Fortsetter m/ kryssforhold

Kryssforholdet $(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$ AB, CD på linje

Husk

De er harmonisk konjugerte om $(AB, CD) = -1$.

Sist gang

To punktpar (A,B), (C,D) på linje er harm. konj. $\Leftrightarrow$ $\exists$ 4 punkter P, Q, R, S

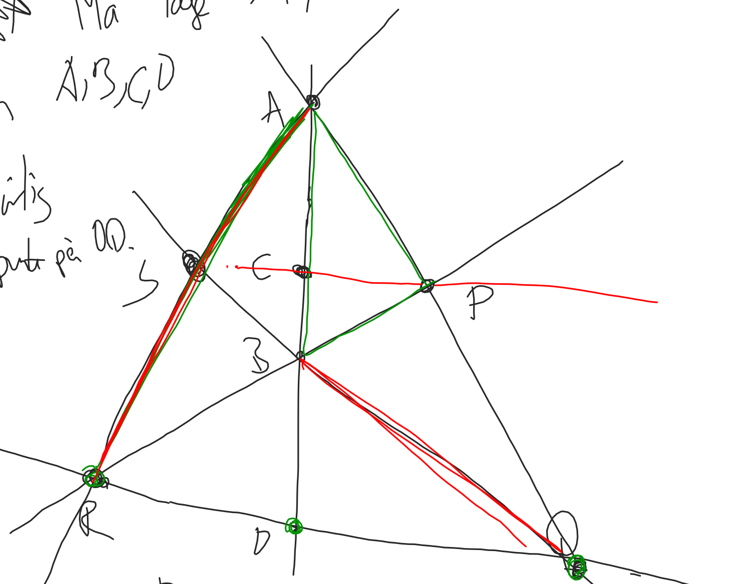
$A = PQ \cap RS$ $B = PR \cap QS$ $C = PS \cap AB$

$D = QR \cap AB$

Sist gang $\Leftarrow$ stemmer

$\Rightarrow$ Må lage P, Q, R, S s.a. stemmer

1. Tegn A, B, C, D
2. Tegn AQ vilkårlig
3. La R vilkårlig punkt på QD.
4. $P = AQ \cap RB$
5. $S = QB \cap AR$



$\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BR}{RP} = -1$ $\frac{BR}{RP} \frac{PQ}{QA} \cdot \frac{AC}{CB} = ?$

Vet at $\frac{PQ}{QA} \cdot \frac{BR}{RP} = -\frac{DB}{AD}$ sette inn $\Rightarrow$

$-1 = -\frac{DB}{AD} \cdot \frac{AC}{CB} = ?$

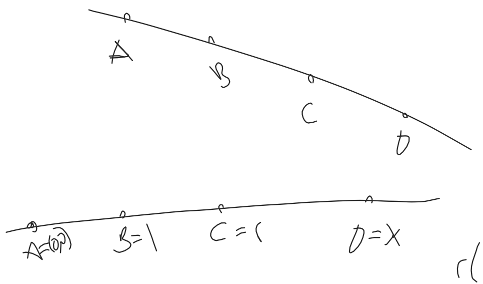
pga harm. konj.

Så $? = 1$. $\Rightarrow$ Ceva-linjene møtes i S. Så PCS ligger på linje $\Leftrightarrow$ $C = PS \cap AB$ $\square$

nov 13-10:11

Gitt tre punkter A, B, C så finnes ! unik D s.a. $(AB,CD) = -1$.

$$\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BD}{BC} = -1$$



$$\frac{r}{x}\cdot\frac{x-1}{r-1} = -1$$

$$r(x-1) = (1-r)x$$

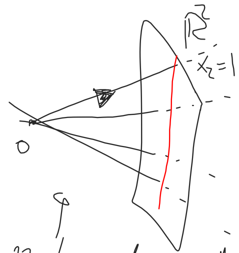
lineær! kan alltid løses!

C og D deler AB i samme forhold, men m/ motsatt fortegn

Definere kryssf. for $P^2_{\mathbb{R}}$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{inkl.}} P^2$$

$$(x,y) \longmapsto (x:y:1)$$



gir 1-1 korrespondanse mellom $\mathbb{R}^2$ og linjene ikke parallelle m/ $x_2=1$.

Om A, B, C, D ligger på en projektiv linje (plan gjennom origo), så svarer disse til 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ i samme plan.
(anta $A \neq B$)

Da er A, B basis for planet de ligger i.
Så kan skrive $C = pA + qB$
$D = rA + sB$.

Da definerer vi $(AB,CD) = \dfrac{qr}{ps}$

Veldefinert! for ... Om vi velger $C' = \lambda C$ og $D' = \lambda'' D$ i stedet
$(AB,CD) = \dfrac{\lambda\lambda' qr}{\lambda\lambda' ps} = \dfrac{qr}{ps}$ ✓ (samme gr om $A,B = \lambda A, \lambda'' B$)

Vi tillater $p, s = 0$ og dermed $(AB,CD) = \infty$. (kan tenke på (AB,CD) som punkt i $P^1_{\mathbb{R}}$) ∞

Observ. $C = pA + qB$
$D = rA + sB$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \text{så} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{ps-qr}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

fjerne konstanten
$A = sC - qD$
$B = -rC + pD$
så $(CD,AB) = \dfrac{+qr}{sp} = (AB,CD)$:)

$(AB,CD) = c$ så $(AC,BD) = 1-c$
$(AB,DC) = 1/c$ ...

nov 13-10:32

Nå er det lett å se

Def. stemmer overens m/ affine definisjon

formulas

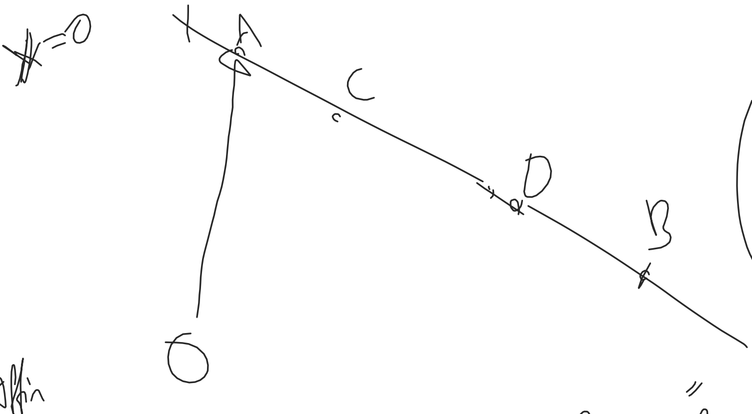
~~formulae~~

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BD}{BC}$$

to defs

$$C = pA + qB$$
$$D = rA + sB$$

$$\frac{qr}{ps}$$



$$C = A + k(B-A)$$
$$D = A + l(B-A)$$

$$C = (1-k)A + kB$$
$$D = (1-l)A + lB$$

$$\frac{k(1-l)}{(1-k)l}$$

Affin
Gaml def

$AC = k$ osv.

$AD = l$

$$\frac{k(1-l)}{(1-k)l}$$

" Proj. def "

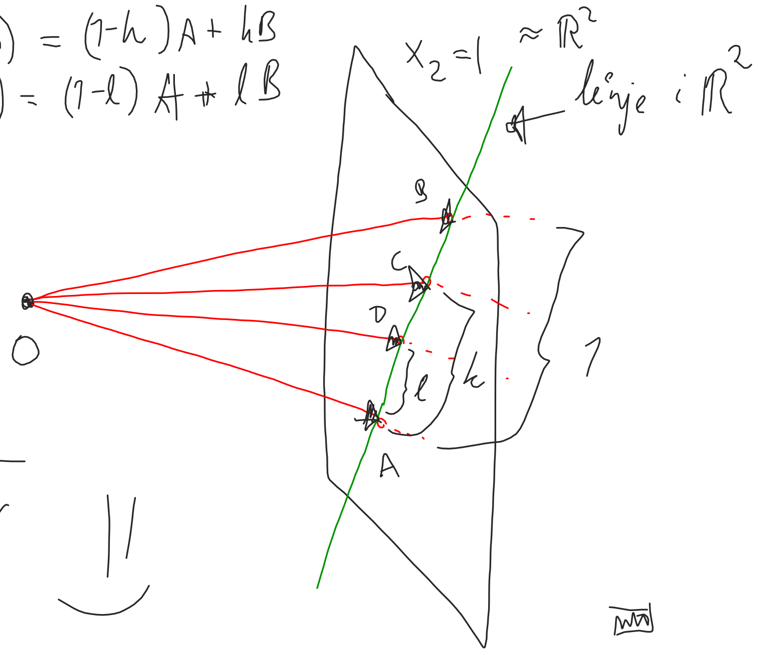
får samme ting...

Får $C = A + k(B-A) = (1-k)A + kB$

$D = A + l(B-A) = (1-l)A + lB$

Så gammel def

$$\frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{k}{l} \cdot \frac{1-l}{1-k}$$



Ny def $\dfrac{(1-l)k}{(1-k)l}$

nov 13-11:10

Klart at om $T: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ er en proj. transformasjon,
så er $(AB, CD) = (T(A)T(B), T(C)T(D))$

Skriv $C = pA + qB$
$D = rA + sB$

proj. transformasjon $\Longleftrightarrow$ 3×3-matriser T

$$\Rightarrow \begin{array}{l} T(C) = pT(A) + qT(B) \\ T(D) = rT(A) + sT(B) \end{array}$$ så konkl. følger. $\boxtimes$

This: A, B, C er på linje så er funksjonen $\overline{AB} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(X) = (AB, CX)$

injektiv.

Med andre ord: Om A, B, C, X, Y ligger på linje og $(AB, CX) = (AB, CY)$, så $X = Y$.

$C = pA + qB$ $\quad$ $X = r_1 A + r_2 B$ $\quad$ $Y = s_1 A + s_2 B$.

der C, X, Y er representanter for de projektive punktene A, B, C, X, Y.

Da sier antakelsen at $\dfrac{q}{p}\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{q}{p}\dfrac{s_1}{s_2} \iff r_1 s_2 = s_1 r_2$.

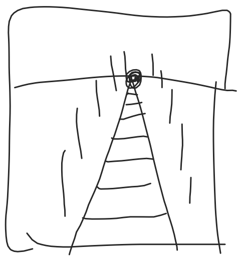
Da blir $Y = s_1 A + s_2 B = \frac{1}{r_1}(r_1 s_1 A + r_1 s_2 B)$

$= \frac{1}{r_1}(r_1 s_1 A + s_1 r_2 B) = \frac{s_1}{r_1}(r_1 A + r_2 B) = \frac{s_1}{r_1} X$

men disse to repr. samme punkt i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$! Så $X = Y$ i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

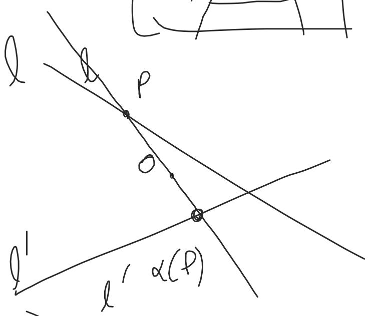
nov 13-11:21

Perspektivtegning



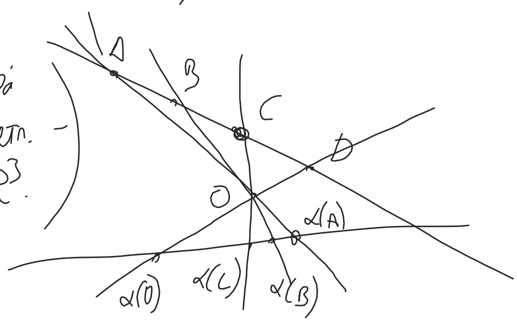
En perspektivitet er en avbildning mellom to linjer bestemt av et punkt O.

$$\alpha : \ell \longrightarrow \ell'$$
$$P \longmapsto \overline{OP} \cap \ell'$$



Påstand Om $A, B, C, D \in \ell$, så
$$(AB, CD) = (\alpha(A)\alpha(B), \alpha(C)\alpha(D))$$

$C = pA + qB$
$D = sA + rB$ (Tenk på de som vektorer i $\mathbb{R}^3$.)



Kan skrive $\alpha(A) = \lambda_1 A + \lambda_2 O$

Kan bytte ut A m/ $\lambda_1 A$. Så kan anta
$$\alpha(A) = A + \lambda_2 O.$$
Bytt ut også O m/ $\lambda_2 O$.

Så kan anta $\alpha(A) = A + O$.
$\alpha(B) = B + \beta O$

$$p\alpha(A) + q\alpha(B) = pA + pO + qB + q\beta O$$
$$= C + (p + q\beta)O$$

Dette er $\alpha(C)$! 1. Ligger på $\overline{\alpha(A)\alpha(B)}$ og $\overline{CO}$. Så repr. punktet
$$\overline{\alpha(A)\alpha(B)} \cap \overline{CO} = \ell' \cap \overline{OC} \overset{\text{def}}{=} \alpha(C). \checkmark$$

På samme måte er $\alpha(D) = D + (s+r)O = s\alpha(A) + r\alpha(B)$.

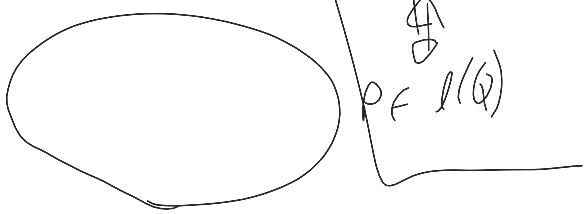
Så! Samme koordinater (fremdeles p, q, s, r) så kryssforholdet blir det samme!

Til slutt: Påstander uten bevis !!

Gitt kjeglesnitt (ellipse)

Da har hvert punkt P en polar linje $\ell(P)$

$Q \in \ell(P) \Leftrightarrow P \in \ell(Q)$



I tilfellet ellipse er

$\ell(P)$ gitt v/ $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$ der $P = (x_0, y_0)$.

Gitt P og et kjeglesnitt C. La ℓ være linje som skjærer C i A, B.

La $Q = \ell(P) \cap AB$.

Da er $(PQ, AB) = -1$.

(harm. konjugerte)