Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Geometría II
Ejercicios de Repaso para el Parcial I

Profesor: Dr. Fredy Vides

1 Dado un ET $X$. Probar que la relación $\sim$ definida en $X \times X$ por $x \sim y$ ssi $\exists \gamma \in C([0,1], X)$ t.q. $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$, es una relación de equivalencia. El conjunto $X/\sim$ recibe el normbre de componentes de trayectorias de $X$.

2 Suponer que $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ para cualesquiera tres trayectorias $\alpha, \beta, \gamma$ en $X$ para las que el producto está definido. Probar que cada componente de trayectorias de $X$ consta de un solo punto.

3 Sea $X$ conexo por trayectorias y sea $b \in X$. Probar que toda trayectoria en $X$ es homotópica con puntos extremos fijos a una trayectoria que pasa por $b$.

4 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, sea $\alpha$ una trayectoria en $D$ de $x$ a $y$, y definamos

$$d := \inf\{d_E(\alpha(s) - w) | w \in \partial D, 0 \leq s \leq 1\},$$

donde $d_E$ denota la distancia Ecuclídea en $\mathbb{R}^n$. Probar que si $\beta$ es cualquier trayectoria en $D$ de $x$ a $y$ tal que $d_E(\beta(s) - \alpha(s)) < d$, $0 \leq s \leq 1$, then $\beta$ es homotópico a $\alpha$ con puntos extremos fijos.

5 Sea $\mathbb{D}^2$ la bola cerrada de radio unidad en $\mathbb{R}^2$ con círculo frontera $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$. Probar que $[\partial\mathbb{D}^2] = [\star]$ para cualquier punto $\star \in \mathbb{D}^2$.

6 Probar que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, $\pi_1(X, b) \simeq \{0\}$.

7 Probar que $[\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1] = [\mathbb{S}^1]$.

8 Un espacio $X$ es contractible a un punto $x_0 \in X$ manteniendo $x_0$ fijo si existe un mapa $F : X \times [0,1] \to X$ tal que

$$\begin{aligned} F(x,0) &= x_0, \ x \in X, \\ F(x,1) &= x, \ x \in X, \\ F(x_0,t) &= x_0, \ 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Probar que tal espacio es simplemente conexo.

9 Sean $(X, x_0)$ y $(Y, y_0)$ EP. Probar que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

10 Probar que el producto de espacios simplemente conexos es simplemente conexo.

11 Sea $X$ un ET conexo por trayectorias y sean $a, b \in X$. Probar que los siguientes son equivalentes.

   a $X$ es simplemente conexo.

   b Cualesquiera dos trayectorias de $a$ a $b$ son homotópicas con extremos fijos.

c Todo mapa $f : \mathbb{S}^1 \to X$ se extiende a un mapa $F : \mathbb{D}^2 \to X$.

12 Probar que si $n \geq 3$, entonces $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ es simplemente conexo.

13 Un subespacio $A$ de un ET $X$ es una ***retracto*** de $X$ si existe un mapa $f : X \to A$ tal que $f(y) = y$ para todo $y \in A$. El mapa $f$ es llamado una retracción de $X$ sobre $A$. Probar que la esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ es un retracto de $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$.