Inverible knipper

①

$\mathcal{L}$ inverterbart ($=$ lokalt iso m/ $\mathcal{O}_X$)

Recap

Prop $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ inverible

- $\mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_2$ er inverterbart
- $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{L}^{-1}$ er inverterbart.
- $\mathcal{L}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$
- $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, M) \cong \mathcal{L}^{-1} \otimes M$

Så $\operatorname{Pic} X = \{$Isoklasser av inv. knipper$\}$ er en abelsk gruppe over X

La D = Cartier-divisor $\in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^* / \mathcal{O}_X^*)$.

La $\{U_i\}$ være åpen overdekning og restriksjoner $D|_{U_i} =: f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$.

Da er $(U_i, f_i)_{i \in I}$ lokale data for D.

Men vi har knipper så vi har $(D|_{U_i})|_{U_j} = (D|_{U_j})_{U_i}$

$\Rightarrow$

så $\quad f_i|_{U_j} = c_{ij} \, f_j|_{U_i}$

der $\quad c_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_X^*)$.

Om $\quad (U_i, f_i)$ og (V_j, g_j) er to sett lokale data

for D, må vi ha $\quad f_i = d_{ij} \, g_j$ på $U_i \cap V_j$

der $\quad d_{ij} \in \Gamma(U_i \cap V_j, \mathcal{O}_X^*)$.

Om $\quad D \leftrightarrow (U_i, f_i)$ $\quad$ så $\quad D + D' \leftrightarrow (U_i, f_i \cdot f_i')$

$\quad D' \leftrightarrow (U_i', f_i')$

Om $\quad D$ divisor, $\quad \mathcal{O}_X(D) \in \operatorname{Pic} X$

vil definere.

$$\operatorname{Div} X \longrightarrow \operatorname{Pic} X$$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = f_i^{-1} \cdot \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \subseteq \Gamma(U, K_X)$$

Disse lapper pent sammen til et knippe på X.

... something ... gratis kosykelbetingelse

<u>Prop</u> ① $\mathrm{Div}\, X \longrightarrow \mathrm{Pic}\, X$ er en gruppehomomorfi.

② Kjerne er P_X (gruppen av hoveddivisorer)

Si $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(D')$

$\Rightarrow \quad D \equiv D' + (f)$

(lineær ekvivalens)

$\Rightarrow \quad D \equiv D'$.

Husk

$$\begin{tikzcd} \Gamma \mathcal{O}_X^* \arrow[r] & \Gamma \mathcal{K}_X^* \arrow[r] & \mathrm{Div}\, X \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[dl, bend right, "\simeq"'] \arrow[d] \\ & & \mathrm{Pic}\, X & ? \end{tikzcd}$$

følger fra (ii)

③ $\mathrm{Div}\, X \to \mathrm{Pic}\, X$ er surjektiv.

<u>Bevis</u>