Plenum 10/9-13

2.2.32

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$ Finn A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

!! $\boxed{0 \ 0 \ 1}$ kan ikke oppstå.

$\Rightarrow$ Ikke invertibel!

Så A^{-1} finnes ikke. $\bar{}$

2.2.36

$A = \begin{bmatrix} 3 \times 3 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} [\ ] & [\ ] & [\ ] \end{bmatrix}$

Kjedelig ?

Å finne Invers, samme som å løse

$A\vec{x} = \vec{e}_1 \ \dots \ A\vec{x} = \vec{e}_n$ $\quad \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$

Så bytter ut første søyle i I.

(Se MATLAB-fil)

2.3.20 A 5x5 − matrise

(*) $A\vec{x} = \vec{b}$ har løsning for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$

Kan da (*) ha flere enn én løsning?

$A\vec{x} = \vec{b}$ løsning for alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$

$\Updownarrow$ g) og f) Thm 8

$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ er 1-1 (injektiv)

Hvis $A\vec{x} = \vec{b}$ har mer enn én løsning, så finnes $\vec{x}$ og $\vec{y}$ ($\vec{x} \neq \vec{y}$) med

$$A\vec{y} = A\vec{x} = \vec{b}$$

Men det betyr at lin.transf

$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ $(= \vec{b})$

ikke er 1-1!

Så $A\vec{x} = \vec{b}$ kan ha maks én løsning

2.3.36

Anta $T(\bar{u}) = T(\bar{v})$ for $\vec{u} \neq \vec{v}$.

Kan T avbilde $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$?

Ved Thm 9 er T invertibel $\Leftrightarrow$ matrisen A til T er invertibel.

Ved Thm 8 er $\vec{x} \mapsto A\bar{x}$ på $\Leftrightarrow$ A invertibel. Men pr antakelse, er T ikke 1-1. Så kan ikke være på. Så nei.

sep 10-14:29

3.2.22 2x2 matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{bmatrix}$$

Vis/sjekk at $\det A = \det A'$.

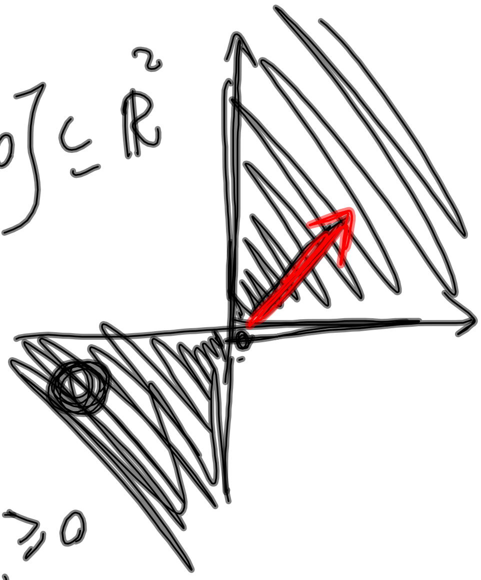
$\det A = ad - bc$

$\det A' = (a+kc)d - (b+kd)c$

$= ad + \cancel{kcd} - bc - \cancel{kdc}$

$= \underline{ad - bc}$

4.1.2 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid xy \geq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$



a) Om $\vec{u} \in W$, er $c\vec{u} \in W$?

$\vec{u} \in W \Leftrightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; xy \geq 0$

$c\vec{u} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}$ $(cx)(cy) = \underbrace{c^2}_{+}\underbrace{xy}_{+} \geq 0$

√ Ja!

b) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $-1 \cdot 1 \ngeq 0$

Så $\vec{u} + \vec{v} \notin W$.

sep 10-14:35

4.1.8 $W \subseteq \mathbb{P}_n$

$$W = \{ \vec{p} \in \mathbb{P}_n \mid \vec{p}(0) = 0 \}$$

Er W underrom av $\mathbb{P}_n$?

① Er $\vec{0} \in W$? $f(t) = 0$ $f \in \mathbb{P}_n$

$f(0) = 0$ så $f \in W$

(f er nullpolynom)

② Om $\vec{p}, \vec{q} \in W$, er $\vec{p} + \vec{q} \in W$?

$$(\overrightarrow{p+q})(0) = \vec{p}(0) + \vec{q}(0) = 0 + 0 = 0$$

Så $\overrightarrow{p+q} \in W$.

③ Om $\vec{p} \in W$, er da $c \cdot \vec{p} \in W$?

$c \cdot \vec{p}(0) = c \cdot 0 = 0$. Ja.

Så W er underrom av $\mathbb{P}_n$

4.1.12

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2s+4t \\ 2s \\ 2s-3t \\ 5t \end{bmatrix} \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 2s \\ 2s \\ 2s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4t \\ 0 \\ -3t \\ 5t \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

Så $W = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ så W underrom av $\mathbb{R}^4$.

sep 10-14:44

4.1.20 $C[a,b] = \{ f:[a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ kontinuerlig} \}$

Hva må sjekkes for å vise at $C[a,b]$ er et vektorrom?

Tre ting:

① $\vec{0}$ er med. ($f(t)=0$ er kont')

② At summen av to kont' funksjoner også er kont'.

③ Om $f(t)$ er kont', så er også $g(t) = c \cdot f(t)$

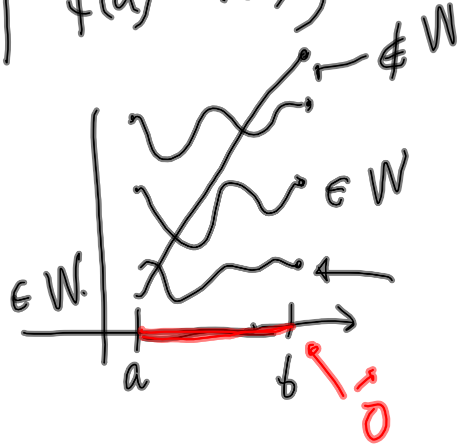
B) $W = \{ \vec{f} \in C[a,b] \mid \vec{f}(a) = \vec{f}(b) \}$

① $\vec{0} \in W$ ✓

② $(f+g)(a) = f(a) + g(a) = f(b) + g(b) = (f+g)(b)$ så $f+g \in W$.

③ Gange m/ konst. Se bilde.

$cf(a) = cf(b)$ ✓



4.1.38 $f, g, h \in \text{Span}\{1, \sin t, \sin^2 t, \dots, \sin^6 t\}$

$f(t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$

$g(t) = 1 - 8\sin^2 t + 8\sin^4 t$

$h(t) = 5\sin t - 20\sin^3 t + 16\sin^5 t$

$\vdots$

Ser at kan skrive f, g, h

som $\underbrace{\sin(kt) \text{ eller } \cos(kt)}$

$\sin(t) \quad \sin(2t)$

4.2.6 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A\vec{x} = \vec{0}$

$\overset{I-3II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -5x_3 + 6x_4 - x_5 \\ 3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

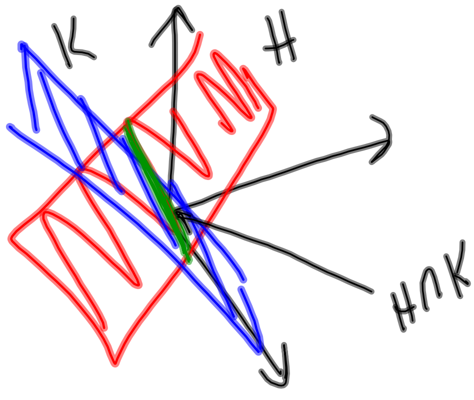
Så $\text{Null}\, A = \text{Span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$

sep 10-15:03

4.1.32 H, K er underrom av V.

Vis at $H \cap K = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \in H$ og $\vec{v} \in K\}$

er et underrom av V.



① $\vec{0} \in H \cap K$ fordi

$\vec{0} \in H$ og $\vec{0} \in K$

(fordi begge er underrom)

② La $\vec{u}, \vec{v} \in H \cap K$. $\vec{u}+\vec{v} \in H$ fordi H underrom

$\vec{u}+\vec{v} \in K$ — " —

Så $\vec{u}+\vec{v} \in H \cap K$.

③ La $\vec{w} \in H \cap K$. $c \cdot \vec{w} \in H$ — " —

$c \cdot \vec{w} \in K$ — " —

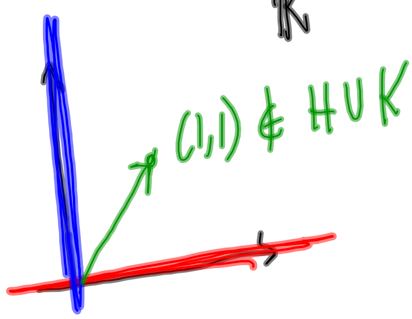
Så $c \cdot \vec{w} \in H \cap K$.

Så $H \cap K$ er et underrom.

ⓑ $H \cup K = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} \in H$ eller $\vec{v} \in K\}$

$H = \text{Span}\{e_1\}$

$K = \text{Span}\{e_2\}$



4.2.12

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 3p-5q \\ 4q \\ p \\ q+1 \end{bmatrix} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 3p-5q \\ 4q \\ p \\ q+1 \end{bmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow q = -1$$

Så da må andre rad være $-4 \neq 0$!

Så $\vec{0} \notin W$!

4.2.32

$$T: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{p} \longmapsto \begin{bmatrix} \vec{p}(0) \\ \vec{p}(0) \end{bmatrix}$$

Basis for $\mathbb{P}_2$: $\{1, x, x^2\}$

Basis for $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Med $\vec{1}$ menes

$e(t) = 1$

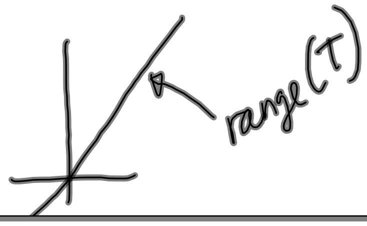
$e(1) = 1$

Så matrisen til T:

$$A_T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kernel $T = \text{Null}\, A_T = \text{Span}\{x, x^2\}$

$\text{range}(T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$



4.2.36

$$T: V \longrightarrow W \supseteq Z$$

$$T^{-1}(Z) = U = \{\vec{x} \in V \mid T(\vec{x}) \in Z\}$$

Sjekk at U er et underrom.

① $\vec{0} \in U$: $T(\vec{0}) = \vec{0} \in Z$ fordi Z er et underrom. Så $\vec{0} \in U$.

② $\vec{u}, \vec{v} \in U$.

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = \underbrace{T(\vec{u}) + T(\vec{v})}_{\in Z}$$

Så siden sum er med i Z fordi Z underrom, er også $\vec{u} + \vec{v} \in U$.

③ $\vec{u} \in U. \Leftrightarrow T(\vec{u}) \in Z.$

$T(c \cdot \vec{u}) = c \cdot T(\vec{u}) \in Z$ siden Z er underrom

Så $T(c \cdot \vec{u}) \in Z \Leftrightarrow c \cdot \vec{u} \in U.$

Så U er underrom. (Kalles vanligvis $T^{-1}(Z)$

„inverse image"

sep 10-15:48

4.2.40

$$H = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \quad \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2$$

$$K = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 28 \end{bmatrix} \right\} \quad \vec{v}_3 \quad \vec{v}_4$$

$H \cap K$ er en linje i $\mathbb{R}^3$. Finn $H \cap K$.

$$\vec{w} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 \in H$$
$$= c_3 \vec{v}_3 + c_4 \vec{v}_4 \in K$$

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 - c_3 \vec{v}_3 - c_4 \vec{v}_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_3 \\ -c_4 \end{bmatrix} = 0$$

Radredusr. Får $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ 26/3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Feil ☹

Legger ut løsning i egen fil på hjemmesiden.

sep 10-15:55