1

**Eks** $Br(\bar{F}) = 0$

$\uparrow$ alg. lukket kropp.

$Br(\mathbb{F}_q) = 0$

$Br(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\{\mathbb{H}\}$ $\leftarrow$ gen av kvaternionene

$Br\left(\begin{array}{c}\text{komplett kropp} \\ \text{mhp dvr m/ endelig} \\ \text{restkropp}\end{array}\right) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$0 \to Br(F) \to \bigoplus_v Br(F_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$

Alber - Brauer-Hasse - Noether - teoremet

(Max Noether)

Witt-ringen til en kropp $F$. $W(F) = GW(F)/\langle H \rangle$

hyperbolske planet

**Lemma** $W(F)$ gen av $\langle a \rangle$ for $a \in F^\times$ m/ relasjonene

- $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$
- $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a+b \rangle + \langle (a+b)ab \rangle$
- $\langle a \rangle^2 = 1$
- $\langle a \rangle + \langle -a \rangle = 0$

Glemsom funktor ②

$$SBil(F) \to \mathbb{P}(F)$$

$\rightsquigarrow$

$$\varepsilon : GW(F) \xrightarrow{dim} K_0 F \simeq \mathbb{Z}$$

$$\hat{I} = \ker(\varepsilon) \leftarrow \text{fundamentalidealet}$$

Har indusert avb.

$$W(F) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathbb{Z}/2}} \mathbb{Z}/2$$

(char $k \neq 2$)

hvor $I = \ker(\varepsilon_{\mathbb{Z}/2}) \simeq \hat{I}$

(som abelske grupper)

Filtrasjon $\ldots \subset I^{n+1} \subset I^n \subset \ldots \subset I \subset W(F)$

$\Rightarrow$ gradert Witt-ringen $Gr_I(W(F)) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$.

$\hat{I}$ generert av $\langle a \rangle - 1$ for $a \in F^\times$. Ethvert elt. i $\hat{I}$ er på formen

$q_1 - q_2$ $\quad q_1 = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$

$q_2 = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$.

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle b_i \rangle = \left(\sum \langle a_i \rangle - 1\right) - \left(\sum \langle b_i \rangle - 1\right)$$

$I$ gn av $\langle 1,-a\rangle$ for $a\in F^\times$:

$$\langle 1,-a\rangle = \langle 1\rangle + \langle -a\rangle \underset{\text{i } W(F)}{=} \langle 1\rangle + \langle -a\rangle + \langle a,-a\rangle$$

$$= \langle 1\rangle - \langle a\rangle$$

og v/ gn.-ter $I$. $\blacksquare$

Disse kalles <u>Pfister-former</u> ($\underbrace{\langle 1,-a\rangle}_{=\langle\langle a\rangle\rangle}$ for $a\in F^\times$)

$\langle\langle a\rangle\rangle$.

Fortegns-determinant

$$\begin{tikzcd}
GW(F) \arrow[r, "\det"] \arrow[d] & F^\times/(F^\times)^2 \\
W(F) \arrow[ur, dashed, "?"] & \\
\supseteq I \arrow[uur, "\text{gr. homomorfi.}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\langle H\rangle = \langle 1,-1\rangle$

$\det(q\perp q') = \varepsilon \det q \cdot \det q'$ m/ $\varepsilon = \pm 1$ avhengig av $\dim q, q' \bmod 4$.

- Hvis $\dim q \equiv \dim q' \equiv 1 \mod 4 \Rightarrow \varepsilon = -1$
- Hvis $\dim q \equiv \dim q' \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow \varepsilon = 1$.

Får en gruppeavbildning $\det : I \xrightarrow{\alpha} F^\times/(F^\times)^2$. Er surjektiv

fordi $\det(\langle a,-1\rangle) = \bar{a}$.

**Thm 5.6.4 (Pfister)** det induserer $I/I^2 \xrightarrow{\overline{\det}} F^\times/(F^\times)^2$.

$\boxed{\text{Bev 3}}$ $I$ generert av $\langle\langle a\rangle\rangle = \langle 1,-a\rangle$, $a \in F^\times$.

$\langle 1,-a\rangle \otimes \langle 1,-b\rangle = \langle 1,-a,-b,ab\rangle$ har determinant $a^2b^2$,

som $\equiv 1 \mod (F^\times)^2$. Så $I^2 \subseteq \ker \det$.

Får faktorisering $\det$:
$$\begin{tikzcd} I/I^2 \arrow[r, "\alpha"] & F^\times/(F^\times)^2 \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

$\beta$ definert ved $\beta(a) = \langle\langle a\rangle\rangle$.

$$\beta(a) + \beta(b) - \beta(ab) = \langle 1,-a\rangle + \langle 1,-b\rangle - \langle 1,-ab\rangle$$
$$= \langle 1,-a,1,-b,-1,ab\rangle$$
$$\overset{\langle H\rangle}{=} \langle 1,-a,-b,ab\rangle = \langle\langle a\rangle\rangle \otimes \langle\langle b\rangle\rangle \in I^2.$$

$\alpha\circ\beta = \mathrm{id}_{F^\times/(F^\times)^2}$. og $(\beta\circ\alpha)(\langle\langle a\rangle\rangle) = \langle\langle a\rangle\rangle$.

$\Rightarrow \beta\circ\alpha = \mathrm{id}_{I/I^2}$.

$\blacksquare$

undering

Kor $\quad W(F) \supset \mathbb{Z}/2 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad -1$ kvadrat i $F$.

5

Merk $\quad I^2/I^3 \xrightarrow[\text{invarianten}]{\text{clifford-}} {}_2Br(F)$

2-torsjon (Merkurjev) (Berstein '82)

Ekv; Lemma: For en kropp $F$, er følgende ekvivalent.

1. $F$ kvadratisk lukket (ingen grad 2-utvidelser)
2. $F^\times = (F^\times)^2$
3. $W(F) \simeq \mathbb{Z}/2$ ring-iso
4. $I = 0$
5. $I/I^2 = 0$.

$W(F) = \mathbb{Z}/2$. Enhver av $F^\times$ er et kvadrat ???

$\Rightarrow$ kun én 1-dim form: $\langle 1 \rangle$ $\quad (\langle a \rangle \cong \langle ab^2 \rangle)$

Enhver 2-dim form er degenerert.

$\langle a, b \rangle$ $\not\cong$ ellers $b = -ac^2$ for $c \in F^\times$. De eneste

ikke-degenererte former er $0$ og $\langle 1 \rangle$.

**Eks 2** $\mathbb{R}^* / (\mathbb{R}^\times)^2 \cong \mathbb{Z}/2 = \{\pm 1\}$

$\Rightarrow$ enhver form kan diagonaliseres til $\langle \underbrace{1,\dots,1}_{r}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{s} \rangle$

Degenerert om både $r,s$ er positive. Ikke-degenerert om $s=0$ og $r>0$ ~~eller~~ $r=0$ og $s>0$.

$\Rightarrow W(\mathbb{R}) \longrightarrow$ ~~$\mathbb{Z}$~~

Signaturavbildningen

$$\mathrm{sgn}: W(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\langle \underbrace{1,\dots,1}_{r}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{s} \rangle \longmapsto r-s.$$

**Eks** La $F = \mathbb{F}_q$. Da er $I/I^2 = \mathbb{Z}/2$. Men $I^2$ (Steinberg) går $I^2 = 0$.

$$\mathbb{F}_q^* / (\mathbb{F}_q^*)^2$$

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to W(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{e_{\mathbb{Z}/2}} \mathbb{Z}/2 \to 0$$

$$\Rightarrow W(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} \mathbb{Z}/4 & q \equiv 3 \bmod 4 \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & -1 \text{ er kvadrat} \\ & q \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

8

Teori (Mihai)

$$W(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{p \text{ primtall}} W(\mathbb{F}_p)$$

## $\boxed{\text{II } \S 6}$ $K_0$ av en abelsk kategori

„Niels Henrik har fått og med kategorier oppkalt etter"

1. Additiv kategori
2. Abelsk kategori: additiv + kjerne / kokjerne
   1. Enhver morfi har kjerne og kokjerne.

def

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & \operatorname{coker} f \end{tikzcd}$$

   2. Enhver monisk morfi er en kjerne, og enhver epimorfi er en kokjerne.

~~im(f) F~~

$$\operatorname{im}(f : A \to B) = \ker(B \to \operatorname{coker} f).$$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{im}(f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & 0 \arrow[d] \\ B \arrow[r] & \operatorname{coker} f \end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ abelsk kategori.

Def $K_0\mathcal{A}$

$$K_0\mathcal{A} = \Big\langle [A] \;\Big|\; A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \Big\rangle \Big/ \Big\langle [A] = [B] + [C] \text{ om } 0 \to C \to A \to B \to 0 \Big\rangle$$

Spesielt er $[A \oplus A'] = [A] + [A']$.

For ab.

$$K_0^{\oplus}(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}).$$

Universell egenskap (6.1.2).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ob}\,\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & K_0(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
& \Gamma
\end{tikzcd}$$

additiv funksjon $\to f$ ; $\exists!$ gruppehomomorfi ; $\Gamma$ gruppe

abelske kategorier

$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additiv funktor hvis

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B)) \text{ er en}$$

gruppehomomorfi for alle $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

eksakt om den bevarer k.e.s.

induserer

$$K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{B})$$

$$[A] \longrightarrow [F(A)].$$

$\mathcal{A} \overset{i}{\subseteq} \mathcal{B}$ full underkategori.

hvis $i$ er eksakt.

**Def** $G_0 R$ ; $R$ ring, noethersk (høyre-noethersk)

$M(R)$ ~~k~~ kategorien av end.-genererte $R$-moduler.

$\subseteq$ mod-$R$

abelsk kategori.

$G_0 R \mathrel{\hat{=}} K_0 M(R)$.

Ring-avbildning $R \to S$ (Noetherske ringer), hvis $S$ end.-gen $R$-modul,

$\rightsquigarrow \quad f_*: M(S) \to M(R)$

$\rightsquigarrow \quad f_*: G_0 S \to G_0 R$

Om $S$ er flat $R$-modul, så

$$f^*: M(R) \to M(S) \qquad S \text{ flat } R\text{-modul}$$

$$M \mapsto M \otimes_R S. \quad \text{eksakt}$$

$\Rightarrow \quad f^*: G_0 R \to G_0 S$.

Hvis $S$ har endelig resolusjon av flate $R$-moduler, så kan vi ta

$$f^*([M]) = \sum_{i \geq 0} [\mathrm{Tor}_i^R(M, S)].$$

$F$ kropp. $\Rightarrow$ $G_0 F = K_0 F = \mathbb{Z}$.

Om $R$ integritetsområde $\overset{\text{induserer}}{\rightsquigarrow}$

$$G_0 R \xrightarrow{\dim} \mathbb{Z} = G_0(Q(R)).$$

$$[M] \longmapsto \dim(M \otimes_R Q(R))$$

---

Eks $G_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\{[\mathbb{Z}]\}$.

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to 0$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbb{Z}/n] = 0 \in G_0(\mathbb{Z}).$$

Så nok å se at $\mathbb{Z}^n \not\cong \mathbb{Z}^m$ for $n \neq m$.

↳ Bruk at $\mathbb{Q}$ er flat $\mathbb{Z}$-modul og anv.

$$G_0\mathbb{Z} \to G_0\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$$
$$[\mathbb{Z}] \longmapsto 1$$ ■

Samme argument for $R$ et hovedidealområde $\Rightarrow G_0 R \cong \mathbb{Z}$

Eks $p$-grupper. $\mathrm{Ab}_p$ = abelske $p$-grupper

$$K_0(\mathrm{Ab}_p) \cong \mathbb{Z}\{[\mathbb{Z}/p]\}.$$

komposisjonsrekker $1 \lhd H_1 \lhd \dots \lhd H_n = M$ abelske $p$-grupper.

strikte inklusjoner av abelske $p$-grupper. $\ell(M) = n$

Jordan-Hölder $\Rightarrow$ $\ell : K_0(Ab_p) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$[\mathbb{Z}/p] \longmapsto 1$$

Påstand: $[\mathbb{Z}/p]$ er generator. (induksjon på lengde)

---

Eks 6.3.2 $K_0(Ab_{endelige}) = \bigoplus_{p \text{ prim}} K_0(Ab_p)$

Eks 6.2.4 $M(\mathbb{Z}/p^n) \overset{\text{ekvivalent}}{\subseteq} Ab_p$ ← iso på $K_0$.

$$G_0(\mathbb{Z}/p^n) = \mathbb{Z}\{[\mathbb{Z}/p]\}.$$

$$K_0(\mathbb{Z}/p^n) = \mathbb{Z}\{[\mathbb{Z}/p^n]\}$$

Cartan-homomorfien sender $[\mathbb{Z}/p^n] \longmapsto n[\mathbb{Z}/p]$

(spes. ikke surjektiv)

---

La $X$ noethersk skjema. Kategori av koherente $\mathcal{O}_X$-moduler.

$M(X)$ = kategori av koherente $\mathcal{O}_X$-moduler ($\mathrm{Coh}(X)$).

Er abelsk.

$$G_0 X = K_0' X \overset{\Delta}{=} K_0 M(X)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \rightsquigarrow \quad f^* : M(Y) \longrightarrow M(X)$$

def v/ $\mathcal{F} \longmapsto f^*\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$.

Hvis f flat, så er $f^*(-)$ eksakt, så får avb. på $G_0$:

$$f^*: G_0 Y \to G_0 X.$$

„kontravariant funktor for flate avb."

Hvis f endelig, så bevarer $f_*$ koherente ~~alg~~ moduler.

og $f_*: M(X) \to M(Y)$ er eksakt.

Får også $f_* G_0(X) \to f_* G(Y)$ osv.

Hvis f proper, så er direktebilder $f_*\mathcal{F}$ koherent hvis $\mathcal{F}$ koherent. og tilsvarende for $R^i f_* \mathcal{F}$. (høyere direkte bilder)

Lemma f proper gir indusert avb. $f_*: G_0 X \to G_0 Y$ v/

$$[\mathcal{F}] \longmapsto \sum (-1)^i [R^i f_* \mathcal{F}].$$

Gjør $G_0$ funktoriell for proper avbildninger.

„dette bevis"

(B)

## Dévissage-teorem 6.3

La $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ inklusjon av abelske kategorier. hvor

(a) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eksakt underkategori av $\mathcal{A}$

(b) lukket under underobj. og kvotienter.

(c) ethvert objekt $A$ i $\mathcal{A}$ har en endelig filtrasjon $A = A_0 \supset A_1 \supset \dots A_n = 0$

hvor alle $A_i/A_{i+1}$ er $\in$ i $\mathcal{B}$.

Da er $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eksakt og induserer iso $\boxed{K_0 \mathcal{B} \xrightarrow{\cong} K_0 \mathcal{A}}$.

Bevis $i_* : K_0 \mathcal{B} \longrightarrow K_0 \mathcal{A}$

surjektiv Fra filtrasjonen

$$[A] = \sum \left[A_i/A_{i+1}\right] \in K_0 \mathcal{A} \quad \checkmark$$

injektivitet: litt mer jobb se selv. ■

Kor 6.3.1 $I \subset R$ noethersk. Da er $G_0 R \cong G_0(R/I)$.
nilpotent ideal

Bevis ✓ Dévissage. $M \in \mathcal{M}(R)$.

$$M \supset MI \supset MI^2 \supset \dots \supset 0$$

m/ $MI/MI^2$ er en $R/I$-modul..

Kor: $X$ noethersk skjema m/ redusert $X_{red}$. Da er $G_0 X \cong G_0 X_{red}$.

Anvende 6.3.3: $I \subset R$, ideale $M_I(R) \subset M(R)$.

Abelsk underkategori bestående av $M$ m/ filtrasjon

$$M \supset MI \supset \dots \supset MI^n = 0$$

Devissage $\Rightarrow$ $K_0 M_I(R) = K_0(M(R/I)) = G_0(R/I)$.

Samme for skjemaer: $i : Z \hookrightarrow X$ lukket

$M_Z(X) \subseteq M(X)$ abelsk underk. m/ ~~moduler~~ m/ støtte på $Z$

La $\mathcal{O}_X / J \cong \mathcal{O}_Z$, $J$ idealknippe i $\mathcal{O}_X$.

Se på $M(Z)$ som underk. av alle $\mathcal{O}_X$-moduler $M$ i $M_Z(X)$ som oppfyller $MJ = 0$.

Alle $M$ i $M_Z(X)$ har en endelig filtrasjon

$$M \supset MI \supset MI^2 \supset \dots \supset MI^n = 0$$ m/ kvotient i $M(Z)$.

$$K_0 M_Z(X) = G_0 Z.$$

## Lokaliseringsteoremet 6.4 (Alex Heller) (18)

$\mathcal{A}$ liten abelsk kategori og $\mathcal{B}$ en Serre-underkategori av $\mathcal{A}$. Da er følgende sekvens eksakt: (s 119)

$$K_0\mathcal{B} \to K_0\mathcal{A} \xrightarrow{\text{lok.}} K_0(\mathcal{A}/\mathcal{B})$$

Opprinnelig: Serres arbeider om $\pi_* S^*$. $\mathcal{B}$ Serre-underkat.:

Abelsk underkategori, lukket under underobj., kvotienter og ekstensjon:

Hvis $0 \to A \to B \to C \to 0$, så $B \in \mathcal{B} \iff A, C \in \mathcal{B}$.

Definere $\mathcal{A}/\mathcal{B}$: En morfi $f: A \to B$ i $\mathcal{A}$ er en $\mathcal{B}$-iso om $\ker f, \operatorname{coker} f \in \mathcal{B}$

$(\operatorname{coker} f, \ker f \in ob(\mathcal{B}))$.

$$ob(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \overset{\circ}{=} ob\,\mathcal{A}$$

morfier$(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ = ekvivalensklasser av diagrammer i $\mathcal{A}$

$$A_1 \to A_2 \qquad A_1 \xleftarrow{f} A' \xrightarrow{g} A_2$$

hvor $f$ er en $\mathcal{B}$-isomorfi. Og to slike diagrammer er isomorfe om

$$A_1 \leftarrow A' \rightarrow A_2, \quad A'' \xrightarrow{b} A'$$

$\mathcal{B}$-isomorfier.

Sammensetning: $(A_2 \xleftarrow{f} A' \xrightarrow{g} A_3) \circ (A \ldots$ (se bok)