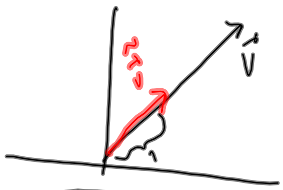
Plenum 29/10-2013

6.1.9 $\vec{v} = \begin{bmatrix}-30\\40\end{bmatrix}$. Finn $\tilde{\vec{v}}$ m/ lengde 1 i samme retning.

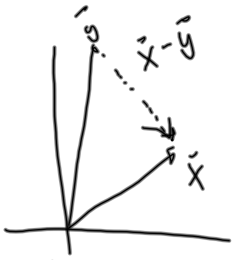


$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-30)^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600}$$
$$= \sqrt{2500} = \sqrt{25 \cdot 100} = 5 \cdot 10 = 50$$

Så $\tilde{\vec{v}} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix}-30\\40\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/5\\4/5\end{bmatrix}$.

Denne har lengde 1 fordi $\left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{v}\| = 1.$

6.13 $\vec{x} = \begin{bmatrix}10\\-3\end{bmatrix}$ $\vec{y} = \begin{bmatrix}-1\\-5\end{bmatrix}$



$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) \overset{\text{def.}}{=} \|x - \vec{y}\|$$
$$= \left\|\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{11^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{121 + 4}$$
$$= \sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \underline{\underline{5\sqrt{5}}}$$

okt 29-14:06

6.1.26 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ $W = \left\{ \text{alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ s.a. } \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \right\}$

Hvilket teorem i boka, sier at W er underrom av $\mathbb{R}^3$?

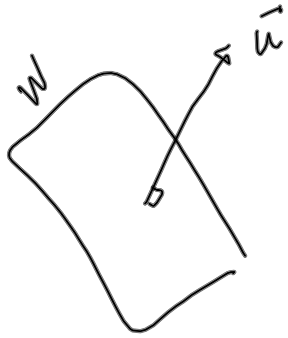
Obs: om $\vec{x} \cdot \vec{u} = 0$, så også $(c\vec{u}) \cdot \vec{x} = 0$.

Bruker at $W = \text{Span}\{\vec{u}\}^{\perp}$. ← orth

Tenk på $\vec{u}$ som en 3×1-matrise A. Da er $\text{Span}\{\vec{u}\} = \text{Col}\,A$

Da er v/ Teorem 3 $(\text{Col}\,A)^{\perp} = \text{Ker}\,A^T$. Og vi vet at kjerner er underrom. ✓

Geometrisk:



W er plan gjennom origo m/ $\vec{u}$ som normalvektor!

6.1.28 Anta $\vec{y} \perp \vec{u}$, $\vec{y} \perp \vec{v}$. Vis at $\vec{y} \in \text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}\}^{\perp}$.

Tar hintet og skriver $a\vec{u} + b\vec{v}$ for et generelt element i $\text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Da er

$$\vec{y} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\underbrace{(\vec{y} \cdot \vec{u})}_{=0} + b\underbrace{(\vec{y} \cdot \vec{v})}_{=0} = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$$

✓

okt 29-14:21

6.1.29

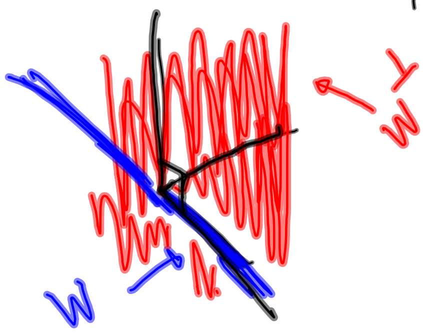
Anntakelsen er:
$$\begin{cases} \vec{x}\cdot\vec{v}_1 = 0 \\ \vdots \\ \vec{x}\cdot\vec{v}_p = 0 \end{cases}$$

V.a. $\vec{x} \in \text{Span}\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_p\}^\perp$.

$$\vec{x}\cdot(a_1\vec{v}_1 + \dots + a_p\vec{v}_p) = a_1(\vec{x}_1\cdot\vec{v}_1) + \dots + a_p(\vec{x}\cdot\vec{v}_p)$$
$$= a_1\cdot 0 + \dots + a_p(0)$$
$$= \underline{0}$$

6.1.30 V.a. $W^\perp$ er underrom av $\mathbb{R}^n$?

$W^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.a. } \vec{x}\cdot\vec{v} = 0 \text{ for alle } \vec{v} \in W\}$



a) $\vec{z} \in W^\perp$ og $\vec{u} \in W$.

Da er $(c\vec{z})\cdot\vec{u} = c\cdot(\vec{z}\cdot\vec{u})$
$= c\cdot 0 = 0$

Så $c\vec{z} \in W^\perp$.

B) Anta $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in W^\perp$ og $\vec{w} \in W$.

Da er $(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)\cdot\vec{w} = \vec{z}_1\cdot\vec{w} + \vec{z}_2\cdot\vec{w}$
$= 0 + 0 = 0$

Så (per definisjon) er $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 \in W^\perp$.

c) To ting å sjekke for om $W^\perp$ er underrom av $\mathbb{R}^n$:

1) Lukket under addisjon ✓ 2) Lukket under skalarmult. ✓

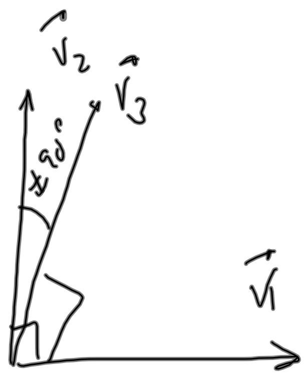
okt 29-14:30

6.23 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -12 + 21 - 9 = 0$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 6 - 7 + 1 = 0$

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -18 - 3 - 9 \neq 0$



6.2.10 Del 1 Sjekk at $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_3$ er ortogonale.
(regn ut....)

$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Del 2 For $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, finn koeffisientene i $\vec{x} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3$.

Ved Thm 5 er $c_j = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{u}_j}{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j} \left(= \dfrac{\|x\| \|u_j\| \cos\alpha}{\|u_j\|^2} \right)$

$c_1 = \dfrac{15+9}{18} = \dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3}$

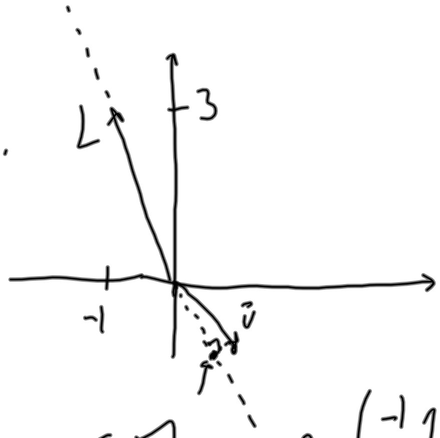
$c_2 = \qquad = \dfrac{1}{3}$

$c_3 = \dfrac{7}{18}$.

(mye enklere enn om hvis $\{u_i\}$ ikke hadde vært ortogonale (da måtte vi ha radredusert...)).

okt 29-14:38

6.2.12 $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $L = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.



Følger formelen på side 340.

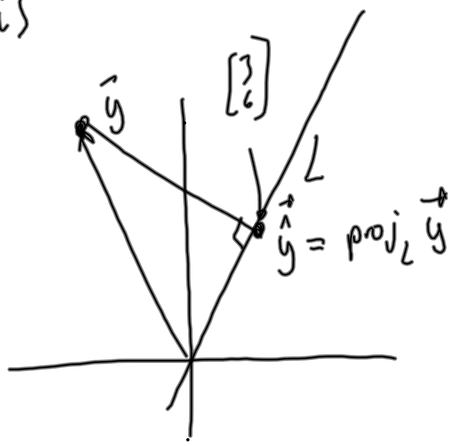
$$\hat{\vec{v}} = \text{proj}_L \vec{v}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-4}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{2}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

6.2.16 $\vec{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$L = \text{Span}\{\vec{u}\}$

Regn ut avst. fra $\vec{y}$ til L.



$\frac{\cancel{\vec{y}} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

$$\text{proj}_L \vec{y} = \frac{\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{15}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{dist}(\vec{y}, \hat{\vec{y}}) = \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{36 + 9}$$

$$= \sqrt{45}$$

$$= \sqrt{5 \cdot 9} = 3\sqrt{5}$$

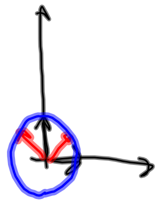
okt 29-14:42

6.2.19 $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -0.6 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.6 = 0$$

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = \sqrt{\frac{36}{100} + \frac{64}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{100}{100}} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$$



6.2.8 U ortogonal $n \times n$-matrise: $U^T = U^{-1}$ $\left(\Leftrightarrow UU^T = U^T U = I_n\right)$

V.a. radene til U utgjør en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

Viser for 2×2-matriser for å unngå mye notasjon

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad U^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}. \qquad \vec{u}_1 = (a \ \ b), \quad \vec{u}_2 = (c, d)$$

$$I = UU^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} a^2 + b^2 & ac + bd \\ \hline ca + db & c^2 + d^2 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1$ $\quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$

$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1$

Så $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ utgjør ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$.

(Bevis for generell n er likt, men mer å skrive)

okt 29-14:55

6.7.30 La U være ortogonal matrise.
Og la V være U m/ noen søyler byttet om.
Vis at V også er ortogonal.

$$UU^T = I$$
$$U^T U = I$$
$$(UU^T)^T = U^{T^T} U^T = UU^T$$

Merk1: Kan anta bare to søyler er byttet om.
Merk2: Å bytte om to søyler er samme som å gange m/ elementærmatrise.

Eks
$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & \vdots & 1 & & & \\ 0 & \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Da er UE_{12}, U m/ første og andre søyle byttet om.

Legg merke til E_{12} er ortogonal. $\left(E_{12}^T = E_{12} = E_{12}^{-1} \right)$

Så nok å se at $U_{12} = UE_{12}$ er ortogonal. (sjekk selv på små eksempler)

$$U_{12}^{-1} = (UE_{12})^{-1} = E_{12}^{-1} U^{-1}$$
$$= E_{12}^T U^T = (UE_{12})^T$$
$$= (U_{12})^T$$

Så U_{12} er ortogonal. ✓

okt 29-15:22

6.2.30 A (se s. 346)

8×4-matrise

Lag U ved å normalisere søylene i A.

Siden hver søyle i A har lengde 10, er $U = \frac{1}{10} A$.

a) $U^T U = id_4$ så søylene ortonormale

$U U^T =$ 8×8-matrise stor og stygg

B) $\vec{y} \in \mathbb{R}^8$ tilf. vektor

y = rand(8,1);

Regn ut $\vec{p} = U U^T \vec{y}$ og $z = \vec{y} - \vec{p}$

Forklar hvorfor $\vec{p} \in \text{Col}\, A$.

Sjekk at $\vec{z} \perp \vec{p}$.

$\vec{p} = U(U^T \vec{y}) \in \text{Col}(U) = \text{Col}(A)$.

I MATLAB: får at $|\vec{z} \cdot \vec{p}| < 10^{-14} \approx 0$.

Så de er (i hvertfall tilnærmet) ortogonale.

okt 29-15:30

c) Sjekk at $z \in (\mathrm{Col}\, U)^{\perp}$.

Siden $(\mathrm{Col}\, U)^{\perp} = \mathrm{Null}\ U^T$ er det

nok å sjekke at $U^T \vec{z} = 0$.

I MATLAB, får $\|U^T \vec{z}\| \approx 10^{-15} \approx 0$.

Så $\vec{z} \in (\mathrm{Col}\, U)^{\perp}$.

d) Legg merke til at $\vec{y} = \vec{p} + \vec{z}$. m/ $\vec{p} \in \mathrm{Col}\, A$.

Forklar hvorfor $\vec{z} \in \mathrm{Col}(A)^{\perp}$.

Følger fordi $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(U)$.

$\square$

(Moral: enhver vektor $\vec{v}$ kan skrives som sum

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{z}$$

m/ $\vec{p} \in \mathrm{Col}(A)$ og $\vec{z} \in (\mathrm{Col}\, A)^{\perp}$.)