

Optimización Matemática

Gustavo A. Bula

Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial

7 de febrero de 2024

1 Optimización Matemática

La optimización matemática es el proceso de encontrar los mejores valores para una función dada, sujeto a una serie de restricciones. Las restricciones pueden ser de naturaleza física, financiera o de otro tipo. El objetivo de la optimización matemática es encontrar los valores de las variables que hacen que la función sea lo más grande o lo más pequeña posible, dentro de las restricciones.

- Se encuentran disponibles diferentes alternativas de decisión.
- Las restricciones adicionales limitan el número de alternativas de decisión disponibles.
- Cada alternativa de decisión puede tener un efecto diferente en los criterios de evaluación.
- Una función de evaluación definida sobre las alternativas de decisión describe el efecto de las diferentes alternativas de decisión.

La optimización matemática se puede clasificar en dos categorías principales:

Optimización discreta:

este tipo de optimización se ocupa de problemas en los que las variables solo pueden tomar valores discretos, como enteros o números binarios.

Optimización continua:

este tipo de optimización se ocupa de problemas en los que las variables pueden tomar valores continuos, como números reales.

Optimización sin restricciones versus optimización restringida

Otra distinción importante es entre problemas en los que no hay restricciones sobre las variables. (**Optimización sin restricciones**) y problemas en que existen restricciones en las variables (**Optimización sin restricciones**).

Los problemas de optimización restringidos se pueden clasificar aún más según la naturaleza de las restricciones (por ejemplo, lineal, no lineal, convexo) y la suavidad de las funciones (por ejemplo, diferenciables o no diferenciables).

Ninguno, Uno o Muchos Objetivos

- Los problemas de viabilidad son problemas en los que el objetivo es encontrar valores para las variables que satisfagan las restricciones de un modelo sin **ningún objetivo particular para optimizar**. Los problemas de complementariedad son omnipresentes en la ingeniería y la economía. El objetivo es encontrar una solución que satisface las condiciones de complementariedad.
- **Problemas de optimización multiobjetivo** surgen en muchos campos, como ingeniería, economía y logística, cuando es necesario tomar decisiones óptimas en presencia de compensaciones entre dos o más conflictos objetivos.

Optimización determinista versus optimización estocástica

En la optimización determinista, se supone que los datos para el problema dado se conocen con precisión. Sin embargo, para muchos En problemas reales, los datos no se pueden conocer con precisión por diversas razones. La primera razón se debe a una simple error de medición. La segunda razón, y más fundamental, es que algunos datos representan información sobre el futuro (p. ej., la demanda del producto o el precio para un período futuro) y simplemente no se puede conocer con certeza.

Optimización bajo incertidumbre u optimización estocástica

la incertidumbre se incorpora al modelo. Se pueden utilizar **técnicas de optimización robustas** cuando los parámetros se conocen sólo dentro de ciertos límites; el objetivo es encontrar una solución que sea factible para todos los datos y óptima en algún sentido. **Los modelos de programación estocástica** aprovechan el hecho de que las distribuciones de probabilidad que gobiernan los datos son conocidas o pueden estimarse. El objetivo es encontrar alguna política que sea factible para todas (o casi todas) las posibles instancias de datos y optimice el rendimiento esperado del modelo.

Algunos ejemplos de problemas de optimización matemática incluyen:

- Encontrar el camino más corto entre dos puntos.
- Encontrar la manera más eficiente de producir un producto.
- Encontrar la mejor manera de invertir su dinero.
- Encontrar la manera más rápida de resolver un problema.

Problema de optimización matemática

Es un problema en el que se desea encontrar los valores de las variables que hacen que una función objetivo sea lo más grande o lo más pequeña posible, sujetos a una serie de restricciones.

minimizar $z = f(x)$,

sujeto a

$$g_i(x) \geq 0 \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

$$h_i(x) = 0 \quad i \in \{1, \dots, p\},$$

$$x \in W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n, \quad W_i \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{B}\}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

donde x es un vector de n variables de decisión x_1, \dots, x_n , $f(x)$ es la función objetivo que se utiliza para evaluar diferentes soluciones, y $g(x)$ y $h(x)$ son restricciones de desigualdad e igualdad sobre las variables x_i . \mathbb{B} indica el conjunto de valores binarios $\{0, 1\}$.

Consideremos el siguiente problema de optimización matemática:

$$\begin{array}{ll}\text{Maximizar} & f(x) = x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 10 \\ & g_2(x) = x_1 - x_2 \leq 0 \\ & h_1(x) = x_1 \geq 0 \\ & h_2(x) = x_2 \geq 0\end{array}$$

En este problema, la función objetivo es maximizar la suma de x_1 y x_2 . Las restricciones son que $x_1 + x_2$ no debe exceder 10, $x_1 - x_2$ debe ser no negativo, y x_1 y x_2 deben ser no negativos.

El objetivo de este problema es encontrar los valores de x_1 y x_2 que hagan que la función objetivo sea lo más grande posible, sujetos a las restricciones.

A menudo, el proceso de solución se divide en diferentes pasos que se ejecutan uno tras otro. Los pasos comúnmente utilizados son reconocer y definir problemas, construir y resolver modelos y evaluar e implementar soluciones.

- Reconociendo el problema,
- que define el problema,
- construir un modelo para el problema,
- resolviendo el modelo,
- validar las soluciones obtenidas, e
- implementar una solución.

Modelar es el proceso de identificar y expresar en términos matemáticos el objetivo, las variables y las restricciones del problema.

Las variables de decisión o las incógnitas

son los componentes del sistema para los cuales queremos encontrar valores. En la fabricación, las variables pueden ser la cantidad de cada recurso consumido o el tiempo dedicado a cada actividad, mientras que en el ajuste de datos, las variables serían los parámetros del modelo.

El uso de variables de decisión permite modelar las diferentes alternativas que se pueden elegir.

Las Restricciones

son las funciones que describen las relaciones entre las variables y que definen los valores permitidos para las variables. En la fabricación, la cantidad de un recurso consumido no puede exceder la cantidad disponible.

La función objetivo

asigna un valor objetivo a cada posible alternativa de decisión y mide la calidad de las diferentes alternativas, es una medida cuantitativa del rendimiento del sistema que queremos minimizar o maximizar. En la fabricación, es posible que deseemos maximizar las ganancias o minimizar el costo de producción, mientras que al ajustar datos experimentales a un modelo, es posible que deseemos minimizar la desviación total de los datos observados de los datos predichos.

Después de determinar a qué categoría de optimización pertenece su modelo, se pueden seleccionar los algoritmos de solución.

Un algoritmo

Es un procedimiento (un conjunto finito de instrucciones bien definidas) para realizar alguna tarea. Un algoritmo comienza en un estado inicial y termina en un estado final definido.

- Métodos exactos
- Métodos de aproximación (Métodos iterativos)
- Heurísticas y metaheurísticas.

- Algoritmo simplex diseñado para programación lineal.
- Extensiones del algoritmo simplex, diseñadas para programación cuadrática y programación lineal-fraccional.
- Optimización en redes
- Programación dinámica
- Algoritmos combinatorios.

Métodos iterativos utilizados para resolver problemas de programación no lineal. Estos métodos difieren según si evalúan hessianas, gradientes o sólo valores de funciones.

Una heurística es cualquier algoritmo que no garantiza (matemáticamente) que encontrará la solución, pero que, sin embargo, es útil en determinadas situaciones prácticas. Hay tres tipos diferentes de heurísticas:

- Heurística constructiva.
- Heurísticas de búsqueda local.
- Metaheurísticas o heurísticas de búsqueda global.

Una posible alternativa de decisión, que está representada por diferentes valores para las variables de decisión, se denomina solución de un problema.