27/9 5.6 Diskrete dynamiske systemer

hvor med sekvenser å gjøre — noe som skjer!

diskret — kont. (i motsetning til kontinuerlig

- Interessert i long-term behaviour til systemet.

  Her er egenverdier våre venner.

Def (Dynamisk system) Gitt startverdi $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Da er et ___ gitt ved $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$.

Hvis A er diagonalmatrise, er dette bare n uavhengige førsteordens differenslikninger

$$\left.\begin{aligned} x^1_{k+1} &= \lambda_1 x_k \\ &\;\vdots \\ x^n_{k+1} &= \lambda_n x_k \end{aligned}\right\} n \text{ stk.}$$

Prop Anta A diagonaliserbar m/ n forskjellige egenverdier, sortert slik at $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Med egenvektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Skriv $\vec{x}_0 = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n$

Da er $\vec{x}_k = c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + \dots + c_n\lambda_n^k\vec{v}_n$.

Bevis

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 \\ &= A(c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n) \\ &= c_1A\vec{v}_1 + \dots + c_nA\vec{v}_n \\ &= c_1\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\lambda_n\vec{v}_n. \quad (*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 &= A(c_1\lambda_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\lambda_n\vec{v}_n) \\ &= c_1\lambda_1A\vec{v}_1 + \dots + c_n\lambda_nA\vec{v}_n \\ &= c_1\lambda_1(\lambda_1\vec{v}_1) + \dots + c_n\lambda_n(\lambda_n\vec{v}_n) \\ &= c_1\lambda_1^2\vec{v}_1 + \dots + c_n\lambda_n^2\vec{v}_n\end{aligned}$$

... Mønsteret fortsetter...!

QED □

sep 27-12:03

$$X_k = c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + \dots + c_n \lambda_n^k \vec{v}_n$$

Observasjon
- Hvis alle $|\lambda_i| < 1$, så $\vec{X}_k \to 0$ for $k \to \infty$.
- Hvis én av $|\lambda_i| > 1$ så $\vec{X}_k \to \infty$ for $k \to \infty$.
- Om alle $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow$ ingen konvergens (med mindre $A = I$)

- Hvis $n = 2$ og $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

$$X_k = c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + c_n \lambda_2^k \vec{v}_2$$

så vil $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|^k > 1$. så for store k, $X_k \approx c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1$

sep 27-12:32

Eks1 · Alle startpkter går mot null! $\vec{0}$.

· Raskere mot null i retning egenvektoren med laveste egenverdi

· Kaller $\vec{0}$ for en attraktor/tiltrekker.

$$\underbrace{X_k = c_1 \lambda_1^k \vec{e}_1 + c_2 \lambda_2^k \vec{e}_2}_{\text{alltid mot null fordi begge} < 1.}$$

sep 27-12:40

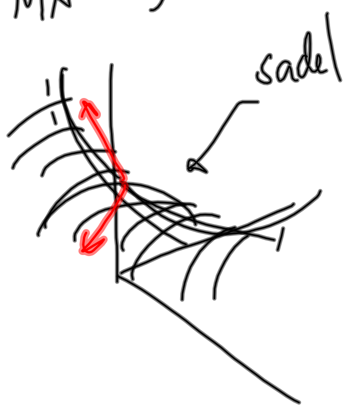
(filene legges ut på folk.uio.no/fredrme/mat1120/)

eks2
- Begge egenverdiene > 1,
- Uansett hvor man starter, $\to \infty$.

eks2.m
- Raskere i retning $\vec{e}_1$. (fordi $1.44 > 1.2$)
- Hvis $\vec{x}_0$ er egenvektor (ligger i $\text{span}\{e_i\}$)
- Repellor / frastøter.

eks3
- $\vec{0}$ er sadelpunkt (husk MAT1110)

eks3.m
- Ene $\lambda_1 > 1$ og $\lambda_2 < 1$.



Hva om A ikke er diagonal?

Siden $\vec{x}_k = c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + \dots + c_n \lambda_n^k \vec{v}_n$

Observasjon: Om A reell matrise med kompleks egenverdi λ. Så er også $\bar{\lambda}$ en egenverdi
$\vec{v}$ $\bar{\vec{v}}$

Bevis: $\overline{A\vec{v}} = \boxed{A\bar{\vec{v}}}$
$= \overline{\lambda\vec{v}} = \boxed{\bar{\lambda}\bar{\vec{v}}}$

Oppsummert: Om $(\lambda, \vec{v})$ egenpar $\Rightarrow$ $(\bar{\lambda}, \bar{\vec{v}})$ egenverdi.

Husk:
Hvis $z = a + ib$
så $\bar{z} = a - ib$
konjugert

5.6.1 A 2×2 matrise

$\lambda_1 = 3 \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{1}{3} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left(A = PDP^{-1} \text{ eller } P^{-1}DP \right)$ søyler egenvektorer

La $\{\vec{x}_k\}$ være løsning av $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ hvor

$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_k = \underset{(5)}{c_1} \lambda_1^k \vec{v}_1 + \underset{(-4)}{c_2} \lambda_2^k \vec{v}_2$

a) Regn ut $\vec{x}_1$.

Vil ha $\vec{x}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Så $\vec{x}_0 = 5\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2$.

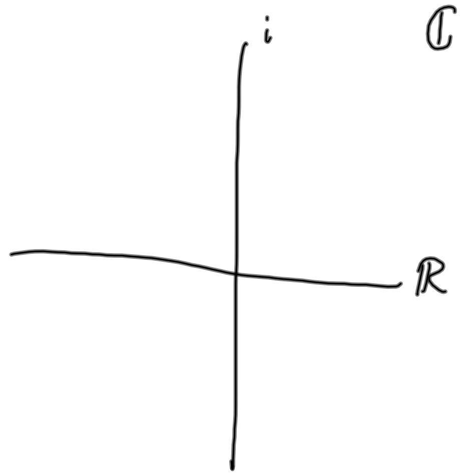
Så (ved formel) $\vec{x}_1 = 5 \cdot 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-4) \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 15 - \frac{4}{3} \\ 15 + \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

sep 27-13:34

Digresjon et annet diskret dynamisk system

- Fraktal.



M Mandelbrot-mengden $\subseteq \mathbb{C}$.

$c \in M$ hvis følgen

$$\boxed{z_{n+1} = z_n^2 + c}$$

ikke går mot $\to \infty$ $\quad z_0 = 0$

$1 \in M$?

$$z_1 = 0 + 1$$
$$z_2 = 1^2 + 1 = 2$$
$$z_3 = 2^2 + 1 = 5$$
$$\vdots$$
$$z_n \to \infty$$

$1 \notin M$!

$-1 \in M$?

$$z_1 = 0 + (-1) = -1$$
$$z_2 = (-1)^2 - 1 = 0$$
$$z_3 = 0 - 1 = -1$$

Går ikke mot uendelig, så $-1 \in M$.