

Monoider

(1)

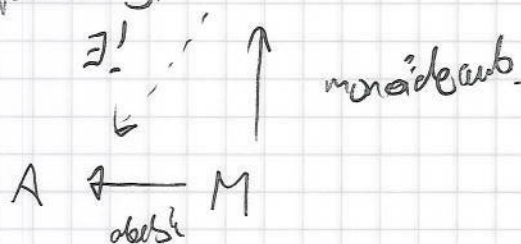
• rektorbaser

$Vb(G)$ transparen

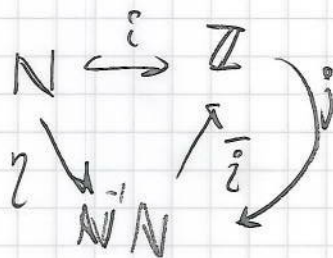
• N

• $P(R)$ proj. nd. \mathbb{Z} -moduler

Π abelske monoider: gruppekomplettering, $M^{-1}M$



Ety lokaliser $N^{-1}N = \mathbb{Z}$



Påstand i er iso!

\mathbb{Z} fri abelsk gruppe på generator 1. $\exists \mathbb{Z} \xrightarrow{j} N^{-1}N$
 $j(1) = \gamma(1) = [1]$

da er $i \circ j(1) = 1 \Rightarrow i \circ j = id_{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow j$ injektiv.

Elementene i N generer $N^{-1}N + 1$ generer $N \Rightarrow j$ surjektiv. $\Rightarrow i$ og j er inverse isomorfier.

Konstruktion av $\bar{M}'M$

(2)

$$\mathcal{F}(M) = \left\langle \begin{array}{l} \text{fri abelsk grupp p\u00e5} \\ \text{symboler } [m], m \in M \end{array} \right\rangle$$

$$\mathcal{R}(M) = \left\langle \begin{array}{l} \text{undergr } \leq \mathcal{F}(M) \text{ generer av} \\ \text{relationer } \cancel{[m+n]} \\ [m+n] - [n] - [m] \end{array} \right\rangle$$

$$\text{D\u00e4r } \bar{M}'M = \frac{\mathcal{F}(M)}{\mathcal{R}(M)}. \quad \text{Gr fuler } [abM] \rightarrow [abGrp]$$

Prop 11 M abelsk monoide.

a) Alla element i $\bar{M}'M$ \u00e4r p\u00e5 formen $[m] - [n]$ f\u00f6r $m, n \in M$.

b) $[m] = [n]$ i $\bar{M}'M \Leftrightarrow \exists p \in M$ s.d. $m+p = n+p$.

c) Monoidearb. $M \times M \rightarrow \bar{M}'M$ \u00e4r surjektiv.
 $(m, n) \mapsto [m] - [n]$

$$d) \bar{M}'M = \frac{M \times M}{\sim} \quad (m, n) \sim (m+p, n+p)$$

korollar • $M \hookrightarrow \bar{M}'M \Leftrightarrow M$ \u00e4r en ~~k\u00e4nsl\u00f6s~~ monoide. styckemonoide.

$$\hookrightarrow (\forall m, n, p \in M \text{ s.d. } m+p = n+p \Rightarrow m=n)$$

• $L \subset M$ kallas kofin\u00e4l h\u00e4r $\forall m \in M$, s\u00e5 $\exists m' \in L$,
 s.d. $m + m' \in L$. (ex. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)

Corr. L kernel i M .

(3)

a) $L^T L \subset n^{-1} M$ undergr.

b) Enhver demat i $M^T M$ er på formen $[m] - [l]$, $m \in L$, $l \in L$.

c) Hvis $[m] = [l]$, så $em + l = n + l$ for $l \in L$.

Ug

$F(R) = P(R)$

← frie moduler \subseteq projektive moduler

Semiring

$(M, +)$ abelsk monoide sammen med associativt produkt
(distributiv over $+$) (og 2-sidet mult.)
 $(N, +, \cdot)$

$\Rightarrow M^T M$ blir en ring hvis $(M, +)$ er en semiring.

Funktor:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{kommutative} \\ \text{semiring} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{kommutative} \\ \text{rings} \end{array} \right\}$$

Ex X top rom. $[X, N]$ kont. abt. til N , Gruppelocketning
er $[X, \mathbb{Z}]$.

Om X er kvantkompat, da er $[X, \mathbb{Z}]$ en fri abelsk gruppe.

Ex Burnside-ring til en endelig gruppe G .

(4)

$$M = \{\text{iso. klasser af endelige } G\text{-mængder}\}$$

normaldekorationer er disjunkt union

$X \times Y$ er produkt m/ faktorisering operation.

$\emptyset \in \{1\}$ er G -mængde på minste måde

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

En G -mængde er $G \cdot x \approx G/G_x$.

Antallet af c forskellige G -baner. Enhver G -mængde er en disjunkt union af baner $\leadsto M \cong \mathbb{N}^c$.

c er den samlede konj. -klasse af undergr. af G .

Gruppelambdalar er M , $\lambda(G) = \mathbb{Z}^c$.

\hookrightarrow Ex $G = C_p$. $\mathbb{Z}[x]/(x^p - 1)$

Ex G end. gruppe. $\text{Rep}_G(G)$ - end. dim repr. af G

Her kan man se under \oplus . $\rho \oplus \rho' : G \rightarrow GL_{n+n'}(\mathbb{C})$

Isomorfier: $\rho \oplus \rho' : G \rightarrow GL_{n+n'}(\mathbb{C})$

Sei $\text{Rep}_G(G)$ er en semiring.

(5)

$\text{Rep}_F(G) \xleftrightarrow{1:1} FG\text{-moduler,}$
 \uparrow
 $\text{grupperingen till } G,$
 $\text{li } F\text{-modul } s \text{ av } G. \text{ En } F\text{-modul}$
 är

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \left(\sum_{g \in G} s_g g \right) \triangleq \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \cdot k = g} r_h s_k \right) g$$

- Låt $\rho: G \rightarrow GL_n(F)$. $\rho(g)$ är på F^n via.
 $gv = \rho(g)v$
 uttrycket är en FG -virkning linjär.
 • Låt M FG -modul av dimension n som vektorrum / F .
 För $g \in G$, vil $g \mapsto (v \mapsto gv)$ var $\rho(g) \in GL(M)$.

Thm (Maschke) F kropp. char $\nmid |G|$.

$\Rightarrow FG$ är isomorf, semisimpl.

Varje ideal är en summand

\Downarrow

och var modul är projektiv

Sat # simple FG -moduler = # konjugationsklasser i G ($F = \bar{F}$)

$$\text{Rep}_F(G) = N^r$$

$$\text{Rep}_\mathbb{C}(G) = \mathbb{Z}^r$$

Var $\rho \in \text{Rep}_\mathbb{C}(G)$ avh. av \mathbb{C} .

6

Beweis \mathbb{F} einisur
 \mathbb{F}
 enhver model er projektiv

Besv Et ideal i FG er også et F -undermodul af FG , og $\dim FG = \#$
 $\Rightarrow FG$ cirkulær.

Læg M være en FG -model. Her surj. FG -model af.

$$(FG)^I \xrightarrow{\theta} M \rightarrow 0$$

Enhver undermodul N af M har en basis θ er en F -lineær transformation.

For en F -lineær transformation

$$w: M \rightarrow (FG)^I \text{ som splitter } \theta \text{ i } \alpha$$

vælge værdier for w på basiselementerne til M .

$$\phi: M \rightarrow (FG)^I \quad \forall$$

$$m \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1} w(hm) \quad \forall m \in M.$$

$$\text{Læg } \phi(gm) = \phi(m), \text{ og } w\phi = \text{id}_M. \quad \square$$

???

Thm 2.1.2 semisimple rings r.a. $\pi \rightarrow K_0 R$ is always split

$$\bullet K_0(R_1 \times R_2) = K_0 R_1 \times K_0 R_2$$

also plus som rings on R_1, R_2 is commutative.

$$\bullet K_0(\varinjlim R_i) \cong \varinjlim K_0(R_i) \quad \text{direct sum of generators}$$

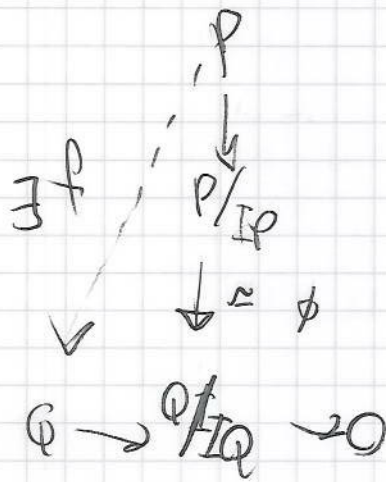
Lemma 2.2 On $I \subset R$ nilpotent ideal. Sei
 $K_0(R) \xrightarrow{\sim} K_0(R/I)$
 Sei on R commutative $\Rightarrow K_0 R \cong K_0 R_{red}$.

Comme fra module isomorphism

$$P(R) \rightarrow P(R/I)$$

Prop 2.2.1 $I \subset R$ radical ($I \subset \sqrt{R}$)
 $\text{radical nil } R$
 $= \begin{cases} \bigcap M_R & R \text{ comm.} \\ \text{else } a \in R \text{ or a direct sum of } R\text{-modules} \end{cases}$
 Thus $P, Q \in P(R)$, s.a.
 $P/I_P \cong Q/I_Q$. Sei follow on $P \cong Q$.

Bns



(1)

$$\begin{aligned}
 \forall n3 \quad q \in Q, \text{ sei } q + I_Q &= \phi(p + I_P) \\
 &= f(p) + I_Q
 \end{aligned}$$

$$\text{Si } Q = f(P) + I_Q$$

$$Q \text{ mod. } I_Q \Rightarrow \text{Matriciana } \Rightarrow Q = f(P).$$

Si f es surjetiv.

Si h es h.d. de Q sobre K

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \xrightarrow{f} Q \rightarrow 0$$

Splitar fada Q es projetiva:

$$\Rightarrow 0 \rightarrow K/I_K \rightarrow P/I_P \xrightarrow{f} Q/I_Q \rightarrow 0 \text{ es exato}$$

$$\text{mas } 0 \text{ is, si } K = I_K. \Rightarrow K = 0.$$

Exerc

$$K \otimes R \rightarrow K \otimes (R/I) \text{ es isomorfismo.}$$

Exerc I2.2

Se I nilpotent, si $(\Rightarrow I$ nilpotent)

$$\Rightarrow \text{Se } a \in R \text{ s.a. } \bar{a} \in R/I \text{ e idempotente, se}$$

$$I \text{ e idempotente } e \in aP \text{ s.a. } \bar{e} = \bar{a} \in R/I.$$

Bes For $b=1-a$, så
 $ab=ba=a-a^2 \in I$ sum
 or nilpotent, så $\exists m \geq 1$ s.o.

(10)

$$(ab)^m = 0.$$

$$1 = (a+b)^{2m} = \underbrace{a^{2m} + \binom{2m}{1} a^{2m-1} b + \dots + \binom{2m}{m} a^m b^m}_{e} + \underbrace{\binom{2m}{m+1} a^{m-1} b^{m+1} + \dots + b^{2m}}_{f}$$

So $a^m b^m = b^m a^m = 0$, for $i \neq 0$.

$$\Rightarrow e = e(e+f) = e^2$$

$\Rightarrow e$ idempotent

$$e \equiv a^{2m} \equiv a \pmod{I}.$$



korollar $\mathcal{P}(R) \approx \mathcal{P}(R/I)$, (via Ex 2.1.2)

$$\boxed{\text{Rang} \cong H_0 R = [\text{Spec } R, \mathbb{Z}]}$$

Lemma $M \in \mathcal{P}(R)$, så er arb. $f_i: \text{Spec } R \rightarrow \mathbb{Z}$ o. kontinuert.
 $p \mapsto \text{rk}_p M$

$$\underline{\text{Def}} \quad \widetilde{K_0 R} = \ker(\text{rank}: K_0 R \rightarrow H_0 R) \quad (12)$$

$$\widetilde{K_0 R} = \text{proj from } [P] - [P^n]$$