Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Geometría I
Ejercicios de Repaso Complementarios para el Parcial I

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Dados X, Y tales que $|X|, |Y| < \infty$, considerados como EM respecto de la métrica discreta d.
    (a) Calcular $|\mathbb{P}(X)|$, donde $\mathbb{P}(X) = \{S \subseteq X\}$.
    (b) Calcular el número de conjuntos abiertos en X.
    (c) Calcular el número de conjuntos abiertos en Y.
    (d) Calcular $|\{0,1\}^X|$ y $|\{4,100\}^Y|$.
    (e) Probar que X es un EM compacto.
    (f) Probar que toda $f \in C(X,Y)$ es uniformemente continua.
    (g) Calcular el número de componentes conexas de X.
    (h) Calcular el número de componentes conexas de Y.
    (i) Calcular el número de bucles en Y.
    (j) Calcular el número de bucles en X.
2. Dados (X, d_X) y (Y, d_Y) EM, decimos que $f \in Y^X$ es una isometría si f es biyectiva, y si $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y)$ para cualquier par $x, y \in X$. Decimos en este caso que X e Y son isométricos. Suponiendo que X e Y son espacios métricos isométricos con respecto a una isometría $f \in Y^X$:
    (a) Probar que $f \in C(X,Y)$.
    (b) Si Y es SC, calcular $\pi_1(X)$.
3. Decimos que $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es **estrellado** con respecto a $w \in W$ si, siempre que $y \in W$, el segmento convexo entre w e y está contenido en W.
    (a) Probar que W es convexo ssi es estrellado con respecto a todos sus puntos.
    (b) Sabiendo que $W \subseteq \mathbb{R}^n$ es estrellado, calcular $\pi_1(W)$.
4. Calcular $\pi_1(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\})$.
5. Calcular $\pi_1(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 10^{10^{10}}\})$.
6. Dados dos grupos G, H tales que $|G|, |H| < \infty$. Probar que:
    (a) Para $1 \leq n \leq 3$: $|G| = |H| = n \Longrightarrow G \cong H$.