Johannes Kleppe

Diskrete undergrupper av $SL_2(\mathbb{R})$

- $SL_2(\mathbb{Z})$
- $\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\}$
- $\Gamma_0(N) = \{ \ -\!\!\text{''}\!\!- \ \mid c \equiv 0 \bmod N \}$

$\Gamma_0(N)$ er et eks. på en <u>kongruensundergruppe</u> av $SL_2(\mathbb{Z})$, dvs den inneholder $\Gamma(N)$.

Se på

$$1 \to \Gamma(N) \to SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \to 1$$

<u>Vise at den er eksakt på høyresida:</u>

La $A \in SL_2(\mathbb{Z}/N)$. Løft A til $A \in M_2(\mathbb{Z})$ s.a.

$\det(A) \equiv 1 \mod 1.$

$\Rightarrow ad - bc = 1 + mN$. Må ha $\gcd(c,d,N) = 1$. Vil finne $n \in \mathbb{Z}$ s.a. $d + nN \equiv 1 \mod p \ \forall p \mid c,\ p \nmid N$.

$n \equiv 0 \mod p \ \forall p \mid c,\ p \mid N$

En slik n eksisterer y kinesiske restteoremet.

Da er $\gcd(c, d+nN) = 1$.

Erstatt d m/ $d+nN$. Da $\exists\, e, f \in \mathbb{Z}$ s.a. $m = fc - ed$.

La $B = \begin{pmatrix} a+eN & b+fN \\ c & d \end{pmatrix}$. Da er

$$\det B = ad + cdN - bc - fcN$$
$$= 1 + mN + cdN - fcN$$
$$= 1 + \underbrace{(m + cd - fc)}_{0\,!}N = 1 \quad \text{siden}$$

Dette impliserer at $SL_2(\mathbb{Z})$ er tett i $SL_2(\hat{\mathbb{Z}})$

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/N = \prod \mathbb{Z}_\ell .$$

To undergrupper, Γ og Γ', er kommensurable hvis $\Gamma \cap \Gamma'$ har endelig indeks i Γ, Γ'.

- Grupper er <u>aritmetiske</u> om de er kommensurable m/ $SL_2(\mathbb{Z})$.

Del 2 - Arne B

Lineærabildninger $\varphi: \mathbb{C}^2_{\setminus 0} \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2_{\setminus 0} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array} \qquad \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Klassifisere transformasjoner

	Transformasjon	Trase	Diskriminant	Egenv
$\lambda^2 = 1$	$\begin{pmatrix} \cancel{\lambda} & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	± 2		
	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$	$\lambda + \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$	$\Delta < 0$	$\notin \mathbb{R}$, $\lvert\lambda\rvert^2 =$
		—	$\Delta > 0$	—
		trace $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$		

Egenvektorer	Type
	Paraboliske
- Én i $\mathbb{H}$	Elliptisk
- To	Hyperbolske
	Loksodrome

- $z \in \mathbb{H}$ kalls et „elliptisk" punkt for Γ om den er et fikspunkt for en elliptisk transformasjon.

$$(\Gamma \leq SL_2(\mathbb{Z}))$$

- En $s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ parabolsk punkt for Γ dersom s er en fikspunkt for en parabolsk transformasjon i Γ.

(Cusp)

Prop For et elliptisk punkt $z \in \mathbb{H}$ for Γ, så er $\Gamma_z = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z \}$ en endelig syklisk gruppe.

Bevis La $\alpha(i) = z$ være en transformasjon som sender $i \mapsto z$.

$$\Gamma_z \longrightarrow \Gamma_i \cap (\alpha^{-1} \Gamma \alpha)$$

$$\simeq SO_2(\mathbb{R}) \cap \text{diskret} \Rightarrow \text{endelig.}$$

Og alle endelige undergr av $SO_2(\mathbb{R})$ er sykliske.

(bevis.....) ■

Se på $\Gamma(1) = \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. $\boxed{\text{Finne cuspene}}$

Cusp under $\Gamma(1)$: $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

$$\infty \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ fikspunkt/egenvektor for } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\gcd(m,n) = 1$ $\quad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Da $\exists$ $r, s \in \mathbb{Z}$ s.a. $rm - sn = 1$. La

$$\gamma = \begin{pmatrix} m & s \\ n & r \end{pmatrix}. \quad \text{Da er} \quad \gamma(\infty) = \begin{pmatrix} m & s \\ n & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \frac{m}{n}$$

Da stabiliserer $\gamma T \gamma^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$, så $\frac{m}{n}$ også parabolsk.

Anta motsatt at $\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$ parabolsk. Da $\exists$ $\gamma \in GL_2(\mathbb{Q})$ slik at $\alpha = \pm \gamma T \gamma^{-1}$. Fikserer $\gamma(\infty)$.

Finne elliptiske punktene under $\Gamma(1)$.

La $z \in \mathbb{H}$. Fikspunkt for $\gamma \in \Gamma(1)_z$.

Men $\Gamma(1)_z$ er endelig syklisk, så γ har endelig orden.

Som lin.avb er $\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda$ enhetsrot. λ er rot i et kvadratisk polynom $/\mathbb{Q}$. n-te røtter av 1 i en kvadratisk utvidelse av $\mathbb{Q}$, $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

„De faktiske" elliptiske punkter: i, $\rho = \sqrt[3]{-1} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Komplekse struktur på $\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}^*$.

6

Q: ikke elliptisk. $U \ni Q$ lien nok

kart $(p(U), p^{-1})$

$$\begin{array}{ccc} Q & \in & \mathbb{H} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow p \\ P & \in & SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \end{array}$$

Q elliptisk: Q enten $\sim$ my i eller ρ.

1 2

har $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

I tilfellet 1: $S(i) = i$. Se på $z \overset{\psi}{\longmapsto} \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2$

S-invariant. Tar $O \ni i$ til en

egen disk om 0. Kart for $(\psi(O), \psi^{-1})$

I tilfellet 2: ρ enten TS eller ST

... ?

$Q = i\infty$. $q(z) = \exp(2\pi i z)$. ???

Genus av $X(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathbb{H}^*$

$$\begin{array}{c} \mathbb{H}^* \\ \downarrow \\ X(\Gamma) \\ \downarrow \\ X(\Gamma(1)) \end{array}$$

(7)

$$\begin{array}{c} \mathbb{H}^* \\ \downarrow p \\ X(\Gamma) \\ \downarrow \varphi \\ X(\Gamma(1)) \end{array}$$

overdekning av grad m

Hurwitz

$$2g-2 = -2m + \sum (e_p - 1)$$

$$\Rightarrow g = 1 - m + \sum_{p \in X} \frac{e_p - 1}{2}$$

ν_2 = antall ikke-ekvivalente elliptiske punkter av orden 2

ν_3 = — " — 3

ν_∞ = — " — cusper

Da er $e(Q/p) = e(Q/P) \cdot e(P/p)$.

Fri virkning $\Rightarrow$ ingen ramifikasjon (iflg Ellingsrud)

Ex $\Gamma(N)$ # $N = \prod p_i^{r_i}$

$$\mu_N = [PSL_2(\mathbb{Z}) : SL_2(\mathbb{Z}/N)] = \frac{1}{2} N^3 \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$