

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Departamento de Matemática Aplicada

Sistemas Dinámicos II

Ejercicios de Repaso para el Parcial III

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Considere la relación recursiva

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, & n \geq 1 \\ x_0 = 1 & x_1 = c. \end{cases}$$

Probar que:

- (a) Si $c = (1 + \sqrt{5})/2$:

$$x_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- (b) Si $c = (1 - \sqrt{5})/2$:

$$x_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- (c) Si $c = 1$:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

2. Demuestre que si L_1 y L_2 son combinaciones lineales de potencias de E , y $x \in \ker L_1$, entonces $x \in \ker L_1 L_2$.
3. Calcular $\ker E^r$, $r \in \mathbb{Z}_0^+$.
4. Dé bases que consten de sucesiones reales para el espacio solución de:
- (a) $(4E - 3E^2 + E^3)x = 0$
- (b) $(\pi E^2 - \sqrt{2}E + \log(2)E^0)x = 0$
- (c) $(3E^0 - 2E + E^2)x = 0$
5. Sea $p \in \mathbb{C}[z]$ tal que $p(0) = 0$. Calcular $\ker p(E)$.
6. Considere la ecuación en diferencias $4x_{n+2} - 8x_{n+1} + 3x_n = 0$. Determine si es estable. Encuentre la solución general. Suponiendo que $x_0 = 1$ y $x_1 = -2$, calcule x_{100} con el método que usted considere más eficiente.
7. Considere la relación recurrente $x_n = 2(x_{n-1} + x_{n-2})$. Demuestre que la solución general es $z_n = \alpha(1 + \sqrt{3})^n + \beta(1 - \sqrt{3})^n$. Demuestre que si $x_1 = 1$ y $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, entonces $\alpha = 0$ y $\beta = (1 - \sqrt{3})^{-1}$.

8. Dada $m \geq 2$. Estudiar la estabilidad del SDD determinado por la ED matricial:

$$\begin{cases} X_{n+1} = C_m X_n \\ X_0 = \hat{X} \in \mathbb{C}^m \end{cases}$$

donde $C_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ está definida por la expresión:

$$C_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(m-1) \times 1} & \mathbf{1}_{m-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{1 \times (m-1)} \end{bmatrix}$$