Karoubi - konvolutten

(1)

R-modul

$$M \hat{=} A \oplus B$$

$$\Updownarrow$$

$\exists$ idempotent $e \in \mathrm{End}_R(M)$ s.a. $A = e(M)$ og

$B = (1-e)(M)$.

[Eks $\mathrm{End}_R(R) = R$, så alle modulsummander av R er gitt v/ idempotenter
generert

kategori $\mathcal{C}$ $\to$ $\hat{\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}^{id}$)

$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\exists$ unik opp til nat. ekvivalens $\hat{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}$

idempotent $\hat{}$ komplettering: objekter (C,e) m/ $C \in \mathcal{C}$ og $e: C \to C$ idempotent.

morfi $C \xrightarrow{f} C'$, $e\downarrow$, $C \xrightarrow{f} C'$, $\uparrow e'$, $e'fe = f$

en morfi $e: D \to D$ s.a. $e^2 = e$.

idempotent komplett: alle idempotenter e av et objekt $D \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$ faktoriserer som $D \to E \to D$ hvor $(E \to D \to E) = id_E$.

$\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ additiv abelsk kategori. Da er $\hat{\mathcal{C}} \simeq \mathcal{C}' \subset \mathcal{A}$ additiv, kofinal $\mathcal{C}$

$\Rightarrow K_0(\mathcal{C}) \subset K_0(\hat{\mathcal{C}})$. utvidgr

Eks $\mathrm{Free}(R) \subset M(R)$ i ord. gr. R-moduler (2)

$\widehat{\mathrm{Free}(R)} = P(R)$

$\Rightarrow K_0(\text{frie}) \underset{\text{undergr}}{\subset} K_0 R$.

Eks $R \longrightarrow S$ ring arb.

$\mathcal{B} \subset P(S)$ underkategorien av moduler på formen $P \otimes_R S$ hvor $P \in P(R)$.

inneholder alle frie S-moduler.

$\Rightarrow \mathcal{B}$ kofinal underkategori $\Rightarrow K_0\mathcal{B} \underset{\text{undergr}}{\subseteq} K_0 S$.

bilder av $K_0 R$

Produkter

eksakte kategorier

$F: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ biekssakt hvis $\begin{cases} \cdot\ F(A,-) \text{ er eksakte} \\ \cdot\ F(-,B) \end{cases}$

funktorer $\forall A, B \in ob(\mathcal{A}), ob(\mathcal{B})$

og $F(0,A) = F(B,0) = 0$

Lemma 7.4 En biekssakt funktor F induserer en avbildning

$$K_0 A \otimes K_0 B \to K_0 \mathcal{C}$$

$$[A] \otimes [B] \longrightarrow [F(A,B)].$$

Eks $P(R) \otimes P(R) \xrightarrow{\otimes_R} P(R)$ biekssakt.

$P(R) \otimes M(R) \xrightarrow{\otimes_R} M(R)$

$\Rightarrow$ K_0R har en produkt $[P][Q] = [P \otimes_R Q]$. (3)

$\rightsquigarrow$ G_0R er en ~~...~~ K_0R-modul.

Eks X skjema. Har bieksakte funktorer

$$VB(X) \times VB(X) \xrightarrow{\otimes} VB(X)$$
$$VB(X) \times M(X) \longrightarrow M(X)$$

G_0X er en K_0X-modul.

Eks 7.4.3 (Almqvist, ... hund) (ca 7.3, 7.4)

R ring, se på $\mathrm{End}(R)$. + eksakt kategori m/ objekter (P, α), P R-modul $\in P(R)$ og $\alpha: P \to P$.

og morfier
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Q \arrow[d, "\beta"] \\ P \arrow[r, "f"'] & Q \end{tikzcd}$$

Hvis R kommutativ, så en bieksakt funktor $\otimes_R : \mathrm{End}(R) \times \mathrm{End}(R) \to \mathrm{End}(R)$
$$((P,\alpha),(Q,\beta)) \longmapsto (P \otimes_R Q, \alpha \otimes \beta)$$

$\Rightarrow$ $K_0\mathrm{End}(R)$ er kommutativ ring m/ enhet $[R, \mathrm{id}]$

$\alpha: P \to P$ har kar. poly. $\lambda_t(\alpha) = \sum_{i \geq 0} \mathrm{Tr}(\Lambda^i \alpha)\, t^i$.

$\exists$ R-modul Q s.a. $P \oplus Q \cong R^n$ og f utvides til en endomorfi av R^n v/ å være 0 på Q.

Sett $\lambda_t(\alpha) = \det(1 + t(\alpha \oplus 0_Q))$

4

λ_t er additiv på korteksakte sekvenser:
$$\lambda_t(\alpha) = \lambda_t(\alpha') \cdot \lambda_t(\alpha'')$$

(se gjerne på annilheten!) "flere annilder"

Teorem (Almkvist) R kommutativ.

Da definerer avb. $[P \xrightarrow{\alpha} P] \mapsto [[P], \lambda_t(\alpha)]$

a isomorfi $K_0 \mathrm{End}(R) \simeq K_0 R \times \mathrm{End}_0 R$

$$\mathrm{End}_0 R = \left\{ \frac{1 + a_1 t + \dots + a_n t^n}{1 + b_1 t + \dots + b_m t^m} \;\middle|\; a_i, b_i \in R \right\}$$

mult.-gr.

(Sammenheng m/ Witt-vektorer)

Eks. Om $R = \bar{k}$, så
$$\mathrm{End}_0(\bar{k}) = \mathbb{Z}[\bar{k}^*]$$

Eks. 7.4.4 R ring.

$\mathrm{Nil}(R) = (P, \nu)$ hvor $P \in \mathbf{P}(R)$ og $\nu \in \mathrm{End}(R)$ er nilpotent.

$\cap$

$\mathrm{End}(R)$

eksakt underkategori.

$$\mathrm{Nil}(R) \longrightarrow \mathbf{P}(R)$$
$(P, 0) \leftarrow P$, splitting

$\Rightarrow$ $K_0 R$ direkte summand av $K_0 \mathrm{Nil} R$.

$$\mathrm{Nil}_0(R) = \ker(K_0 \mathrm{Nil}(R) \to K_0 R)$$
$$K_0 \mathrm{Nil} R = K_0 R \oplus \mathrm{Nil}_0 R.$$

5

$Nil_0 R$ generert av elementer på formen

$$[(R^n, \nu)] - n[(R, 0)].$$

nilpotent $n \times n$-matrise

Relevant for fundamentalgrupper for ikkegrupper.

Prop 7.5 $\mathcal{C}$ lukket under kjerner. ($A \xrightarrow{f} B$ epimorfi $\Rightarrow$ ker f også i $\mathcal{C}$)

Hvis $C_\bullet$ er en begrenset kjedekompleks i $\mathcal{C}$ m/ homologi i $\mathcal{C}$, så får vi likhet i $K_0(\mathcal{C})$:

da er $\chi(C_\bullet) = \sum (-1)^i [C_i] = \sum (-1)^i [H_i(C)]$.

(Spesielt: asyklisk $\Rightarrow \chi = 0$)

Korollar 7.5.1 $C_\bullet \xrightarrow{f} C'_\bullet$ begr. kjedekompl. og homotopiiso $\Rightarrow \chi(C_\bullet) = \chi(C'_\bullet)$.

Resolusjonsteoremet

$P_\bullet \to C$

P-resolusjon av $C \in A$

$P \subset A$ additiv abelsk kategori, inneholder, er en eksakt sekvens

$$\dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to C \to 0$$

m/ $P_i \in P$. Eksakt i.e. ~~Resolusjon~~

P-dimensjon er lengden til minste P-resolusjon.

(6)

Thm (Resolusjonsteoremet)

La $\mathcal{P} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ være inklusjoner av additive kategorier m/ $\mathcal{A}$ abelsk. Anta

a) Alle obj. i $\mathcal{C}$ har endelig $\mathcal{P}$-dimensjon.

b) $\mathcal{C}$ lukket under kjerner av surjeksjoner i $\mathcal{A}$.

Da er $K_0\mathcal{P} \cong K_0\mathcal{C}$.

Bevis Hvis $P_\cdot \to C$ end. $\mathcal{P}$-resolusjon så er

$C_\cdot \quad 0 \to P_n \to \dots \to P_1 \to P_0 \to C \to 0$

så har $\chi(C_\cdot) = 0 \Rightarrow [C] = \sum (-1)^i [P_i]$.

$\Rightarrow K_0(\mathcal{P})$

Strategi Formelen $\chi(C) = \chi(P_\cdot)$ definerer en additiv funksjon fra $\mathcal{C}$ til $K_0\mathcal{P}$.

Lemma Gitt en morf. $C' \xrightarrow{f} C$ i $\mathcal{C}$, + endelig $\mathcal{P}$-resolusjon $P_\cdot \to C$. $\Rightarrow \exists$ endelig $\mathcal{P}$-resolusjon $P'_\cdot \to C'$ i

og komm. diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \to & P'_1 & \to & P'_0 & \to & C' & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & \\ \cdots & P_1 & \to & P_0 & \to & C & \to 0 \end{array}$$

(7)

Gitt to endelige P-resolusjoner $P_\bullet \to C$
$P'_\bullet \to C$

Bruk 7.6.1 på $f: C \to C \oplus C$ og $P_\bullet \oplus P'_\bullet \to C \oplus C$.

$P''_\bullet \to C$ og aut. $P''_\bullet \to P_\bullet \oplus P'_\bullet$ av komplekser.

Aut. $P_\bullet \leftarrow P''_\bullet \to P'_\bullet$ er homologi-isomorfier

Så Euler-kar av disse er like.

Så formelen er veldefinert. (additivitet)

Inverse aut. $K_0 \mathcal{C} \to K_0 \mathcal{P}$.

Hvis $P \in \mathcal{P}$

Def 7.7. R ring. $H(R)$ er kategorien av R-moduler M / endelig resolusjon gitt v/ end. gen. proj. moduler.

$H_n(R)$ er de m/ res av lengde $\leq n$.

Proj. dim av R-modul M = ℓ(minste res. $\in H(R)$)
projektive moduler

$pd_R(M) = 0 \Rightarrow M$ projektiv

$gd(R) = \sup_{M \in Mod(R)} \{ pd_R(M) \}$

Eks $gd(R[x]) = gd(R) + 1 \Rightarrow$ Hilbert syzygy-teorem.
der k kropp

$$\underset{\text{ekssakt}}{H_n(R)} \subset \underset{\text{ekssakt}}{H(R)} \subset \underset{\text{abelsk}}{\text{mod-}R}$$

Husk Lokal ring er hvis $\dim R = \dim_{R/m} m/m^2$.

Ikke-lokal regulær hvis R_p er regulær $\forall\ p \in \operatorname{Spec} R$

Teorem (Serre-Auslander-Buchsbaum)

R regulær $\Leftrightarrow$ $\operatorname{pd}_R(M) < \infty$ $\forall M \in M(R)$.

Thm (Fund. thm. for K_0)

R regulær noethersk ring.

$$K_0 R \cong G_0 R \cong K_0 R[t] \cong K_0 R[t^{\pm 1}]$$

Prop 7.8.1 $\exists$ inj. $K_0 R[t] \hookrightarrow K_0 R[t^{\pm 1}]$ $\forall$ ringer R

Husk $\operatorname{Nil}(R)$ har objekter (P, ν) ν nilpotent endomorfi av $P \in P(R)$.

Lemma 7.8.2 $S = \{t^m\}$ multiplikative mengde i $R[t]$. $\exists$ ekvivalens av kategorier $\operatorname{Nil}(R) \cong H_{1,S}(R[t])$, kategorien av av alle t-torsjons $R[t]$-moduler M i $H_1(R[t])$.

Bevis For $(P, \nu) \in \operatorname{Nil}(R)$, la P_ν være $R[t]$-modulen

(9)

P hvor t virker som ν.

En projektiv resolusjon av P_ν er gitt v/ den „karakteristiske sekvens" for ν:

$$0 \to P[t] \xrightarrow{t-\nu} P[t] \to P_\nu \to 0 \quad (*)$$

så $P_\nu \in H_1(R[t])$.

(For å se ekvivalens: rett frem - beregning av Tor-grupper)

Korr $K_0 \operatorname{Nil}(R) \simeq K_0 H_S(R[t])$

$$\overset{\shortparallel}{H(R) \cap M_S(R)}$$

$\uparrow$ S-torsjonsmoduler

$\boxed{\text{Bevis 7.0.1}}$ Lokaliseringssekvens:

$$K_0 \operatorname{Nil}(R) \to K_0\, R[t] \to K_0(R[t^{\pm 1}])$$

(v.a. denne er 0.

$(P,\nu) \longmapsto P_\nu$

Men fra $(*)$ er $[P_\nu] = 0$.

Baseskifte og transferavbildning

$$R \xrightarrow{f} S \qquad -\otimes_R S \text{ er eksakt funktor } \quad P(R) \to P(S)$$

$$f^*: K_0 R \to K_0 S$$

Hvis $S \in P(R)$ (via f), så har vi $f_*: K_0 S \to K_0 R$ (glemsom funktor)

Hvis $S \in H(R) \Rightarrow$ alle end.gen. projektive S-moduler er m/ i $H(R)$ $\Rightarrow$ eksakt glemsom funktor $P(S) \to H(R)$.

$$f_*: K_0 S \longrightarrow K_0 H(R) \cong K_0 R$$

↖ v/ resolusjonsteoremet

Avslutter m/ Serres formel (7.9.3)

end. flat dim.

$R \xrightarrow{f} S$ avb. av noetherske ringer hvor $fd_R(S) < \infty$

V/

Da finnes baseskifte $f^*: G_0 R \xrightarrow{-\otimes_R S} G_0 S$ gitt

$$[M] \longmapsto \sum (-1)^i \operatorname{Tor}_i^R(M, S)$$

full ~~...~~ veldefinert av M(?) (endelig fordi $\operatorname{Tor}_i(M,S) = 0$, $i \gg 0$) - M hver bestemt av

Bevis = Samme drive spiser til frokost. Velg en F-resolusjon

$$0 \to L_n \to \dots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

$\mathcal{F}$ inneholder $\mathbb{P}(R)$ R regulær $\Rightarrow$ alle end. gen. R-mod har (11)

endelig $\mathcal{F}$-resolusjon

Høyreside er $\chi(L_\bullet \otimes_R S)$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum (-1)^i [L_i \otimes_R S]$$

$$= f^*\left(\sum (-1)^i f^*(L_i)\right)$$

$$= f^*([M])$$