Plenum 15/10-13

5.4.1 $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ $\mathcal{D} = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2\}$

V W

$T: V \longrightarrow W$

$T(\vec{b}_1) = 3\vec{d}_1 - 5\vec{d}_2$

$T(\vec{b}_2) = -\vec{d}_1 + 6\vec{d}_2$

$T(\vec{b}_3) = 4\vec{d}_2$

Finn matrisen til T mhp basisene $\mathcal{B}$ og $\mathcal{D}$.

Pr. Def $= M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{D}} \; [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{D}} \; [T(\vec{b}_3)]_{\mathcal{D}} \right]$

$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ 2x3-matrise

„Moral": så snart vi har valgt basiser, kan vi skrive opp matriser...

5.4.6 $T: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_4$

$p(t) \longmapsto 2t^2 \cdot p(t) + p(t)$

a) Finn bildet av $p(t) = 3 - 2t + t^2$

$T(p(t)) = 2t^2(3 - 2t + t^2) + 3 - 2t + t^2 = 3 - 2t + 7t^2 - 4t^3 + 2t^4$

$= 6t^2 - 4t^3 + 2t^4 + 3 - 2t + t^2$

okt 15-14:09

b) Vis at T er lineærtransf.:

① $T(p(t)+q(t)) = T(p(t)) + T(q(t))$

$$\begin{aligned}
VS &= 2t^2(p(t)+q(t)) + p(t) + q(t) \\
&= 2t^2 p(t) + 2t^2 q(t) + p(t) + q(t) \\
&= \underline{2t^2 p(t) + p(t)} + \underline{2t^2 q(t) + q(t)} \\
&= T(p(t)) + T(q(t)). \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Husk: $\boxed{T(p(t)) = 2t^2 \cdot p(t) + p(t)}$

② $T(c\,p(t)) = cT(p(t))$

$$\begin{aligned}
VS &= 2t^2(c \cdot p(t)) + c\,p(t) \\
&= c(\text{ — '' — }) = cT(p(t))
\end{aligned}$$

c) $\mathbb{P}_2 \quad \{1, t, t^2\} \quad \mathcal{E}_2$

$\mathbb{P}_4 \quad \{1, t, t^2, t^3, t^4\} \quad \mathcal{E}_4$

$p(t)=1 \quad T(1) = 2t^2 + 1$

$p(t)=t \quad T(t) = 2t^3 + t$

$p(t)=t^2 \quad T(t^2) = 2t^4 + t^2$

$$M = \Big[[T(1)]_{\mathcal{E}_4} \cdots [T(t^2)]_{\mathcal{E}_4} \Big]$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 1 & t & t^2 \end{array} \end{array}$$

$\boxed{5.4.15}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Finn basis for $\mathbb{R}^2$ s.a. $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ e gitt ved en diagonalmatrise.

① Finn egenverdier: Regn ut $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10$$
$$= (\lambda+5)(\lambda-2) = 0$$

Så egenverdiene er $\lambda_1 = -5$ og $\lambda_2 = 2$

$\lambda = -5$: $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = 1$ gir at

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ er egenvektor m/ egenverdi -5.

På samme måte: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ — // — 2

Fordi egenverdiene er forskjellige, er $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lin. uavh.

$\Rightarrow$ de utgjør basis for $\mathbb{R}^2$.

Sett $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Påstand: $[T]_{\mathcal{B}}$ er en diagonal-matrise.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}} \; [T(\vec{v}_2)]_{\mathcal{B}} \right] = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(fordi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ er egenvektorer)

$T\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$
$= \lambda_1 \vec{v}_1$

okt 15-14:32

$\boxed{5.1.18}$ $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$

A har 5, 5, -2 som egenverdier.

~~[illegible]~~ Finnes en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^3$ s.a. $[T]_{\mathcal{B}}$ er diagonal?

Kommer an på.

- Hvis ligningen $A\vec{x} = 5\vec{x}$ har 2-dim. løsningsrom, så kan vi finne basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ s.a. $[T]_{\mathcal{B}}$ er diagonal, der $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ utspenner løsningsrommet til $A\vec{x} = 5\vec{x}$.
- Hvis —"— er 1-dim, så nei.

(se eks. 4)

5.1.23 $B = P^{-1}AP$ $\vec{x}$ egenvektor for A m/ egenverdi λ.

Vis at $\underbrace{P^{-1}\vec{x}}_{\vec{y}}$ er egenvektor i B m/ egenverdi λ.

$$\underline{\underline{B\vec{y}}} = B(P^{-1}\vec{x}) = P^{-1}AP(P^{-1}\vec{x})$$
$$= P^{-1}A\vec{x}$$
$$= P^{-1}(\lambda\vec{x})$$
$$= \lambda(P^{-1}\vec{x})$$
$$= \underline{\underline{\lambda\vec{y}}}.$$

✓

5.1.31 A 3×3 $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$

$T(\vec{x}) = A\vec{x}$. Finn $[T]_{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$-matrisen til A)

Påstand $\boxed{[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP}$ der $P = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3]$.

Pr def av $[T]_{\mathcal{B}} = \left[[A\vec{b}_1]_{\mathcal{B}}\ [A\vec{b}_2]_{\mathcal{B}}\ [A\vec{b}_3] \right]$

∴ En koordinatvektor tilfredsstiller $P[A\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} = A\vec{b}_1$

Da er $[A\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} = P^{-1}A\vec{b}_1$

Så $[T]_{\mathcal{B}} = [\underline{P^{-1}A}\vec{b}_1\ \underline{P^{-1}A}\vec{b}_2\ \underline{P^{-1}A}\vec{b}_3] = P^{-1}AP$.

(se MATLAB-fil)

okt 15-14:50

5.4.32 Finn basis for $\mathbb{R}^n$ s.a. $[T]_B$ er diagonal.

$T(x) = Ax$

1. Skriv $[P\ D] = \text{eig}(A);$ i MATLAB

Da er søylene i P egenvektorer, og siden (sjekk!) $\det(P) \neq 0$, er de lineært uavhengige, så de utspenner $\mathbb{R}^n$?

$\boxed{5.6.4}$ $\vec{z}_{k+1} = \begin{bmatrix} O_{k+1} \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{bmatrix}}_{= A} \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$

Sett $p = 0.125 = \frac{1}{8}$

Da har A egenverdier/vektorer

$\lambda_1 = 0.6$ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.9701 \\ 0.225 \end{bmatrix}$ $0.9701^2 + 0.225^2 = 1$

$\lambda_2 = 1$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.6247 \\ 0.7809 \end{bmatrix}$

Finn formel for $\vec{z}_k$: Skriv $\vec{z}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$.

Da er $\vec{z}_k = c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$

Siden $|\lambda_1| < 1$, vil $c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 \longrightarrow \vec{0}$ når $k \to \infty$

Så $\vec{z}_k \longrightarrow c_2\begin{bmatrix} 0.6247 \\ 0.7809 \end{bmatrix}$,

Ustabilt!! fordi liten endring i p vil gi $\lambda_2 \neq 1$.
Så stabil situasjon er veldig ømfintlig for små endringer av p. (sannsynlighet)

$\boxed{5.6.13}$ $A = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ -.4 & 1.5 \end{bmatrix}$

Finn ut om $\vec{0}$ er „attractor/repellor" og ~~[illegible]~~ retning til tiltrekning/frastøtning.

egenvektor m/ størst egenverdi er $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, og dette er retningen vi vil gå.

(se animasjon i MATLAB-filer på nett)

$\boxed{5.6.16}$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \vec{p}_1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$

$v_2 = \begin{bmatrix} \vec{p}_2 \end{bmatrix}$ $\lambda_2 = 0.81$

$v_3 = \begin{bmatrix} \vec{p}_3 \end{bmatrix}$ $\lambda_3 = 0.89$

$[P \ D] = eig(A)$

$$z_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3$$

$$\vdots$$

$$\vec{z}_k = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \vec{v}_2 + c_3 \lambda_3^k \vec{v}_3$$

Siden $|\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$ vil $\vec{z}_k \to \underline{c_1 \vec{v}_1}$

likevektsposisjon

$$= \begin{bmatrix} c_1 \cdot 0.67 + c_2 \cdot 0.81^k \cdot 0.707 + c_3 \dots \\ \\ \end{bmatrix}$$