Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Topología
Ejercicios de Repaso para el Parcial II

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{T}$ el conjunto definido por la expresión

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid |X \backslash U| < \infty \ \vee \ U = \emptyset\}.$$

   Probar que $\mathcal{T}$ es una topología. ($\mathcal{T}$ es llamada la topología cofinita.)

2. Probar que si S es un subconjunto de un ET X, entonces
   (a) $\overline{X \backslash S} = X \backslash Int(S)$,
   (b) $Int(X \backslash S) = X \backslash \overline{S}$

3. Si U es abierto, probar que $U^{-\prime-\prime-} = U^{-}$, donde $^{-}$ significa clausura y $'$ complemento.

4. Probar que un conjunto S en X es abierto ssi todo subconjunto abierto relativo de S es abierto en X. Es esto cierto si *abierto* se remplaza por *cerrado*.

5. Sea S un subconjunto de un ET X. Probar que una sucesión $\{x_j\}$ en S converge a $x_0 \in S$ en la topología relativa ssi, considerada como una sucesión en X, la sucesión converge a x_0.

6. Probar que una función $f : X \to Y$ es contínua ssi $f^{-1}(E)$ es un subconjunto cerrado de X para todo subconjunto cerrado E de Y.

7. Probar que todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ son homeomorfos.

8. Probar que la bola abierta $B^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ en $\mathbb{R}^2$ es homeomorfa al cuadrado abierto unitario $C^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

9. Probar que si $f : X \to Y$ es contínua y si S es un subespacio de X, entonces la restricción $f|_S : S \to Y$ es contínua.

10. Probar que una sucesión en un espacio de Hasdorff no puede converger a mas de un punto.

11. Sea X un ET y sea X_0 el ET definido por el conjunto X provisto con la topología cofinita. Probar que el mapa identidad de X a X_0 es contínuo ssi X es un espacio T_1.

12. Probar que todo espacio con la topología cofinita es compacto.

13. Probar que un ET discreto (provisto con la topología discreta) es compacto ssi es finito.

14. Probar que si X es un espacio de Hausdorff compacto y si $x, y \in X$ satisfacen $x \neq y$, entonces existe una función contínua con valores reales f en X tal que $f(x) \neq f(y)$. (En otras palabras, las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ *"separan puntos"* de X.)

15. Sea X compacto y denotemos por $C(X)$ el conjunto de funciones contínuas $f : X \to \mathbb{R}$. Probar que

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

define una métrica en $C(X)$, tal que $(C(X), d)$ se vuelve un espacio métrico completo.

16. Probar que la compactificacón a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a la n-esfera

$$S^n = \{(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2 = 1\}.$$

Idea: Basta probar que $S^n \backslash \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

17. Probar que la compactificacón a un punto de cualquier bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a la n-esfera S^n.