Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Topología
Ejercicios de Repaso para el Parcial I

Profesor: Dr. Fredy Vides

1 Dado un conjunto $X \neq \emptyset$. Probar que la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Define una métrica en X. Probar que cada subconjunto del EM (X, d) resultante es abierto y cerrado a la vez.

2 Probar que la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Define una métrica en $\mathbb{R}^n$. En el caso particular $n = 2$, dibuje una representación gráfica de la bola $B((0,0),1)$ en $\mathbb{R}^2$ y del conjunto $\overline{B((0,0),1)}$.

3 Para los siguientes ejercicios asumir que (X, d) es un espacio métrico.

a Probar que si $Y \subset X$, $Int(Y)$ coincide con la unión de todos los subconjuntos abiertos de X que están contenidos en Y.

b Probar que si $Y \subset X$, $\overline{Y}$ coincide con la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a Y.

c Un conjunto de la forma $\hat{B}(x;r) := \{y \in Y | d(x,y) \leq r\}$ es llamado una bola cerrada. Probar que una bola cerrada es un conjunto cerrado. Es $\hat{B}(x;r)$ siempre igual a $\overline{B(x;r)}$? Es cierto lo anterior para $X = \mathbb{R}^n$? Probar sus respuestas.

d Un punto $x \in X$ es un punto límite de un subconjunto S de X si toda bola $B(x;r)$ contiene infinitos puntos de S. Probar que x es un punto límite de S ssi existe una sucesión $\{x_n\}$ en S tal que $x_n \to x$ y $x_n \neq x$ para cada n. Probar que el conjunto de puntos límite de S es cerrado.

e Un punto $x \in S$ es un punto aislado de S si existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \cap S = \{x\}$. Probar que la clausura de un subconjunto S de X es la unión disjunta de los puntos límite y los puntos aislados de S.

f Tenemos que dos métricas d y ρ son equivalentes ssi las sucesiones convergetes en (X, d) son las mismas sucesiones convergentes en (X, ρ). Dada la función ρ en $X \times X$ definida por

$$\rho(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}, \quad x, y \in X.$$

Probar que ρ es una métrica y que es equivalente d.

4 Una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en un EM (X, d) es una sucesión rápida de Cauchy is

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) < \infty.$$

Probar que una sucesión rápida de Cauchy es una sucesión de Cauchy.

5 Probar que toda sucesión de Cauchy tiene un subsucesión que es una sucesión rápida de Cauchy.

6 Probar que el conjunto de puntos aislados de un EM completo contable (X, d) forma un subconjunto denso de X.

7 Sea $S \neq \emptyset$, sea (X, d) un EM, y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones de S a X. Para $f, g \in \mathcal{F}$, definir

$$\rho(f, g) = \sup_{s \in S} \min\{1, d(f(s), g(s))\}.$$

Probar que ρ es una métrica en $\mathcal{F}$. Probar que una sucesión $\{f_n\}$ converge a f en el EM $(\mathcal{F}, \rho)$ ssi $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en X. Probar que $(\mathcal{F}, \rho)$ es completo ssi (X, d) es competo.

8 Probar que el conjunto de números irracionales es denso en $\mathbb{R}$.

9 Si consideramos a los números racionales $\mathbb{R}_0$ como un subespacio de $\mathbb{R}$. Existen puntos aislados en el EM $(\mathbb{R}_0, d)$? Cuál es la razón por la que no se contradice lo establecido en el ejercicio 6?

10 Proveer un ejemplo de un EM totalmente acotado que no es compacto.

11 Proveer un ejemplo de un EM completo que no es compacto.

12 Probar directamente que un espacio métrico compacto es totalmente acotado.

13 Probar que si (X, d) es un EM, entonces d es una función contínua de $X \times X$ a $\mathbb{R}$. Probar que para cada $x_0 \in X$, la función $X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x_0, x)$ es una función uniformemente contínua de X a $\mathbb{R}$.

14 Probar que dos métricas d y ρ para X son equivalentes ssi el mapa identidad $\mathrm{id} : (X, d) \to (X, \rho), x \mapsto x$ es bicontínuo (es decir, el mapa y su inverso son contínuos).