9 Hvilke typer kjeglesnitt? I $U_2 = \{x \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x_2 \neq 0\}$

i) $2x_0^2 + 2x_1^2 + 4x_0x_1 - 10x_2x_0 = 0$

ii) $2x_0^2 - 3x_0x_1 + x_1^2 - 5x_0x_2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2$

iii) $3x_0x_1 - 15x_2^2$

Svar i) I kartet U_2 er $x_2 \neq 0$, slik at i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \cap U_2$ er $(x_0 : x_1 : x_2) = (\frac{x_0}{x_2} : \frac{x_1}{x_2} : 1)$, slik at vi har en isomorfi med planet $\mathbb{R}^2$, gitt v/ å sette $x_2 = 1$.

Dermed får vi

$$2x_0^2 + 2x_1^2 + 4x_0x_1 - 10x_0 = 0$$

del på 2

$$\Rightarrow x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 - 5x_0 = 0$$

$$= (x_0 + x_1)^2 - 5x_0 = 0$$

Sett $y = x_0 + x_1$

$x = y - x_1 = x_0$

Da blir ligningen $y^2 - 5y + 5x = 0$,

som er en parabel.

Evt. kunne vi bruke Setning 6.13. Vi setter $x_2 = 0$ og teller løsninger. Vi får $x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 = 0 = (x_0 + x_1)^2 = 0$. Dette svarer til én linje som løsning, så igjen: parabel.

ii) Vi setter $x_2 = 0$, og får

$$\underset{a}{2x_0^2} \underset{b}{-3x_0x_1} \underset{c}{+x_1^2} = 0.$$

Dette er en andregradslikning m/ diskriminant

$$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$$

Dermed har den to løsninger, så fra seminar er dette en hyperbel.

iii) Her får vi $3x_0x_1 = 0$. Dette svarer til punktene $\underset{\text{om } x_0 = 0}{(0:1:0)}$ og $\underset{\text{om } x_1 = 0}{(1:0:0)}$. To løsninger, så dette er en hyperbel, noe som også er lett å se v/ å sette $x_2 = 1$.

(10) En symmetrisk 3x3-matrise B bestemmer en polaritet på $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ v/ $b(\bar{x}, y) = x^T B y$. For $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, så kalles linja $\{Q \mid b(Q, P) = 0\}$ for polaren til P og P er polen til denne linja. La $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

og $P_1 = (1:0:0)$. Finn P_2 og P_3 på polaren til P_1 slik at P_1, P_2, P_3 ikke ligger på linje og $\overline{P_1P_2}$ er polaren til P_3 og $\overline{P_1P_3}$ er polaren til P_2.

Siden $P_1 = (1:0:0)$ regner vi lett ut at polaren til P_1 er gitt v/

$$b(\bar{X}, P) = 0 = (x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (x_0, x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_0$$

Så P_1 har pol $\{x_0 = 0\}$.

Tilsvarende har $(0:1:0)$ pol $\{x_1 = 0\}$ og $(0:0:1)$ pol $\{x_2 =$

Dermed ser vi at om vi lar $P_2 = (0:1:0)$ og $P_3 = (0:0:1)$,

så er vi i boks. $\boxed{\text{M}}$

Oppgave 3, eksamen 2010)

La $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ være det projektive planet. (koordinater $(x_0:x_1:x_2)$).

a) Finn skjæringspunktet P til linjene m/ ligninger

$$2x_0 + 3x_1 - 6x_2 = 0. \quad (1)$$

og $$-x_0 + x_1 + 3x_2 = 0 \quad (2)$$

b) La $Q = (9:0:4)$ og finn likning for linja gjennom P og Q.

4

e) I hvor mange punkter vil ℓ skjære $\{x_1 x_2 - x_0^2 = 0\}$

Tegn når $x_2 \neq 0$.

a) Det er to måter å gjøre dette på. Den ene er å løse ligningssystemet, og den andre er å bruke dualitet. Vi gjør begge:

metode 1

Vi har $x_0 = x_1 + 3x_2$ fra ligning 2.

Dermed

$$2(x_1 + 3x_2) + 3x_1 - 6x_2$$

$$= 5x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Dermed er $x_0 = 3x_2$. Begge kan ikke være null, så

$$P = (3 : 0 : 1).$$
$$\quad x_0 \;\; x_1 \;\; x_2$$

Metode 2

Linjene har dualpunkter $(2 : 3 : -6)$ og $(-1 : 1 : 3)$.

Linja mellom disse er

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12x_0 + 4x_2 = 0.$$

Denne linja har dualpunkt $(12 : 0 : 4) = (3 : 0 : 1)$, som stemmer overens med P over. $\blacksquare$

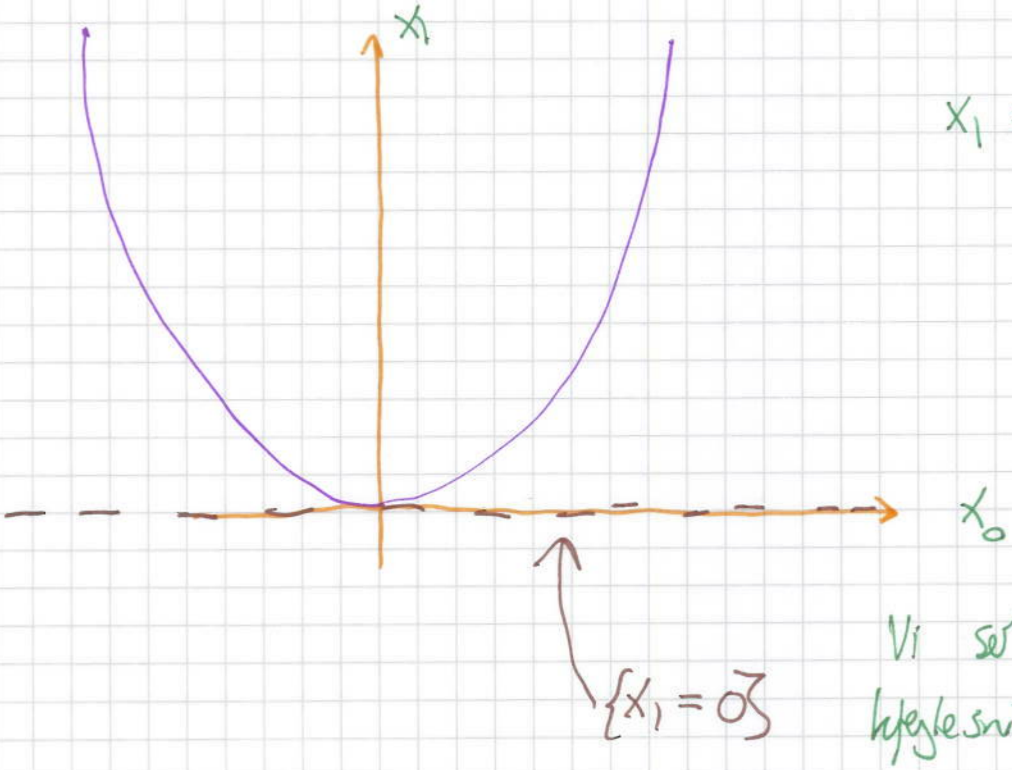
d) $Q = (9:0:4)$.

Da er linja mellom P og Q gitt ved

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 9 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x_1 = 0 \iff x_1 = 0$$

Som vi kunne sett m/ en gang.

e) Vi regner: $(x_2 = 1)$



$$x_1 = x_0^2$$

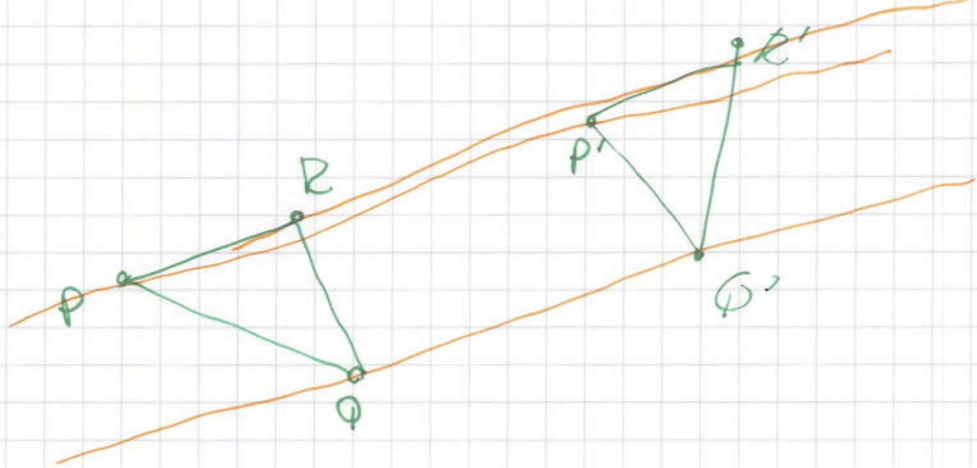
Vi ser at linja l skjærer kjeglesnittet i ett punkt.

Også $x_0^2 = x_1 = 0$ har kun løsningen $(0:0:1)$.

(4) ~~[illegible]~~ (OK)

6

La PQR og $P'Q'R'$ være to trekanter i $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.
Anta at $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ og $\overline{RR'}$ er parallelle. Bruk Desargues theorem i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ til å vise at hvis $\overline{PQ}$ er parallell m/ $\overline{P'Q'}$ og $\overline{RQ}$ er parallell m/ $\overline{R'Q'}$, så må $\overline{PR}$ være parallell m/ $\overline{P'R'}$.



Tenk på $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Da møtes $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, $\overline{RR'}$ i uendelig,
så som trekanter i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ er de i perspektiv. Da sier Desargues
at $PQ \cap P'Q'$, $RQ \cap R'Q'$ og $PR \cap P'R'$ ligger på linje.

Men om de to første er parallelle, må snittpunktet ligge på linja i uendelig. Men da må også $PR \cap P'R'$ ligge der. Men to linjer snitter i uendelig bare hvis de er parallelle. ∎