Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Departamento de Matemática Aplicada
Sistemas Dinámicos II
Ejercicios de Repaso para el Parcial II

Profesor: Dr. Fredy Vides

1. Para cada uno de los siguientes sistemas no lineales,

   (1a) Calcular todos los puntos de equilibrio y descibir el comportamiento del sistema linealizado asociado.

   (1b) Calcular el diagrama de fase de cada sistema no lineal utilizando Matlab/Octave.

   (i) $x' = sen(x), y' = cos(y)$

   (ii) $x' = x(x^2 + y^2), y' = y(x^2 + y^2)$

   (iii) $x' = x + y^2, y' = 2y$

   (iv) $x' = y^2, y' = y$

   (v) $x' = x^2, y' = y^2$

2. Considere el sistema

$$x' = x^2 + y$$
$$y' = x - y + a$$

   donde a es un parámetro.

   (a) Encontrar todos los puntos de equilibrio y calcular la ecuación linealizada en cada punto de equilibrio.

   (b) Describir el comportamiento del sistema linealizado en ca cada punto de equilibrio.

3. Para cada una de las funciones $V(X)$, bosquejar el diagrama de fase del flujo gradiente $X' = -\nabla V(X)$. Bosquejar las curvas de nivel de V en el mismo diagrama. Encontrar todos los puntos de equilibrio y determinar su tipo.

   (a) $x^2 + y^2$

   (b) $x^2 - y^2 - 2x + 4y + 5$

   (c) $y\text{sen}(x)$

   (d) $x^2 + y^2 - z$

4. Bosquejar los diagramas de fase de los sistemas siguientes . Determinar en el proceso si los sistemas son gradientes o Hamiltonianos.

   (a) $x' = x + 2y, y' = -y$

   (b) $x' = y^2 + 2xy, y' = x^2 + 2xy$

   (c) $x' = x^2 - 2xy, y' = y^2 - x^2$

5. Sea $X' = AX$ un sistema lineal donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Determinar las condiciones sobre las componentes de A que garantizan que el sistema es gradiente. Calcular la función gradiente correspondiente en tal caso.

(b) Repetir la pregunta anterior para un sistema Hamiltoniano.

6. Considere el sistema planar

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y). \end{cases}$$

Determinar condiciones para f, g que garantizan que el sistema es Gradiente, o Hamiltoniano.

7. Sea $\mathbb{T}^2$ el toro definido como el cuadrado $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$ con lados opuestos identificados. Sea $F(\theta_1, \theta_2) = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)$. Bosquejar el diagrama de fase del sistema $\Theta' = -\nabla F$ en $\mathbb{T}^2$, con $\mathbb{T}^2$ representado como $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

8. Probar que todos los autovalores de cualquier matrix simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son reales.

9. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que $(e^{tA})^\top = e^{tA^\top}$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

10. Dada una matriz antisimétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que $(e^{tA})^\top = (e^{tA})^{-1}$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

11. Dada una matriz antisimétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que el flujo $\phi(t, X)$ del sistema $X' = AX$, cumple la condición $|\phi(t, X)| = |\phi(0, X)|$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $X \in \mathbb{R}^n$.

12. Dada una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $x^\top Ax < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, probar que el flujo $\phi(t, X)$ del sistema $X' = AX$, cumple con la condicón $\lim_{t\to\infty} \phi(t, X) = 0$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$.