Symmetriske monoidale kategorier

Def En kategori S m/

$$\square : S \times S \to S \qquad e \in S$$

4 naturlige isomorfier:

- $s \square t \simeq t \square s$
- $s \square (t \square u) \overset{\alpha}{\simeq} (s \square t) \square u$
- $s \square e \simeq s$
- $e \square s \simeq s$

erensbetingelse

$$\begin{tikzcd}
s \square (t \square (u \square v)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & (s \square t) \square (u \square v) \arrow[r, "\simeq"] & ((s \square t) \square u) \square v \arrow[d, "\alpha \;(\mathrm{id}\ \text{på}\ v)"] \\
s \square ((t \square u) \square v) \arrow[rr, "\simeq"] & & (s \square (t \square u)) \square v
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
s \square (e \square t) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\simeq"'] & (s \square e) \square t \arrow[d] \\
s \square t \arrow[r, "\mathrm{id}"] & s \square t
\end{tikzcd}$$

Eks • Kategori m/ endelige koprodukter.

• —//— produkter.

Eks $\mathbb{P}(R)$

$K_0^{\square}(S)$ definert v/ gruppekomplettering.

Generatorer $[s]$ for $s \in S$. Og $[s \square t] = [s] + [t]$.

$\square = \otimes_R$. Da er $K_0^{\square}(S) = \mathrm{Pic}\, R$.

$S = \mathrm{Sets}_{FIN}$. Kategorien av endelige mengder m/ $\square = \sqcup$.

Da er $\mathrm{iso}(\mathrm{Sets}_{FIN}) = \mathbb{N}$.

$\underline{n} = \{1, \dots, n\}$. $\Rightarrow K_0^{\sqcup}(\mathrm{Sets}_{FIN}) \cong \mathbb{Z}$.

$\underline{0} = \emptyset$.

Men merk $K_0^{\sqcap}(\mathrm{Sets}_{FIN}) = 0$!

siden $\emptyset \times \underline{n} = \emptyset$

$\quad = \{(p,q) \mid p \in \emptyset, n \in \underline{n}\}$

$\quad = \emptyset$

Definisjon $T \overset{full}{\subset} S$ lukket $e \in T$ og $T \square T \to T \Rightarrow T$ symmetrisk monoidal

...orr $T \subset S$ kofinal,

1. $K_0^{\oplus} T \subset K_0^{\oplus} S$ undergr.
2. $\forall$ elt. i $K_0^{\oplus} S$ er på formen $[s]-[t]$ for $s \in S$ og $t \in T$.
3. Hvis $[s]=[s']$ i $K_0^{\oplus} S$, så $\exists$ $t \in T$ s.a.

$$s \oplus t \simeq s' \oplus t.$$

$$\mathrm{Free}(R) \overset{\text{kofinal}}{\subset} \mathbb{P}(R).$$

$$K_0^{\oplus}(\mathrm{Free}(R)) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{om } R \text{ har IBP.}$$

Fin.-dim. assosiativ F-algebra A. (kropp) A er sentral simpel F-algebra hvis $\mathrm{center}(A) = F$ og A ~~simpel~~ har ingen ikke-trivielle tosidige idealer.

Si $A \sim B$ hvis $\exists$ m, n slik at $A \otimes M_n(F) \simeq B \otimes_F M_m(F)$.

...kvivalensrelasjon.

Får symm. monoidal kategori $\mathrm{Az}(F)$ m/ kofinal underkategori gitt av matrisealgebraer.

$$K_0^{\otimes}(\text{matrise-alg}) = \mathbb{Q}^*_{>0} \quad \text{m/ Eks 5.4.7.}$$

$$\mathrm{Br}(F) = K_0(\mathrm{Az}(F)) / \mathbb{Q}^*_{>0}.$$

4

R kommutativ ring. En R-algebra A kalles en Azumaya-algebra hvis $\exists$ R-algebra B m/

$$A \otimes_R B \cong M_n(R).$$

$\rightsquigarrow$ kategori av Azumaya-algebraer symmetrisk monoidal under $\otimes_R$.

[illegible]nerer $Br(R)$ = gr av $[A]$ Azumaya-alg.

m/ $[A \otimes_R B] = [A] + [B]$

$[End_R(P)] = 0$ $\forall$ [illegible] projektive P

Brauer

$\otimes$

[illegible]B) symmetrisk indreprodukt over kropp F

$B: V \times V \longrightarrow F$
- ikke-degen.
- symmetrisk, bilineær

$\rightsquigarrow$ kategori $\cancel{SBil(F)}$. SBil(F) m/ $\oplus = \oplus$.

[illegible] planet H m/ matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(trapp)