

Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

10. september 2014

Oppgave 1. Bruk forrige oppgave til å vise at hvis m er orienteringsreverserende, så er m^2 en translasjon. (merk: forrige oppgave sa at alle isometrier er på formen $t_{\vec{a}}\rho_{\theta}$ eller $t_{\vec{a}}\rho_{\theta}s$.) ■

Løsning 1. Først, legg merke til at isometrier på den første formen er orienteringsbevarende (verken rotasjoner eller translasjoner endrer orientering). Så m må kunne skrives som $m = t_{\vec{a}}\rho_{\theta}s$. Vi viste også at

Dermed er

$$\begin{aligned} m^2 &= (t_{\vec{a}}\rho_{\theta}s)(t_{\vec{a}}\rho_{\theta}s) \\ &= t_{\vec{a}}\rho_{\theta}st_{\vec{a}}\rho_{\theta}s \\ &\stackrel{*}{=} t_{\vec{a}}s\rho_{-\theta}t_{\vec{a}}\rho_{\theta}s \\ &\stackrel{**}{=} t_{\vec{a}}s\rho_{-\theta}\rho_{\theta}t_{\rho_{-\theta}(\vec{a})}s \\ &\stackrel{***}{=} t_{\vec{a}}st_{\rho_{-\theta}(\vec{a})}s \\ &\stackrel{****}{=} t_{\vec{a}}t_{s\rho_{-\theta}(\vec{a})}s^2 \\ &= t_{\vec{a}+s\rho_{-\theta}(\vec{a})} \end{aligned}$$

Litt forklaring. Første likhet er bare å fjerne parenteser. I (*) bruker vi, som vi lærte i forrige oppgave, at $\rho_{\theta}s = s\rho_{-\theta}$. I (**) bruker vi at $t_{\vec{a}}\rho_{\theta} = \rho_{\theta}t_{\rho_{-\theta}(\vec{a})}$. I (***) bruker vi at $\rho_{-\theta}\rho_{\theta} = id$, og i (****) bruker vi at $t_{\vec{b}}s = st_{s(\vec{b})}$. Til slutt bruker vi at $s^2 = id$.

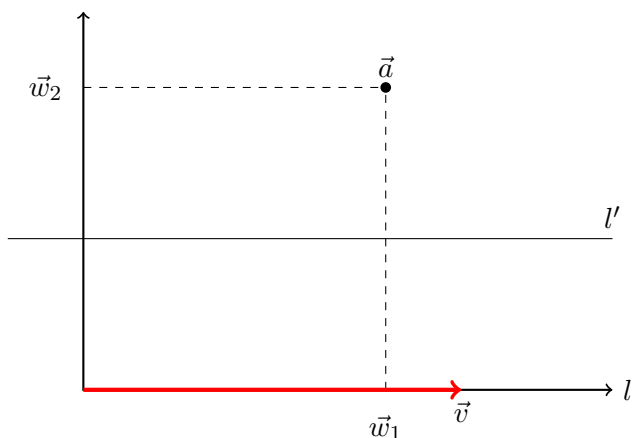
Vi står igjen med noe som bare er en translasjon. ♡

Oppgave 2. Gi en begrunnelse for hver likhet i utregningen til slutt i beviset for Setning 2.4. ■

Løsning 2. Det vi har lyst å vise er at $t_{\vec{a}}s_l = t_{\vec{w}_1}s_{l'}$. La oss huske hva alle disse bokstavene betyr. Tidligere i beviset ble det vist at en orienteringsreverserende isometri kan skrives på formen $m = t_{\vec{a}}s_l$, hvor s_l er en speiling om en linje l .

Her hjelper det veldig å tegne en tegning.

La l være linjen utspent av vektoren \vec{v} . Siden \mathbb{R}^2 er 2-dimensjonal, er $\{\vec{v}, \vec{v}^\perp\}$ en basis for \mathbb{R}^2 . Så vi kan skrive $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{a} \cdot \vec{v}^\perp)\vec{v}^\perp$. La $\vec{w}_1 \stackrel{def}{=} (\vec{a} \cdot \vec{v})\vec{v}$ og $\vec{w}_2 \stackrel{def}{=} (\vec{a} \cdot \vec{v}^\perp)\vec{v}^\perp$. La l' være linja $\{\frac{1}{2}\vec{w}_2 + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.



Se på illustrasjonen over. Den første påstanden i beviset er at

$$s_{l'} = t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2}s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}.$$

I ord sier dette at å speile gjennom linja l' er det samme som først å flytte hele planet ned med vektoren $-\frac{1}{2}\vec{w}_2$ (slik at l' blir sendt på l), reflektere, og så transludere opp igjen.

La $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ være standardbasis for \mathbb{R}^2 . Da er det ikke så gærnt å se fra tegningen at $s_{l'}$ er gitt som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Men dette kan vi skrive om til

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= s_l\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + s_l\left(-\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= s_l\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Så vi konkluderer med at $s_{l'} = t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}$.

Neste likhet i beviset er $s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2} = t_{\frac{1}{2}} s_l$. Husk at \vec{w}_2 er ortogonal på l , så å speile i l vil sende \vec{w}_2 på $-\vec{w}_2$. Dermed har vi at

$$s_l t_{-\frac{1}{2}\vec{w}_2}(\vec{x}) = s_l(\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{w}_2) = s_l(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{w}_2 = t_{\vec{w}_2} s_l(\vec{x}).$$

Her brukte vi at siden s_l sender origo på origo, så er s_l lineær.

Siste likheten i beviset er at $t_{\vec{w}_1} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} t_{\frac{1}{2}\vec{w}_2} = t_{\vec{a}}$. Dette er åpenbart siden alltid $t_{\vec{a}} t_{\vec{b}} = t_{\vec{a}+\vec{b}}$ og $\vec{a} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. ♡

Oppgave 3. Anta m er en isometri av planet som tar en linje l på seg selv, $m(l) = l$, og at $m|_l$ er en translasjon med en vektor \vec{a} . Gi et geometrisk argument for at m enten er en speiling, en glidespeiling eller translasjonen $t_{\vec{a}}$. ■

Løsning 3. For det første: la m' være $mt_{-\vec{a}}$. Da blir $m'|_l = id$, siden det ikke er noen translasjon langs linjen lenger. Så problemet blir nå: gitt at vi skal holde en hel linje fast, hvordan kan vi da flytte rundt på planet? Vi vet at alle isometrier av planet enten er translasjoner, rotasjoner, speilinger eller glidespeilinger. m' kan ikke være en translasjon, siden translasjoner ikke har fikspunkter, og m' fikserer origo. m' kan heller ikke være en rotasjon, siden den skal fikse linja l (det kunne muligens ha vært en rotasjon på 180° , men da ville ikke $m'|_l = id$). m' kan heller ikke være en glidespeiling, siden glidespeilinger ikke har fikspunkter. Vi konkluderer med at eneste mulighet er at m' er enten en speiling om linja l eller identiteten.

Med andre ord: siden $m' = mt_{-\vec{a}}$, er $m = m't_{\vec{a}}$. $m' = s$ eller id , så m er lik $st_{\vec{a}}$ eller $t_{\vec{a}}$. Siden \vec{a} enten er $\vec{0}$ eller en vektor parallell med l , er m lik enten identiteten, en speiling, eller en glidespeiling. ♡

Oppgave 4. Bruk Setning 2.4 til å vise at sammensetningen av to rotasjoner om to forskjellige punkter er enten en rotasjon om et tredje punkt eller en translasjon. Når er det en translasjon? ■

Løsning 4. Å rotere om et punkt P er det samme som å først translaterer P til origo, rotere om origo, og så translaterer tilbake til P . Dermed har vi at en rotasjon med θ grader om P , og så en rotasjon med θ' grader om Q kan skrives som

$$t_P \rho_\theta t_{-P} t_Q \rho_{\theta'} t_{-Q}.$$

Ved å gjentatte ganger bruke at $t_{\vec{a}} \rho_\theta = \rho_\theta t_{\rho_{-\theta}(\vec{a})}$, kan dette “forenkles” til følgende uttrykk:

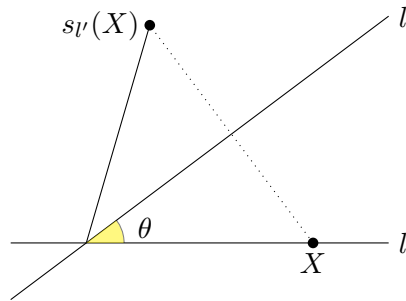
$$t_{P-\rho_\theta(P)+\rho_\theta(Q)-\rho_{\theta+\theta'}(Q)} \rho_{\theta+\theta'}.$$

Dette er en rotasjon hvis og bare hvis $\theta + \theta' \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. ♡

Oppgave 5. Hva slags isometri er sammensetningen av to speilinger om ikke parallelle linjer? Hva slags isometri er sammensetningen av to speilinger om parallelle linjer? ■

Løsning 5. Første tilfellet er enklest. For det første: setter vi sammen to orienteringsreverserende isometrier er resultatet orienteringsbevarende. I tillegg har sammensetningen et fikspunkt: de to linjene møtes i ett punkt, og dette blir da et fikspunkt for speilingen. Vi vet fra tidligere at en orienteringsbevarende isometri med et fikspunkt er en rotasjon.

Men vi kan si mer! Nå vet vi at sammensetningen er en rotasjon om et punkt, som vi likegodt kan anta er origo, altså kan vi skrive den som ρ_θ for en eller annen θ . Tegner vi en tegning som under ser vi da at dette blir en rotasjon med vinkel dobbelte av vinkelen mellom linjene. For å finne hvilken



vinkel vi roterer med, er det nok å se hvor mye ett enkelt punkt blir rotert. Velg da dette punktet til å ligge på l . Da ser vi at origo (der vinkelen θ ligger) er toppen i en likebeint trekant med punktet X og $s_{l'}(X)$ som hjørner. Siden l' deler trekanten i to, må vinkelen være 2θ .

Til slutt: hva er sammensetningen av to speilinger om parallelle linjer? Kall linjene l og l' . De ligger da over hverandre i en avstand \vec{a} . Vi kan anta

at den nederste linjen er x -aksen. Da blir også $s_l(\vec{a}) = -\vec{a}$. Legg merke til at om l' er "øverst", så er $s_{l'} = t_{\vec{a}}s_l t_{-\vec{a}}$. Dermed er

$$ss_{l'} = st_{\vec{a}}st_{-\vec{a}} = s^2 t_{s(\vec{a})} t_{-\vec{a}} = t_{s(\vec{a})-\vec{a}} = t_{-2\vec{a}}.$$

Vi konkluderer med at en sammensetning av to speilinger er det samme som å translaterer med en avstand det dobbelte av avstanden mellom linjene. ♡

Oppgave 6. La ℓ være linjen gjennom origo med retningsvektor (a, b) ($b > 0$). Skriv standardmatrisen til speilingen s_ℓ . ■

Løsning 6. Vi tar først for oss tilfellet når ℓ er x -aksen. I det tilfellet er bare speilingen gitt ved

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Så strategien blir å først rotere linjen ℓ slik at den sammenfaller med x -aksen, og så bruke S , og så rotere tilbake til ℓ .

Det er lett å se at matrisen

$$M_\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

tar x -aksen på linjen ℓ , er ortogonal og har determinant 1. Dermed er M_θ en rotasjonsmatrise. Det er også greit å se at

$$M_\theta^{-1} = M_{-\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Vi regner dermed ut at speilingen gjennom linjen ℓ er gitt ved

$$M_\theta S M_{-\theta} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{bmatrix}.$$

PS: Om en slår opp på Wikipedia ser en at en formel for en slik speiling er gitt ved

$$\vec{x} \mapsto 2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} - \vec{x},$$

der $\vec{v} = (a, b)$. Men ved å se hva som skjer med enhetsvektorer er det lett å se at dette faktisk er samme formel. ♡

Oppgave 7. Beskriv symmetrigruppene til:

- a) En likebeint trekant.
- b) En likesidet trekant.
- c) En parabel.
- d) Et parallelogram.
- e) En rombe.
- f) Et rektangel.
- g) En ellipse.



Løsning 7. a) **En likebeint trekant:** Vi antar trekanten er likebeint, men ikke side likesidet. En slik trekant har bare to symmetrier: som alltid identiteten, og speiling gjennom en høyde.

b) **En likesidet trekant:** En likesidet trekant er den trekanten med flest symmetrier. Vi kan rotere 120° , og vi kan reflektere om hvert hjørne. Til sammen får vi seks symmetrier, den fulle trekantgruppen D_3 .

c) **En parabel:** En parabel har heller ikke mange symmetrier. I det enkleste tilfellet er den gitt som $y = x^2$, og da ser vi at $x \mapsto -x$ er en symmetri, som svarer til speiling om y -aksen. Dette er da også den eneste symmetrien, og dette gjelder generelt (alle parabler kan ved hjelp av et koordinatskifte skrives om til noe på formen $y = x^2$).

d) **Et parallelogram:** Vi antar parallelogrammet ikke er en rombe (det vil si, siden er av forskjellig lengde). Vi kan også anta at vi ikke har et rektangel. Men da er det lett å se at et parallelogram ikke har noen symmetrier.

e) **En rombe:** En rombe er et parallelogram hvor siden er like lange. I dette tilfellet er speiling lov: velg et hjørne, og speil gjennom linjen som går gjennom to hjørner. Dette gir til sammen fire symmetrier: identiteten, speiling i to nabo-hjørner, og sammensetningen av disse.

f) **Et rektangel:** Hvis rektangelet ikke er et kvadrat, er det bare speilinger vi kan gjøre. Så svaret blir akkurat det samme som med romben.

- g) **En ellipse:** En ellipse har fire symmetrier, akkurat som rektangelet og romben. Grunnen til dette er at alle tre har to “symmetriakser”.

