Oppgaver MAT2500

Fredrik Meyer

11. oktober 2014

Oppgave 1. La $ABCD$ og $A'BC'D'$ være to parallellogrammer med felles vinkel $\angle ABC = \angle A'BC'$. Vis at linjene gjennom DD', $A'C$ og AC' er konkurrente. ■

Løsning 1. Det er essensielt sett to måter å løse denne oppgaven på. Den ene måten er algebraisk, og den andre er geometrisk. Vi tar den algebraiske først.

Vi skal studere ligningene til de forskjellige linjene, og vise at et punkt X som ligger på linjen AC' og på linjen $A'C$ også må ligge på DD'.

Vi skal bruke vektornotasjon og vektorsummering. For at ting skal bli enkelt, antar vi at $B = \vec{O}$, origo.

Vi skal bruke en notasjon: Om $\vec{V} = (v, w)$, la $V^\perp$ betegne $(w, -v)$. Dette er da en vektor ortogonal med $\vec{V}$. Legg merke til at $(\vec{V} + \vec{W})^\perp = \vec{V}^\perp + \vec{W}^\perp$.

Da er ligningen for linjen AC' gitt ved

$$(\vec{A'} - \vec{C})^\perp \cdot \vec{X} + \vec{A'} \cdot \vec{C}^\perp = 0 \tag{1}$$

Hvorfor er dette sant? Ligningen er lineær i $\vec{X}$, så det er klart at dette er linje. Dessuten ser vi at både $\vec{A'}$ og $\vec{C}$ tilfredsstiller ligningen.

Tilsvarende blir ligningen for linjen $A'C$ gitt ved

$$(\vec{C'} - \vec{A})^\perp \cdot \vec{X} + \vec{C'} \cdot \vec{A}^\perp = 0. \tag{2}$$

Legg nå merke til at $\vec{A'} \cdot \vec{A}^\perp = 0$ siden $\vec{A'}$ og $\vec{A}$ ligger på samme linje gjennom origo. Tilsvarende er $\vec{C'} \cdot \vec{C}^\perp = 0$. Om vi summerer ligning (1) og ligning (2) får ligningen

$$(\vec{D'} - \vec{D})^\perp \cdot X + \vec{A'} \cdot \vec{C}^\perp + \vec{C'} \cdot \vec{A}^\perp = 0 \tag{3}$$

Men vi har at

$$\vec{D'} \cdot D^\perp = \vec{A'} \cdot \vec{A}^\perp + \vec{A'} \cdot C^\perp + \vec{C'} \cdot \vec{A}^\perp + \vec{C'} \cdot C^\perp = \vec{A'} \cdot \vec{C}^\perp + \vec{C'} \cdot \vec{A}^\perp$$

Dermed er ligning (3) ligningen for linjen $D'D$. Vi har dermed vist at om et punkt $\vec{X}$ ligger på både AC' og $A'C$, så ligger det også på $D'D$.

Nå skal vi se på den geometriske måten å løse oppgaven på. Personlig synes jeg denne er (mye) vanskeligere.

Se på Figur 1. Betrakt trekanten $\triangle ACD$. Den har Ceva-linjer AC', CA' og DD'. Vi ønsker å bruke Cevas setning på denne trekanten og disse Ceva-linjene for å se at de er konkurrente. Med andre ord ønsker vi å vise at

$$\frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RC} = 1.$$

Strategien er å finne mange formlike trekanter. Vi ser at trekantene $\triangle PDA$ og $\triangle PCC'$ er formlike siden begge har vinkelen $\angle CPC'$ og at $\angle CC'P = \angle DAP$ (siden linjen $C'C$ er parallell med linjen AD). Dermed finner vi at

$$\frac{CP}{PD} = \frac{CC'}{AD}.$$

Vi finner også at $\triangle QAA'$ er formlik med $\triangle DQC$. Begge har vinkelen $\angle DQC = \angle AQA'$, og bunnen/toppen er kuttet ut av parallelle linjer. Dermed er:

$$\frac{DQ}{QA} = \frac{CD}{AA'}.$$

I tillegg finner vi at $\triangle ART$ er formlik med $\triangle CRD$. Dermed finner vi at

$$\frac{AR}{RC} = \frac{AT}{CD}.$$

Dette var de tre første formlikhetene. Vi har enda en. Trekantene $\triangle DAT$ og $\triangle DSD'$ er formlike. Dermed er:

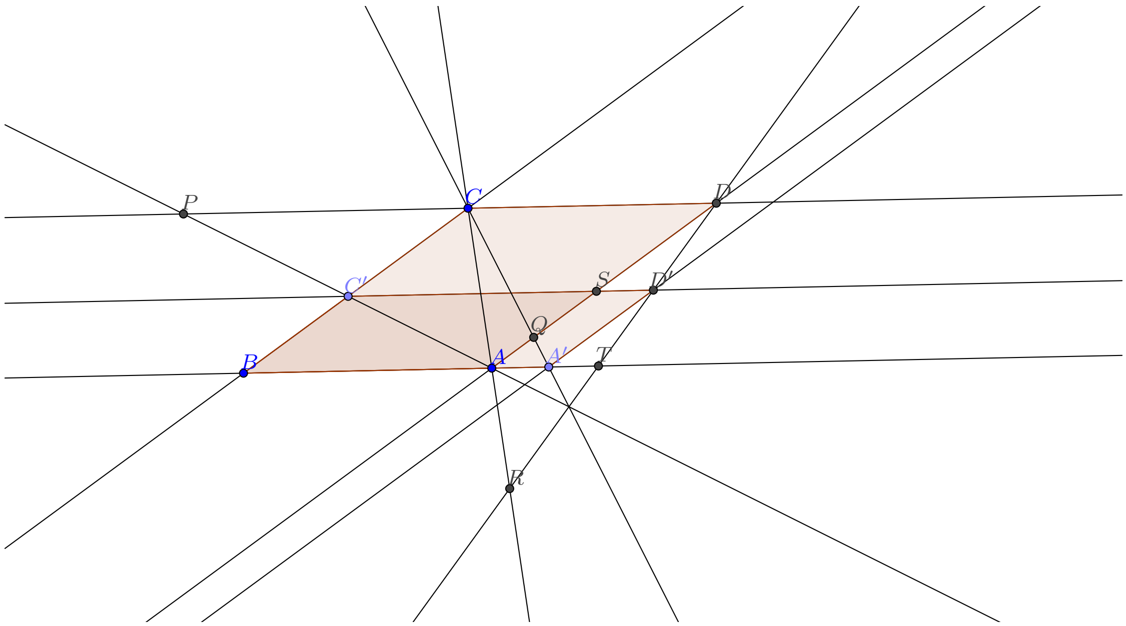
$$\frac{AT}{AD} = \frac{SD'}{SD} = \frac{AA'}{CC'}.$$

Med alle disse likhetene i hånd kan vi regne ut Ceva-forholdet:

$$\frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RC} = \frac{CC'}{AD} \cdot \frac{CD}{AA'} \cdot \frac{AT}{CD} = \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AT}{AD} = 1.$$

Første likhet brukte de tre første formlikhetene, og andre lihket brukte den siste vi fant. Dermed følger det fra Cevas setning at de tre Ceva-linjene $C'A$,CA' og DD' møtes i et punkt, og vi er ferdige. [1] ♡

[1] Sammenlignet med den algebraiske måten var dette veldig vanskelig! Vi bør være veldig takknemlige for den innsatsen Descartes gjorde med innføringen av koordinater.



Figur 1: Oppgave 1 (eller nummer 6 i heftet).

Oppgave 2. La AD, BE, CF være tre Ceva-linjer til en trekant $\triangle ABC$ som er konkurrente. Anta at linjene gjennom EF, FD og DE skjærer linjene gjennom BC, CA og AB i punktene D', E' og F'. Vis at D', E', F' er kollineære. ■

Løsning 2. Dette er en kombinasjon av Menelaos' setning Cevas setning. Se Figur 2 for illustrasjon.

Det første vi legger merke til er at F', D' og E' er Menelaos-punkter for trekanten $\triangle ABC$. Så ved Menelaos' setning trenger vi å vise at

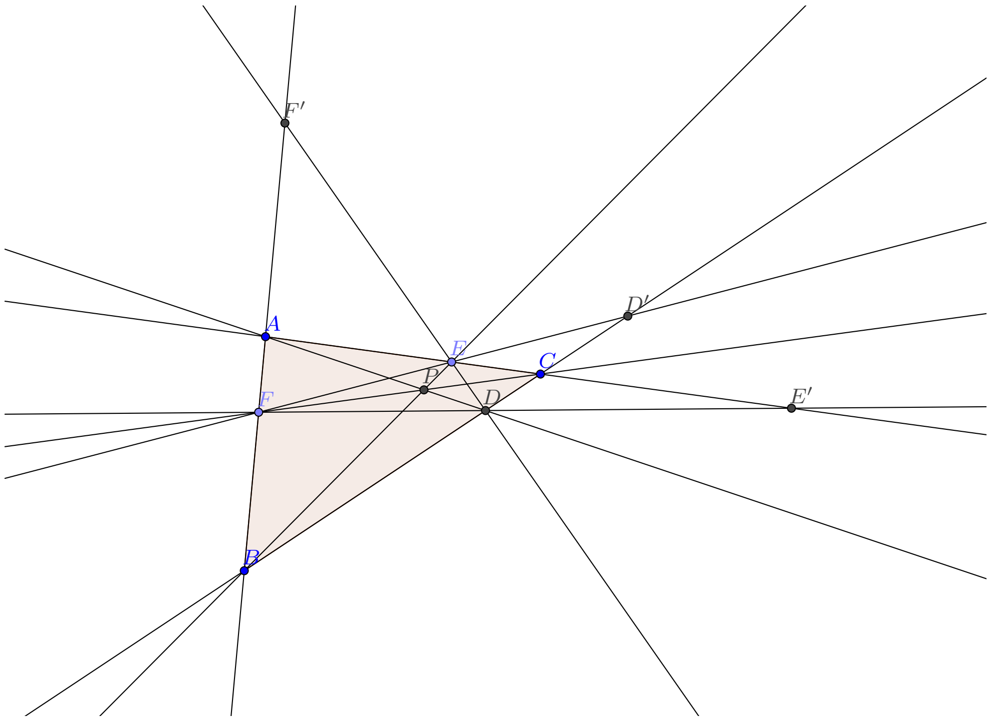
$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -1$$

Siden linjene AD, BE, CF er konkurrente, vet vi fra Ceva at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

I tillegg har vi at D, E, F' er Menelaos-punkter for $\triangle ABC$ som ligger på linje, så vi har

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -1.$$



Figur 2: Oppgave 2.

Tilsvarende har vi at D, F, E' ligger på linje og er Menelaos-punkter for $\triangle ABC$, og at F, E, D' er Menelaos-punkter for $\triangle ABC$, så vi får at

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{AE'}}{\overline{E'C}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} = -1.$$

Dette gir oss at

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} \qquad \frac{\overline{AE'}}{\overline{E'C}} = -\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}}\frac{\overline{FB}}{\overline{AF}}$$

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} = -\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}\frac{\overline{FB}}{\overline{AF}}$$

Ganger vi alle disse sammen får vi på venstresiden Menelaos-uttrykket vi ville ha, og på høyresiden får vi -1, akkurat som vi ville ha. Dermed følger det fra Menelaos at F', D' og E' ligger på linje. ♡

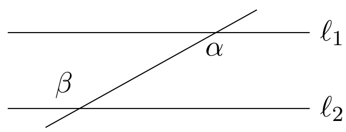
Oppgave 3. Vis at hvis tre Ceva-linjer er parallelle, så er produktrelasjonen mellom delingsforholdene i Cevas setning oppfylt. Med andre ord, vi vil at forholdet

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = 1$$

skal gjelde også når Ceva-linjene er parallelle. Merk at dette styrker Setning 4.4 til å bli en "hvis og bare hvis".[2] ■

Løsning 3. Løsningen går ut på å observere at flere trekanter er formlike, og kansellere flere brøker til slutt. Først trenger vi en hjelpesetning:

Lemma 0.1. *La ℓ_1 og ℓ_2 være to parallelle linjer. Da er vinklene α og β like (se figuren):*



Skisse av bevis: Tegn en normal fra α ned til ℓ_2. Siden ℓ_1, ℓ_2 er parallelle, får vi to 90-gradersvinkler. Bruk nå at vinkelsummen er 180° til å utlede at $\alpha = \beta$. ♡

Tilbake til løsningen av oppgaven. Følg med på Figur 3. Siden AD og FC er parallelle, og BC skjærer begge, får vi at vinklene $\angle ADB$ og $\angle FCB$ er like. I tillegg er $\angle BAD = \angle AFC$. Det følger at trekantene $\triangle ABD$ og $\triangle FBC$ er formlike.

Trekantene $\triangle ABE$ og $\triangle ACF$ er også formlike. Dette er fordi $\angle EAB = \angle CAF$ (disse er motstående vinkler). I tilegg er $\angle ABE = \angle BAD = \angle AFC$ (på grunn av parallelle linjer-lemmaet over).

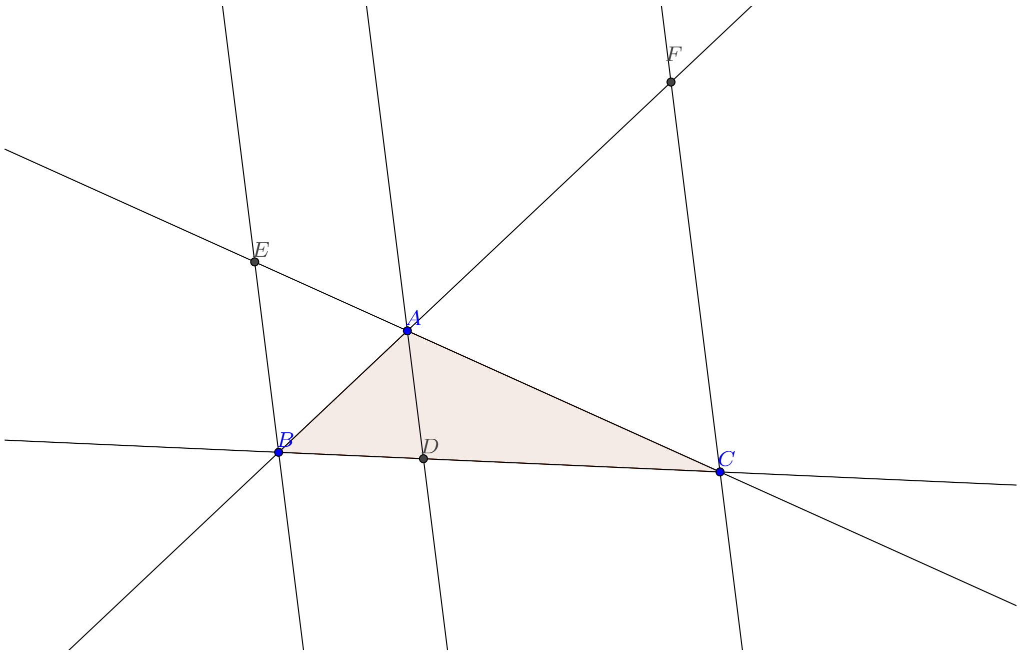
Vi får dermed følgende liste med likheter:

1. $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{EB}$.
2. $\frac{AB}{FB} = \frac{BD}{BC} = \frac{DA}{CF}$.
3. $\frac{EB}{AD} = \frac{BC}{DC} = \frac{CE}{CA}$.

Ganger vi likhet nummer 1 og 2 sammen, får vi at

$$\frac{AF}{FB} = \frac{CF \cdot DA}{EB \cdot CF} = \frac{DA}{EB}.$$

[2] Vi kan tenke oss at tre parallelle linjer egentlig er konkurrente, men møtes i det uendelig fjerne.



Figur 3: Oppgave 3.

Tilsvarende får vi at

$$\frac{BD}{DC} = \frac{EB}{CF} \qquad \frac{CE}{EA} = \frac{CF}{AD}.$$

Ganger vi alle venstresidene sammen får vi forholdet vi var interessert i, mens ganger vi alle høyresidene sammen, får vi 1.

Vi har ikke brukt fortegnsmål her. Men observer at for punktene D, E, F vil alltid 2 ligge utenfor trekanten, og én på en av sidene (for å overbevise deg om dette: forestill deg at du vrir på linja gjennom A. Med en gang D forlater linjestykket BC vil E eller F komme på innsiden av trekanten). Dermed er fortegnet alltid positivt.

Og vi er ferdige. ♡

Oppgave 4. Bruk Cevas setning til å vise påstandene under:

a) Høydene i en trekant er konkurrente.

b) Medianene i en trekant er konkurrente.

c) Vinklenes halveringslinjer i en trekant er konkurrente.

■

Løsning 4. a) Vi gjør først a) og går rett på sak. Følg med i Figur 4. Trekantene $\triangle BCF$ og $\triangle BDA$ er formlike, siden begge har vinkelen $\angle DBA$ og har en 90-gradersvinkel. Dermed får vi at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BF} = \frac{AD}{CF}.$$

Tilsvarende får vi at trekantene $\triangle CAD$ og $\triangle BCE$ er formlike. Og at trekanten $\triangle ABE$ er formlik med trekanten $\triangle ACF$. Dermed får vi:

$$\frac{CB}{CA} = \frac{BE}{AD} = \frac{EC}{DC}$$
$$\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BE} = \frac{FA}{EA}.$$

Ganger vi alle disse sammen uttrykkene sammen får vi

$$1 = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CB}{CA} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{BD}{BF} \cdot \frac{EC}{DC} \cdot \frac{FA}{EA}.$$

Men uttrykket til høyre er Ceva-uttrykket vi ville at skulle bli lik én, bare litt omstokket. Så vi konkluderer med at høydene er konkurrente.

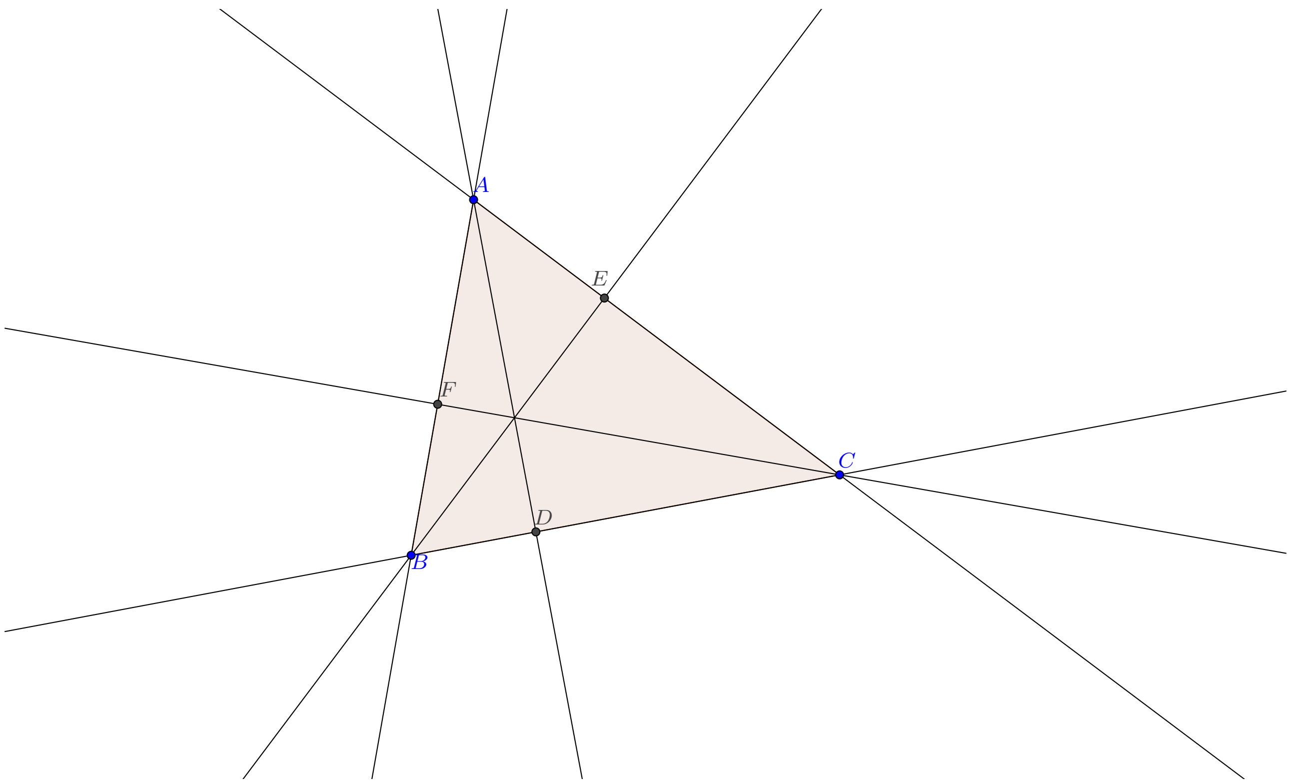
b) er triviell: medianene er linjene som fra hvert hjørne deler den motstående siden nøyaktig i to. Dermed er, per definisjon, $AF = FB$,$BD = DC$, og $CE = EA$, så alle leddene i Ceva-ligningen er allerede 1. Så $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

c) Dette følger fra setningen om halveringslinjer sammen med Cevas setning. Husk at setningen om halveringslinjer sier at en linje AD halverer vinkelen i hjørnet C i en trekant $\triangle ABC$ hvis og bare hvis linjestykket AB blir delt i forholdet $\frac{AC}{CB}$ av linjen AD. Men dette er det samme som å si at

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

med fortegnsmål. Men nå, akkurat som mange ganger tidligere, ser vi at dette impliserer at alle leddene Ceva-formelen kansellerer, og vi får 1.

♡



Figur 4: Oppgave 4.