Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Maestría en Ingeniería Matemática
Optimización Numérica
Ejercicios de Repaso para el Parcial I

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Pruebe que cualquier operación elemental de tipo uno su puede realizar con cuatro operaciones de los otros tipos.

2. Considere el SEL $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. probar que el SEL tiene solución ssi $b \in \text{gen}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$. Demostrar que si $\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$ es LI, entonces el SEL tiene a lo sumo una solución.

3. Una matriz A se dice antisimétrica cuando $A^\top = -A$. Demuestre que si A es antisimétrica entonces $x^\top Ax = 0$ para toda x.

4. Probar o refutar que toda matriz SPD es no singular.

5. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, y dados $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Considere la función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por la ecuación

$$Q(x) = c + b^\top x + \frac{1}{2}x^\top Ax, \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

probar que:

(a) Probar que $\nabla Q(x) = Ax + b$

(b) Probar que $\mathbb{H}Q(x) = \mathbb{J}\nabla Q(x) = A$

(c) Sea $U \in \mathbb{S}(n)$ determinada por:

$$u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \;\; i = j \\ 2a_{ij} \;\; i < j \\ 0 \;\; i > j \end{cases}$$

Probar que:

$$Q(x) = c + b^\top x + \frac{1}{2}x^\top Ux$$

(d) Probar que $\mathbb{H}Q(z)(x - z) = \nabla Q(x) - \nabla Q(z)$.