7.129 A inv. og ortogonalt diag.

Vis at også A^{-1} ⌉.

$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Siden $A = P^T D P$ så

er
$$A^{-1} = (P^T D P)^{-1}$$
$$= P^{-1} D^{-1} (P^T)^{-1}$$
$$= P^T D^{-1} P$$

$$\begin{bmatrix} a & & 0 \\ & b & \\ 0 & & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & & 0 \\ & 1/b & \\ 0 & & 1/c \end{bmatrix}$$

fremdeles diagonal

dette er en diagonalisering av A^{-1}! (nå og m/ ortogonal siden P er det)

7.132 $A = PRP^{-1}$ P ortog. og R =

Vis at A symmetrisk ⇒ R symmetrisk ⇒ R diagonal.

enkelt

Først: $A = PRP^{-1} \Rightarrow AP = PR$
$$\Rightarrow P^{-1}AP = R$$

siden P ortogonal

$$R^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T P$$
$$= P^T A P \quad \leftarrow A \text{ symm.}$$
$$= P^{-1} A P$$
$$= R$$

Så siden $R^T = R$ er R symmetrisk.

7.27 $x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 = f$ $\qquad x^T A x = f$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}}_{= A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 5x_2 \\ 5x_1 + x_2 \end{bmatrix} = x_1(x_1 + 5x_2) + x_2(5x_1 + x_2)$$

$$= x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2x_1 + x_2^2$$

$$= x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2. \quad \checkmark$$

Må ortogonalt diagonalisere A.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Egenverdier: $\lambda = \underset{\lambda_1}{6}, \underset{\lambda_2}{-4}$

m/ egenvektorer $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Så $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Setter vi $\vec{x} = P\vec{y}$ får vi

$$(P\vec{y})^T A P\vec{y} = \vec{y}^T P^T A P \vec{y} = \vec{y}^T D \vec{y}$$

$$= 6y_1^2 - 4y_2^2.$$ den „nye" kvadratiske formen.

7.2.23 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$

V.a. $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$
$\lambda_1 \lambda_2 = \det A$

---

det. $\det A = ad - b^2$

char.poly. $\det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2$
$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$

faktoriser $= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$
$= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$

Sammenligner koeffisienter, ser at $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$
og $\lambda_1 \lambda_2 = ad - b^2 = \det(A)$

7.2.24 a) V.a. $\det A > 0$ og $a > 0$
implisere at A er positiv definit.

Forrige oppg $\Rightarrow$ $\lambda_1 \lambda_2 > 0$
$\Rightarrow$ enten begge positive eller begge negative.

$\det A > 0$ $\quad ad - b^2 > 0$
$ad > b^2 \geq 0$

Så d er også > 0, ellers ville $ad < 0$.

Så siden $a, d > 0$ er $a + d > 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lambda_1 + \lambda_2$

Siden begge har samme tegn, må begge være positive.

B) „Helt likt".

c) $\det A < 0 \Rightarrow A$ indefinit.

$\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$, hvis begge hadde hatt samme tegn, ville produktet vært positivt.

7.2.25

Vis at alle egenverdiene til $B^T B$ er positive. ≥ 0

$B^T B$ må være symmetrisk fordi $(B^T B)^T = B^T B^{T^T}$
$= B^T B$. Så symm.

Så kan ortog. diagonalisere: $B^T B = P^T D P$

kan skrive $D = P B^T B P^T = (B P^T)^T (B P^T)$

$$x^T D x = x^T (BP^T)^T (BP^T) x$$
$$= (BP^T x)^T (BP^T x)$$
$$= (BP^T x) \cdot (BP^T x) = \|BP^T x\|^2 \geq 0$$

Ved å sette $\bar{x}$ = enhetsvektorene, følger resultatet.

$$e_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} e_1 = e_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda_1 \overset{\text{ved over}}{\geq} 0$$

7.3.6 $Q(x) = 7x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2$.

$= x^T A x$

der $A = \begin{bmatrix} 7 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix}$. (sjekk)

$21 \cdot 4 = 84$

Må finne egenverdier.

$\det(A - \lambda I) = (7-\lambda)(3-\lambda) - \frac{9}{4}$

$= \lambda^2 - 10\lambda + \frac{84-9}{4} = 0$

$= 75$

$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-75}}{2} = \frac{10 \pm 5}{2} = \frac{15}{2}, \frac{5}{2}$

$\lambda_1 \quad \lambda_2$

$v_1 \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \Big[\begin{matrix} 0 & 8 \end{matrix}$ ....

(Juks w/ MATLAB $\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.31 \\ -0.9 \end{bmatrix}$ og $\hat{v}_2 = [\text{lignende}]$

a) Finn maks av $Q(x)$

Alltid største egenverdi, så maks er $\frac{15}{2} = 7.5$.

b) Finn $\vec{u}$, m/ $\|u\| = 1$ og $Q(u) = 7.5$

Er enh. vektoren til egenverdien 7,5, så $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 0.31 \end{bmatrix}$

c) Finn maks når $\|x\| = 1$ og $x^T u = 0$

V/ Thm 7 er dette nest største egenverdi så er 2,5.

7.3.12 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ Finn SVD for A

① Finn ortog. diag. for A^TA.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Så $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = 2$ (synkende rekkef.)

og $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

② $\underline{V}$ blir da $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Σ skal være 3×2. og ha $\sqrt{\lambda_1}$ og $\sqrt{\lambda_2}$ på diag.

Så $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

③ Lag U. Trengs tredje vektor $\vec{x}$ som står ortogonalt på begge søyler i A. (kall dem w_1, w_2)

$w_1 \cdot \vec{x} = 0$ $w_2 \cdot \vec{x} = 0$

$x_1 - x_3 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Så $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Den skal ha lengde 1, så velger $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Så $A = U \Sigma V^T$