Ellipriske funksjoner (kap 3, Milne)

elliptic :
- shaped like a flattened circle
- using few words and therefore hard to understand
- tending to be ambigious, cryptic, obscure

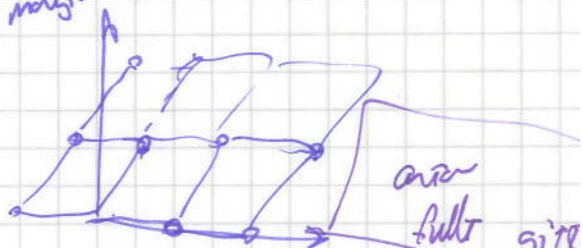
Is it known whether the quotient of a Serin variety by a fixedpoint free discrete group Serin?

Hvorpå Serre svarer nei. Ryss forgot about it.

modular form
- tidligere: „modular" to do w/ modules/lattices
- „modular form" ÷ a function on some space of lattices

Grothendieck-anekdote: er kvotienten av en Serin-mangf. Serin?

Gitre og baziser



La $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ være et gitter.

Skriv $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$

Vi kan anta at $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{H}$. (hvis ikke: bytt om ω_1, ω_2)

La
$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2 \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z}$$
$$\omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2.$$

Dette er en basis $\Leftrightarrow$ $\det \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{M} = \pm 1$.

($\Rightarrow$ ~~Klart at~~ Må ha $\det M \neq 0$, men også $\det M$ enhet i $\mathbb{Z}$ siden $\det = \underset{\mathbb{Z}}{\Lambda^2 \Lambda} \to \underset{\mathbb{Z}}{\Lambda^2 \Lambda}$ er invertibel.

$\Leftarrow$ Har $M \cdot \Lambda \subseteq \Lambda$ siden $M^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$

og $M^{-1}\Lambda \subseteq \Lambda$ så $\Lambda \subseteq M\Lambda$. Men da er $M\Lambda = \Lambda$.

Påstand {ordnede baser} er en $SL_2(\mathbb{Z})$-torsor for Λ. (2)

- Vi kan ta kvotienter av gitre:

$$\mathbb{C}/\Lambda \approx \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2} = S^1 \times S^1,$$ så det er snakk om genus 1-flater

↳ Alle homeomorfe, men ikke som Riemann-flater.

↳ Topologien

$$\begin{array}{c} U \subseteq \mathbb{C}/\Lambda \\ f \downarrow \\ \mathbb{C} \end{array} \quad \text{er holomorf} \iff \mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{f} \mathbb{C} \text{ er holomorf.}$$

Def Om dobbeltperiodiske funksjoner altså $f(z+\omega) = f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$ og $\omega \in \Lambda$

Prop f dobbeltperiodisk, $f \neq 0$. Anta $f(z) \neq 0$ for z på randen til fundamentalparallellogrammet D. Da:

① $\sum_{p \in D} \mathrm{ord}_p(f) = 0$

② $\sum_{p \in D} \mathrm{Res}_p(f) = 0$

③ $\sum_{p \in D} \mathrm{ord}_p(f) \cdot p \equiv 0 \mod \Lambda$

Pf" a, b er spesialtilfelle av Prop 1.12, som sier at en meromorf funksjon på en Riemann-flate har like mange nullpkter som poler.

Beviser v/ å triangulere flaten og bruke at

$$\int_C \omega = 2\pi i \left(\sum_{\text{poles}} \mathrm{Res}_p\, \omega \right)$$ og at det er kansellering av ~~sirkler~~ bare

„Annen måte" om vi anser Riemannflaten er algebraisk (blir dette sirkulært?)

Hartshorne II.6

En $f \in \mathcal{M}(X)$ definerer $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ og $(f) = \varphi^*((0) - (\infty))$ og $f^* D = \deg f \cdot \deg D$, så $\deg (f) = 0$

Korollar En ikke-konstant elliptisk funksjon har minst to poler.

Pf Ikke holomorf: periodisitet $\Rightarrow$ holomorf på $\mathbb{C}$.
$\Rightarrow$ konstant v/ Liouville.

Ikke bare én pol: Ved b) er $\mathrm{Res}_p(f) = 0$, men for poler er denne $\neq 0$.

Endomorfier av $\mathbb{C}/\Lambda$.

Prop 3.3 $\Lambda, \Lambda' \subseteq \mathbb{C}$. Om $\alpha \in \mathbb{C}$ er s.a. $\alpha\Lambda \subseteq \Lambda'$,

får vi indusert avb

$$\varphi_\alpha : \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda' \qquad (\text{s.a. } 0 \mapsto 0)$$
$$\bar{z} \longmapsto \overline{\alpha z}$$

Og alle slike avb. er på denne formen. Spesielt

$$\mathbb{Z} \subset \mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda).$$

Bevis

- Klart en slik α induserer en slik avb.
- Anta gitt $\mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}/\Lambda'$. $\mathbb{C}$ er det universelle overdekningsrommet til $\mathbb{C}/\Lambda$, så vi kan løfte φ:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{C} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}/\Lambda' \end{array} \qquad \text{s.a. } \tilde{\varphi}(0) = 0.$$

- $\hat{\varphi}$ er holomorf! (siden p er lokal iso)
- Avbildningen $z \mapsto \tilde{\varphi}(z+\omega) - \hat{\varphi}(z) \in \Lambda' \subseteq \mathbb{C}$

så er konstant.

~~Derivere~~ mhp $z \Rightarrow \tilde{\varphi}'(z+\omega) = \tilde{\varphi}'(z)$.

- Dermed er $\tilde{\varphi}(z) = \alpha z + \beta$.

$\Rightarrow \beta = 0$ siden $\tilde{\varphi}(0) = 0$. ∎

Og $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ fordi om $\alpha z = \beta z$ / så

er $z \mapsto \alpha z - \beta z \in \Lambda \subseteq \mathbb{C}$

5

Korollar Om $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ sender $0 \mapsto 0$ og er holomorf, så er den en gruppehomomorfi

Merk Samme resultater gjelder for abelske (ref. høst)

Korollar $\mathbb{C}/\Lambda$ og $\mathbb{C}/\Lambda'$ er isomorfe $\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ m/ $\Lambda' = \alpha\Lambda$.

Korr Enten er $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{Z}$ eller så er $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ en underring av rang 2 av $\mathcal{O}_K$ for en kvadratisk utvidelse $\mathcal{O}_K / \mathbb{Q}$

Bevis $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda) = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha\Lambda \subset \Lambda\}$.

Så la $\Lambda = \omega_1 \mathbb{Z} + \omega_2 \mathbb{Z}$.

Da er
$$\left.\begin{aligned} \alpha\omega_1 &= a\omega_1 + b\omega_2 \\ \alpha\omega_2 &= c\omega_1 + d\omega_2 \end{aligned}\right\}$$

La $\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$: $\alpha\tau = a\tau + b$
$\alpha = c\tau + d$

Om $c = 0$ er $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Om $c \neq 0$ er $\tau = \dfrac{\alpha - d}{c}$, så

$$\alpha\left(\frac{\alpha-d}{c}\right) = a\,\frac{\alpha-d}{c} + b$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha d = a\alpha - ad + bc$$
$$\Rightarrow \alpha^2 - (d+a)\alpha + ad - bc = 0$$

α hel over $\mathbb{Z}$.

På samme måte, eliminer α fra ligningene $\Rightarrow$ $\tau \in K$ kvadratisk (av grad 2)

Men $\alpha = c\tau + d$, så $\alpha \in \mathcal{O}_K$

tradisjon | Så fancy ℘ du får til

Weierstraß ℘-funksjonen

- ønsker å konstruere dobbelperiodiske funksjoner.
- ikke lett, må tenke på konvergens.

- Anta $\Phi(z) = \sum_{\omega \in \Lambda} \varphi(z+\omega)$. (*)

og at $\varphi(z) \to 0$ når $|z| \to \infty$ raskt nok til at (*) konvergerer absolutt.

- Følger at $\Phi(z)$ er elliptisk. / dobbelperiodisk

Kriterie for konvergens

Lemma 3.7

- D begrenset åpent område i $\mathbb{C}$.
- $c > 1$
- Anta $f(z, \omega)$ er ~~holomorf~~ meromorf i z for hver $\omega \in \Lambda$
- $f(z, m\omega_1 + n\omega_2) = O((m^2+n^2)^{-c})$ når $m^2+n^2 \to \infty$

Da er $\sum_{\omega \in \Lambda} f(z,\omega)$ ÷ endelig mange ledd abs. uniform konvergent i D.

7?

Pf

· Bare endelig mange ledd kan ha poler fordi pga begrensningen på normen. ⇒ trekke dem fra

· Betingelse betyr at det ∃ konstanter A, B s.a.

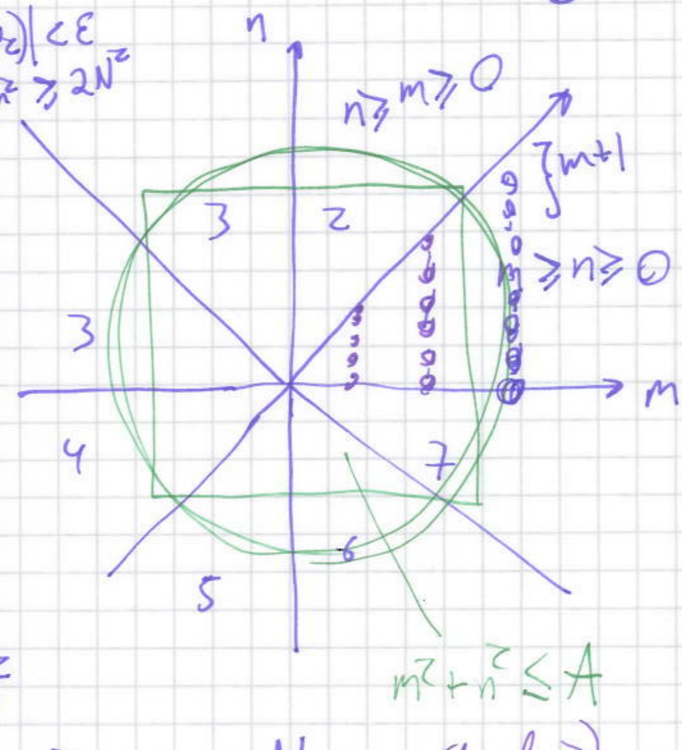
$$|\psi(z, m\omega_1 + n\omega_2)| < B(m^2+n^2)^{-c}$$

når $m^2+n^2 > A$

· Ønsker å v.a. hver end. delsum $S = \sum |\psi(z, m\omega_1 + n\omega_2)| < \varepsilon$ for $m^2+n^2 \geq 2N^2$

· Åtte delsummer ⁝

· Nok å vise påst. for én av dem.



· Se på $m \geq n \geq 0$.

Her er $m^2+n^2 \geq 2N^2$

$$\Rightarrow m^2+m^2 \geq 2N^2$$

$$\Rightarrow 2m^2 \geq 2N^2 \Rightarrow m > N$$

(hvorfor?)

og ✓ $\psi < B(m^2+n^2)^{-c}$

$$= \frac{B}{(m^2+n^2)^{+c}} \leq \frac{B}{m^{2c}} = Bm^{-2c}$$

Om vi WLOG antar $2N^2 > A$.

For gitt m, maks $m+1$ verdier av n. Gned

$$S \leq \sum_{m=N}^{\infty} Bm^{-2c}(m+1) \leq \sum_{m=N}^{\infty} B_1 m^{-2c} m = \sum_{m=N} B_1 m^{-2c+1}$$

>1 så konv

Konstruere Weierstraß

Fra Prop 3.1 vet vi at „enklest mulige" elliptiske funksjon er en m/ dobbelpol for hver $z \in \Lambda$ + ingen andre poler.

Anta $f(z)$ er en slik en.

- Da er $f(z) - f(-z)$ en funksjon UTEN dobbelpoler, så må være konstant $\equiv 0$.

  (ikke odde!!)

- Dermed må $f(z)$ være jevn for ikke å være konstant.

(Kan videre definere f om vi krever at
$$f(z) = z^{-2} + O(z^2) \text{ når } z = 0.)$$

Men! Lemma 3.7 funker ikke direkte m/ ~~…~~ $t(z,w) = \frac{1}{\cancel{(z-w)^2}}$

$$t(z,w) = \frac{1}{(z-w)^2}$$

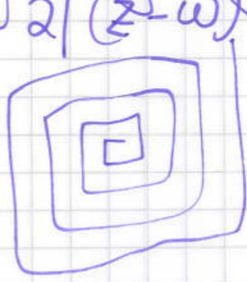
Men funker m/ den deriverte!

Så la $\varphi(z) = \frac{-2}{z^{3}}$. ~~fordi:~~ ??

$~~|\varphi(z)| = |2z^{-3}|~~$

$$|\varphi(z-\omega)| = 2|(z-\omega)^{-3}| <$$

Essensielt fordi:



$$\in O\left(\frac{1}{|A|^2}\right)$$

Så vi har at $\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$ konvergerer!

Dermed
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right]$$

(Skriv ut pro bilde av $\wp(z)$???

Bevel er $(\wp(-z_1-z_2), \wp'(-z_1-z_2))$

$= (\wp(z_1+z_2), -\wp'(z_1+z_2))$

Addisjonsformelen

Prop 3.9

$$\wp(z+z') = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(z')}{\wp(z)-\wp(z')}\right\}^2 - \wp(z) - \wp(z')$$

~~Bf La f(z) betegne differansen.~~

~~LHS~~ ~~$\wp(0) = 0$~~ ~~ver null~~

$$\wp(z+z') = \frac{1}{(z+z')^2} + \sum_{\substack{\omega\in\Lambda \\ \omega\neq 0}}\left(\frac{1}{(z+z'-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

Sammenligne poler i Laurent-utviklingen.

- Kan ses på som gruppelov. (geometrisk bevis)

- La z_1, z_2 være to punkter $\in \mathbb{C}/\Lambda$ i gen. posisjon. Finn konst.

a, b s.a. $\wp(z_1) + a\wp'(z_1) = b$

$\wp(z_2) + a\,\wp'(z_2) = b$

Da har $\wp(z) + a\wp'(z) - b$ trippelpol i 0 og røtter i z_1, z_2.

Men siden $\sum_{P\in D} \mathrm{ord}_P(f) \cdot P \equiv 0 \mod \Lambda$, så må $-z_1 - z_2$ være tredje rot.

9

~~Husk $\sum_{P\in D} \mathrm{ord}_P(f)\, P \equiv 0 \mod \Lambda$~~

Addisjonsformelen

Prop 3.9 $$\wp(z+z') = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(z')}{\wp(z)-\wp(z')}\right)^2 - \wp(z) - \wp(z').$$

Fikser z'.

Bevis ~~Geometrisk bevis.~~ Analyserer poler for VS og HS.

VS har pol for $z = -z'$.

HS har pol for mulignis $z=0$ og

(sammenfallende poler) ...

Eisenstein-serier $G_k(\Lambda) = \sum_{\substack{\omega\in\Lambda \\ \omega\neq 0}} \omega^{-2k}$

Definer $G_k(z) = G_k(z\mathbb{Z}+\mathbb{Z})$

Prop 3.10 $G_k(z)$ konvergerer til en holomorf funksjon på $\mathbb{H}$.
og $G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$.

Bevis. Følger fra Lemma at $G_k(z)$ konvergerer. $G_k(z)$ konv. uniformt, så kan bytte Σ og lim. Dermed

$$G_k(i\infty) = \sum_{m,n} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} \frac{1}{n^{2k}} = 2\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{2k}} = 2\zeta(2k).$$