Modulære funksjoner og former

I.4 Milne

Her ser på undergrupper Γ av $SL_2(\mathbb{Z})$ = $\Gamma(1)$. Virker på $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$.

endelig indeks

Kvotienten $\Gamma \backslash \mathbb{H} = Y(\Gamma) \subset X(\Gamma)$

kompaktifisering. Legge til kusper.

Om $\Gamma = \Gamma(1)$, så $X(\Gamma(1)) \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Gitre $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}/\Lambda$ elliptisk kurve. $SL_2(\mathbb{Z})$ virker på mengden av gitre.

(M. stiller spørsmål som folk gjør noe av ☺)

Def En meromorf $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ er en modulær funksjon for Γ dersom den er invariant. I.e. $f(\gamma(z)) = f(z)$ $\forall \gamma \in \Gamma$. og poler av endelig orden i kuspene.

(Kristian sliter litt m/ definisjonen)

Kusp ~~Punkter p~~ ? (se Milne)

Def En holomorf funksjon $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ for Γ er en modulær form av vekt $2k$ dersom $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z)$ for $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

+ holomorf i kuspene.

Vi har funksjonskroppen

$\mathbb{C}(X(\Gamma)) = \mathbb{C}(f \mid f$ modulær funksjon for $\Gamma)$. 2

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, c \equiv 0 \mod N \right\} \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\mathbb{C}(X(\Gamma_0(N))) \ni j(z)$$

Kan også se på $j(Nz)$

$$\begin{array}{c} X(\Gamma_0(N)) \\ \mu \downarrow \\ X(\Gamma(1)) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Se på $\mathbb{C}(j)[Y]$, da er minimalpolynomet til $j(Nz)$ over denne gitt ved $\mu = N \cdot \prod_{p \mid N} (1 + \frac{1}{p})$

$$F(X,Y) = X^{p+1} + Y^{p+1} - X^p Y^p - XY \quad \text{mod } p$$

$j, j(Nz)$ $\quad N = p$

Ta de tilsv. elliptiske kurvene:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{orden } N \\ \text{undergr.} \end{matrix} \right\} \subseteq E_{j(z)} \xrightarrow{N:1} E_{j(Nz)}$$

„moduliproblem"

$\boxed{N=2}$

$$F(X,Y) = X^3 + Y^3 - X^2Y^2 + 1488\, XY(X+Y) - 162000(X^2+Y^2) + 40773375\, XY + 8748000000(X+Y) - 157464 \cdot 10^9 = 0$$

(PAUSE)

3

Modulære former $\longrightarrow$ k-fold diff. former

$$\omega = f(z)\,dz \qquad f(z) \text{ meromorf}$$

Når er denne Γ-invariant?

$$\gamma^{*}\omega = f(\gamma(z)) \cdot d(\gamma(z)) = f(\gamma(z)) \frac{\overbrace{a(cz+d)-c(az+b)}^{1}}{(cz+d)^2}\,dz$$

$$= f(\gamma z)(cz+d)^{-2}\,dz$$

$$= \omega \quad \text{dersom} \quad f(\gamma(z)) = (cz+d)^2 f(z)$$

Samme regning gir $f(\gamma(z)) = (cz+d)^{2k} f(z)$ for former av vekt k.

$X(\Gamma)$ har en eller annen genus g_Γ. = ant. holomorfe diff-former.

$$\dim\{k\text{-fold diffformer}\} \overset{RR}{=} 1-g+k(2g-2)$$

$$k(2g-2)+1-g>0$$

$$k > \frac{g-1}{2g-2} = \frac{g-1}{2(g-1)} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\omega = f\,dz}$

$\mathbb{H} \ni q \;\downarrow\; X(\Gamma) \ni p$

Lemma f modulær form vekt $2k$, ω k-fold diffform

a) $\mathrm{ord}_q f = e\,\mathrm{ord}(\omega) + k(e-1)$ — q ell. punkt m/ mult e

b) $\mathrm{ord}_p f = \mathrm{ord}_p \omega + k$ — p cusp

c) $\mathrm{ord}_q f = \mathrm{ord}_p \omega$ ellers

$$\dim M_{2k} = (2k-1)(g-1) + \nu_\infty k + \sum_p k\left(1-\frac{1}{e_p}\right).$$

4

$\Gamma = \Gamma(1)$ $\quad g = 0$ $\quad v_\infty = 1$ $\quad \rho, i$

$$\dim M_{2k} = 1 - k + \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{2k}{3}\right] \quad k > 1$$

$$= 0, \underset{G_2}{1}, \underset{G_3}{1}, 1, 1, 2, 1, 2$$

Ringen av modulære former $M_{2k} = \mathbb{C}[G_2, G_3]$

$$j = 1728 \frac{G_2^3}{\Delta} \quad \text{funksjon}$$

$$j(z) = \frac{1}{q} + \ldots$$