Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Topología
Ejercicios de Repaso para el Parcial III

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Probar en detalle que la propiedad de ser conexo es una propiedad topológica.

2. Probar que cada subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo.

3. Un punto p de un ET X es un *punto de corte* si $X\backslash\{p\}$ es desconexo. Probar que la propiedad de tener un punto de corte es una propiedad topológica.

4. Sea $f \in C([0,1], \mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, una función uno-uno. Probar que $f([0,1])$ no tiene interior.

5. Un ET es *totalmente desconexo* si sus componentes conexas son todas singuletes. Probar que cualquier espacio métrico contable es totalmente desconexo.

6. Probar que cada componente conexa de un ET es cerrada.

7. Mostrar por contraejemplo que una componente conexa de un ET no es necesariamente abierta.

8. Un ET es *localmente conexo (LC)* si, para cada punto $p \in X$ y cada conjunto abierto U que contiene a p, existe un conjunto abierto conexo V con $p \in V$ y $V \subset U$. Probar que cada componente conexa de un ET LC es abierta.

9. Probar que cualquier subintervalo de $\mathbb{R}$ (cerrado, abierto, o semiabierto) es CPT.

10. Probar que la propiedad de ser CPT es una propiedad topológica.

11. Probar que si X es CPT y $f : X \to Y$ es un mapa, entonces $f(X)$ es CPT.

12. Un espacio X es *localmente conexo por trayectorias (LCPT)* si, para cada subconjunto abierto V de X y cada $x \in V$, existe un vecindario U de x tal que x puede conectarse a cada punto de U por una trayectoria en V. Probar que las componentes de trayectorias de un ET LCPT coinciden con las componentes conexas.

13. Probar que si E_j es un subconjunto cerrado de X_j, $1 \leq j \leq n$, entonces $E_1 \times \cdots \times E_n$ es un subconjunto cerrado de $X_1 \times \cdots \times X_n$.

14. Probar que las componentes conexas de $X_1 \times \cdots \times X_n$ son los conjuntos de la forma $E_1 \times \times \cdots \times E_n$, donde E_j es una componente conexa de X_j, $1 \leq j \leq n$. Probar que un resultado similar es válido para componentes de trayectorias.

15. Probar que cada proyección π_β de ΠX_α sobre un espacio coordenado X_β es un mapa abierto.

16. Probar que el producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.

17. Sea $X/\sim$ el espacio cociente determinado por una relación de equivalencia $\sim$ en un ET X. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Si X es compacto, entonces $X/\sim$ es compacto.

(b) Si X es conexo, entonces $X/\sim$ es conexo.

(c) Si X es CPT, entonces $X/\sim$ es CPT.

18. Sea f un mapa abierto contínuo de un ET X sobre un ET Y. Probar que Y es homeomorfo al espacio cociente de X obtenido al identificar cada conjunto de nivel de f con un punto.

19. Sea $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ un producto de espacios topológicos. Definir una relación de equivalencia $\sim$ en X declarando que $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ ssi $x_1 = y_1$. Probar que $X/\sim$ es homeomorfo a X_1. Probar un resultado análogo para un espacio producto infinito $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.