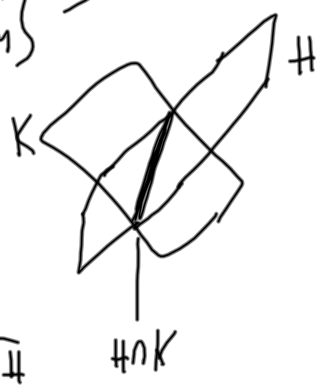
17/9-13

§ 4.2.40

$v_i \in \mathbb{R}^3$

$H = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
$K = \text{Span}\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ plan i $\mathbb{R}^3$



Snitter i en linje.
Finn $\vec{w} \in H \cap K$ slik at
$H \cap K = \text{Span}\{\vec{w}\}$

$\vec{w} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ fordi $\in H$
$= c_3 \vec{v}_3 + c_4 \vec{v}_4$ —"— K

trekker fra
$\Rightarrow c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 - c_3\vec{v}_3 - c_4\vec{v}_4 = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_3 \\ -c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skriv opp denne i MATLAB.
(se MATLAB-fil)

Får $c_3 = 4c_4$ (setter $x_4 = 1$)
$c_4 = c_4$

gir $c_3 = 4,\ c_4 = 1$

gir $\vec{w} = 4\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = 8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Konkluderer m/ at $H \cap K = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

sep 17-14:09

4.3.14 Har at $A \sim B$. (radekvivalens)

Finn basiser for Nul A og Col A.

$$A \sim B \sim \ldots \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array}$$

$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_4 = 0$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 1 \cdot x_5 = 0$

$x_5 = 0$

Betyr at
$$x_1 = -2x_2 - 2x_4$$
$$x_2 = x_2$$
$$x_3 = 2x_4$$
$$x_4 = x_4$$
$$x_5 = 0$$

$$\text{Nul}(M) \ni \vec{x} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

Så Nul A har basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Col A Velg pivotsøyler i den originale matrisa. Så Col A har basis søyle nr 1, 3, og 5 i matrise A.

sep 17-14:24

4.3.26 Finn basis for $H = \text{Span}\{\sin t, \sin 2t, \sin t \cos t\}$

$$\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t \Rightarrow \underline{2 \sin t \cos t} = \sin 2t$$

Så $\sin t \cdot \cos t$ er lineærkombinasjon av de to andre.

$(0 \cdot \sin t + 2 \cdot \sin 2t)$

Så $H = \text{Span}\{\sin t, \sin 2t\}$

Vil sjekke at $\sin t$ og $\sin 2t$ er lineært uavh.:

$$c_1 \cdot \sin t + c_2 \cdot \sin 2t = 0 \quad \text{for alle } t.$$

#1 Sett inn $t = \frac{\pi}{2}$.

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = \boxed{c_1 = 0}$$

#2 Sett inn $t = \frac{\pi}{4}$.

$$0 + c_2 \cdot 1 = 0 \quad \boxed{c_2 = 0}$$

Så $\{\sin t, \sin 2t\}$ er lineært uavhengige og spenner H. Så de er en basis. ∎

sep 17-14:33

4.3.32 Har $T: V \longrightarrow W$ lin. avb. som er 1-1
(betyr at $T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$)

Vis at om $\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$ er lin. ~~avhengig~~, avhengig
så er også $\{v_1, \dots, v_p\}$ det.

Anta $c_1 T(\vec{v}_1) + \dots + c_p T(\vec{v}_p) = \vec{0}$

pga linearitet $= T(c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_p \vec{v}_p) = T(\vec{0})$

pga 1-1 $\Rightarrow$ $c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_p \vec{v}_p = \vec{0}$

Så $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ er lineær AVHENGIGE.

$T(\vec{0}) = \vec{0}$
for alle lineærtransformasjoner:
$T(\vec{0} + \vec{0}) = T(\vec{0})$
$T(\vec{0}) + T(\vec{0}) = T(\vec{0})$
Trekke fra:
$T(\vec{0}) = \vec{0}$

4.3.34 $\vec{p}_1(t) = 1 + t$ $\quad \vec{p}_2(t) = 1 - t$
$\vec{p}_3(t) = 2$ for alle t

Finn basis for $\mathrm{Span}\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$

Ser at $\vec{p}_3(t) = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = (1 + t) + (1 - t)$
$= 2$

Så kan glemme $\vec{p}_3$.
Så vil vise at $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$ er lin. uavhengig:
$$c_1(1 + t) + c_2(1 - t) = 0 \quad \text{for alle } t.$$

Sett $t = 1$:
$c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Sett $t = -1$ $\Rightarrow$ $c_2 = 0$

Så $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$ er lin. uavhengige. Så de utgjør en basis.

sep 17-14:39

4.3.38 (oblig oppg 6)

Vis at $\{1, \cos t, \cos^2 t, \dots, \cos^6 t\}$ er lineært uavhengige.

Anta $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \cos t + c_3 \cos^2 t + \dots + c_7 \cos^6 t = 0$ for alle t.

Sett inn for 7 forskjellige t-verdier.
(f. eks $t = 1, 2, 3, \dots, 7$)

Får 7 lign., m/ 7 ukjente. Med matrise M.

$M\vec{x} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ bare pivotsøyler, så $\vec{x} = \vec{0}$ eneste løsning.
Så cos... var lin. uavhengig.

4.4.8 Oppgitt basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$

Skriv $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ som kombinasjon av $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_3$,

altså finn $[\vec{x}]_B$. $c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3 = \vec{x}$

Med andre, løse $P_B\vec{c} = \vec{x}$

$\Leftrightarrow$ løse

$\Leftrightarrow$ radreduser;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 3 & -2 \end{bmatrix} \underset{III-3I}{\overset{II-I}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Så $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\blacksquare$

4.4.4 Oppgitt at $[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Finn $\vec{x}$ uttrykt m/ standard-basisen!

$$\vec{x} = P_B [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\vec{x}$ i standard-basisen.

$\boxed{4.4.11}$ $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ og $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

(ops) $P_B [x]_B = \vec{x} \Rightarrow P_B^{-1} \vec{x} = [\vec{x}]_B$ $\quad P_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{II+2I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{I-3II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & \underbrace{-2 & -1}_{P_B^{-1}} \end{bmatrix}$$

Så $P_B^{-1} \vec{x} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = [\vec{x}]_B$

4.4.28

$\mathbb{P}_3$ har basis $\{1, t, t^2, t^3\}$.

Da er koordinat-avb. $\vec{x} \mapsto [\vec{x}]_B$ en isomorfi.

$\mathbb{P}_3$-problemer kan løses i $\mathbb{R}^4$:

Polynomene i oppgaven svarer til

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1+t-2t^2$$

To måter å skrive samme ting på

Radreduserer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots\dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så vektorene over er lin. uavhengige. Siden koordinat-avbildningen er isomorfi, er også polynomene lin. uavhengig.

4.4.32 $\vec{p}_1(t) = 1 + t^2$ $\vec{p}_3(t) = 1+t-3t^2$

$\vec{p}_2(t) = t - 3t^2$

Vis at utgjør basis for $\mathbb{P}_2$.

Via koordinatavb. kan vi gjøre utregninger i $\mathbb{R}^3$.

Matrisen blir

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ t \\ t^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\det(M) = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\neq 0$$

Så M er invertibar $\Leftrightarrow$ søylene utgjør en basis for $\mathbb{R}^3$.

Siden $x \mapsto [x]_B$ er en isomorfi, er også $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ en basis for $\mathbb{P}_2$. ■

B) $[\vec{q}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{q}(t) = -1(1+t^2) + 1(t-3t^2) + 2(1+t-3t^2)$

$$= \underline{\underline{1 + 3t + 10t^2}}$$

4.4.34 Radreduser koordinatmatrisen.

sep 17-15:36

4.4.36

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ Spenner og er basis for

$H = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ fordi de er lineært uavhengige.

(radreduser i MATLAB)

Uttrykk $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathcal{B}$-koordinatsystemet.

Så $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

4.5.27

Hvorfor er $\mathbb{P} = \{\text{alle polynomer}\}$ uendelig-dim. ?

Fordi $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$ er lineært uavhengig.

Fordi om $c_1 x^5 + c_2 x^6 + c_3 x^7 + \ldots + c_n x^n = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_n = 0$ alltid.

Uendelig stor lin. uavhengig mengde $\subseteq \mathbb{P}$

$\Rightarrow \mathbb{P}$ er ∞-dimensjonalt.

sep 17-15:46

4.5.32 $H \subseteq V$ $H \neq \{\vec{0}\}$

Og $T: V \longrightarrow W$ er 1-1.

Vis at $\dim T(H) = \dim H$.

~~Alt~~ Hver $\vec{v} \in T(H)$ kan skrives som $T(\vec{w}) = \vec{v}$ for en $\vec{w} \in H$.

Så basis for $T(H)$, kan skrives som

$\{T(w_1), \dots, T(w_p)\}$

$\Rightarrow$ $\{w_1, \dots, w_p\}$ er lin uavhengig.

v/ oppg 4.3.32 $\Rightarrow$ $\dim H \geq \dim T(H)$

"Andre veien" $\Rightarrow$ $\dim H \leq \dim T(H)$

sep 17-15:55