27/1-2015

①

Lemma Alle projektive R-moduler er flate.

Pf M proj $\Rightarrow$ direkte summand av fri modul.

$$M = \bigoplus M_i \text{ flat } \Leftrightarrow M_i \text{ flat } \forall i$$

og frie moduler er flate. ∎

Eks. 2.1.1 (2) $R = M_n(F)$ F, kropp / divisjonsring

La R-modul $C_i < R$ hvor entriene er null borsett fra i søyle i.

$C_i \simeq C_j$ som R-moduler. Siden $R \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} C_i$ er hvert C_i projektiv R-modul.

Vi har $\dim_F C_i = n$, en fri R-modul har F-dimensjon et multippel av n^2 (så C_i ikke er fri, men projektiv).

Eks 1 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \supset I = (3, 2+\sqrt{-5})$

$$6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) = 2 \cdot 3$$

så R har ikke entydig faktorisering.

I er en projektiv R-modul: definerer

$$\theta : R^2 \to I$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 3x + (2+\sqrt{-5})y \in I$$

Splitting $\omega : I \to R^2$ $z \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{-5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} z$ og $\theta\omega = id_I$.

Men I er ikke et hovedideal $\Rightarrow$ I ikke fri. ②

Eks Et ikke projektivt ideal!

$R = F[X,Y] \supset I \hat{=} (X,Y)$, heller ikke et hovedideal.

Har presentasjon

$$R^2 \xrightarrow[\theta]{(X\ Y)} I \to 0$$

Nok å vise at θ ikke har en splitting. Anta $\omega: I \to R^2$ er en splitting. $\omega(X) = (a,b)$

$$\Rightarrow X = \theta\omega(X) = \theta(a,b) = aX + bY \quad a, b \in R$$

Skriv $a = a_0(X) + a_1(X)Y + \dots + a_m(X)Y^m$ som el. i $k[X][Y]$.

Vi får

$$a = 1 + \sum_{i=1}^{m} a_i(X)Y \qquad b = -\sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1}(X)\,XY^i$$

$$\omega(Y) = (c,d) \Rightarrow c = \sum_{j=1}^{n} c_j(X)Y^j$$

$$d = 1 - c_1(X)X - \sum_{j=1}^{n-1} c_{j+1}(X)XY^j.$$

Regner ut $\omega(XY)$ på to måter.

$$\Rightarrow (Xc, Xd) = (aY, bY)$$

$$\Rightarrow bY = Xd \Rightarrow X \in (Y, X^2).$$ ▨

Idempotenter

$R = \mathbb{Z}/6$

$1 = 3 + 4$

$e \in R$ <u>idempotent</u> hvis $e^2 = e$.

Har alltid $R = \underbrace{eR \oplus (1-e)R}_{\text{projektive } R\text{-moduler}}$

Motsatt, om $R = P \oplus Q$, så $1 = e + (1-e)$.

<u>Også:</u> $\left\{\begin{matrix} e \in M_n(R) \\ \text{idempotent} \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{end. gen.} \\ \text{proj. } R\text{-moduler} \end{matrix}\right\}$

$\wedge$

<u>Serre's formodning</u> Alle projektive $k[x_1, \dots, x_n]$-moduler er frie.

[Bevist av Quillen, Suslin '76]

<u>Lemma</u> R PID $\Rightarrow$ alle projektive ~~R~~-moduler frie.

<u>Bevis</u> (for end. gen. proj. moduler)

$$M \overset{\oplus}{\hookrightarrow} R^n \quad \text{direkte summand}$$

Viser v/ induksjon at $M \simeq R^k$, $k \leq n$.

$$\pi : R^n \to R \supset \pi(M) \leftarrow R\text{-undermodul}$$

(projeksjon på siste koordinat)

Hvis $\pi(M) = 0$, ~~ikke~~ så $M \overset{\oplus}{\hookrightarrow} R^{n-1}$, ferdig v/ induksjon.

Ellers er $\pi(M) \simeq R$ (fordi R PID) $\overset{\text{induksjon}}{\Longrightarrow}$ $M \simeq \ker \pi|_M \oplus R$

og $\ker \pi \simeq R^{n-1}$. $\Rightarrow$ $\ker \pi/_M \simeq R^{k'}$ hvor $k' \leq n-1$. (4)

$$\Rightarrow \quad M \simeq R^{k'+1} \simeq R^k, \quad k \leq n. \quad \blacksquare$$

<u>Def</u> (lokal ring) En ring R er lokal hvis R har et unikt (2-sidig) ideal $\underline{m}$ + alle elementene i $R \setminus \underline{m}$ er enheter.

<u>Lemma</u> R lokal $\Rightarrow$ alle end. gr. proj. R-moduler er frie.

$$\left(P \simeq R^{\dim_{R/\underline{m}} (P/\underline{m}P)} \right)$$

(annet bevis enn i boken)

<u>Pf</u> (først et annet lemma)

<u>Lemma</u> Om $M \xrightarrow{f} N$ er en R-modul-avbildning (R lokal) & endeligskapte.

f er surjektiv $\Leftrightarrow$ $1 \otimes f : R/\underline{m} \otimes_R M \to R/\underline{m} \otimes_R N$ surjektiv.

<u>Bevis</u> $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} C \to 0$

$$C = 0 \Leftrightarrow R/\underline{m} \otimes_R C = 0 \qquad \boxed{???}$$

Nakayama's lemma $\Rightarrow$ $J(R) = \underline{m}$. $\blacksquare$

$\to$ La P være end. gr. proj. (vil vise P fri). Har surjeksjon $R^n \xrightarrow{f} P \to 0$

$e_i \mapsto x_i$ s.a. $\{x_i\}$ er minimal genererende mengde.

5

La K være kjernen:

$$0 \to K \to R^n \xrightarrow{f} P \to 0$$
$$e_i \longmapsto x_i$$

Har splitting $0 \to K \to R^n \xrightarrow[\pi]{} P \to 0$

$\Downarrow$

$$0 \to R/m \otimes_R K \to R/m \otimes_R R^n \xrightarrow{1\otimes\pi} R/m \otimes_R P \to 0$$

Hvis en ekte delmengde av $\{1\otimes x_1, \dots, 1\otimes x_n\}$ genererer $R/m \otimes_R P$, så ville en ekte delmengde av $\{x_1, \dots, x_n\}$ også generere P, fra lemmaet.

Derfor er $\{1\otimes x_1, \dots, 1\otimes x_n\}$ basis for $R/m \otimes_R P$.

$\Rightarrow$ $1\otimes\pi$ er isomorfi, så $R/m \otimes_R K = 0$. $\Rightarrow$ $K = 0$ $\blacksquare$

Nakayama!

(2.2) Kaplansky: også uendeliggenererte proj. moduler over lokale ringer er frie.

Korollar $p \in \operatorname{Spec} R$. ($R$ kommutativ). P endelig gen. projektiv R-modul. Da er $P_p \simeq R_p^n$ for $n \geq 0$. Videre eksisterer $s \in R \setminus p$ s.a. $P[\frac{1}{s}] \simeq (R[\frac{1}{s}])^n$

Spec R er alltid kvasikompakt. De åpne mengdene i Zariskitopologien er $\operatorname{Spec}\left(R\left[\frac{1}{s}\right]\right) = D(s)$

$$\begin{gathered}\operatorname{Spec}\left(R\left[\tfrac{1}{s}\right]\right) = D(s) \\ \| \\ \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid s \notin \mathfrak{p}\}\end{gathered}$$

La M være end.gen. R-modul i $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Vi <u>definerer</u>

$$\operatorname{rang}_{\mathfrak{p}} M = \dim_{k(\mathfrak{p})} M \otimes_R k(\mathfrak{p})$$

Hvis P er end. gen. proj. R-modul

$$rk(P) : \operatorname{Spec} R \longrightarrow \mathbb{N}.$$

diskret topologi

<u>kontinuerlig funksjon</u>

Så om Spec R er sammenhengende $\Rightarrow$ $rk(P)$ konstant.

$\Rightarrow$ $e = 0, 1$ er de eneste idempotentene til R.

<u>Eks</u> heltallsområder og lokale ringer.

<u>Lemma</u> Hvis P har konstant rang $\Rightarrow$ P end.-generert. (Oppg 2.13 R.M)

<u>„Bevis"</u> (a) $rk(P) = 1$. Duale $P^\vee = \operatorname{Hom}_R(P, R)$

$ev : P^\vee \otimes_R P \longrightarrow R$, Gildet ~~av~~ ev, φ_i kalles <u>sporet</u> I_P

$P_{\mathfrak{p}}$ fri, generert av x $\forall\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

7

$$ev\left(\check{x}_{\mathfrak{p}} \otimes x_{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{(per def)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p} \quad \text{(spiller)}$$

Skriv $1 = \sum f_i(x_i)$, for hver $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, vil en eller annen x_i generere $P_{\mathfrak{p}}$. $\Rightarrow$ $\{x_i\}$ vil da generere P.

(B) Hva om $rk(P) = r$ konstant? Da vil $\Lambda^r P$ ha konstant rang 1. Fra (a) er den endeliggenerert.

$$\left(\begin{array}{l} \sum a_i y_{1i} \wedge \dots \wedge y_{ri} \\ \Rightarrow \quad y_{ij} \text{ vil da generere } P \end{array}\right) \quad \text{(Spill!)}$$

<u>Lemma 2.4</u> R kommutativ. En R-modul M er lokalt fri hvis $\forall\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $\exists\ s \in R \setminus \mathfrak{p}$ s.a. $M[\frac{1}{s}]$ er en fri R-modul.

Følgende <u>er da ekvivalent</u>:

① M er end.gen proj R-modul

② M lokalt fri av endelig rang. (i alle primidealer)

③ M endelig presentert R-modul og $\forall\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, så er $M_{\mathfrak{p}}$ fri $R_{\mathfrak{p}}$-modul.

<u>Bevis</u> (oppgave) (Se på beviset)

Neste er „Milnor-patching".

$\boxed{\text{Eks } 2.6}$