Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Geometría II
Ejercicios de Repaso para el Parcial II

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) EP. Probar que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

2. Sea $f : X \twoheadrightarrow A$ y sea $x_0 \in A$. Sea $\imath : A \hookrightarrow X$ el mapa de inclusión. Probar lo siguiente:
   (a) $\imath_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es uno-a-uno.
   (b) $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ es sobre.
   (c) Si X es SC, entonces A es SC.

3. Probar que el producto cartesiano de espacios SC es SC.

4. Probar que ser SC es una propiedad topológica.

5. Para m entero, sea α_m un bucle en S^1 definido por
   $$\alpha_m(s) = e^{2\pi i m s}, 0 \leq s \leq 1.$$
   Probar que cada bucle en S^1 con base 1 es homotópico con puntos extremos fijos a precisamente uno de los bucles α_m.

6. Probar que el mapa exponencial $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, definido en clase, es un mapa de cubrimiento de $\mathbb{R}^n$ sobre el n-toro $\mathbb{T}^n$. Probar que
   $$\pi_1(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \ (n \text{ sumandos}).$$
   Para cada n-tupla $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$, defina de forma explícita un bucle en $\mathbb{T}^n$ basado en $(1, \ldots, 1)$ en la clase de homotopía correspondiente.

7. Probar que el mapa $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$, definido por
   $$p(z) = e^z, \ \ z \in \mathbb{C},$$
   es un mapa de cubrimiento. Calcular $\pi_1(\mathbb{C} \backslash \{0\})$.

8. Probar que la restricción del mapa p del Ejercicio 6 a la franja horizontal $E = \{x + iy | c < y < d\}$ es un mapa de cubrimiento de E sobre el anillo abierto $A_E = \{w | e^c < |w| < e^d\}$. Calcular $\pi_1(A_E)$ y $\pi_1(\overline{A_E})$.

9. Se dice que un ET X tiene la *propiedad de punto fijo* (PPF) si cada mapa $f : X \to X$ tiene un punto fijo. Propiedad que la PPF es una propiedad topológica.

10. Probar en detalle que la relación de ser homotópicamente equivalente es transitiva.

11. Probar que si Y es contractible, entonces $X \times Y$ es homotópicamente equivalente X.

12. Probar que cualquier anillo en $\mathbb{R}^2$ es homotópicamente equivalente a S^1.

13. Probar que cualquier bola abierta perforada (con su centro removido) con respecto a la métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^2$ es homotópicamente equivalente a S^1.

14. Probar que $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ es homotópicamente equivalente a S^n.

15. Probar que el plano doblemente perforado (con dos puntos removidos) es homotópicamente equivalente a la *figura ocho* $S^1 \vee S^1$.

16. Probar que si Y es contractible, entonces dos mapas cualesquiera de X a Y son homotópicos.

17. Sea (X, b) un EP, sean α_0 y α_1 bucles en X basados en b, y sean $f_j(e^{2\pi i s}) = \alpha_j(s), 0 \leq s \leq 1$, los correspondientes mapas de S^1 en X. Probar que f_0 es homotópico a f_1 ssi existe un bucle β en X basado en b tal que

$$[\alpha_1] = [\beta]^{-1}[\alpha_0][\beta].$$

18. Sea X compacto y sea $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ un exponencial. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que todo mapa $g : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ que satisface $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, $x \in X$, es un exponencial.

19. Dado un mapa $f : S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquier mapa $g : S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ que satisface $|g(z) - f(z)| < \varepsilon$, $z \in S^1$, tiene el mismo índice que f.

20. Clasificar las clases de homotopía de los mapas de la *figura ocho* a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.