

Karabi - konvolutter

①

R -modul

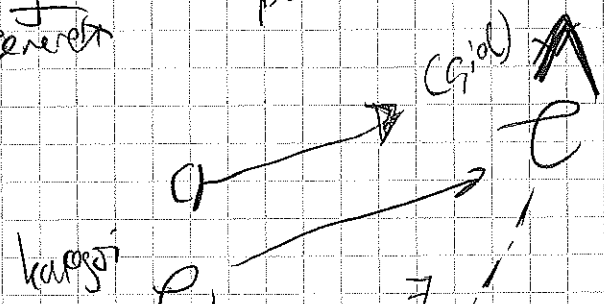
$$M \cong A \oplus B$$



\exists idempotent $e \in \text{End}_R(M)$ s.a. $A = e(M)$ og $B = (1-e)(M)$.

[Eks] $\text{End}_R(R) = R$, så alle modulsommander av R

e gitt / generert idempotens

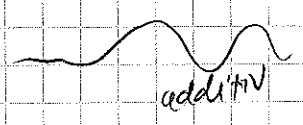


idempotent i $M/ceLis$
 $e: C \rightarrow C$ idempotent
 $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{f'} C'$
 $e \downarrow f \downarrow$
 $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{f'} C'$
 $e' \downarrow f' \downarrow$
 $C' \xrightarrow{f'} C' \xrightarrow{f'} C'$
 $e' f' = f'$

en map $e: D \rightarrow D$
 s.a. $e^2 = e$

idempotent komplett:

alle idempotens e av e
 objekt $D \in \text{ob } D$ fulgess som $D \xrightarrow{e} D \rightarrow D$
 hvor $(e \rightarrow D \rightarrow e) = \text{id}_D$.



$e \in \text{ob}$ additiv

abstakt kategor

for $e \wedge e' = e' \in A$
 kollektiv e

$\Rightarrow K_0(e) \subset K_0(e')$

Ex $\text{Free}(R) = M(R)$ i ord. gr. R -moduler

(2)

$$\text{Free}(R) = P(R)$$

$$\Rightarrow K_0(\text{free}) \subseteq_{\text{undergr}} K_0 R.$$

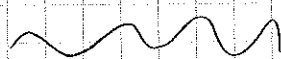
Ex $R \rightarrow S$ ring. arb.

$B \subseteq P(S)$ underkargen av moduler på formen

$P \otimes_R S$ för $P \in P(R)$.

inbördes alla free S -moduler.

$\Rightarrow B$ faktiskt underkargen $\Rightarrow K_0 B \subseteq_{\text{undergr}} K_0 S$
 bilder av $K_0 R$



Produkt

$F: A \times B \rightarrow C$ bilinjeär
 där $\{F(A, -)\}$ är absolut
 $\{F(-, B)\}$

funktor $\forall a, b \in \text{ob}(A), \text{ob}(B)$
 $(a, F(a, A) = F(B, a) = 0$

Lemma 7.4 En bilinjeär funktion F induserar en avbildning

$$K_0 A \otimes K_0 B \rightarrow K_0 C$$

$$[A] \otimes [B] \mapsto [F(A, B)].$$

Ex $P(R) \otimes P(R) \xrightarrow{\cong} P(R)$ bilinjeär
 $P(R) \otimes M(R) \xrightarrow{\cong} M(R)$

$$\Rightarrow K \otimes R \text{ hat ein Produkt } [P][Q] = \left[\underset{R}{P \otimes Q} \right] \quad (3)$$

$\leadsto K \otimes R$ ist ein ~~Modul~~
 $K \otimes R$ -Modul.

Thm X Schema. hat birationale Funktionen

$$\begin{aligned} \text{VB}(X) \times \text{VB}(X) &\xrightarrow{\otimes} \text{VB}(X) \\ \text{VB}(X) \times H(X) &\longrightarrow H(X) \end{aligned}$$

$K[X]$ ist ein $K \otimes X$ -Modul.

Ex 7.4.3 (Almgvist, ~~hundert~~)

R ring, e id in $\text{End}(R)$. \uparrow (P, α) \in elbale homog ny geho
 $\alpha: P \rightarrow R$ R -Modul $\in \text{Mod}(R)$
 $\alpha: P \rightarrow P$

\otimes mehr

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & Q \\ \alpha \downarrow & \circ & \downarrow \beta \\ P & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

Wenn R kommutativ, ist ein bilinear
 Funktion $\otimes_R: \text{End}(R) \times \text{End}(R) \rightarrow \text{End}(R)$

$$((P, \alpha), (Q, \beta)) \mapsto ((P \otimes Q), \alpha \otimes \beta)$$

$\Rightarrow K \otimes \text{End}(R)$ ist kommutativ \forall $\text{Mod}(R)$

$$\text{f\u00fcr } \text{ker. p.d.y. } \lambda_t(\alpha) = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(\lambda^i \alpha) \tau^i.$$

\exists R -Modul Q s.d. $P \otimes Q \cong R^n$ \otimes f univ. is\u00f6l in
 $\text{End}(R)$ au R^n \forall $\alpha \in \text{Mod}(R)$.

$$\text{Setz } \lambda_t(\alpha) = \det(1 + \tau(\alpha \otimes Q))$$

⑤

$Nil_0 R$ genereret af elementer på form

$$[(R^n, v)] - n[R, 0].$$

n/potent nxn-matrix

Relevante for fundamentale eksempler for Meregubte Ringer.

Prop 7.5 \mathcal{C} lukket under kopr. ($A \xrightarrow{f} B$ primær \Rightarrow for f og g)
 $i \in \mathcal{C}$

Hvis \mathcal{C}_0 er en begrænset koplekompleks i \mathcal{C} w/ homologi i \mathcal{C} ,
 så er n likket i $K_0(\mathcal{C})$:

da er
$$\chi(\mathcal{C}_0) = \sum (-1)^i [\mathcal{C}_i] = \sum (-1)^i [H_i(\mathcal{C})].$$

(specielt: acykklisk $\Rightarrow \chi=0$)

Korollar 7.5.1

$$\mathcal{C}_0 \xrightarrow{f} \mathcal{C}'_0 \text{ begr koplekomplekser}$$

og homotopi $\Rightarrow \chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{C}')$

Resolutionslemler

P additiv
 \mathcal{C} moduler
 A

abelske kategorier

$$P_0 \rightarrow \mathcal{C}$$

P -løsning af $\mathcal{C} \in A$

er en eksakt sekvens

$$\dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

ny $P_i \in P$ Efters id. ~~Resolutions~~

P -dimensen er længden til mindste P -løsning.

Thm (Resolutionslemma)

(6)

La $P \subset E \subset A$ vae A injektor av additive kategorier \mathcal{M}
 A abelsk. Har

a) Alle obj i E har endelig P -dimensjon.

b) E lukket under kon av inj og sur injektor, d.

Da er $K_0 P \approx K_0 E$.

Bez Hvis $P_0 \rightarrow C$ end. P -resolusjon så er

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow C \rightarrow 0$$

så har $\chi(C) = 0$. $\Leftrightarrow [C] = \sum (-1)^i [P_i]$.

$\Leftrightarrow K_0(P)$

Strategi Formeln $\chi(C) = \chi(P_i)$ definerer en additiv funktor
 fra E til $K_0 P$.

Lemma Gitt en morf. $C' \xrightarrow{f} C$ i E , + endelig P -resolusjon

$P_0 \rightarrow C$. $\Leftrightarrow \exists$ endelig P -resolusjon $P'_0 \rightarrow C'$:

3 kommut diagram

$$\begin{array}{ccccccc} & & P'_1 & \rightarrow & P'_0 & \rightarrow & C' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ \dots & P_1 & \rightarrow & P_0 & \rightarrow & C & \rightarrow 0 \end{array}$$

Giv to enkelte P -resolutioner $P_0 \rightarrow C$
 $P'_0 \rightarrow C$

(7)

Brug 7.6) på $f: C \rightarrow C \otimes C$ og $P_0 \otimes P'_0 \rightarrow C \otimes C$.

$P''_0 \rightarrow C$ og aut. $P''_0 \rightarrow P_0 \otimes P'_0$ af kompleks.

Med $P_0 \leftarrow P''_0 \rightarrow P'_0$ kan tegnes isomorfier

Så Euklides af disse er lgt.

W

Så formelen er veldefineret. (additivitet)

Indledende aut. $K_0 C \rightarrow K_0 P$.

hvis $P \in P$

Def 7.7 R ring. $H(R)$ er klasse af R -moduler \sim
 endelig resolution givet af end. proj. moduler.

$H(R)$ er delvis ordet af længde $\leq n$.

Proj. dim af R -modul $M = \ell(\text{mindste res. i } H(R))$
 projektor resolution

$\text{pd}_R(M) = 0 \iff M$ projektiv

$\text{gl}(R) = \sup \{ \text{pd}_R(M) \}$
 $M \in \text{Mod}(R)$

Ex $\text{gl}(R[x]) = \text{gl}(R) + 1 \implies$ Hilbertsynges sætning.
 for k kropp

$$H(R) \overset{\text{absolut}}{\subset} H(R) \overset{\text{absolut}}{\subset} \text{mod-} R$$

abelsch

⑧

Hausd lokal ring \Leftrightarrow hns $\dim R = \dim_{R/\mathfrak{m}} \frac{R}{\mathfrak{m}}$.

llo-lokal reg \Leftrightarrow hns $R_{\mathfrak{p}}$ reg $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } R$

Lemma (Serre-Auslander-Buchsbaum)

R reg $\Leftrightarrow \text{p.d.}(M) < \infty \quad \forall M \in \text{Mod } R$

Thm (Fund. rth. for K_0)

$\Rightarrow R$ reg \Leftrightarrow noetherian ring.

$$K_0 R \cong G_0 R \cong K_0 R[t] \cong K_0 R[t^{\pm 1}]$$

Prop 7.8.1 \exists inj. $K_0 R[t] \hookrightarrow K_0 R[t^{\pm 1}] \quad \forall$ reg R

Hausd $\text{Nil}(R)$ hat d.h. $(P, V) \quad \begin{matrix} \downarrow \text{nilpotent} \\ \text{oder null} \end{matrix}$ an $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$.

Lemma 7.8.2 $S = \{t^n\}$ multiplikative Menge in $R[t]$. Folgendes
an K_0 $\text{Nil}(R) \cong H_{\text{us}}(R[t])$, K_0 an

an alle t -torsions $R[t]$ -module $M \in H_1(R[t])$.

Bem Für $(P, V) \in \text{Nil}(R)$, la P $R[t]$ -modul

Baselstufte og transformator

(19)

$$R \xrightarrow{f} S \quad \begin{matrix} - \otimes_S & \text{deltet funktor} \\ R & R(R) \rightarrow R(S) \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$f_*: K_R \rightarrow K_S$$

• Hvis $S \in R(R)$ (mod f), så har vi $f_* K_S \rightarrow K_R$
(Glemsom funktor)

Hvis $S \in H(R) \Rightarrow$ alle ad-syn projektor S -moduler er π
i $H(R) \Rightarrow$ eksisterer glemsom funktor $R(S) \rightarrow H(R)$.

$$f_* K_S \rightarrow K_H(R) \cong K_R$$

\swarrow resolutionstheorem

Ansættes π Serres formel (7.9.3)

end. fler dim.

$$R \xrightarrow{f} S \quad \text{aub. av overherdelse inger hvor } \text{fd}_R(S) < \infty$$


Da findes beskrivelse $f^* G_R \xrightarrow{- \otimes_S} G_S$ \swarrow

$$[M] \mapsto \sum (-1)^i \text{Tor}_i^R(M, S)$$

full moduler over $M(R)$
beholdt over $M(R)$
 $\text{Tor}_i^R(M, S) = 0 \quad i > 0$

Ser's "sammen dnu spiser til firkant" Vef. i 4-resolution
 $0 \rightarrow L_1 \rightarrow \dots \rightarrow L_n \rightarrow M \rightarrow 0$

Frühjahr P(R)

Routhash 

2-mod
end-gr ✓



an F-Solutionen

Hogueside er

$$X(L \otimes_{\mathbb{R}} S)$$

$$\text{pr} \text{ def } \sum (-1)^i [L_i \otimes_R S]$$

$$= f^* \left(\sum (-1)^j f^*(L_j) \right)$$

$$= f^*(\eta)$$