$$\begin{array}{ccc} Y & \supseteq & f^{-1}(U) = Y|_U \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ X & \supseteq & U \\ & \text{åpen} & \end{array}$$

U-skjema

Def $n \geq 0$. En <u>geometrisk vektorbunt</u> av rang n over X består av følgende:

- Et X-skjema V s.t. $\exists$ åpen overdekning $X = \bigcup_i U_i$ og isomorfier av U_i-skjemaer

$$c_i : V|_{U_i} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}^n_{U_i}$$ s.a. $\forall$ åpne affine $U = \operatorname{Spec} A \subset U_i \cap U_j$ er automorfien

$$c_i \circ c_j^{-1} \quad \mathbb{A}^n_U = \operatorname{Spec}(A[T_1, \dots, T_n]) \circlearrowleft$$ en lineær automorfi. (Gitt ved en A-algebra-aut. φ av $A[T_1, \dots, T_n]$ s.a.

$$T_i = \sum_j a_{ji} T_j, \quad a_{ji} \in A)$$

<u>Alternativt</u> $\exists$ åpen $X = \bigcup U_i$ og isomorfier

$$c_i : V|_{U_i} \to \mathbb{V}((\mathcal{O}^n_{U_i})^\vee),$$ hvor $\mathbb{V}(\mathcal{E}) = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}(\mathcal{E})$

S.a. restriksjonen $c_i \circ c_j^{-1}$ til $U_i \cap U_j$ er en <u>lineær</u> automorfi av $\mathbb{V}((\mathcal{O}^n_{U_i \cap U_j})^\vee)$.

betydde at avbildningen ker <u>bildet</u> av

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_X(\mathbb{V}(\mathcal{E}), \mathbb{V}(\mathcal{F}))$$

②

Merk $V \xrightarrow{p} X$ geometrisk vektorbunt $\Rightarrow$ p er glatt avbildning.

$\mathcal{E}$ – lokalt fri $\mathcal{O}_X$-modul av rang n.

$U, U' \subset X$ åpne

Anta $\exists$ $c: \mathcal{E}|_U \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_U^n)^\vee$

$d: \mathcal{E}|_{U'} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{U'}^n)^\vee$.

Får lineær automorfi $c \circ d^{-1}$ av $(\mathcal{O}_{U \cap U'}^n)^\vee$

Merk $\mathbb{V}((\mathcal{O}_X^n)^\vee) \cong \mathbb{A}_X^n$

så $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ er geom. vektorbunt av rang n.

Motsatt, la $V \xrightarrow{f} X$ være en geometrisk vektorbunt av rang n. Har prekippe $S(V/X)$ på X som til $U \subset X$ åpen tilordner mengden av seksjoner av V/U dvs $s: U \to V/U$ s.a. $f \circ s = \mathrm{id}_U$. $\boxed{\text{Sjekk}}$ $S(V/X)$ er knippe

Påstand $S(V/X)$ er lokalt fri av rang n. Kan anta at

$V = \mathbb{V}((\mathcal{O}_X^n)^\vee) \Rightarrow S(V/X) = \mathcal{O}_X^n \Rightarrow$ lokalt fri!

(Bijeksjon mellom lokalt frie $\mathcal{O}_X$-moduler og geometriske vektorbunter)

$\mathbb{V}(\mathcal{E})$ representerer funktoren $T \longmapsto \Gamma(T, h^*\mathcal{E}^\vee)$
$h: T \to X$

Husk $\operatorname{Hom}_X(T, \mathbb{V}(\mathcal{E})) \simeq \Gamma(T, h^*\mathcal{E}^\vee)$.

og $f: X \to X' \Rightarrow f^* S(V/X) \simeq S(V \times_X X' / X')$

Prop Ekvivalens av kategorier

$$\left\{\begin{matrix}\text{lokalt frie} \\ \mathcal{O}_X\text{-moduler av} \\ \text{rang } n\end{matrix}\right\}^{o} \underset{\simeq}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{geometriske v.b} \\ \text{av rang } n \text{ og} \\ \text{lineære avbildninger}\end{matrix}\right\}$$

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathbb{V}(\mathcal{E})$$

$$S(V/X)^\vee \longleftarrow\!\!\shortmid V$$

~

Eks (Universelle bunten over Grassmann)

S - skjema $\mathcal{E}$ lokalt fri $\mathcal{O}_S$-modul. $n \geq 0$.

Den $\exists$ skjema $\operatorname{Grass}^n(\mathcal{E})$, som representerer funktoren som til et S-skjema T tilordner $\{ \mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}_T \mid \mathcal{U}$ lokalt direkte summand av rang $n \}$ $\left(\mathcal{E}_T = f^*\mathcal{E},\ f: T \to S\right)$

Definer en underfunktor $Z^n_{\mathcal{E}} : \underline{Sch}^{op}_S \to \underline{Sets}$ (underf. av $\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times \operatorname{Grass}^n(\mathcal{E})$)

ved $Z^n_{\mathcal{E}}(T) = \left\{ (s, \mathcal{U}) \in \Gamma(T, \mathcal{E}_T^\vee) \times \operatorname{Grass}^n(\mathcal{E})(T),\ s \in \Gamma(T, \mathcal{U}) \right\}$

Da har vi mod. av funktorer

$$\begin{array}{ccc} \text{T-pkt} & (S,\mathcal{U}) & Z^n_{\mathcal{E}}(T) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \mathcal{U} & \mathrm{Grass}^n(\mathcal{E}) \end{array}$$

Eks $S = \mathrm{Spec}\, F$ $\quad \Gamma(S, \mathcal{E}) = V^\vee$

V end. dim F-vektorrom.

Om E/F endelig kroppsutvidelse, så er

$$Z^n_V(E) = \left\{ (S, \mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \subset V \otimes_F E \text{ er et } n\text{-dim underrom av } \ldots \; S \in \mathcal{U} \right\}$$

Hvis $T = \mathrm{Grass}^n(\mathcal{E}) \iff \mathcal{U}_{univ} \subseteq \mathcal{E}^\vee_{\mathrm{Grass}^n(\mathcal{E})}$ av rang n.

Spesielt $\Gamma(T, f^*\mathcal{U}_{univ}) \simeq \Gamma(T, \mathcal{U})$.

Sender $f: T \to \mathrm{Grass}^n(\mathcal{E})$ til $\mathcal{U} := f^*\mathcal{U}_{univ} \subseteq f^*\mathcal{E}^\vee_{\mathrm{Grass}^n(\mathcal{E})} = \mathcal{E}^\vee_T$

så $Z^n_{\mathcal{E}} = \mathbb{V}(\mathcal{U}_{univ})$.

Eks $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathrm{Grass}^1(\mathcal{E})$

$\mathbb{P}^n_X = \mathbb{P}((\mathcal{O}^{n+1}_X)^\vee)$ kap 1, års 5.8.

Torsorer

X top. rom

$\mathcal{G}$ knippe av grupper på X

$\mathcal{G} \times T \to T \leftarrow$ $\mathcal{G}$-knippe.

Lokalt en gruppevirkning.

$\rightsquigarrow$ kategori av $\mathcal{G}$-knipper.

- En ab. av $\mathcal{G}$-knippen har egenskapen at $T(U) \to T(U)$ er $\mathcal{G}(U)$-ekvivariant.

Def Et $\mathcal{G}$-knippe T er en $\mathcal{G}$-torsor hvis

① $\mathcal{G}(U)$ virker regulært (enkelt transitivt) på $T(U)$ for alle $U \subset X$ åpen.
($\forall\, \tau_1, \tau_2 \in T$ $\exists!$ $g \in G$ m/ $g\tau_1 = \tau_2$)

② $\exists$ åpen overdekning $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ~~av~~ X s.a. $T(U_i) \neq \emptyset$ $\forall$ $i \in I$.

Eks Den trivielle $\mathcal{G}$-torsoren. $= \mathcal{G}$ selv m/ venstre virkning.

Beregne $H^1_{tor}(X, \mathcal{G}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{mengden av isomorfiklasser} \\ \text{av } \mathcal{G}\text{-torsorer} \end{array} \right\}$

punktert mengde (mengde med utvalgt punkt)

Ikke-abelsk Čech-kohomologi

$s \in \Gamma(U, G)$ $\qquad st \in \Gamma(U \cap V, G)$

$t \in \Gamma(V, G)$ $\qquad \| $

$\qquad s|_{U\cap V} \; t|_{U \cap V}$

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ åpen overdekning

Čech 1-kosykel av G på $\mathcal{U}$:

$$\theta = (g_{ij}) \quad i,j \in I,$$

$$\in G(U_i \cap U_j)$$

s.a. kosykelbetingelsen $g_{kj} g_{ji} = g_{ki} \quad \forall\, i,j,k.$

Har $g_{ii} = 1$, $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$.

Sier at $\theta \sim \theta'$ (er kohomologe) hvis $\exists\, h_i \in G(U_i)$ $\forall i$ s.a. $h_i g_{ij} = g'_{ij} h_j$. $\forall i,j \in I$.

$\rightsquigarrow$ Čech-kohomologi $\check{H}^1(\mathcal{U}, G)$. Punktert mengde mhp på $(g_{ij} = 1)$ $\forall\, i,j$.

Def $\check{H}^1(X, G) = \operatorname{colim}_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, G)$

Om $(U_i)_{i \in I}$ og $(V_j)_{j \in J}$ $\varphi : I \to J$

hvis $U_i \subseteq V_{\varphi(i)}$

[Merk Om $\mathcal{G}$ er knippe av abelske grupper, så kan vi definere $(g_{ij})(g'_{ij}) = (g_{ij}g'_{ij})$
(må sjekke at er kompatibel m/ $\sim$)

Eks $(X, \mathcal{O}_X)$ $\quad \mathcal{G} = \mathcal{O}_X$-modul

$\mathbb{Z}$

grupper $\quad H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}), \quad \check{H}^1(X, \mathcal{G})$.

Prop $\quad H^1(X, \mathcal{G}) \simeq \check{H}^1(X, \mathcal{G})$ $\quad$ isomorfi av punkterte mengder

La T være en $\mathcal{G}$-torsor. $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ av X som trivialiserer T (dvs $T(U_i) \neq \emptyset$)

Ha $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Velg elt. $g_{ij} \in \mathcal{G}(U_i)$ s.a.

$$g_{ij} t_j = t_i.$$

Vi har $\quad g_{kj} g_{ij} t_j = t_k = g_{ki} t_i$ $\quad$ (kosykelbetingelsen holder)

$\rightsquigarrow$ avb. av punkterte mengder

$$c_{\mathcal{G},\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) := \{ T \in H^1(X, \mathcal{G}) \mid T \text{ trivialiserer på } \mathcal{U} \}$$
$$\downarrow$$
$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \quad \rightsquigarrow \quad c_{\mathcal{G}} : H^1(X, \mathcal{G}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{G}).$$

Prop $c_{\mathcal{G},\mathcal{U}}$ iso av punkterte mengder.

<u>Proof</u> La (g_{ij}) være en reps. for en 1-kosykel i $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

For $V \subset X$ åpen, $T(V) = \left\{ (r_i) \in \prod_{i \in I} \mathcal{G}(U_i \cap V) \;\middle|\; r_i r_j^{-1} = g_{ij} \right\}$

$\Rightarrow$ T blir knippe.

Kan definere G-virkning på T: $g \cdot (r_i) := (r_i g^{-1})$

For en fiksert $k \in I$, og $V \subseteq U_k$, vil avb.

$$\mathcal{G}(V) \to T(V)$$
$$g \mapsto (g_{ik} g^{-1})$$

gir en isomorfi av $\mathcal{G}|_{U_k}$-knipper $\mathcal{G}|_{U_k} \to T|_{U_k}$.
(m/ invers $(r_i) \mapsto r_k^{-1}$)

T blir en G-torsor trivialisert av $\mathcal{U}$. Dersom (g_{ij}) erstattes m/ en kohomolog 1-kosykel (g_{ij}') $(h_i \cdot g_{ij} h_j^{-1})$

m/ assosiert G-torsor T', da er
$(r_i) \mapsto (h_i r_i)$ induserer en isomorfi $T \to T'$ av G-torsorer. (riktig er vel def)

La $\varphi: G \to G'$.
$(g_{ij}) \mapsto (\varphi(g_{ij}))$ $\Rightarrow$ $\check{H}^1(\varphi): \check{H}^1(X, G) \to \check{H}^1(X, G')$.

La $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ være en eksakt sekvens.

Får en eksakt sekvens av punkterte mengder

$$1 \to G'(X) \to G(X) \to G''(X) \to \check{H}^1(X, G')$$
$$\to \check{H}^1(X, G) \to \check{H}^1(X, G'')$$

Gruppen av automorfier av $\mathcal{O}_X^n$ er knippe av grupper

$$GL_n(\mathcal{O}_X) : U \mapsto \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_X^n/_U)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad GL_n(\Gamma(U, \mathcal{O}_U))$$

La $\mathcal{E}$ være lokalt fri av rang n.
Knippet av isomorfier

$$\mathcal{I}so_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X^n)$$

$GL_n(\mathcal{O}_X)(U)$ virker på $\mathcal{I}so_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X^n)(U)$ via

$$(g, u) \longmapsto u \circ g^{-1}$$

Virkningen er regulær, det $\exists$ åpen $X = \bigcup_i U_i$ s.a. $\mathcal{E}/_{U_i} \simeq \mathcal{O}_X^n/_{U_i}$

$\Rightarrow \mathcal{I}so_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X^n)(U_i) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \mathcal{I}so_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X^n)$ er en $GL_n(\mathcal{O}_X)$-torsor.

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{l} \text{Iso-klasser av} \\ \text{lokalt frie } \mathcal{O}_X\text{-moduler av} \\ \text{rang } n \end{array} \right\} \longrightarrow H^1(X, GL_n(\mathcal{O}_X))$$

isoklasser av $GL_n(\mathcal{O}_X)$-torsorer

<u>Prop</u> ϑ er en bijeksjon.

<u>Bevis</u> Identifiser $H^1(X, GL_n(\mathcal{O}_X))$ m/ $\check{H}^1(X, GL_n(\mathcal{O}_X))$.

og bruker det til å finne en invers til α.

La $\theta \in \check{H}^1$ være repr m/ (g_{ij}) på en åpen overdekning (U_i)

av X. La $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{U_i}^n$ og lim sammen via $g_{ij} : \mathcal{E}_j|_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{E}_i|_{U_i \cap U_j}$

Kozykelbetingelsen $g_{ik} = g_{ij} \circ g_{jk}$

$\Rightarrow \exists$ $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{E}_\theta$ og isomorfier

$$r_i : \mathcal{E}_\theta|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_i \quad \text{s.a.} \quad r_i \circ r_j^{-1} = g_{ij}.$$

Isomorfiklassen til $\mathcal{E}_\theta$ avhenger ikke av valget av (U_i) eller (g_{ij}).

Dette gir invers til α. ∎

<u>Korollar</u> $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, GL_1(\mathcal{O}_X)) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$

<u>Neste uke</u> Start på neste kap. i K_0.

Til <u>neste uke</u> Les i notatene side 56 - 59.

Weil / Cartier.