Løsningsforslag to oppgaver MAT1120

Fredrik Meyer

1 Oppgave 4.5.32

Her er V og W endelig-dimensjonale vektorrom og $T : V \to W$ er en lineæravbildning. La H være et ikke-null underrom av V (dvs. $H \neq \{\vec{0}\}$). Anta at T er 1-1[1]. Vis at da er $\dim T(H) = \dim H$.

Bevis. Husk at $\dim H$ er definert som antall elementer i en basis til H. Så vi må vise at enhver basis for $T(H)$ har like mange elementer som en basis for H.

Vi skal bruke T til å dytte en basis fram og tilbake. Anta $\dim H = n$. Da har en basis $\mathcal{B}$ for H alltid n elementer, og vi kan skrive $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$. Vi skal vise at da er $T(\mathcal{B}) := \{T(\vec{v_1}, \ldots, T(\vec{v_n})\}$ en basis for $T(H)$. $T(\mathcal{B})$ er altså mengden vi får ved å bruke T på hvert element i $\mathcal{B}$.

For å vise at $T(\mathcal{B})$ er en basis for $T(H)$ må vise to ting: først at $T(\mathcal{B})$ utspenner $T(H)$, og også at elementene i $T(\mathcal{B})$ er lineært uavhengige:

1. **De utspenner** $T(H)$: La $\vec{v} \in T(H)$. Da er (per definisjon), $\vec{v} = T(\vec{w})$ for en $\vec{w} \in H$. Men $\mathcal{B}$ er en basis for H, så vi kan skrive $\vec{w} = c_1\vec{v_1} + \ldots c_n\vec{v_n}$, hvor c_i er reelle tall. Bruker vi T på begge sider får vi at

$$\vec{v} = T(\vec{w}) = c_1T(\vec{v_1}) + \ldots + c_nT(\vec{v_n}),$$

så $\mathcal{B}$ spenner $T(H)$, siden en tilfeldig valgt vektor kunne skrives som lineærkombinasjon av elementene i $T(\mathcal{B})$.

2. **De er lineært uavhengige:** Vi må vise at $T(\mathcal{B})$ er en mengde med lineært uavhengige elementer. Så anta vi har en lineær avhengighetsrelasjon som under. Vi ønsker å vise at alle c_i'ene er null.

$$c_1T(\vec{v}_1) + \ldots c_nT(\vec{v}_n) = \vec{0}.$$

[1]Husk at dette betyr at $T(\vec{v}) = T(\vec{w})$ impliserer at $\vec{v} = \vec{w}$.

Siden alltid $T(\vec{0}) = \vec{0}$, og på grunn av linearitet har vi at:

$$T(c_1\vec{v}_1 + \ldots c_n\vec{v}_n) = T(\vec{0}).$$

Men T var 1-1, så dette impliserer at

$$c_1\vec{v}_1 + \ldots c_n\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Disse ligger i H, og utgjorde en basis for H, så de var lineært uavhengige. Så alle $c_i = 0$.

Vi har dermed vist at $T(\mathcal{B})$ er en basis for $T(H)$. Siden alle basiser har samme antall elementer ("Theorem 10" i boka), følger det at $\dim T(H) = n$.

Vi konkluderer med at $\dim H = \dim T(H)$. □

2 Oppgave 4.5.34

Dette er en MATLAB-oppgave. MATLAB trengs strengt tatt ikke, som vi skal se.

La $\mathcal{B}$ være mengden $\{1, \cos t, \cos^2 t, \ldots, \cos^6 t\}$. La også

$$\mathcal{C} = \{1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \ldots \cos 6t\}.$$

Anta vi vet det følgende (forslag til helgeaktivitet: bevis identitetene):

$$\begin{aligned}
\cos 2t &= -1 + 2\cos^2 t \\
\cos 3t &= -3\cos t + 4\cos^3 t \\
\cos 4t &= 1 - 8\cos^2 t + 8\cos^4 t \\
\cos 5t &= 5\cos t - 20\cos^3 t + 16\cos^5 t \\
\cos 6t &= -1 + 18\cos^2 t - 48\cos^4 t + 32\cos^6 t
\end{aligned}$$

La H være undervektorrommet utspent av $\mathcal{B}$. Da er $\mathcal{B}$ en basis for H, ved oppgave 4.3.38 (se også notatene fra plenumsregningen 17/9, og filen med navn `ex_4_3_38.m`).

Vi skal vise at mengden $\mathcal{C}$ består av lineært uavhengige funksjoner. Ved hjelp av basisen $\mathcal{B}$ kan vi lage en matrise som har som søyler funksjonene i $\mathcal{C}$ uttrykk som linearkombinasjon av funksjonene i $\mathcal{B}$. Lineærkombinasjonen kan vi lese av de trigonometriske identitetene over. Matrisen vi får er

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

MATLAB-delen av oppgaven bestod i å skrive denne matrisen inn i MATLAB og sjekke at søylene er lineært uavhengige (for eksempel ved å radredusere). Men dette er åpenbart: matrisen er på trappeform, og en matrise på trappeform er alltid invertibel, så søylene er alltid lineært uavhengige.

Siden koordinatvektorene til $\mathcal{C}$ var lineært uavhengige, er også funksjonene i $\mathcal{C}$ det.

Det følger ved "Theorem 12" at da er også $\mathcal{C}$ en basis, siden $\mathcal{C}$ består av like mange elementer som i $\mathcal{B}$, og de er lineært uavhengige.

2.1 Moral

Moralen her er at et gitt vektorrom ikke trenger å ha en foretrukket basis. Det finnes ofte mange, og noen passer til bedre formål.

2.2 Bemerkning

Legg merke til at $\det M = 32768 = 2^{15}$. Dette er for spesielt til at det kan være tilfeldige. Kanskje har dette noe med at $15 = 2 \cdot 7 + 1$, og det var 7 elementer i basisen vår.

UTFORDRING: Finn ut hvorfor akkurat dette tallet. Jeg vet ikke.