Gjennomgang før midtveis

Kap 2

- Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner. Når funksjonen vår er en vektor for eksempel $f(x,y) = (x, y, xy)$, så blir den deriverte av f en matrise, ~~den~~ derivasjonsmatrisen kaller vi Jacobi-matrisen.

  Når $F(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x}))$ så er

$$F'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

(alle partiell-deriverte av førstekomponenten)

(Alle funksjonskomponentene. derivert med hensyn på x_1).

Eks: $f = (x, y, xy)$ da er

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}$$

- Kjerneregelen

  Kjerneregelen i flere variable fungerer helt likt som det vi er vant til fra en variabel, hvis $H = F(G(x))$ så er $H'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$. Forskjellen er at når vi jobber med flere variable så vil både $F'(G(x))$ og $G'(x)$ bli matriser, dvs. vi må regne ut $H'(x)$ med matrisemultiplikasjon.

Eksempel

La $G(1,-2) = (1,2,3)$, $G'(1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

og $F'(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, la $H = F(G(x))$,

Da er ~~H'(1,-2)~~

$$H'(1,-2) = F'(G(1,-2)) \cdot G'(1,-2)$$
$$= F'(1,2,3) \cdot G'(1,-2)$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 13 & -7 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}}}$$

- Linearisering

Når vi har en funksjon av en variabel så er vi ofte interessert i å finne tangentlinjen i ett punkt. Lineariseringen til en vektor-evaluert funksjon er det som tilsvarer tangenten når vi jobber med flere variabler. (tangent = linearisering).

Hvis $F: A \to \mathbb{R}^m$ er deriverbar i punktet $\vec{a}$, så er

$$T_{\vec{a}} F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + F'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

lineariseringen til F i $\vec{a}$.

Her er $F'(\vec{a})$ jacobi-matrisen til F i punktet $\vec{a}$, og $(\vec{x}-\vec{a})$ og $F(\vec{a})$ er vektorer.

Eksempel:

La $F(x,y) = (2xy, y^2)$ og $\vec{a} = (1,1)$. Da er

$$T_{\vec{a}} F(\vec{x}) = (2,1) + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{a}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

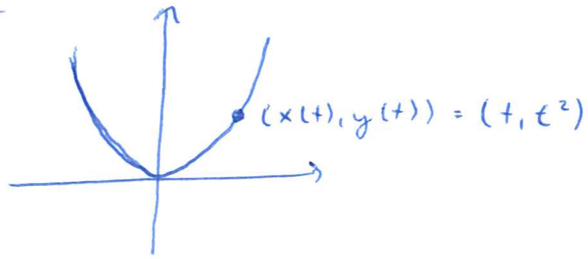
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(x-1) + 2(y-1) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}.$$

Kapittel 3

- ## Parametriserte kurver

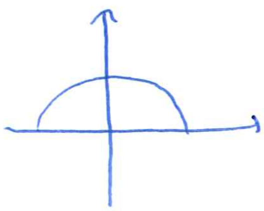
En parametrisert kurve i planet er en funksjon $r(t) = (x(t), y(t))$, hvor variabelen t ofte beskriver tiden, og $r(t)$ beskriver posisjonen ved tiden t til et punkt som beveger seg langs en kurve.

Eks



funksjonen $y = x^2$ kan parametriseres ved $r(t) = (t, t^2)$.

Det er viktig å huske at det alltid vil finnes flere parametriseringer for samme kurve. ~~Eksemp~~ Et eksempel er halvsirkelen som



som både kan parametriseres med

$r_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$

og

$r_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1, 1]$.

Buelengden til en parametrisert kurve $r(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ er gitt ved

$$L(a,b) = \int_a^b |r'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}\,dt.$$

Merk at buelengden ikke avhenger av hvilken parametrisering vi velger (men dette resultatet viser vi ikke i mat1110).

- $\vec{r}(t)$ beskriver posisjonen til en partikkel langs en kurve. Vi kan også finne farten og akselerasjonen.

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ = hastigheten. (en vektor)

$|\vec{v}(t)| = v(t)$ = farten. (et tall)

$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$ = akselerasjonen (en vektor)

$a(t) = v'(t)$ = akselerasjonen (et tall)

<u>Eksempel</u>

La $r(t) = (t, t^2)$. Da er

$\vec{v}(t) = (1, 2t)$

$v(t) = |(1, 2t)| = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1+4t^2}$

$\vec{a}(t) = (0, 2)$

$a(t) = v'(t) = \left(\sqrt{1+4t^2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+4t^2}} \cdot 8t.$

Det er viktig å merke at akselerasjonen (tallet) er den deriverte av farten og ~~H~~ <u>IKKE</u> lengden på akselerasjonsvektoren.

- <u>Kjerneregelen for parametriserte kurver</u>

Kjerneregelen for parametriserte kurver fungerer på akkurat samme måte som kjerneregelen for funksjoner av flere variable.

Hvis $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ og $\vec{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ ~~så er~~

~~f~~ og $u(t) = f(r(t))$ så er

$$u'(t) = f'(r(t)) \cdot r'(t)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot x_n'(t).$$

$$\underline{\overline{= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot r'(t).}}$$

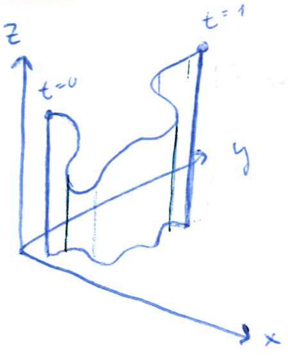
• <u>Linjeintegraler for skalarfelt</u>

Gitt at vi har en funksjon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (den spytter ut et tall og ikke en vektor) og en kurve C som er parametrisert ved $\vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$. ~~Da kan vi se linjeintegralet~~

Da kan vi integnere f langs kurven C, dette kalles et linjeintegral og er gitt ved

$$\boxed{\begin{aligned} \int_C f \, ds &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |r'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \, v(t) \, dt. \end{aligned}}$$

<u>Eksempel 1</u>



La C være kurven i $\mathbb{R}^3$ som er gitt ved tegningen, og parametrisert ved

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad t \in [0,1]$$

La f være funksjonen som beskriver høyden til C over xy-planet, med andre ord er $f(\vec{r}(t)) = x_3(t)$. Da kan vi regne ut arealet mellom C og xy-planet ved linjeintegralet

$$\int_C f \, ds = \int_0^1 \underbrace{x_3(t)}_{f(\vec{r}(t))} \cdot |r'(t)| \, dt$$

$$= \int_0^1 x_3(t) \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2} \, dt.$$

Eksempel 2

La $r(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ og $f(x,y) = xy^2$, da er

$$\int_C f \, ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) \cdot \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t \cdot 1 \, dt = \int_*^* \cancel{\cos t} \, u^2 \frac{du}{\cancel{\cos t}}$$

$$= \int_*^* u^2 \, du = \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_*^* = \left[\frac{1}{3} (\sin t)^3 \right]_0^{2\pi} = 0.$$

- Linjeintegraler for vektorfelt

La $\vec{F}$ være en ~~funksjon~~ vektorevaluert funksjon (den spytter ut en vektor). La C være en kurve parametrisert ved $\vec{r}(t)$. Da kan vi regne ut integralet av $\vec{F}$ langs kurven C;

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \, dt$$

Dette kalles linjeintegral for vektorfelt. Merk at både $\vec{F}(\vec{r}(t))$ og $\vec{r}\,'(t)$ er vektorer, men når vi ganger dem sammen så får vi en skalar, ~~og~~ noe som gjør at det gir mening å integrere (det gir nemlig ikke mening å integrere en vektor).

Eksempel

La $\vec{F}(x,y) = (y, x)$ og $\vec{r}(t) = (2t, -3t)$ der $t \in [1, 3]$.

Da er $\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_1^3 \vec{F}(2t, -3t) \cdot (2, -3) \, dt = \int_1^3 (-3t, 2t) \cdot (2, -3) \, dt$

$$= \int_1^3 -6t - 6t \, dt = -12 \int_1^3 t \, dt = -12 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^3 = \underline{\underline{-48}}.$$

Gradienter og konservative felt

Et vektorfelt er en funksjon $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Vi sier at $\vec{F}$ er konservativ dersom det finnes en funksjon $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla \phi = \vec{F}$$

(den deriverte, eller gradienten, til ϕ er lik $\vec{F}$).

Den viktigste egenskapen til et konservativt vektorfelt er at integralet rundt lukkede kurver er null. La C være en lukket kurve parametrisert ved $\vec{r}(t)$, $t \in [0,1]$. Da har vi at $\vec{r}(0) = \vec{r}(1)$ og

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_C \nabla\phi \, d\vec{r} = \int_0^1 \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0)) = 0.$$

Vi kan sjekke om et vektorfelt er konservativt med partiellderivert-testen. Hvis vi har at

$$\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{F}_j}{\partial x_i} \quad \text{for alle } i \text{ og } j,$$

så er vektorfeltet $\vec{F}$ konservativt.

__Eksempel__

La $F(x,y) = (2xy + 2x,\ x^2)$. Vi vil sjekke om $\vec{F}$ er konservativt. Da regner vi ut

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x,$$

siden vi får like svar vet vi at $\vec{F}$ er konservativt. (gitt at $\vec{F}$ er veldefinert ~~med kontinuerlige~~ på et enkelt- ↗

sammenhengende område, men det er det nesten alltid).

Siden $F(x,y) = (2xy + 2x, x^2)$ er konservativt, så kan vi finne potensialfunksjonen ϕ som er slik at $\nabla\phi = \vec{F}$. Vi vil at

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2.$$

Vi integrerer for å finne ϕ:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx = \int 2xy + 2x \, dx = x^2 y + x^2.$$

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dy = \int x^2 \, dy = x^2 y$$

For å finne ϕ så kombinerer vi de to integralene, med det mener jeg at vi tar $\int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$ og legger til de leddene fra $\int \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$ som ikke allerede er der.

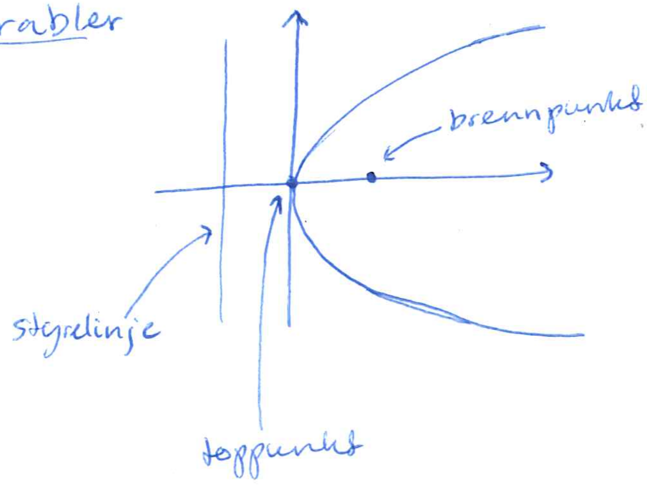
(Denne metoden fungerer generelt for å finne potensialfunksjoner, Vi kan ta $\int \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1$ og legge til leddene fra de resterende integralene som ikke allerede er der, for å finne en potensialfunksjon).

Dermed får vi at $\phi = x^2 y + x^2$, og vi har funnet en potensialfunksjon.
Merk at vi alltid kan legge til konstanter for å finne andre potensialfunksjoner til $\vec{F}$. (fordi konstantene forsvinner når vi deriverer).

- Kjeglesnitt

Vi har tre typer kjeglesnitt:

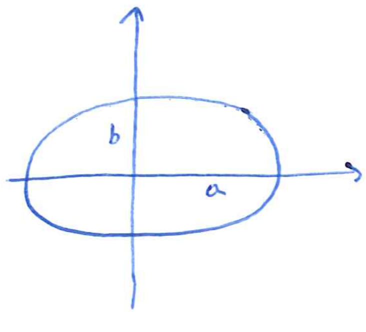
1, Parabler



En parabel med brennpunkt $(a, 0)$ og styrelinje $x = -a$ har ligning

$$y^2 = 4ax$$

2, Ellipser

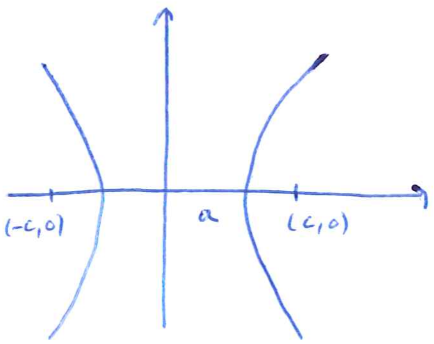


En ellipse med sentrum i origo ~~har~~ og halvakser a og b har ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

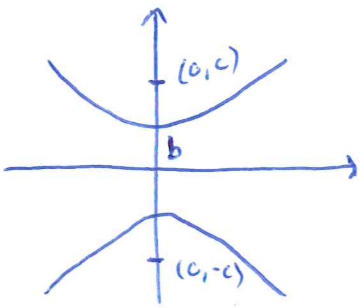
Dersom $a > b$ er brennpunktene $(c, 0)$ og $(-c, 0)$ der $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Dersom $a < b$ er brennpunktene $(0, c)$ og $(0, -c)$ der $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Dersom $a = b$ er ellipsen en sirkel med radius $r = a = b$.

3, Hyperbler



En hyperbel med ~~halvakser~~ halvakse a, brennpunkter $(c,0)$ og $(-c,0)$ og sentrum i origo har ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Mens en hyperbel med halvakse b, brennpunkter i $(0,c)$ og $(0,-c)$ og sentrum i origo, har ligningen $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Det er viktig å huske at alle kjeglesnitt kan ha sentrum andre steder enn i origo, for eksempel er

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

ligningen til en ellipse med sentrum i (m,n). Vi justerer x- og y-koordinaten på samme måte for hyperbler og parabler med sentrum i andre ~~st~~ steder enn i origo.

Eksempel

Hvilket kjeglesnitt fremstiller $x^2 + 4x + 2y - 4 = 0$?

svar: Vi fullfører kvadratet for å finne ut av det

$$x^2 + 4x + 2y - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 2y - 4$$
$$= (x+2)^2 + 2y - 8$$

↗

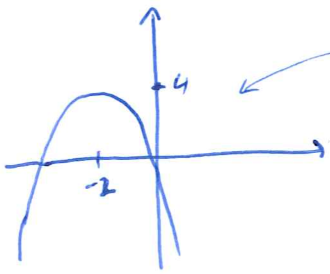
Vi ser videre på uttrykket og får

$$(x+2)^2 + 2y - 8 = 0$$
$$(x+2)^2 = -2(y-4)$$

Dette er en parabel med toppunkt i $(-2, 4)$. For å finne a løser vi ligningen $4a = -2$ $\Longrightarrow$ $a = -\frac{1}{2}$, brennpunktet er da gitt ved

~~[illegible]~~

$$(x, y+a) = \left(-2, 4 - \frac{1}{2}\right) = \left(-2, \frac{7}{2}\right)$$



Skisse av parabelen.

Merk at brennpunktet ville vært gitt ved $(x+a, y)$ hvis parabelen hadde vært liggende.

Kapittel 4

• Matriseligninger

Grunnen til at vi introduserer matriser er for å enklere kunne løse store ligningssystemer. For eksempel kan ligningssystemet

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & x - y + 2z = 1 \\
\mathrm{II} & 2x + y + z = 1 \\
\mathrm{III} & -2x - y + z = 0
\end{array}
$$

representeres ved matrisen

venstre siden av ligningene

høyre siden av ligningene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

For å løse ligningssystemet radreduserer vi matrisen. Det er vanskelig å gi en konkret oppskrift på radreduksjon, men målet er å få matrisen vår så lik identitets-matrisen $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ som mulig. Dette gjør vi ved å bytte om på rader, eller legge til et multiplum av en rad til en annen (stort sett det siste).

$$
\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\overset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\overset{\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\overset{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II} \text{ og } \frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}
\overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{III}}{\sim}
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}
$$

Dermed har vi redusert ligningssystemet vårt til

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & x - y = 0 \\
\mathrm{II} & y - z = -1/3 \\
\mathrm{III} & z = 1/2
\end{array}
$$

, og vi finner fort at løsningen er $(x, y, z) = (1/6, 1/6, 1/2)$.

Det er fort gjort å gjøre slurvefeil når vi radreduserer matriser, mitt beste tips er å kun gjøre en ting av gangen og alltid skrive opp hva du gjør slik at du kan dobbeltsjekke regningen etterpå.

Eksempel

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix}$. For hvike verdier av a har ligningssystemet $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ en entydig løsning?

Vi setter opp ligningssystemet som en matrise og radreduserer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & a \end{bmatrix} \overset{II-2I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & a-2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{ll} I & x_1 = 1 \\ II & a x_2 = a-2 \end{array}$$

Vi betrakter ligning nummer II og ser at når $a=0$ får vi $0=-2$, noe som er umulig. Dermed har ligningssystemet ingen løsninger for $a=0$. For $a \neq 0$ får vi at

$x_2 = \dfrac{a-2}{a}$, altså har ligningssystemet en entydig løsning.

Inverse matriser

Hvis A er en $n \times n$-matrise, så er A^{-1} den inverse matrisen til A dersom
$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ = identitets-matrisen.

En matrise A er inverterbar hvis og bare hvis den er radekvivalent med identitets-matrisen. Merk også at det bare gir mening å invertere kvadratiske matriser.

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, for å finne den inverse matrisen til A, så lager vi en større matrise (A, I_2) hvor vi "legger til" identitetsmatrisen etter A.

$$(A, I_2) = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix}}_{A} \;\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2}\right]$$

Deretter radreduserer vi (A, I_2) helt til vi får identitetsmatrisen på plassen til A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{7} \cdot \mathrm{II}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II}}{\sim} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} \;\; \underbrace{\begin{matrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

Når vi har gjort dette vil den "bakerste" matrisen være A^{-1}, altså er $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{bmatrix}$.
Denne metoden fungerer generelt for alle $n \times n$-matriser.

Når vi skal finne den inverse matrisen til en 2×2-matrise, så finnes det et triks som gjør utregningen lettere.

Hvis $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{bmatrix}$

Denne formelen kan være lur å huske.

- Determinanter

Det viktigste å kunne til eksamen er å regne ut determinanten til ~~3×3~~ 2×2 og 3×3-matriser.

La $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, da er $\det(A) = a_1 a_4 - a_3 a_2$.

$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$

$-$

Eksempel for 3×3-matriser

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Når vi skal regne ut determinanten til A så utvikler vi ofte langs den øverste raden

$$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

verdiene i den øverste raden.

$$= 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-6)$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

Husk at når vi utvikler langs en rad så bytter vi fortegn annen hver gang.

Et par viktige regneregler for determinanter er

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- $\det(A^T) = \det(A)$

Egenvektorer og egenverdier

En egenvektor til A er en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ (ikke null-vektoren) som er slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, λ er ~~et~~ et tall og kalles for egenverdien til A.

> For å finne egenverdier til en matrise A løser vi ligningen
>
> $$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

Når vi har funnet en egenverdi λ, så kan vi finne den tilhørende egenvektoren $\vec{v}$ ved å løse ligningssystemet

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Merk at hvis $\vec{v}$ er en egenvektor tilhørende λ, så vil $a\vec{v}$ også være en egenvektor tilhørende λ. (a er et hvilket som helst tall). Dette er fordi

$$A(a\vec{v}) = aA(\vec{v}) = a(\lambda\vec{v}) = \lambda(a\vec{v})$$

Hvis A har en kompleks egenverdi λ med tilhørende kompleks egenvektor $\vec{v}$, så vi $\bar{\lambda}$ også være en egenverdi, med tilhørende egenvektor $\bar{\vec{v}}$ (vi kompleks-konjugerer alle komponentene i $\vec{v}$).

Eksempel

Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi starter med å regne ut det karakteristiske polynomet:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (\lambda - 2)\lambda + 1$$

Vi finner λ ved å sette lik null:

$$(\lambda - 2)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

Siden andregradspolynomet kun har en løsning så har vi funnet en egenverdi med multiplisitet to.

Vi finner den tilhørende egenvektoren

$$A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{I} \quad 2v_1 - v_2 = v_1$$

$$\text{II} \quad v_1 = v_2$$

Vi ser at ligningssystemet er oppfylt hvis $v_1 = v_2$, så vi kan velge $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Lineærkombinasjoner

Gitt n vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$. En vektor $\vec{x}$ er en lineærkombinasjon av $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ dersom det finnes tall $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ slik at

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$$

Vi ønsker ofte å skrive en vektor $\vec{x}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene til en matrise A. Dette er for å lettere kunne regne ut produktet $A\vec{x}$.

Hvordan finne lineærkombinasjoner?

Vi vil skrive $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, altså vil vi finne konstanter slik at

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{x}$$

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dette ligningssystemet kan vi representere som matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{II - I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} c_1 = 3 \\ c_2 = -1 \end{matrix}$$

Dermed har vi funnet c_1 og c_2 og vi kan skrive $\vec{x}$ som lineærkombinasjonen

$$\vec{x} = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Altså er teknikken når vi skal finne lineærkombinasjoner å sette opp ligningssystemet, representere det som en matrise og radredusere.

Noen ganger er vi interessert i å finne ut om en mengde med vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige.
Dersom matrisen $A = (\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n)$ er radekvivalent med identitetsmatrisen så er søylene $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ lineært uavhengige.
I dette tilfellet utspenner $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ hele $\mathbb{R}^n$, vi sier da at $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$. (Alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$).

- <u>Egenvektorer i praksis</u>

Ofte vil vi bruke egenvektorer til å regne ut produkter på formen $A^n \vec{x}$.

<u>Eksempel</u>

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, vi vil regne ut $(A^3 + A^{100}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi må starte med å finne egenverdiene til A:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -3 & \lambda \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -3 \end{array}$$

$\nearrow$

Deretter vil vi finne de tilhørende egenvektorene.

1) ~~A~~ $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x + 4y = 4x \\ \text{II} & 3x = 4y \end{array}\right\} \longrightarrow \quad x = \frac{4}{3} y$$

Dermed kan vi velge $y = 1$ og få at

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2)
$A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x + 4y = -3x \\ \text{II} & 3x = -3y \end{array}\right\} \longrightarrow \quad x = -y$$

Velger vi $y = 1$ får vi at $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

For å finne $(A^3 + A^{100}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ er vi nødt til å skrive $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$. Altså vil vi finne c_1 og c_2 slik at

$$c_1 \vec{v}_1 + \vec{c_2} v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4/3\, c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi setter opp ligningssystemet som en matrise og radreduserer

↗

$$\begin{bmatrix} 4/3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{3\cdot I}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{I \Leftrightarrow II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{II-4\cdot I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{7}\cdot II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6/7 \end{bmatrix} \overset{I-II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6/7 \\ 0 & 1 & -6/7 \end{bmatrix}$$

Dermed får vi at $c_1 = 6/7$ og $c_2 = -6/7$

Så $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6/7 \cdot \vec{v}_1 - 6/7 \cdot \vec{v}_2$.

Til slutt vil vi utnytte at $A^n \vec{v} = \lambda^n \vec{v}$ når $\vec{v}$ er en egenvektor til A for å finne produktet $(A^3 + A^{100}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(A^3 + A^{100})\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= A^3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= A^3\left(6/7\, \vec{v}_1 - 6/7\, \vec{v}_2\right) + A^{100}\left(6/7\, \vec{v}_1 - 6/7\, \vec{v}_2\right) \\
&= A^3\, 6/7\, \vec{v}_1 - A^3\, 6/7\, \vec{v}_2 + A^{100}\, 6/7\, \vec{v}_1 - A^{100}\, 6/7\, \vec{v}_2 \\
&= \lambda_1^3 \cdot 6/7\, \vec{v}_1 - \lambda_2^3 \cdot 6/7\, \vec{v}_2 + \lambda_1^{100} \cdot 6/7\, \vec{v}_1 - \lambda_2^{100} \cdot 6/7\, v_2 \\
&= 4^3 \cdot 6/7 \cdot \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} - (-3)^3 \cdot 6/7 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + 4^{100} \cdot 6/7 \cdot \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} - (-3)^{100} \cdot 6/7 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En annen nyttig anvendelse av egenvektorer kan dere finne i eksempel 4.11.3 på side 385 i boken. Der brukes egenvektorer til å løse et system av differensialligninger.