Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Departamento de Matemática Aplicada
Ejercicios complementarios de repaso para el Parcial I
MM 524 Sistemas Dinámicos II

Profesor: Dr. Fredy Vides

Instrucciones: Resolver las siguientes problemas, dejando evidencia de argumentos precisos y rigurosos que respalden sus resultados y conclusiones.

1. Considerando las normas vectoriales definidas para cualquier $x = [x_j] \in \mathbb{R}^n$ por las expresiones:

   $$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

   y

   $$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

   - Probar que las funciones $d_1(x, y) = \|x - y\|$ y $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ definen métricas en $\mathbb{R}^n$.
   - Probar o refutar que $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ para cualquier par $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Dada $A = [a_{jk}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, probar o refutar que para cada $x = [x_j] \in \mathbb{R}^n$.

   $$\|Ax\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|\right) \|x\|_2$$

3. Considerando la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax+b$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Es la función f continua?
   (b) Es la función f uniformemente continua?
   (c) Existen condiciones para A, b que garanticen que la función f sea un homeomorfismo?

   Idea: Considere la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|x \cdot y| \leq \|x\|_2\|y\|_2$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

4. Sea $\mathbf{1}_n$ la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que la matriz $T_A = [t_{jk}] = \mathbf{1}_n - A$ es invertible:

   (a) Probar que la función $f(x) = Ax + b$ tiene un único punto fijo $x \in \mathbb{R}^n$ para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Suponiendo que:

   $$0 < \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |t_{jk}| < 1$$

   Probar que para $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{R}^n$ definida en por las ecuaciones de recurrencia:

   $$x_{k+1} = T_A x_k + b, x_1 = b$$

- $\{x_k\}_{k\geq 1}$ es de Cauchy
- $x = \lim_{t\to\infty} x_k$ es un punto fijo de $f(x)$.
- $x_k \to (\mathbf{1}_n - A)^{-1}b$.

5. Considerando la norma (espectral) matricial $\|A\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que:

   - $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para cada $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$
   - Dadas $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $U^*U = UU^* = \mathbf{1}_n = V^*V = VV^*$, entonces $\|UAV\| = \|A\|$ para cada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

6. Dados $x_0, y_0, a, b, r \in \mathbb{R}$ tales que $a, b, r > 0$, consideremos la variedad:

$$E(x_0, y_0, a, b, r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = r^2 \right.\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

   - Probar o refutar que cada $E(x_0, y_0, a, b, r) \subset \mathbb{R}^n$ es compacta.
   - Dada $\alpha > 0$ y un sistema $Y' = F(Y)$ cuyo flujo

$$\phi_F(t, Y) \in C^2(\mathbb{R} \times E(x_0, y_0, a, b, r), E(x_0, y_0, a, b, r))$$

     para algunos $x_0, y_0, a, b, r \in \mathbb{R}$ tales que $a, b, r > 0$, es (topológicamente) conjugado al flujo $\phi_\alpha(t, X)$ del sistema.

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} X \tag{1}$$

     - Calcular (de ser posible) un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\phi_F(t, Y) = h^{-1} \circ \phi_\alpha(t, h(Y)) \tag{2}$$

     - En caso de existir $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ que resuelve (2) en algún caso, es posible encontrar una expersión (no trivial) para F en términos de h, h^{-1} y α?
     - Dado $n \geq 2$ arbitrario. Es posible clasificar (en base a homeomorfismos C^2) el conjunto de espacios de estado $\{\Sigma_\beta^\alpha \subset \mathbb{R}^n | \beta \in B\}$ correspondientes a los flujos conjugados $\phi_\beta \in C^2(\mathbb{R} \times \Sigma_\beta^\alpha, \Sigma_\beta^\alpha)$ al flujo ϕ_α del sistema (1)?

7. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|e^{tA}x\|_2 = \|x\|_2$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $t \in \mathbb{R}$. Consideremos la variedad.

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

   - Probar que el flujo ϕ_A del sistema $x' = Ax$ cumple la condición $\phi_A \in C^2(\mathbb{R} \times S^{n-1}, S^{n-1})$.
   - Diseñar un esquema predictor-corrector basado en el método numérico de Euler explícito para aproximar la curva solución x del problema $x' = Ax, x(0) = x_0 \in S^{n-1}$, produciendo una sucesión $\{x^{(t)}\}_{t\geq 1} \subset S^{n-1}$.
   - Si $\{x^{(t)}\}_{t\geq 1} \subset S^{n-1}$ es la sucesión generada por el esquema desarrollado en el paso anterior, estimar el orden $\mathcal{O}(\mathcal{E}(t))$ del error $\mathcal{E}(t) = \|x^{(t)} - x^{(t-1)}\|_2$, $t \geq 2$.