1 Fasit, utvalgte oppgaver

Oppgave 5.6

a) Vi skal finne en formel for $\tan(u+v)$. Til dette trenger vi **tre** fakta.

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u)$
- $\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$

Det første vi gjør er å bruke definisjonen til tangens:

$$\begin{aligned}\tan(u+v) &= \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} \\ &= \frac{\sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u)}{\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)}\end{aligned}$$

Vi ønsker å tvinge fram $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ over for å uttrykke svaret kun som tangens. Vi velger derfor å dele med $\cos(u)\cos(v)$ både oppe og nede i brøken ($=$ gange med $1/(\cos u \cos v)$):

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{1}{\cos(u)\cos(v)}(\sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u))}{\frac{1}{\cos(u)\cos(v)}(\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v))} \\ &= \frac{\frac{\sin(u)\cos(v)}{\cos(u)\cos(v)} + \frac{\sin(v)\cos(u)}{\cos(u)\cos(v)}}{\frac{\cos(u)\cos(v)}{\cos(u)\cos(v)} - \frac{\sin(u)\sin(v)}{\cos(u)\cos(v)}} \\ &= \frac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u)\tan(v)}\end{aligned}$$

b) Sett $u = v$.

c) Formelen i b) kan også utledes ved hjelp av formlene for $\sin(2u)$ og $\cos(2u)$. Vi husker dem:

- $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$
- $\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$

Vi får derfor

$$\tan(2u) = \frac{2\sin(u)\cos(u)}{\cos^2(u) - \sin^2(u)}$$
$$= \frac{\frac{2\sin(u)\cos(u)}{\cos^2(u)}}{\frac{\cos^2(u)}{\cos^2(u)} - \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}}$$
$$= \frac{2\tan(u)}{1 - \tan^2(u)}$$

hvor vi i det midterste steget delte på $\cos^2(u)$ både oppe og nede.

Oppgave 5.7
b) Vi skal løse

$$2\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

for x. Her kan det være lurt å innføre hjelpevariabelen $u = x + \frac{\pi}{4}$. Ligningen vår blir nå:

$$2\sin(u) = \sqrt{2}$$

Vi deler på 2, og får

$$\sin(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Denne løser vi ved å huske at èn løsning er ${}^{\pi}/_{4}$. De andre løsningene er gitt ved

$$\begin{cases} u = \pi/4 + 2k\pi \text{ for } k \in \mathbb{Z} \\ u = \pi - \pi/4 + 2k\pi \text{ for } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Men nå husker vi at $u = x + \pi/4$. Vi får at $x = u - \pi/4$. Trekker vi fra $\pi/4$ i begge ligningene over, får vi

$$\begin{cases} x = 2k\pi \text{ for } k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi/2 + 2k\pi \text{ for } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Oppgave 5.8c)
Vi ønsker å skrive om på standardform. Uttrykket vi skal skrive om er følgende:

$$-2\sin x + \sqrt{12}\cos x$$

Vi ønsker å skrive på formen $A\sin(x+\phi)$. Om uttrykket vårt generelt er $a\sin x + b\cos x$, så er $A = \sqrt{a^2+b^2}$. ϕ er en vinkel i intervallet $[0, 2\pi)$[1]. Vi finner ϕ ved å løse ligningene

$$a = A\cos\phi, \text{ og } b = A\sin\phi$$

I dette tilfellet finner vi at $A = 4$, og at $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Du vil se at det er den eneste mulige løsningen ved å titte på enhetssirkelen!

Så svaret er altså $4\sin(x+\frac{2\pi}{3})$.

[1]Egentlig er ikke dette nøye - men det er mye oversiktlig at den er i det intervallet.