Geir fortsetter fra sist

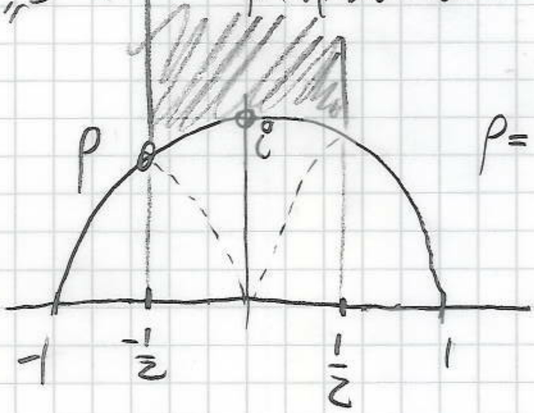
Fundamentalområdet til $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$.

$$T(z) = z+1 \qquad S(z) = -\frac{1}{z}$$

Husk at et <u>fundamentalområde</u> for en gruppe $G \leq \Gamma$ om

1. $F \subseteq \mathbb{H}$ åpen
2. For $x, y \in F$ m/ $x \neq y$ er $Gx \cap Gy = \emptyset$.
3. Enhver bane treffer F.

Finnes et „standard" fundamentalområde for Γ.



$\rho = \sqrt[3]{1}$

$$F = \left\{ z \in \mathbb{H} \;\middle|\; \begin{array}{l} |z| > 1 \\ |\text{Re}\, z| < \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

<u>Lemma</u> Gitt $z \in \mathbb{H}$, $M > 0$, så finnes kun endelig mange $c, d \in \mathbb{Z}$ s.a. $|cz+d|^2 \leq M$.

(1) La $z \in \mathbb{H}$. Se på Az ($A \in PSL(2,\mathbb{Z})$). Da er $\text{Im}\, Az = \dfrac{\text{Im}\, z}{|cz+d|^2}$

Fra lemma, kan velge z_0 s.a. $\text{Im}\, Az_0$ er maksimal.

Bruk τ for å anta at $|\text{Re}\, z_0| \leq \frac{1}{2}$. <u>Påstand</u> Da er $|z_0| \geq 1$.

Men $\text{Im}\, Sz_0 = \dfrac{\text{Im}\, z_0}{|z_0|^2} \leq \text{Im}\, z_0$ (pga maksimalitet)

$\Rightarrow |z_0| \geq 1$.

② Om $Az \in F$ og $z \in F \Rightarrow A = id$?

②

Antar at $\operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} Az$

$$\operatorname{Im} Az = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} \geq \operatorname{Im} z$$

$$\Rightarrow |cz+d|^2 \leq 1$$

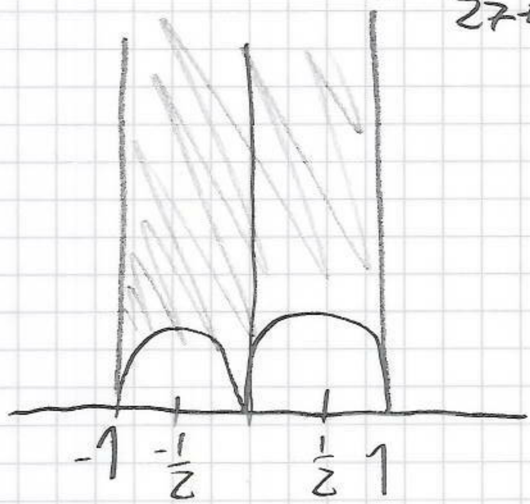
$$\Rightarrow c=0 \quad c=\pm 1$$

(masse splitting)

Fundamentalområde for $\Gamma(2)$. Generert av $T^2 = z+2$

$$U = \frac{z}{2z+1}$$

Nytt fundamentalområde



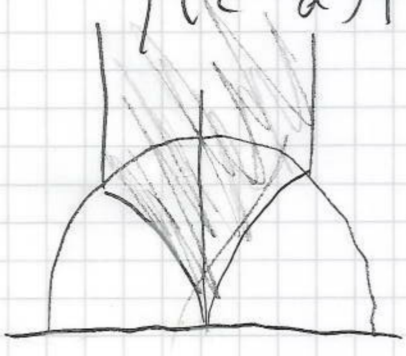
Nytt eksempel $\Gamma(2) \subseteq \Gamma_0(2) \subseteq F$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c \equiv 0 \mod 2 \\ a \equiv b \equiv 1 \mod 2 \end{array} \right\}$$

Generert av

$T(z) = z+1$

og $U = \frac{z}{2z+1}$



(Johannes Forsenan)

③

$$SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

<u>Prop 2.1</u> a) $Sl_2(\mathbb{R})$ virker transitivt på $\mathbb{H}$

b) Induserer isomorfi

$$SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\} \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathbb{H}$$

c) $\mathrm{Stab}(i) = SO_2(\mathbb{R})$

d) Får homeomorfi

$$SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$\bar{A} \longmapsto A(i)$$

(a) Om $z = x+iy \in \mathbb{H}$ vil $A = \sqrt{y}^{-1}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{R})$ og dermed vil $i \mapsto \frac{yi+x}{1} = z$.

(b) Anta $A \in Sl_2(\mathbb{R})$ virker trivielt på $\mathbb{H}$ vil $\frac{az+b}{cz+d} = z$ $\forall z \in \mathbb{H}$.

$\Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0 \Rightarrow$ $a=d$, $b=c=0 \Rightarrow$ ✓.

(Gilodomerke)

Velg nå $\gamma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{H}$. Da er $\gamma(i) \in \mathbb{H}$. Så $\exists$ A m/ $Ai = \gamma(i)$. Erstatt γ m/ $A^{-1} \circ \gamma$ så kan anta $\gamma(i) = i$

Husk $\rho : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ iso,

$\Rightarrow \underbrace{\rho \gamma \rho^{-1}}_{\varphi} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ og $0 \overset{\rho\gamma\rho^{-1}}{\longmapsto} 0$

Husk Schwarz lemma For $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ m/ $f(0) = 0$

a) $|f(z)| \leq |z|$

b) Dersom $|f(z_0)| = |z_0|$ for en z_0 så $\exists \lambda$ m/ $|\lambda| = 1$ s.a. $f(z) = \lambda z$.

Så $|\varphi(z)| \leq |z|$ og φ invertibel $\Rightarrow$ $|\varphi(z)| = z$, så

$\rho \gamma \rho^{-1} = e^{2\theta i} z$.

$\gamma(z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} z$. ✓

c) ✓

Kvotienter av $\mathbb{H}$

Prop 2.4 La G være lokal kompakt gruppe som virker på X s.a. $\exists$ $x_0 \in X$ s.a. $K = \mathrm{Stab}(x_0)$ er kompakt undergruppe av G og $G/K \to X$, $g \longmapsto g x_0$ er en homeomorfi.

Den er følgende ekvivalens:

Prop 2.5

a) $\forall x \in X$, $\{g \in \Gamma \mid gx = x\}$ er endelig.

b) $\forall x\ \exists\ U \ni x$ m/ ($\gamma \in \Gamma$ $U \cap \gamma U \neq \emptyset \Rightarrow$

c) „Separerer baner"

Korollar $\Gamma \backslash X$ er Hausdorff.

Prop 2.7 La Γ være en diskret undergruppe av $SL_2(\mathbb{R})$.
og anta a) $-I \in \Gamma$ og Γ virker fritt på $\mathbb{H}$.
b) $-I \in \Gamma$ og $\Gamma / \{\pm I\}$ — " —
Da $\exists$ entydig kompleks struktur på $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ s.a.

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ hviss $f \circ p$ er holomorf.
åpen i $\Gamma \backslash \mathbb{H}$

⋮

Diskrete undergrupper av $SL_2(\mathbb{R})$

✓