overset{\text{Serre}}{\subset}} M(R)$

S-torsjonsmoduler

$$M(R)/M_S(R) \simeq M(S^{-1}R).$$

Lokaliseringssekvens

$$K_0 M_S(R) \to G_0 R \to G_0(S^{-1}R) \to 0$$

Eks $S = \{s^n\}_{n=0}$

$$G_0(R/sR) \to G_0(R) \to G_0(R[\tfrac{1}{s}]) \to 0$$

hva er G_0 såk.?

2

ideal

$I \subset R$

$$M_I(R) \underset{\text{underkat}}{\overset{\text{Serre}}{\subset}} M(R)$$

$MI^n = 0$ for a $n \in \mathbb{N}$.

Gabriel (student av Grothendieck)

$$M(R) / M_I(R) \simeq M(U) \leftarrow \text{kategori av } \mathcal{O}_U\text{-moduler.}$$

$U \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ definert v/ I.

$$G_0(R/I) \to G_0(R) \to G_0(U) \to 0.$$

$\cdot$ $Z \overset{\text{lukket}}{\underset{i}{\hookrightarrow}} X$ åpent komplement
underskjema

$j: U \hookrightarrow X$.

$$\mathrm{mod}_Z(X) \subset \mathcal{O}_X\text{-mod}$$

støtte i Z, $\mathcal{F}|_U = 0$

Gabriel viste at

$$\mathcal{O}_U\text{-mod} \simeq \frac{\mathcal{O}_X\text{-mod}}{\mathrm{mod}_Z(X)}.$$

Om X noethersk, $\rightsquigarrow$ $M(X) / M_Z(X) \simeq M(U)$.

Er en oppgave i Hartshorne, Chap II, §5.

(ligger løsning på UiO-sidene fra alg. geo II)

Fundamentalteoremet for G_0-teori $\boxed{6.5}$ ③

R noethersk ring R $R \overset{i}{\hookrightarrow} R[t] \overset{j}{\hookrightarrow} R[t,t^{-1}]$

Inducerer isomorfi:

$$G_0(R) \simeq G_0(R[t]) \simeq G_0(R[t^{\pm 1}])$$

Bevis $\pi : R[t] \xrightarrow{t \mapsto 0} R$ (R er en endelig gen. $R[t]$-mod)

Så får inklusjon $M(R) \subset M(R[t])$

$$\pi_* : G_0(R) \to G_0(R[t])$$

Lokalisering: $G_0(R) \xrightarrow{\pi_*} G_0(R[t]) \to G_0(R[t^{\pm 1}]) \to 0$

Om M er en R-modul, eksakt sekvens av $R[t]$-moduler

$$0 \to M[t] \xrightarrow{\times t} M[t] \to M \to 0$$

$M[t] \cong M \otimes_R R[t]$

I $G_0(R[t])$ er $\pi_*([M]) = [M] = [M[t]] - [M[t]] = 0$

$\Rightarrow \pi_* = 0$.

Vil vise at $i^* : G_0(R) \to G_0(R[t])$ er en iso. Første

~~Første definerende~~ Har $\pi^* : G_0(R[t]) \to G_0(R)$

Første forsøk på invers:

$$M \mapsto M/M_T = M \otimes_{R[t]} R[t]/T.$$

men denne er ikke eksakt!

Husk $\mathrm{Tor}_i^R(M) = \left\{ \text{høyrederiverte av } - \otimes_R M \right\}$

Resolusjon $0 \to R[t] \xrightarrow{\cdot T} R[t] \to R[t]/(T) \to 0$, $R[t]/(T) \cong R$

$\Rightarrow$ tensorer m/ M:

$$\leadsto \quad 0 \to M \xrightarrow{\cdot T} M \to 0 \quad (???)$$

$$\mathrm{Tor}_i^{R[t]}(M, R[t]/(T)) = \begin{cases} M/M_T & i=0 \\ \mathrm{Ann}_M(t) & i=1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Så vi setter $\pi^*([M]) = [M/M_T] - [\mathrm{Ann}_M(t)]$.

Så på $\pi^* i^*([M]) = \pi^*(M[t]) = [M]$ siden $\mathrm{Ann}_{M[t]}(t) = 0$.

$\Rightarrow$ i^* injektiv.

Vil. at i^* også er surjektiv. Bevis av Grothendieck fra R kommutativ Noethersk induksjon.

(5)

Hvis $G_0(R) \not\simeq G_0(R[t])$. Velg et ideal $\mathcal{J}$ som er maksimalt mhp egenskapen at

$$G_0(R/\mathcal{J}) \not\simeq G_0(R/\mathcal{J}[t]).$$

Erstatt R m/ $R/\mathcal{J}$. $\Rightarrow$ kan anta

$$G_0(R/I) = G_0(R/I[t]).$$

for ethvert $I \neq 0$. $\Rightarrow$ kan anta R er redusert.

R redusert $\Rightarrow$ ikke-nulldivisorer i R danner et rettet system hvor $r \leq s \Leftrightarrow sR \subset rR$.

La S være mengden av ikke-null divisorer i R. F_i er endelig produkter av kropper

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R = \prod F_i & & S^{-1}R[t] = \prod \underbrace{F_i[t]}_{PID} \\ \Big| \; PID & & \Big\uparrow \\ G_0 = \prod \mathbb{Z} & & G_0 = \prod \mathbb{Z} \end{array}$$

Har eksakte sekvenser

$$\begin{tikzcd} \operatorname{colim}_{s \in S} G_0(R/sR) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\simeq \text{ ROY / Hardeløp}"] & G_0 R \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & \bigoplus G_0(F_i) \arrow[r] \arrow[d, "iso"] & 0 \\ \operatorname{colim}_{s \in S} G_0(R/sR[t]) \arrow[r] & G_0 R[t] \arrow[r] & \bigoplus G_0(F_i[t]) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ i^* surjektiv. $\Rightarrow$ iso $\blacksquare$

Fundamentalteoremet for skjemaer

X noethersk.

$$X[t^{\pm 1}] \to X[t] \to X$$

induserer iso på G_0.

Merk $K_0(F[x_1,\dots,x_n]) \simeq G_0(F[x_1,\dots,x_n]) \simeq G_0(F) \simeq \mathbb{Z}$

$\mathbb{A}^n_F$ er regulær

Endelig gen. Proj. $\mathbb{A}^n_F$-moduler er stabilt frie.

$\Rightarrow \tilde{K}_0$ er trivell

Euler-karakteristikk

kjedekomplekser i en abelsk kategori $\mathcal{A}$

$$C_\bullet : \quad 0 \to C_n \to C_{n-1} \to \dots \to C_1 \to 0$$

Da kalles $\chi(C_\bullet) = \sum_{i=} (-1)^i [C_i] \in K_0(\mathcal{A})$.

Prop $C_\bullet$ begrenset kj-kompleks i $\mathcal{A}$. Da er

$$\chi(C_\bullet) = \sum (-1)^i [H_i(C_\bullet)].$$

$C_\bullet$ asyklisk $\Rightarrow \chi(C_\bullet) = 0$ i $K_0\mathcal{A}$.

7

Korr $\exists$ naturlig surjeksjon (begrensede komplekser) & kjedekomplekser

$$\chi_H : K_0(\mathrm{Ch}_{\mathcal{A}}^{b}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A})$$

$$C_\bullet \longmapsto \sum (-1)^i [H_i(C_\bullet)]$$

§7 K_0 av eksakte kategorier

Def En eksakt kategori er et par $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ hvor $\mathcal{C}$ er additiv og $\mathcal{E}$ består av sekvenser i $\mathcal{C}$ på formen

$$0 \to B \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} D \to 0 \qquad (*)$$

slik at $\mathcal{C}$ er en full underkategori av en abelsk kategori.

① $\mathcal{E}$ er mengden av sekvenser som er eksakte i $\mathcal{A}$

② Hvis $(*)$ er eksakt i $\mathcal{A}$ og $B, D \in \mathcal{C} \Rightarrow C$ iso m/ ob. i $\mathcal{C}$.

i kalles monomorfi

j -"- epimorfi.

Vi ser at $\mathcal{C}$ er lukket under kjerner av surjeksjoner i $\mathcal{A}$: $f : A \to B$ surj. $\Rightarrow \ker f \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \supset$ ...)

Eksakte funktor: additiv funktor som bevarer kort eksakte sekvenser.

$\boxed{\text{def } K_0}$ $K_0(\mathcal{C}) = \left\{ [A] \;\middle|\; \begin{array}{l} [A] = [B] + [C] \\ \text{om } 0 \to C \to A \to B \to 0 \end{array} \right\}$

Eks $\mathbb{P}(R) \subset$ mod-R

Alle korte eksakte sekv. i $\mathbb{P}(R)$ splitter.

$\Rightarrow$ "splitte eksakte kategorier": alle k.e.s splitter.

"X parakompt top rom.

$VB(X)$ eksakt kategori i den abelske kategorien av familier av vektorrom / X.

$VB(X)$ er split-eksakt

$K_0(X)$, X skjema. $VB(X)$ eksakt kategori. Underkat. av $\mathcal{O}_X$.

Om X noethersk $VB(X) \subset M(X)$.

koherente knipper

Gir "Cartan-avbildningen" $K_0X \to G_0X$.

9

Eks 7.1.4 R ring (ikke nødv. noethersk).

$K_0(\mathrm{Mod}_R^{f.g.})$ ofte triviell for grupperinger

$\cap$

Mod_R

M <u>pseudokoherent</u> R-modul hvis $\exists$ resolusjon med end. gen. proj. R-moduler.

- Pseudokoherente $M(R) \subset \mathrm{Mod}_R$ eksakt undekat

  ↳ lukket under kjerner av surjeksjoner

Definer $G_0(R) = K_0 M(R)$

<u>Lemma</u> Hvis R-moduler har end. proj. dim, så $K_0 R \cong G_0 R$.
(R har endelig <u>global</u> dimensjon)

<u>Clete</u> & gjennom eksemplene 7.1.5 – 7.2.1