§ $\boxed{4.6.3}$ Fått oppgitt at $A \sim B$.

Finn rank(A) og dim nul(A).

B er på trappeform. Kan telle pivotsøyler. Da er

rank A = ant. pivotsøyler = 3

dim nul A = 6 − ant. piv.søyler = 3

Basis for søylerommet: gitt ved pivotsøylene i A.

$$\text{Basis for søylerommet } Col(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

søyler i A

For å finne basis for Nul(A), må vi ha redusert trappeform.

$$A \sim B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3/2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \in \text{Nul}A \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 3x_3 - \frac{3}{2}x_4 - 3x_6 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utgjør basis for Nul(A).

$m \times n$ - matrise A

nedover bortover

Dimensjonsteoremet $\boxed{n = \text{rang } A + \dim \text{Null} A}$

4.6.6 7×5 - matrise A. Rang 2

$\dim \text{Null} A = 5 - \text{rang } A = 3$

$\dim \text{Row} A \underset{\text{Thm 14}}{=} \dim \text{Col} A \underset{\text{pr def rangen}}{=} 2$

$\text{rank } A^T = \dim \text{Row} A = 2$

4.6.11 8×5 - matrise m/ $\dim \text{Null} A = 3$

$\Rightarrow \dim \text{Row} A \underset{\text{Thm 14}}{=} \dim \text{Col} A = 5 - 3 = 2$

$\boxed{4.6.20}$ Har et ikke-homogent lign.system m/ 6 ligninger og 8 ukjente og 2 frie variabler.

Anta det finns én løsning. Er det mulig å endre konst. ledder slik at vi ikke får noen løsninger?

Svarer til $A\vec{x} = \vec{b}$ der A er 6×8 - matrise

$\vec{x} \in \mathbb{R}^8$ og $\vec{b} \in \mathbb{R}^6$

At det er to frie variabler, svarer til at $A\vec{x} = \vec{0}$ har $\dim \text{Null} A = 2$

Følger at $\text{rank } A = 8 - 2 = 6$

Så $\text{Col} A = \mathbb{R}^6 \Leftrightarrow$ ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ har løsning for

$\vec{b} \in \mathbb{R}^6$ Så nei er svaret på oppg.

sep 24-14:28

4.6.27 A $m \times n$- matrise (tenk på A ~~så~~ som lin. transformasjon $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$)

$\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^n \begin{cases} \text{Nul } A \\ \text{Row } A \\ \text{Col } A^T \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Col } A^T = \text{Row} A}$$

$$\mathbb{R}^m \begin{cases} \text{Col } A \\ \text{Row } A^T \\ \text{Nul } A^T \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Row } A^T = \text{Col} A}$$

4.6.31 $\vec{u} \cdot \vec{v}^T$ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\underset{3\times 1}{\vec{u}\vec{v}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}} \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3a & -3b & -3c \\ 5a & 5b & 5c \end{bmatrix}}$$

Alle søylene er multipler av $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Så $\text{Col} A = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$ så lenge $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \vec{0}$.

Så $\text{rank } \vec{u} \cdot \vec{v}^T \leq 1$ (m/ likhet om $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \bar{0}$.)

sep 24-14:40

4.6.32 $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Finn $\vec{v}$ slik at

$$\vec{u} \cdot \vec{v}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix} = M.$$

$\vec{u}$ $-3 \cdot \vec{u}$ $4 \cdot \vec{u}$

Så velger $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Ser at det funker.

Ser at $\vec{u} \cdot \vec{v}^T = M$.

4.6.33 A 2×3-matrise m/ rang 1

$\vec{u}$, første søyle $\neq \vec{0}$.

Vis at det finnes $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ m/ $\vec{u} \cdot \vec{v}^T = A$.

Siden $\dim \operatorname{Col} A = 1$, er $\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\vec{u}\}$.

Så søyle 2 $= c_2 \cdot \vec{u}$ og søyle 3 $= c_3 \cdot \vec{u}$.

Lag $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$.

Da er $\vec{u} \cdot \vec{v}^T = A$. pga argumentet over.

$$\vec{u} \cdot \vec{v}^T = \begin{bmatrix} \vec{u} & c_2\vec{u} & c_3\vec{u} \end{bmatrix} = A$$

Basisskifte

4.7.3 $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$

basiser for V

Lager $P = \left[[\vec{u}_1]_{\mathcal{W}} \; [\vec{u}_2]_{\mathcal{W}} \right]$

(Siden $\mathcal{W}$ basis, kan skrive $\vec{u}_1 = c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2$.
Da er (pr def)
$$[\vec{u}_1]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{)}$$

Leser av fra $\boxed{\text{Thm 15}}$ at $P = \underset{\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{U}}{P}$. Har at
$$[\vec{x}]_{\mathcal{W}} = \underset{\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{U}}{P} [\vec{x}]_{\mathcal{U}}$$
for alle $\vec{x} \in V$. Så alt. ii) er riktig.

Litt obligatorisk

H k-dim underrom av $\mathbb{R}^n$

Vis at det finnes en lin. avb. $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ s.a.

$H = \ker T$.

Metode ① Ved oppg 1 finnes matrise A slik at

$\{A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_k\}$ er basis for H.

Begrunn at $A(L_{n,k}) = H$.

Ved forrige oppg. finnes T' m/ $\ker T' = L_{n,k}$.

Svar"

$$\begin{array}{ccccc} L_{n,k} & \to & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T'} & \mathbb{R}^{n-k} \\ \downarrow & \circ & \downarrow A & & \\ H & \to & \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Svar" $T = T'A^{-1}$

Sjekk $\vec{h} \in H$ $T(\vec{h}) = T'A^{-1}(\vec{h})$

$= T'(A^{-1}(\vec{h})) = 0$

i $L_{n,k}$ så $H \subseteq \ker T$

Metode 2 La $\{h_1, \dots, h_k\}$ være basis for H. Fullfør til

basis $\{h_1, \dots, h_k, r_{k+1}, \dots, r_n\}$ for $\mathbb{R}^n$.

Definer $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ m/ matrise $\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \}n-k$

Oblig oppg 5 V n-dim.

Enhver basis n elementer. La f. eks $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n\}$ være basis. Da er

$$[\ ]_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{c} \mathbb{R}^n \quad \text{en isomorfi.}$$
$$\vec{x} \longmapsto [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

La $\{h_1, \dots, h_k\}$ basis for H.

Da er $c(H) = \mathrm{Span}\{[\vec{h}_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [\vec{h}_k]_{\mathcal{B}}\}$ et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Vi forrige fikk $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ m/ $\ker T = c(H)$

Svar $\underbrace{T \circ c}_{\text{sett sammen funksjon}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

Litt om 7 Vis at

$$H = \text{Span}\left\{ (ax_1 + bx_2)^3 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= P_{2,3}$$

Fra forrige oppg er $\{x_2^3, x_2^2 x_1, \dots, x_1^3\}$ er basis for $P_{2,3}$.

Sett $a = 1, b = 0 \Rightarrow x_1^3 \in H$

$a = 1 \quad b = 1 \Rightarrow x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + \dots + x_2^3 \in H$

trekk fra

Fortsett slik og vis at
$$\{x_1^3, x_2 x_1^3, x_2^3 x_1, x_2^3\} \subseteq H.$$

Basis for $P_{2,3} \subseteq H \Rightarrow P_{2,3} = H$.

4.26 $\mathcal{D} = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3\}$

$\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$

Oppgitt at

$$\vec{f}_1 = 2\vec{d}_1 - \vec{d}_2 + \vec{d}_3$$
$$\vec{f}_2 = 3\vec{d}_2 + \vec{d}_3$$
$$\vec{f}_3 = -3\vec{d}_1 + 2\vec{d}_3$$

a) Finn $P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{F}}$. Definert som $\left[[f_1]_{\mathcal{D}} \; [f_2]_{\mathcal{D}} \; [f_3]_{\mathcal{D}} \right]$.

Så $P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) La $\vec{x} = \vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3$. Finn $[\vec{x}]_{\mathcal{D}}$.

Har at $[\vec{x}]_{\mathcal{D}} = P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{F}} [\vec{x}]_{\mathcal{F}}$.

Siden $[\vec{x}]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, får $[\vec{x}]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4.7.14 $\mathcal{B} = \{1-3t^2,\ 2+t-5t^2,\ 1+2t\}$

$\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$

- Finne $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} [b_1]_{\mathcal{E}} & [b_2]_{\mathcal{E}} & [b_3]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

- Skriv t^2 som lin. komb. av polynomene i $\mathcal{B}$.

$\Updownarrow$

samme som å finne $[t^2]_{\mathcal{B}}$

Trenger $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Har at $[t^2]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P}\,[t^2]_{\mathcal{E}}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [t^2]_{\mathcal{E}}$. Så $[t^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow t^2 = 3\cdot(1-3t^2) + (-2)(2+t-5t^2) + 1\cdot(1+2t)$ ✓

4.8.7

Har følgene 1^k 2^k $(-2)^k$.
og differenslігningen $y_{k+3} - y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0$ (*)

$2^{k+3} - 2^{k+2} - 4\cdot 2^{k+1} + 4\cdot 2^k$
(for $k=0$)

Lager Casorati-matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix},$$

← ~~inverterbar~~ alle er pivotsøyler

⟹ følger at følgene var lin. uavhengige.

Fordi (*) var 3'degradslign, er løsningsrommet 3-dim.
Vi har 3 lin. uavh. løsninger, så de må være alle

Så alle løsninger til (*) er på formen

$$z_k = c_0 + c_1\cdot 2^k + c_2(-2)^k$$