Plenum 5/11-2013

6.3.1 Skriv $\vec{x}$ som $\vec{y}+\vec{w}$ hvor $\vec{y} \in \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ og $\vec{w} \in \text{Span}\{\vec{u}_4\}$. ($\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_4$ er ortogonal basis)

Velg $W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Da er $W^\perp = \text{Span}\{\vec{u}_4\}$.

Regner ut $\hat{\vec{x}} = \text{proj}_{W^\perp} \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}_4}{\vec{u}_4 \cdot \vec{u}_4} \vec{u}_4$

$$= \frac{50+24-2}{25+9+1+1} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Da er (fra Thm 8) $\vec{y} = \vec{x} - \hat{\vec{x}} \in W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_3\}$.

Så $\vec{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \in W$.

Så $\vec{x} = \vec{y} + \hat{\vec{x}}$ m/ $\vec{y} \in W$ og $\hat{\vec{x}} \in W^\perp$.

6.3.4 $\vec{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Regn ut $\text{proj}_W \vec{y}$ der $W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

$$\hat{\vec{y}} = \underbrace{\frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}}_{\text{tall}} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2$$

$$= \frac{18+12}{25} \vec{u}_1 + \frac{-15}{25} \vec{u}_2 = \frac{6}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-3}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 9 \\ \hline 33 \end{array}$$

nov 5-14:11

6.3.7 $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

La $W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Skriv $\vec{y}$ som sum m/ $\vec{w} \in W$ og $\vec{x} \in W^\perp$.

Først regne ut $\hat{\vec{y}} = \text{proj}_W \vec{y} = \frac{y \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{y \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2$

$$= \frac{0}{?} \vec{u}_1 + \frac{28}{42} \vec{u}_2$$

$$= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} =: \vec{w}$$

Og $\vec{y} - \hat{\vec{y}} = \frac{7}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =: \vec{x}$

Da er $\vec{y} = \vec{x} + \vec{w}$ m/ $\vec{x} \in W^\perp$ og $\vec{w} \in W$.

6.3.16 (se ex_6_3_16.m)

nov 5-14:29

<u>6.3.18</u> $\vec{y} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ $W = \text{Span}\{\vec{u}_1\}$.

U^T 1×2

a) La $U = [\vec{u}_1]$. 2×1-matrise

$$UU^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{10}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}}_{U}\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$U^TU = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}[10] = \underline{\underline{[1]}}$$ 1×1-matrise

b) $$\text{proj}_W \vec{y} = \frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \frac{-20}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= -2\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

c) $$UU^T\vec{y} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -20 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Samme svar!

nov 5-14:36

__6.3.23__ A $m \times n$ - matrise

Vis at alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrives unikt som

$\vec{x} = \vec{p} + \vec{u}$ der $\vec{p} \in \text{Row}\, A$

og $\vec{u} \in \text{Null}\, A$. $\quad (\mathbb{R}^n = \text{Row}\, A \oplus \text{Null}\, A)$

__Bevis__ La $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. La $W = \text{Row}\, A$. Da

er $W^{\perp} = (\text{Row}\, A)^{\perp} = \text{Null}\, A$.

et eller annet teorem

Da følger det fra __Thm 8__ at $\vec{x} = \text{proj}_W \vec{x} + \vec{w}$

unikt, m/ $\vec{p} = \text{proj}_W \vec{x} \in \text{Row}\, A$ og $\vec{w} \in W^{\perp} = \text{Null}\, A$.

$\blacksquare$

[Hvis $A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning så eksisterer det unik $(\exists!)$

$\vec{p} \in \text{Row}\, A$ m/ $A\vec{p} = \vec{b}$.

er alle løsninger på formen

v/ tidligere, så $\vec{p} + \vec{u}$ der $\vec{u}$ er løsning av den homogene

ligningen $A\vec{x} = \vec{0}$. Ved det over er denne dekomposisjonen

unik. (v/ Thm 8)

$\blacksquare$

6.3.25 (Chris tid)

6.4.9

$$A = \begin{array}{ccc} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alle søyler pivotsøyler, så $\dim \text{Col}\, A = 3$.

Bruk Gram-Schmidt på søylene.

- $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} + \frac{40}{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

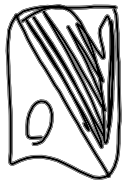
$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{30}{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

$\boxed{6.4.15}$ (se ex_6_4_15.m)

$$\underset{5\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = QR$$

5x3-matrise m/ ortonormale søyler, basis for Col A.



Øvre Triangulær

1. Lag Q: basis for Col A, ortonormal.
2. Da er $R = Q^T A$.
   1. Bruk Gram-Schmidt på søylene for å få ortogonal basis.
   2. Del hver søyle på sin lengde.
   3. Lag $Q = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{u}_3]$ m/ den resulterende ortonormale basisen.
   4. $R = Q^T A$.

6.4.19 $\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{Q}\,\underset{n\times n}{R}$ Q – søyler ortonormale.

Anta søylene i A er lin. uavhengige.

Da er R invertibel.

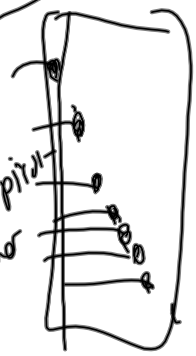
„Fake proof" $\det(A) = \det Q \cdot \det R$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \det R \neq 0$ så R invertibel.

Men beviset funker kun om A er $n\times n$.

Man kan finne $n\times n$-undermatrise i A m/ lin. uavhengige søyler.

Så skriv $A = \begin{bmatrix} A' \\ A'' \end{bmatrix}$ hvor A' er $n\times n$.



n pivot-søyler

Kutt ut de samme radene i Q og få Q'. Da er

$$A' = Q'R$$

$$\begin{bmatrix} A' \\ A'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q' \\ Q'' \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} Q'R \\ Q''R \end{bmatrix}$$

2 pivot-søyler

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da er $A = \begin{bmatrix} A' \\ A'' \end{bmatrix}$

Men nå er A', Q', R kvadratiske, så nå funker beviset over.

∎

6.4.20 $\overset{m\times n}{A} = \overset{m\times n}{Q}\overset{n\times n}{R}$ m/ R invertibel

Vis at $\operatorname{Col} A = \operatorname{Col} Q$

$\boxed{\text{Generelt: hvis } U \subseteq V \text{ og } V \subseteq U, \text{ så } U = V.}$

(⊆) $\vec{a} \in \operatorname{Col} A$. Da er $\vec{a} = A\vec{x}$ for en $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$.

$$= QR\vec{x}$$
$$= Q(R\vec{x})$$
$$= Q\vec{y} \quad (\text{der } \vec{y} = R\vec{x})$$

Så $\vec{a} \in \operatorname{Col} Q$.

(⊇) La $\vec{q} \in \operatorname{Col} Q$.

$$\vec{q} = Q\vec{y}$$
$$= AR^{-1}\vec{y}$$
$$= A(R^{-1}\vec{y}) = A\vec{x} \quad (\vec{x} = R^{-1}\vec{y})$$

Så $\vec{q} \in \operatorname{Col} A$.

*** 6.4.21)** Gitt $A = QR$. Vis at finnes $m \times m$-matrise Q_1 slik at $\overset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{Q_1}\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$.

Søylene i Q er lin. uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^m$, så de kan utvides til en ortonormal basis. La $Q_1 = [Q \; q_{n+1} \cdots q_m]$

Da er Q_1 $m \times m$ ortonormal.

Da er $A = Q_1 \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$

$\operatorname{Col} Q_1 = \mathbb{R}^m$

„Bevis": $\operatorname{Col} A = \operatorname{Col} Q$, så trengs ingen koeffisienter fra $q_{n+1}, \ldots, q_m$.

Thm $\{$minste kvadrats-løsn. til $A\vec{x}=\vec{b}\}$

$$\Updownarrow$$

$\{$løsn. til $A^TA\hat{x} = A^T\vec{b}\}$

Om søylene er lin. uavhengige, så er

$$\hat{\vec{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}.$$

[**Thm** uavhengige søyler i $A \Rightarrow \hat{x} = R^{-1}Q^T\vec{b}$
der $A = QR$.

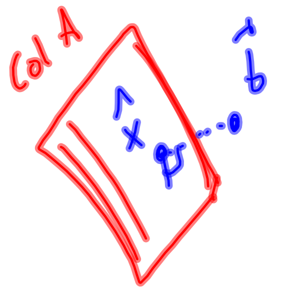
6.5.2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

Normal-ligningene

$$A^TA = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} -24 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 & -24 \\ 8 & 10 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \dots \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$



6.5.20 Anta at A^TA er invertibel.
Vis at søylene i A er lin. uavhengige

søylene i A lin. uavh.

$\Updownarrow$

$\text{Null } A = \{0\}$

$\Updownarrow$ forrige oppg

$\text{Null } A^TA = \{0\}$

$\Updownarrow$ A^TA invertibel.

6.5.19 $\text{Null } A = \text{Null } A^TA.$

Samme som å si at
$A\vec{x}=0 \iff A^TA\vec{x}=0$

$$\underbrace{x^TA^TA\vec{x}} = (A\vec{x})^T A\vec{x} = (A\vec{x})\cdot(A\vec{x})$$
$$= \|A\vec{x}\|^2 = 0$$
$$\iff A\vec{x}=0$$

Så hvis $A^TA\vec{x}=0$ er også $A\vec{x}=0$
Og hvis $A\vec{x}=0$ er $A^TA\vec{x}=0$. $\blacksquare$

nov 5-15:56