Universidad Nacional Autónoma de Honduras
GEometría II
Ejercicios de Repaso para el Parcial III

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Probar que si E_j es un subconjunto cerrado de X_j, $1 \leq j \leq n$, entonces $E_1 \times \cdots \times E_n$ es un subconjunto cerrado de $X_1 \times \cdots \times X_n$.
2. Probar que las componentes conexas de $X_1 \times \cdots \times X_n$ son los conjuntos de la forma $E_1 \times \times \cdots \times E_n$, donde E_j es una componente conexa de X_j, $1 \leq j \leq n$. Probar que un resultado similar es válido para componentes de trayectorias.
3. Probar que cada proyección π_β de ΠX_α sobre un espacio coordenado X_β es un mapa abierto.
4. Probar que el producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.
5. Probar que el producto de espacios CPT es CPT.
6. Sea $X/\sim$ el espacio cociente determinado por una relación de equivalencia $\sim$ en un ET X. Probar las siguientes afirmaciones:
   (a) Si X es compacto, entonces $X/\sim$ es compacto.
   (b) Si X es conexo, entonces $X/\sim$ es conexo.
   (c) Si X es CPT, entonces $X/\sim$ es CPT.
7. Sea f un mapa abierto contínuo de un ET X sobre un ET Y. Probar que Y es homeomorfo al espacio cociente de X obtenido al identificar cada conjunto de nivel de f con un punto.
8. Sea $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ un producto de espacios topológicos. Definir una relación de equivalencia $\sim$ en X declarando que $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ ssi $x_1 = y_1$. Probar que $X/\sim$ es homeomorfo a X_1. Probar un resultado análogo para un espacio producto infinito $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.
9. Calcular $\pi_1([0,1]/(0 \leftrightsquigarrow 1))$.
10. Calcular $\pi_1(\mathbb{D}^2/(\partial\mathbb{D}^2 \leftrightsquigarrow \star))$.