Programación Lineal: Dualidad

Optimización.

Gustavo A. Bula

Universidad Nacional de Colombia

March 20, 2024

Table of contents

Objetivos de sesión

- Problema Dual
- Sensibilidad

Dualidad

Problema Primal

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & z = \mathbf{cx} \\ \text{Sujeto a:} & \\ & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x_j} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Problema Dual

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & w = \mathbf{yb} \\ \text{Sujeto a:} & \\ & \mathbf{y}A \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y_i} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Dualidad

$$\textit{minimizar}\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +x_2 & & \geq & 2 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \geq & 5 \end{array}$$

$$\textit{maximizar}\ 2y_1 + 5y_2$$

sujeto a

$$\begin{array}{ccccc} 2y_1 & +2y_2 & \leq & 3 \\ y_1 & -y_2 & \leq & 2 \\ & +y_3 & \leq & 4 \end{array}$$

Dualidad

$$\textit{minimizar} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\textit{maximizar} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

sujeto a

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dualidad

Teorema

Si el problema primal tiene una solución óptima, el problema dual tiene una solución óptima con el mismo costo

(**Dualidad Débil**) Sean x y Π soluciones factibles para el primal y el dual respectivamente. tenemos que

$$cx \geq \Pi A x \geq \Pi b$$

dado que el primal tiene una solución factible, el dual no puede ser ilimitado.

Dualidad Débil

Problema Primal (Maximización) Problema Dual (Minimización)

$$\begin{array}{rcrc} \text{Maximizar} & z = \mathbf{cx} & \text{Minimizar} & w = \mathbf{yb} \\ \text{Sujeto a:} & & \text{Sujeto a:} & \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} & & \mathbf{y}A \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{x_j} \geq \mathbf{0} & & \mathbf{y_i} \leq \mathbf{0} \end{array}$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

Probando si una base es óptima

- ¿Cuáles on los costos en una en una Solución Básica Factible?

$$cx = c_B A_B^{-1} b + (c - c_B A_B^{-1} A)x$$

$$cx = \Pi b + (c - \Pi A)x$$

- La base es óptima si los costos no son negativos
- Los multiplicadores del Simplex son soluciones al problema dual

Dualidad

Teorema

Si el primal tiene una solución óptima, el dual tiene una solución óptima con el mismo costo

(Dualidad Fuerte) Considere la solución óptima x^*. La base asociada a esta solución es B:

$$x_B^* = A_B^{-1} b$$

el problema dual tiene una solución factible y^*

$$y^* = c_B A_B^{-1}$$

por la optimalidad del problema primal. Por lo tanto

$$y^* b = c_B A_B^{-1} b = c_B x^*$$

Forma General del Dual

Primal

$$\textit{minimizar } cx$$

sujeto a:

$$\begin{array}{cccc} a_i x & = & bi & (i \in E) \\ a_i x & \geq & bi & (i \in I) \\ x_j & \geq & 0 & (j \in P) \\ x_j & \in & \mathbb{R} & (j \in O) \end{array}$$

Dual

$$\textit{maximizar } yb$$

sujeto a:

$$\begin{array}{cccc} y_i & \in & \mathbb{R} & (i \in E) \\ y_i & \geq & 0 & (i \in I) \\ yA_j & \leq & c_j & (j \in P) \\ yA_j & = & c_j & (j \in O) \end{array}$$

Propiedades del Problema Dual

	Finito Primal	No Acotado Primal	Infactible Primal
Finito Dual	+	-	-
No acotado Dual	-	-	+
Infactible dual	-	+	+

Certificado de Optimalidad

Problema Primal

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & z = \mathbf{cx} \\ \text{Sujeto a:} & \\ & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x_j} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Problema Dual

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & w = \mathbf{yb} \\ \text{Sujeto a:} & \\ & \mathbf{y}A \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y_i} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

- Dar un x^* que satisfaga $Ax^* \geq b$
- Dar un y^* que satisfaga $y^*A \leq c$
- Compruebe que $cx^* = y^*b$

Holgura Complementaria

¿Que significan las variables del problema Dual?
Sean x^* y y^* las soluciones óptimas para el problema primal y para el problema dual, respectivamente. Las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para la optimalidad de x^* y y^*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i \vee y_i^* = 0(1 \leq i \leq m)$$

and

$$\sum_{1=m}^{n} y_i^* a_{ij} = c_j \vee x_j^* = 0(1 \leq j \leq n)$$

Interpretación Económica

Problema Primal

$$\text{Maximizar} \qquad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \mathbf{b_i} + t_i (1 \leq i \leq m)$$

$$\mathbf{x_j} \geq \mathbf{0}$$

Para pequeños valores de t_i, el problema lineal tiene solución en:

$$z^* + \sum_{1=m}^{n} y_i^* t_i$$