Cartier-divisorer

X skjema, noethersk, uten emb. komponenter. ✱

[kurve: endi-dim. skjema av dim 1. Noethersk, separert. (ingen embedded komponenter)]

Rasjonale funksjoner på X

$X = \operatorname{Spec} A$

Må se på den totale kvotientringen.

$S = \{ s \in A \mid s \text{ ikke nulldivisor} \}$

Da er $K(A) := A_S = S^{-1}A$

[$X = \operatorname{Spec} A$

$0 = q_1 \cap \dots \cap q_r$

$\sqrt{q_i} = p_i$ ← assosierte primidealer til A.]

[✱ Sier at ∃ ingen inklusjonsrelasjoner mellom p_i.]

Merk $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow at = bs$ (Husk: alle $s, t \in S$ er ikke null-div)

Så avb. $A \hookrightarrow A_S$ er injektiv.

☐ Om $A \to B$ flat vil

$(0 \to A \xrightarrow{s} A) \otimes_A B = (0 \to B \xrightarrow{s} B)$ så

ikke-null div i A ⇓ — " — i B

Får da også $K(A) \hookrightarrow K(B)$.

På samme måte: $K(A) \to K(A_p)$.

- Om A er et integritetsområde, så er $K(A)$ = kvotientkroppen til A.
- Anta A har bare ett assosiert primideal p.

Husk: $\{0\text{-divisorer i } A\} = \bigcup_{\text{assosierte}} p_i$

I dette tilfellet blir $K(A) = A_{\mathfrak{p}}$.

Siden $\mathfrak{p}$ minimal $\Rightarrow$ $A_{\mathfrak{p}}$ artinsk + lokal.

(lokal m/ $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ som maks-ideal)

„nesten kropp, men med nilpotenter"

Eksempel $k[\cancel{x,y}][y]/(x)^2 \rightsquigarrow K(A) = \frac{k(y)[x]}{(x^2)} =$

$X = \bigcup X_i = \operatorname{Spec} A \quad X_i = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{q}_i$

Thm A noethersk, uten embeddede komponenter m/ $\operatorname{Ass} A = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$. Da er

$$K(A) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{r} A_{\mathfrak{p}_i}$$

Pf ① $K(A) \longrightarrow K(A)_{\mathfrak{p}_i}$ opplagt lokaliseringsavb.

gir

© $K(A) \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} K(A)_{\mathfrak{p}_i}$ ← denne er en isomorfi!

semi-lokal + artinsk m/ primidealer $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$.

(Øvelse)

③ Gjenstår å vise at $K(A)_{\mathfrak{p}_i} = K(A_{\mathfrak{p}_i})$?

Prop $T \subset A$ mult. system, så er $K(A)_T = K(A_T)$ (A uten emb. komponenter)

$T = \{1, f, f^2, \dots\}$ f ikke nilpotent.

$K(A)_f \overset{?}{=} K(A_f)$

3

„begynner å nærme oss divisorer"

Knippet av rasjonale funksjoner på X: $\mathcal{K}_X$

1. $U \subseteq X$ $\quad \Gamma(U, \mathcal{K}_X) \stackrel{\text{def}}{=} K(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$

2. $V \subseteq U$: $\quad \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ flat

Så induserer $K(\Gamma(U, \mathcal{O}_X)) \to K(\Gamma(V, \mathcal{O}_X))$.

Aksiomene for et preknippe ok!

Så vi knippifiserer!

Teorem X noeth, sep, uten emb. komponenter. La $\eta_1, \ldots, \eta_r$ være de generiske punktene.

$$\Gamma(U, \mathcal{K}_X) = \prod_{\eta_i \in U} K(\mathcal{O}_{X, \eta_i})$$

1. Høyresiden er knippe.

$U \supseteq V$

$$\prod K(\mathcal{O}_{X,\eta_i}) \xrightarrow{\text{proj.}} \prod K(\mathcal{O}_{X,\eta})$$

„sjekke dette"

rent kombinatoriske

" Ike sammen overs på åpne affine pga tidligere teorem .. "

4

Cartier-divisorer

$$1 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}_X^* \to \mathcal{K}_X^* / \mathcal{O}_X^* \to 1$$

Γ

$$1 \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) \to \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \to \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$$

$$\operatorname{Div}(X) \to \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to 0$$

fordi $\mathcal{K}_X^*$ e flasque

Def En Cartier-divisor er et element i $\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$.

Om f er en rasjonal funksjon som ikke forsvinner på noen komponent, i.e. $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ så er $(f) \in \operatorname{Div} X$ hoveddivisor.

Alle slike $P_X \subseteq \operatorname{Div} X$.

$$\operatorname{Div} X / P_X \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \leftarrow \text{Picard-gruppen}$$

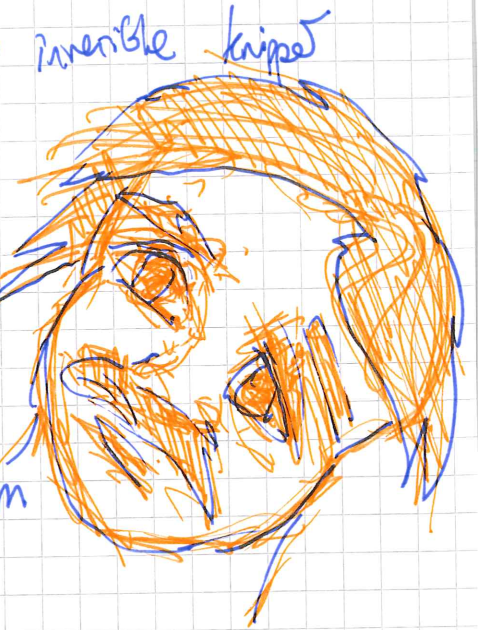
divisorklassegruppen

X kurve nå!

(1) Divisorer per grad: $D \in \mathrm{Div}\,K$, $\deg D \in \mathbb{Z}$

(2) Picardgruppen: også definert som gruppen av invertible knipper

(3) fundamentale egenskaper...



X skjema.

$\mathcal{L}$ kalles en invertibel $\mathcal{O}_X$-modul om

(1) $\mathcal{L}$ $\mathcal{O}_X$-modul

(2) Finnes overdekning $\{U_i\}$ av X og isos

$$\tau_i : \mathcal{O}_X|_{U_i} \to \mathcal{L}|_{U_i}$$

$\Updownarrow$

(3) $\forall x \in X$ så er $\mathcal{L}_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}$ som $\mathcal{O}_{X,x}$-moduler

$\{U_i\}$ er trivialiserende

$g_i := \tau_i(1)$ er lokale generatorer.

[Isomorfiklasser av inv. $\mathcal{O}_X$-moduler danner en gruppe.]

$\mathrm{Pic}(X)$.