X noetherisk skjema, uten emb. komponenter 1

$\{(U_i, f_i)\}$

$$\operatorname{Div} X = \Gamma(X, \mathcal{K}_X^* / \mathcal{O}_X^*)$$

$\downarrow \Phi$

$$\operatorname{Pic} X = \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ invv.}\}/\text{iso}$$

$D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ $\qquad$ $\{(U_i, f_i)\} \mapsto f_i^{-1}\mathcal{O} \subseteq \mathcal{K}_X|_{U_i}$

Er en gruppehomomorfi. m/ kjerne $= P_X = \{$hoveddivisorer$\}$.

Prop Φ er surjektiv. $\qquad \operatorname{Cl} X \cong \dfrac{\operatorname{Div} X}{P_X} \cong \operatorname{Pic} X$

Pf La $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X$. Finn D s.a. $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$.

(1) Nok å finne en embedding av $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}_X$.

Fordi: la $\{U_i\}$ være en trivialiserende overd. for $\mathcal{L}$.

Da har vi $\mathcal{O}_{U_i} \cong \mathcal{L}|_{U_i} \subseteq \mathcal{K}_X|_{U_i}$ (anta vi har en slik)

$$1 \longmapsto f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X).$$

Da har vi (U_i, f_i) være lokale data for en divisor D.

Må sjekke at på $U_{ij} = U_i \cap U_j$ så er $f_{U_i}|_{U_{ij}} = c_{ij}\, f_j|_{U_{ij}}$. (c_{ij} enhet)

La $X = \bigcup_i X_i$ i irreduktible X_i. Da er også $\mathcal{L}|_{X_i}$ invertibl.

$\Rightarrow \exists\, U_i \subseteq X_i$ åpen og ~~tett~~ s.a. (1) $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$

(2) $U_i \cap X_j = \emptyset \quad i \neq j$.

$\Rightarrow$ Kan finne $U \subset X$ m/ $U = \bigcup U_i$ og $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$.

① La $i : U \hookrightarrow X$

Da er

$$i_* \mathcal{K}_U \xleftarrow{\simeq} \mathcal{K}_X \quad \boxed{\text{restriksjon}}$$

iso! Vi hadde at $\Gamma(V, \mathcal{K}_X)$

$$= \bigoplus_{\eta_i \in V} \cancel{K}(\mathcal{O}_{X,\eta_i}) \cong \bigoplus_{\eta_i \in V} \mathcal{O}_{X,\eta_i}.$$

Husk ③ $i : U \to X$

$\Gamma(V, i_* F) = \Gamma(V \cap U, F)$

(alle de generiske pkt. ligger i U)

$$\Gamma(V, \mathcal{K}_X) \simeq \bigoplus_{\eta_i \in V} \Gamma(\mathcal{O}_{X,\eta_i})$$

$\downarrow$ id siden lik indeksmengde

$$\Gamma(U \cap V, \mathcal{K}_X) = \bigoplus_{\eta_i \in U \cap V} \Gamma(\mathcal{O}_{X,\eta_i}).$$

② Se på $\mathcal{L} \hookrightarrow i_*(\mathcal{L}|_U)$ (injektiv!)

Anta $X = \operatorname{Spec} A$ og $U = \operatorname{Spec} A_f$.

Da er $\mathcal{L} = \tilde{P}$ for A-modul P. Der er $\mathcal{L}|_U = \tilde{P}_f$. $\quad i_* \mathcal{O}_U \subseteq i_* \mathcal{K}_U \cong \cancel{\mathcal{L}}\mathcal{K}_X$

og ant er $P \to P_f$.

så $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}_X$

(om f er ikke nulldivisor)

— —

Oppsummering

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \simeq Cl(X) \simeq \operatorname{Pic} X$$
$$\overset{\wr\wr}{\text{Div } X / \equiv}$$

Om $k = \mathbb{C}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0$$
$$f \longmapsto \exp(2\pi i f)$$

Så vi får

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(\mathcal{O}_X) \to H^1(\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$$
$$\text{diskret} \to \mathbb{C}^N \to \operatorname{Pic} X \to \text{diskret}$$

$\boxed{\text{diskret + kont. del}}$

Eks X ell. curve$/\mathbb{C}$.

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C} \to \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

Eks $X = $ Spec av $\mathcal{O}_K$ heltallsr. til alg. tallkropp.

Hvorfor er $Cl(X)$ endelig. $= ??$
$\underset{\operatorname{Pic} X}{\parallel}$

"masse uløste problemer"

Effektive divisorer

$D \quad \{(U_i, f_i)\}$. $\quad$ ~~$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^\times) \;\; \cup\!\! \mid \;\; \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^\times)$~~

$$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^\times) \subseteq \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X)$$
$$\cap\!\mid$$
$$\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$$

Er effektiv om $\exists$ lokale data w/ $f_i \in \mathcal{O}_X$.

$\Updownarrow$

gjelder for alle lokale sett av data

Se på $\mathcal{O}_X(-D) \subseteq \mathcal{K}_X$. ~~Se~~ ~~Res~~ Lokalt over U_i gitt v/ (U_i, f_i). Da er $\mathcal{O}_X(-D)$ et ideal!

(lokalt generert av ett element)

Til D får vi et lukket underskjema $\overline{D} \subseteq X$ og eksakt sekvens

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

Eksempel $\quad X = \mathbb{P}^n_k$. $\quad \underbrace{(x_0 : \ldots : x_n)}_{= x_\cdot}$ homogene koordinater.

$$U_i = \{x_\cdot \mid x_i \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^n$$
$$x_\cdot \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i+1}}{x_i} \ldots\right)$$

La $F(X.)$ være homog. polynom av grad d.

Beholde dataen $\left(U_i, F\left(\frac{X.}{x_i}\right)\right)$.

$$F\left(\frac{X_\cdot}{X_i}\right) = X_i^{-d} X_j^{d} F\left(\frac{X_\cdot}{X_j}\right) \text{ på snittet } U_i \cap U_j.$$

gir oss en linjebunt $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Om F' også grad D, så $\mathcal{O}_F \equiv D_{F'}$.

fordi $\left(\frac{F(x.)}{F'(x.)}\right) + D_{F'} = D_F$

hoveddiviser.

$\Rightarrow D_F \equiv D_{X_0^d}$.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes n}$.

D_F er effektiv. $D_F = V(F)$ (skjema!)

Kan dualisere sekvensen og få

$$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X(D) \to 0$$

$$1 \mapsto \sigma = \alpha(1)$$

σ global seksjon av $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Hva m/ motsatt vei? Gir avb. $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(D)$, $1 \mapsto \sigma$

Dualt $\Rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X$

ikke sikkert injektiv (ok hvis X irredusibel)

X varietet $/k$.

$\mathcal{L}$ inv. knippe på X.

$V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$. f. v.rom $/k$.

Får avb

$$\begin{array}{ccc} V \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ \sum v_i \otimes f_i & & \sum f_i v_i \end{array}$$

„med litt velvilje kan ikke dette misforstås"

Ser på $\left\{ E \subseteq V^* \,/\, \text{underrom av dim } 1 \right\}. = \mathbb{P}^n$

$\simeq \left\{ V \twoheadrightarrow k \,/\, \text{en-dim kvotient} \right\}$

Se på $V \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}$, $x \in X$.

$- \otimes k(x)$

Gir $V \otimes_{k(x)} k(x) \longrightarrow \mathcal{L} \otimes k(x) \simeq k(x)$

$\Downarrow$

Får avb $V \longrightarrow k(x)$

$\sigma \longmapsto \sigma(x) \in k(x)$.

Kan hende vi får avb $X \to \mathbb{P}^n$.