Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Departamento de Matemática Pura
Ejercicios complementarios de Repaso
MM 425 Topología

Profesor: Dr. Fredy Vides

Instrucciones: Resolver las siguientes problemas, dejando evidencia de argumentos precisos y rigurosos que respalden sus resultados y conclusiones.

1. Dados (X, d_X) y (Y, d_Y) EM, $\alpha, \beta > 0$, y dada $f \in Y^X$ biyectiva (uno-a-uno y sobre). Probar que si $\alpha d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \beta d_X(x, y)$ para cualquier par $x, y \in X$, entonces $f \in C(X, Y)$. Es f^{-1} continua?

2. Probar que si (X, d) es un EM, para cada $x_0 \in X$, la función $X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x_0, x)$ es una función uniformemente contínua de X a $\mathbb{R}$.

3. Sea (X, d) un EM. Probar o refutar las siguientes proposiciones:
   (a) Si $Y \subset X$, $int(Y)$ coincide con la unión de todos los subconjuntos abiertosde X que están contenidos en X.
   (b) Si $Y \subset X$, $\overline{Y}$ coincide con la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a Y.
   (c) Para cada $x \in X$, $int(X \backslash \{x\}) = X \backslash \{x\}$.

4. Determine las clausuras de los siguientes SE métricos de $\mathbb{R}$ respecto de la métrica usual:
   (a) $A = \{1/n | x \in \mathbb{Z}^+\}$
   (b) $B = \{1 - 1/n | n \in \mathbb{Z}^+\}$
   (c) $C = \{x | 0 < x < 1\}$
   (d) $C = \{x | 0 < x \leq 1\}$

5. Probar que una función $f : X \to Y$ es contínua ssi $f^{-1}(E)$ es un subconjunto cerrado de X para todo subconjunto cerrado E de Y.

6. Probar que si S es un subconjunto de un ET X, entonces $\overline{S}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S.

7. Probar que si $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, entoncces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{B}$. Calcular una base para la topología relativa del conjunto de números enteros $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, con respecto a la topología usual en $\mathbb{R}$.

8. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una familia de topologías sobre X. Pruebe que existe una única topología sobre X más pequeña entre todas las que contienen a todas las colecciones $\mathcal{T}_\alpha$, y una única topología más grande entre todas las que están contenidas en toda $\mathcal{T}_\alpha$.

9. Sea $X = [0, 8] \cap \mathbb{Z}$ y sea $f \subset X \times X$ la función definida por

$$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 0), (7, 1), (8, 2)\}.$$

Sea $\sim$ la relación de equivalencia en $X \times X$ definida por la regla $x \sim y$ ssi $f(x) = f(y)$. Calcular:

(a) La topología más pequeña $\mathcal{T}_X$ de X que contiene a $\{\{0,3,6\},\{1,4,7\},\{2,5,8\}\}$.

(b) La topología cociente $\mathcal{T}_{X/\sim}$ con respecto a $\mathcal{T}_X$.

(c) Calcular las componentes conexas $\mathcal{C}(\pi(x))$ y $\pi(\mathcal{C}(x))$ para cada $x \in X$. Donde $\pi : X \to X/\sim$ es la proyección natural sobre el espacio cociente $X/\sim$.

10. Sea $\mathbb{S}^1$ un ET homeomorfo a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Probar que el ET $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es compacto y CPT.

11. Un punto p de un ET X es un *punto de corte* si $X \backslash \{p\}$ es desconexo.

    (a) Probar que la propiedad de tener un punto de corte es una propiedad topológica.

    (b) Utilizar la propiedad topológica de punto de corte para probar que $(0,1)$ y $[10,100)$ no son homeomorfos. Son $[\pi, \sqrt{2})$ y $(-\infty, \pi]$ homeomorfos?

12. (a) Probar en detalle que la propiedad de ser conexo es una propiedad topológica.

    (b) Probar que si X es un ET homeomorfo a $[0,1]$, entonces X es conexo.

13. Se dice que un ET X tiene la *propiedad de punto fijo* (PPF) si cada mapa $f : X \to X$ tiene un punto fijo. Propiedad que la PPF es una propiedad topológica.

14. Probar or refutar que los siguientes ET son CPT:

    (a) $\mathbb{S}^1 \simeq_h \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$

    (b) $\mathbb{S}^2 \simeq_h \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

    (c) $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

    (d) $\mathbb{R}^*_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.