

MANUAL DE LECTURAS DEL CURSO:

Introducción a la Topología y a la Teoría de Homotopía

FREDY VIDES
Centro de Innovación en Cómputo Científico e Industrial
Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Matemática y Ciencias de la Computación
Universidad Nacional Autónoma de Honduras

E-mail: fredy.vides@unah.edu.hn

6 de Agosto de 2019

Presentación

En este documento presentaremos algunas técnicas y resultados topológicos junto con algunos problemas y ejercicios de práctica.

El material presentado en este documento está orientado a estudiantes avanzados e intermedios de Matemática aplicada a nivel de licenciatura. Es recomendable que el lector tenga conocimientos sólidos en matemática discreta, cálculo avanzado, y funciones de una variable compleja.

Índice general

1. Topología General	7
1.1. Espacios Topológicos	7
1.1.1. La Topología Métrica	9
1.2. Sub-Espacios Topológicos	10
1.3. Continuidad de Funciones	11
1.4. Base de una Topología	11
1.5. Axiomas de Separación	12
1.6. Compacidad	13
1.6.1. Compacidad Local	14
1.7. Conectividad	14
1.8. Conectividad por Trayectorias	15
1.9. Productos Finitos de Espacios Topológicos	15
1.10. Topología Cociente	16
1.11. Ejercicios	17

Capítulo 1

Topología General

Objetivos

1. Definir los conceptos fundamentales de espacios topológicos.
2. Presentar las propiedades y resultados fundamentales en espacios topológicos.

1.1. Espacios Topológicos

Dado un conjunto cualquiera A escribiremos $\mathcal{P}(A)$ para denotar el conjunto potencia o de partes de A definido por $\mathcal{P}(A) = \{S \subseteq A\}$.

Dado un conjunto X diremos que el conjunto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **topología** sobre X si se cumplen las siguientes condiciones.

T1: Tenemos que $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$.

T2: Dado $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, tenemos que $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{T}$.

T3: Dado $\mathcal{S}_n = \{S_1, \dots, S_n\} \subseteq \mathcal{T}$ (note que \mathcal{S}_n está restringido por la condición $|\mathcal{S}_n| \leq n < \infty$), tenemos que $\bigcap \mathcal{S}_n = \bigcap_{S \in \mathcal{S}_n} S = \bigcap_{1 \leq j \leq n} S_j \in \mathcal{T}$.

Un espacio topológico (**ET**) es un par (X, \mathcal{T}) , donde X es un conjunto y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una topología sobre X . Los elementos en la **lista** se denominan **conjuntos abiertos** o **abiertos** en X con respecto a \mathcal{T} . En otras palabras $U \subseteq X$ es abierto ssi $U \in \mathcal{T}$. Aquí y en lo sucesivo escribimos **ssi** para abreviar **si y solo si**.

Dado un ET (X, \mathcal{T}) decimos que $S \subseteq X$ es **cerrado** en X con respecto a \mathcal{T} si $X \setminus S \in \mathcal{T}$. Si consideramos la colección $X \setminus \mathcal{T} = \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{T}\}$ de conjuntos **cerrados** en X con respecto a \mathcal{T} , tenemos que por las condiciones T1-T3 y las leyes de De Morgan:

T1': Tenemos que $\emptyset \in X \setminus \mathcal{T}$ y $X \in X \setminus \mathcal{T}$.

T2': Dado $\mathcal{C} \subseteq X \setminus \mathcal{T}$, tenemos que $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \in X \setminus \mathcal{T}$.

T3': Dado $\mathcal{C}_n = \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq X \setminus \mathcal{T}$ (note que \mathcal{C}_n está restringido por la condición $|\mathcal{C}_n| \leq n < \infty$), tenemos que $\bigcup \mathcal{C}_n = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_n} C = \bigcup_{1 \leq j \leq n} C_j \in X \setminus \mathcal{T}$.

Cada vez que se escribe que un conjunto X es un ET, asumimos que esto se afirma con respecto a alguna topología T sobre X , cuyo nombre explícito omitiremos cuando no se presente una confusión potencial entre varias posibles topologías sobre X .

Dado un punto x en un ET X (con respecto a alguna topología \mathcal{T}), un **vecindario** V de x es un conjunto $V \subseteq X$ tal que existe $U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$ y $U \subseteq V$.

Dado un conjunto $S \subseteq X$ en un ET X , decimos que un punto $x \in X$ es un **punto interior** de S si S es un vecindario de x . El conjunto de todos los puntos interiores de S se denotará por $\text{int}(S)$, y se denomina el interior de S .

Dado un conjunto $S \subseteq X$ en un ET X , decimos que un punto $x \in X$ es un **punto de adherencia** de S si todo vecindario V de x cumple que $V \cap S \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos de adherencia de S se denotará por \overline{S} , y se denomina la **clausura o cerradura** de S .

Observación: Es un ejercicio interesante para el lector verificar las siguientes condiciones para un conjunto $S \subseteq X$, con X ET.

$$\text{int}(S) \subseteq S \subseteq \overline{S}$$

Propiedades: Dado un ET X y dados $S, T \subseteq X$:

1. $\text{int}(S)$ es abierto en X .
2. S es abierto en X ssi $\text{int}(S) = S$.
3. \overline{T} es cerrado en X .
4. T es cerrado en X ssi $\overline{T} = T$.

Dada una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$, con X ET, decimos que $\{x_n\}$ **converge** a $x \in X$ si para cualquier vecindario U de x existe $N \in \mathbf{Z}^+$ tal que $x_j \in U$, $j > N$. Escribiremos $x_n \rightarrow x$ para denotar que $\{x_n\}$ converge a $x \in X$, de ser necesario especificar la topología \mathcal{T} sobre X con respecto a la cual se considera la convergencia, escribiremos $x_n \rightarrow_{\mathcal{T}} x$.

Propiedad: Dado un ET X y dados $\{x_n\} \subseteq S \subseteq X$, si $x_n \rightarrow x \in X$ entonces $x \in \overline{S}$.

Dado $S \subseteq X$ con X ET, $x \in X$ se dice **punto frontera** de S si $x \in \overline{S}$ y $x \in \overline{X \setminus S}$. El conjunto de todos los puntos frontera del conjunto S se denota por ∂S , con base en la definición previa es claro que.

$$\partial S = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S} = \partial(X \setminus S)$$

De aquí en adelante escribiremos \sqcup para denotar la operación de unión disjunta de conjuntos.

Propiedad: Dada un ET X y dado $S \subseteq X$, $\overline{S} = \text{int}(S) \sqcup \partial S$.

1.1.1. La Topología Métrica

Dado un conjunto X se denomina métrica en X a cualquier función $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ (con valores en los números reales) que cumple con las siguientes restricciones.

M1: $d(x, y) \geq 0$ para cada $x, y \in X$.

M2: $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$.

M3: $d(x, y) = d(y, x)$ para cada $x, y \in X$.

M4: (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para cada $x, y, z \in X$.

Dado un conjunto X y una métrica d en X , el par (X, d) se denomina espacio métrico (**EM**). Cuando escribimos que X es un EM, se entiende que existe una métrica d_X tal que (X, d_X) determina un EM.

Dados $x \in X$ con (X, d) EM y dado $r > 0$. Escribimos $B(x; r)$ para denotar el conjunto que llamaremos **bola abierta** con centro en x y radio r $\{y \in X \mid d(x, y) < r\}$, el cual estará definido por la expresión.

$$B(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \quad (1.1)$$

Dado $S \subseteq X$ con (X, d) EM, decimos que $x \in X$ es un punto interior de S si existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq S$. Escribiremos $\text{int}(S)$ para denotar el conjunto de puntos interiores de S , el cual llamaremos **interior** de S . Decimos que $S \subseteq X$ es **abierto** en X (con respecto a la métrica d), si $S = \text{int}(S)$.

Dado $S \subseteq X$ con (X, d) EM, decimos que $x \in X$ es un punto de adherencia de S si para cada $r > 0$ $B(x; r) \cap S \neq \emptyset$. Escribiremos \overline{S} para denotar el conjunto de puntos de adherencia de S , el cual llamaremos **clausura o cerradura** de S . Decimos que $S \subseteq X$ es **cerrado** en X (con respecto a la métrica d), si $S = \overline{S}$.

Observación: Dado $S \subseteq X$ con X EM.

$$\text{int}(S) \subseteq S \subseteq \overline{S}$$

Dado un EM (X, d) se denomina **topología métrica** (inducida por la métrica d), a la topología más pequeña sobre X que contiene el conjunto $\mathcal{A}_X = \{S \subseteq X \mid \text{int}(S) = S\}$, donde el interior de cada conjunto en X se calcula con respecto a las bolas abiertas determinadas por d . Escribiremos \mathcal{T}_d para denotar la topología métrica sobre X inducida por d .

Dado un ET (X, \mathcal{T}) diremos que el espacio topológico X es **metrizable**, si existe una métrica d para X tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Dada una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ con (X, d) EM, decimos que $\{x_n\}$ **converge** a $x \in X$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, escribiremos $x_n \rightarrow x$ para indicar que la sucesión converge a x .

Propiedad El límite de toda sucesión convergente en un EM es único.

Decimos que una sucesión $\{s_n\} \subseteq X$ con (X, d) EM, es de **Cauchy** si $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(s_n, s_m) = 0$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{Z}^+$ tal que $d(s_n, s_m) < \varepsilon$ para cada $n, m \geq N$.

Propiedades. Dado un EM (X, d) :

- Si $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ es convergente, entonces es de Cauchy.
- Si $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ es de Cauchy, y si $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1}$ es una subsucesión tal que $x_{n_k} \rightarrow x$, entonces $x_n \rightarrow x$.

Un EM (X, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy en X converge en x , es decir, si para cada sucesión de Cauchy $\{t_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ existe $t \in X$ tal que $t_n \rightarrow t$.

Propiedades. Dado un EM (X, d) :

- Si X es completo, todo subespacio cerrado $Y \subset X$ es completo.
- Todo subespacio $Y \subset X$ completo es cerrado en X .

1.2. Sub-Espacios Topológicos

Dado un conjunto $S \subseteq X$ con X ET con respecto a alguna topología \mathcal{T} , es fácil verificar que el conjunto $S \cap \mathcal{T} = \{S \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$ define una topología sobre S . Denotaremos por $\mathcal{T}_{X|S}$ la topología $S \cap \mathcal{T}$, la cual llamaremos topología **relativa** o de **sub-espacio** topológico (**SET**) respecto de \mathcal{T} , diremos además que S es un sub-espacio topológico de X con respecto a la topología relativa respecto (heredada) de X .

Observación: Note que $V \subseteq S$ es un **abierto relativo** en S , ssi $V = S \cap U$ para algún abierto U en X . De forma equivalente, $C \subseteq S$ es un **cerrado relativo** en S , ssi $S \setminus C$ es un abierto relativo en S , es decir, si $S \setminus C = S \cap G$ para algún abierto G en X .

Dado $E \subseteq S$ con S SET de un ET X , escribimos \overline{E}^S para denotar la **clausura relativa** de E en S .

Propiedades: Dado un ET X y un SET $S \subseteq X$:

1. E es cerrado relativo en S , ssi $E = S \cap F$ para algún $F \subseteq X$ cerrado en X .
2. $\overline{E}^S = \overline{E} \cap S$, donde \overline{E} es la clausura de E en X .

Dado $S \subseteq X$ con X ET, decimos que S es **denso** en X , si $\overline{S} = X$. Decimos que un ET Y es **separable** si contiene una sucesión densa, es decir, si existe $\{y_n\}_{n \geq 1} \subseteq Y$ tal que $\overline{\{y_n\}_{n \geq 1}} = Y$.

Decimos que un EM (X, d) es totalmente acotado (TA) si para cada $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que:

$$X \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq n} B(x_j; \varepsilon)$$

1.3. Continuidad de Funciones

De aquí en adelante escribiremos Y^X para denotar el conjunto de funciones del conjunto X al conjunto Y .

Dada $f \in Y^X$ con X e Y ET, decimos que f es **continua** en X , si para cada $V \subseteq Y$ abierto en Y , $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Escribimos $C(X, Y)$ para denotar el conjunto de funciones continuas de X a Y .

Dada $f \in Y^X$ con X e Y ET, diremos que f es **continua en el punto** $x \in X$, si para cualquier vecindario abierto V de $f(x)$, existe un vecindario abierto U de x tal que $f(U) \subseteq V$.

Propiedades: Dados ET X, Y y Z :

1. $f \in C(X, Y)$ ssi f es continua en cada punto $x \in X$.
2. Si $f \in C(X, Y)$ y $g \in C(Y, Z)$, entonces $g \circ f \in C(X, Z)$.

Dados ET X e Y , decimos que $f \in Y^X$ es un **homeomorfismo** de X a Y , si f es biyectiva y bicontinua, es decir, si f es inyectiva, sobreyectiva, $f \in C(X, Y)$ y $f^{-1} \in C(Y, X)$. Cuando existe un homeomorfismo f entre dos ET X, Y decimos que X e Y son **homeomorfos**, lo cual denotamos por $X \simeq_H Y$.

Observación: Es posible observar que la relación \simeq_H entre espacios topológicos es una relación de equivalencia.

Dado un ET X , una propiedad o característica $\mathbf{P}[X]$ del ET X que puede ser expresada en términos de sus conjuntos abiertos (o cerrados), se denomina **propiedad topológica** de X . En particular, si un ET X tiene una propiedad \mathbf{P} , y si cada $Y \simeq_H X$ tiene dicha propiedad, \mathbf{P} es una propiedad topológica.

1.4. Base de una Topología

Dado un ET (X, \mathcal{T}) decimos que un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una base de \mathcal{T} si cada elemento de \mathcal{T} es una unión de elementos de \mathcal{B} , es decir, $\mathcal{T} = \{\cup \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}\}$.

Propiedades: Dado un ET (X, \mathcal{T}) :

1. Un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es base de \mathcal{T} ssi, para cada $x \in X$ y cada vecindario $U \subseteq X$ de x , existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$.
2. Un conjunto $\hat{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es base de \mathcal{T} ssi $\hat{\mathcal{B}}$ tiene las siguientes propiedades:

- Para cada $x \in X$, existe $V \in \hat{\mathcal{B}}$ tal que $x \in V$.
- Si $U, V \in \hat{\mathcal{B}}$ y $x \in U \cap V$, existe $W \in \hat{\mathcal{B}}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.

Dado un ET X y dada una colección $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de abiertos en X , decimos que \mathcal{C} es una **cubierta abierta** de X si $X \subseteq \cup \mathcal{C}$. Decimos además que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ es una **sub-cubierta** (abierta) de X con respecto a \mathcal{C} , si $X \subseteq \cup \mathcal{S}$.

Un ET (X, \mathcal{T}) se dice **segundo contable** si existe una base contable $\{B_n\}_{n \geq 1}$ para \mathcal{T} .

Dados X, Y EM decimos que $f \in Y^X$ es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para cada $x, y \in X$ tales que $d_X(x, y) < \delta$, se tiene que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Propiedades: Dado un ET X segundo contable.

1. Teorema de Lindelöf. Toda cubierta abierta abierta de X tiene una sub-cubierta contable.
2. X es separable.

1.5. Axiomas de Separación

Diremos que un ET (X_1, \mathcal{T}_1) es **T₁** si para cada $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existe $U \in \mathcal{T}_1$ tal que $y \in U$ y $x \notin U$.

Observación: Es posible observar que un ET (X, \mathcal{T}) es **T₁** ssi para cada $x \in X$, $X \setminus \{x\} \in \mathcal{T}$. Es decir, X es **T₁** ssi para cada $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado con respecto a \mathcal{T} .

Un ET (X_2, \mathcal{T}_2) se denomina **Hausdorff** o **T₂** si para cada $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existen $U, V \in \mathcal{T}_2$ que cumplen con las siguientes restricciones.

$$\begin{cases} x \in U \\ y \in V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

Un ET (X_3, \mathcal{T}_3) se denomina **regular** si para cada $x \in X$ y cada $F \subseteq X$ cerrado tales que $x \notin F$, existen $U, V \in \mathcal{T}_2$ que cumplen con las siguientes restricciones.

$$\begin{cases} x \in U \\ F \subseteq V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

Un ET se dice **T₃** si es regular y **T₁**.

Un ET (X_4, \mathcal{T}_4) se denomina **normal** si para cada $E, F \subseteq X$ cerrados tales que $E \cap F = \emptyset$, existen $U, V \in \mathcal{T}_2$ que cumplen con las siguientes restricciones.

$$\begin{cases} E \subseteq U \\ F \subseteq V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

Un ET se dice \mathbf{T}_4 si es normal y \mathbf{T}_1 .

Observación: $\mathbf{T}_4 \implies \mathbf{T}_3 \implies \mathbf{T}_2 \implies \mathbf{T}_1$

Propiedad: Todo EM es \mathbf{T}_4 .

Propiedad: Un ET X es normal ssi para cada $E \subset X$ cerrado y cada $W \subset X$ abierto tal que $E \subset W$, existe $U \subset X$ abierto tal que $E \subset U$ y $\overline{U} \subset W$.

Propiedad: (Lema de Urysohn) Dados dos conjuntos cerrados disjuntos E y F en un ET normal X , existe $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $f = 0$ en E y $f = 1$ en F .

1.6. Compacidad

Decimos que un ET X es **compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. Es decir, si para toda colección de abiertos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ en X tales que $X \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, existen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que $X \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq n} C_j$.

Dado un conjunto $S \subseteq X$ decimos que S es compacto (como sub-espacio topológico de X) con respecto a la topología relativa en X , si para toda colección de abiertos $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ en X tales que $S \subseteq \bigcup \mathcal{D}$, existen $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{D}$ tales que $S \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq m} D_j$.

Propiedades Dados ET X e Y .

1. Toda unión finita de sub-conjuntos compactos de X es compacta.
2. Si $C \subseteq X$ es cerrado y X es compacto, entonces C es compacto.
3. Si $S \subset X$ es compacto y X es T_2 . Para cada $x \in X \setminus S$ existen abiertos $U, V \subset X$ tales que $x \in U$, $S \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.
4. Si X es compacto y T_2 , entonces X es normal.
5. Si X es compacto y $f \in C(X, Y)$, entonces $f(X)$ es compacto.
6. Si X es compacto, Y es Hausdorff, $f \in C(X, Y)$ y $f : X \hookrightarrow Y$, entonces f es un homeomorfismo de X a $f(X)$.

Propiedades Dados EM X e Y .

1. X es compacto ssi es completo y totalmente acotado.
2. X es compacto ssi toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X .
3. Si X es compacto, entonces X es separable y segundo contable.
4. Si X es compacto, entonces cada $f \in C(X, Y)$ es uniformemente continua.

Propiedades (Teorema de Heine-Borel) Dado $X \subseteq \mathbf{R}^n$ subespacio de \mathbf{R}^n con respecto a la métrica Euclidianas usual.

1. X es compacto ssi es cerrado y acotado.
2. X es compacto ssi toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X .

1.6.1. Compacidad Local

Un ET X se dice localmente compacto (LC) si, para cada $p \in X$, existe un abierto $W \subset X$ tal que $p \in W$ y \overline{W} es compacto.

Propiedad. (Compactificación unipuntual) Sea X un ET T2 LC y sea $Y = X \cup \{\infty\}$ para algún punto $\infty \notin X$. Entonces existe una única topología \mathcal{T}_∞ tal que (Y, \mathcal{T}_∞) es un ET T2 compacto y la topología relativa en X heredada de Y coincide con la topología original para X .

En general un ET compacto Y se dice una **compactificación** de un ET X , si existe $S \subseteq Y$ tal que $X \simeq_H S$ y $\overline{S} = Y$.

1.7. Conectividad

Dado un ET (X, \mathcal{T}) un par $U, V \subset X$ se dice una **separación** de X , si:

$$\begin{cases} U \cup V = X \\ U \cap V = \emptyset \\ U, V, X \setminus U, X \setminus V \in \mathcal{T} \\ U \neq \emptyset, V \neq \emptyset \end{cases}$$

Un ET (X, \mathcal{T}) se dice **desconexo** si existe una separación $U, V \subset X$ de X , en caso contrario se dice que el ET X es **conexo**. Un subconjunto S de un ET X se dice conexo, si es conexo en la topología relativa.

Propiedades. Dados ET X, Y :

- Si X es conexo y $f \in C(X, Y)$, entonces $f(X) \subseteq Y$ es conexo.
- Sea $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de sub-conjuntos conexos de X tales que $E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset$ para cada $\alpha, \beta \in A$. Entonces $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ es conexo.

Dado un punto x en un ET X , la componente conexa de x , denotada por $C(x)$, es la unión de todos los sub-conjuntos conexos de X a los que pertenece x (que contienen a $\{x\}$).

Propiedad. Dos componentes conexas de un ET X son disjuntas ó coinciden. Las componentes conexas de X forman una partición de X en subconjuntos conexos maximales.

Propiedad. Cada intervalo (abierto, cerrado,...) en \mathbf{R} es conexo.

1.8. Conectividad por Trayectorias

Sea X un ET y sean $x_0, x_1 \in X$. Una trayectoria en X de x_0 a x_1 es una función $\gamma \in C([0, 1], X)$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$.

Decimos que un ET X es conexo por trayectorias (CPT) si para cada par $x_0, x_1 \in X$ existe una trayectoria γ en X de x_0 a x_1 .

Propiedad. La relación $x \sim_{CPT} y \iff$ "existe una trayectoria en X de x a y ." es una relación de equivalencia en X .

Dado $x \in X$ con X ET, la clase $[x]_{CPT} = \{y \in X | y \sim_{CPT} x\}$ se denomina componente de trayectorias de x en X .

Propiedades. Dado un ET X :

- Si X es CPT entonces X es conexo.
- Cada componente conexa de X es una unión de componentes de trayectorias.

1.9. Productos Finitos de Espacios Topológicos

Sean $(X_1, \mathcal{T}_{X_1}), \dots, (X_n, \mathcal{T}_{X_n})$ ET. La topología producto \mathcal{T}_Π en el producto cartesiano $X = \prod X_j = X_1 \times \dots \times X_n$ es la topología para la cual una base de abiertos está dada por los rectángulos:

$$\mathcal{R}_X = \{U_1 \times \dots \times U_n | U_j \in \mathcal{T}_{X_j}, 1 \leq j \leq n\}$$

Que \mathcal{R}_X determina una base es consecuencia de resultados previos, junto con el hecho de teoría de conjuntos:

$$(U_1 \times \dots \times U_n) \cap (V_1 \times \dots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \dots \times (U_n \cap V_n)$$

A menos que se especifique lo contrario, supondremos que cada producto finito de espacios topológicos es provisto automáticamente con la topología producto.

Sea $\pi_j : \prod X_k \rightarrow X_j$ el mapa proyección definido por $\pi_j((x_1, \dots, x_n)) = x_j$, $1 \leq j \leq n$. Si $U_j \in \mathcal{T}_{X_j}$, entonces

$$\pi_j^{-1}(U_j) = X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times U_j \times X_{j+1} \times \dots \times X_n$$

es un abierto básico. Esto implica que $\pi_j \in C(\prod X_k, X_j)$ para cada $1 \leq j \leq n$.

Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod X_k$, definimos el **j-slice** $S_j(x)$ como $S_j(x) = \{x_1\} \times \dots \times \{x_{j-1}\} \times X_j \times \{x_{j+1}\} \times \dots \times \{x_n\}$. Tenemos que el embebimiento $X_j \hookrightarrow S_j(x)$ define un homeomorfismo $X_j \simeq_H S_j(x)$ para cada $1 \leq j \leq n$.

Propiedades. Sean X_1, \dots, X_n espacios topológicos:

- \mathcal{T}_Π es la topología más pequeña sobre $\prod X_k$ tal que $\pi_j \in C(\prod X_k, X_j)$ para cada $1 \leq j \leq n$.
- Para cada $U \in \mathcal{T}_\Pi$, $\pi_j(U) \in \mathcal{T}_{X_j}$ para cada $1 \leq j \leq n$.
- Sea E un ET y sea $f \in (\prod X_k)^E$. Entonces $f \in C(E, \prod X_k)$ ssi $\pi_j \circ f \in C(E, X_j)$ para cada $1 \leq j \leq n$.
- Si cada X_j es T_2 , entonces $\prod X_k$ es T_2 .
- Si cada X_j es CPT, entonces $\prod X_k$ es CPT.
- Si cada X_j es conexo, entonces $\prod X_k$ es conexo.
- (Teorema de Tychonoff) Si cada X_j es compacto, entonces $\prod X_k$ es compacto.

1.10. Topología Cociente

Sea (X, \mathcal{T}) un ET, y sea \sim una relación de equivalencia en X . Consideremos el conjunto cociente X/\sim definido por:

$$X/\sim = \{[x] | x \in X\}$$

donde $[x] = \{y \in X | y \sim x\}$. Existe una proyección natural $\pi : X \rightarrow X/\sim$ definida por $\pi(x) = [x]$, para cada $x \in X$. Se define como topología cociente en X con respecto a \sim , la topología $\mathcal{T}_{X/\sim}$ sobre X/\sim determinada por todos los conjuntos $U \subset X/\sim$ tales que $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Propiedad. Sea X un ET y sea \sim una relación de equivalencia en X . Entonces $\mathcal{T}_{X/\sim}$ es la topología más grande para la que la proyección $\pi : X \rightarrow X/\sim$ es continua.

Propiedad. Sea X un ET y sea \sim una relación de equivalencia en X y $\pi : X \rightarrow X/\sim$ el mapa de proyección. Dado un ET Y , $f \in C(X/\sim, Y)$ ssi $f \circ \pi \in C(X, Y)$.

Propiedad. Sea $f \in C(X, Y)$ con X, Y ET. Sea \sim una relación de equivalencia en X tal que f es constante en cada clase de equivalencia. Entonces existe $g \in C(X/\sim, Y)$ tal que $f = g \circ \pi$. Es decir el diagrama siguiente es soluble.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \pi & \nearrow g \\ & X/\sim & \end{array}$$

Propiedad. Sean X, Y ET T_2 compactos y sea $f \in C(X, Y)$ tal que $f(X) = Y$. Si definimos una relación de equivalencia en X como $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$. Entonces $Y \simeq_H X/\sim$.

1.11. Ejercicios

Instrucciones: Resolver las siguientes problemas, dejando evidencia de argumentos precisos y rigurosos que respalden sus resultados y conclusiones.

1. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$. Probar que la función $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Define una métrica en X . Probar que cada subconjunto del EM (X, d) resultante es abierto y cerrado a la vez.

2. Probar que la función $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Define una métrica en \mathbf{R}^n . En el caso particular $n = 2$, dibuje una representación gráfica de la bola $B((0, 0), 1)$ en \mathbf{R}^2 y del conjunto $\overline{B}((0, 0), 1)$.

- 3 Para los siguientes ejercicios asumir que (X, d) es un espacio métrico.

- a Probar que si $Y \subset X$, $\text{Int}(Y)$ coincide con la unión de todos los subconjuntos abiertos de X que están contenidos en Y .
- b Probar que si $Y \subset X$, \overline{Y} coincide con la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a Y .
- c Un conjunto de la forma $\hat{B}(x; r) := \{y \in Y \mid d(x, y) \leq r\}$ es llamado una bola cerrada. Probar que una bola cerrada es un conjunto cerrado. Es $\hat{B}(x; r)$ siempre igual a $\overline{B}(x; r)$? Es cierto lo anterior para $X = \mathbf{R}^n$? Probar sus respuestas.
- d Un punto $x \in X$ es un punto límite de un subconjunto S de X si toda bola $B(x; r)$ contiene infinitos puntos de S . Probar que x es un punto límite de S ssi existe una sucesión $\{x_n\}$ en S tal que $x_n \rightarrow x$ y $x_n \neq x$ para cada n . Probar que el conjunto de puntos límite de S es cerrado.
- e Un punto $x \in S$ es un punto aislado de S si existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \cap S = \{x\}$. Probar que la clausura de un subconjunto S de X es la unión disjunta de los puntos límite y los puntos aislados de S .
- f Tenemos que dos métricas d y ρ son equivalentes ssi las sucesiones convergetes en (X, d) son las mismas sucesiones convergentes en (X, ρ) . Dada la función ρ en $X \times X$ definida por

$$\rho(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}, \quad x, y \in X.$$

Probar que ρ es una métrica y que es equivalente d .

3. Una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en un EM (X, d) es una sucesión rápida de Cauchy si

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}) < \infty.$$

Probar que una sucesión rápida de Cauchy es una sucesión de Cauchy.

4. Probar que toda sucesión de Cauchy tiene un subsucesión que es una sucesión rápida de Cauchy.
5. Probar que el conjunto de puntos aislados de un EM completo contable (X, d) forma un subconjunto denso de X .
6. Sea $S \neq \emptyset$, sea (X, d) un EM, y sea \mathcal{F} el conjunto de funciones de S a X . Para $f, g \in \mathcal{F}$, definir

$$\rho(f, g) = \sup_{s \in S} \min\{1, d(f(s), g(s))\}.$$

Probar que ρ es una métrica en \mathcal{F} . Probar que una sucesión $\{f_n\}$ converge a f en el EM (\mathcal{F}, ρ) ssi $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en X . Probar que (\mathcal{F}, ρ) es completo ssi (X, d) es completo.

7. Probar que el conjunto de números irracionales es denso en \mathbf{R} .
8. Si consideramos a los números racionales \mathbf{R}_0 como un subespacio de \mathbf{R} . Existen puntos aislados en el EM (\mathbf{R}_0, d) ?Cuál es la razón por la que no se contradice lo establecido en el ejercicio 6?
9. Proveer un ejemplo de un EM totalmente acotado que no es compacto.
10. Proveer un ejemplo de un EM completo que no es compacto.
11. Probar directamente que un espacio métrico compacto es totalmente acotado.
12. Probar que si (X, d) es un EM, entonces d es una función continua de $X \times X$ a \mathbf{R} . Probar que para cada $x_0 \in X$, la función $X \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto d(x_0, x)$ es una función uniformemente continua de X a \mathbf{R} .
13. Probar que dos métricas d y ρ para X son equivalentes ssi el mapa identidad $\text{id} : (X, d) \rightarrow (X, \rho), x \mapsto x$ es bicontínuo (es decir, el mapa y su inverso son continuos).
14. Dados (X, d_X) y (Y, d_Y) EM, $\alpha, \beta > 0$, y dada $f \in Y^X$ biyectiva (uno-a-uno y sobre). Probar que si $\alpha d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \beta d_X(x, y)$ para cualquier par $x, y \in X$, entonces $f \in C(X, Y)$. ¿Es f^{-1} continua?
15. Probar que si (X, d) es un EM, para cada $x_0 \in X$, la función $X \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto d(x_0, x)$ es una función uniformemente continua de X a \mathbf{R} .

16. Sea (X, d) un EM. Probar o refutar las siguientes proposiciones:

- (a) Si $Y \subset X$, $\text{int}(Y)$ coincide con la unión de todos los subconjuntos abiertos de X que están contenidos en X .
- (b) Si $Y \subset X$, \bar{Y} coincide con la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a Y .
- (c) Para cada $x \in X$, $\text{int}(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{x\}$.

17. Determine las clausuras de los siguientes SE métricos de \mathbf{R} respecto de la métrica usual:

- (a) $A = \{1/n | x \in \mathbf{Z}^+\}$
- (b) $B = \{1 - 1/n | n \in \mathbf{Z}^+\}$
- (c) $C = \{x | 0 < x < 1\}$
- (d) $C = \{x | 0 < x \leq 1\}$

18. Probar que una función $f : X \rightarrow Y$ es continua ssi $f^{-1}(E)$ es un subconjunto cerrado de X para todo subconjunto cerrado E de Y .

19. Probar que si S es un subconjunto de un ET X , entonces \bar{S} es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S .

20. Probar que si \mathcal{B} es una base para una topología sobre X , entonces la topología generada por \mathcal{B} es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a \mathcal{B} . Calcular una base para la topología relativa del conjunto de números enteros $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, con respecto a la topología usual en \mathbf{R} .

21. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ una familia de topologías sobre X . Pruebe que existe una única topología sobre X más pequeña entre todas las que contienen a todas las colecciones \mathcal{T}_α , y una única topología más grande entre todas las que están contenidas en toda \mathcal{T}_α .

22. Sea $X = [0, 8] \cap \mathbf{Z}$ y sea $f \subset X \times X$ la función definida por

$$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 0), (7, 1), (8, 2)\}.$$

Sea \sim la relación de equivalencia en $X \times X$ definida por la regla $x \sim y$ ssi $f(x) = f(y)$. Calcular:

- (a) La topología más pequeña \mathcal{T}_X de X que contiene a $\{\{0, 3, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\}$.
- (b) La topología cociente $\mathcal{T}_{X/\sim}$ con respecto a \mathcal{T}_X .
- (c) Calcular las componentes conexas $\mathcal{C}(\pi(x))$ y $\pi(\mathcal{C}(x))$ para cada $x \in X$. Donde $\pi : X \rightarrow X/\sim$ es la proyección natural sobre el espacio cociente X/\sim .

23. Sea \mathbf{S}^1 un ET homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Probar que el ET $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ es compacto y CPT.
24. Un punto p de un ET X es un punto de corte si $X \setminus \{p\}$ es desconexo.
- (a) Probar que la propiedad de tener un punto de corte es una propiedad topológica.
 - (b) Utilizar la propiedad topológica de punto de corte para probar que $(0, 1)$ y $[10, 100)$ no son homeomorfos. Son $[\pi, \sqrt{2})$ y $(-\infty, \pi]$ homeomorfos?
25. (a) Probar en detalle que la propiedad de ser conexo es una propiedad topológica.
- (b) Probar que si X es un ET homeomorfo a $[0, 1]$, entonces X es conexo.
26. Se dice que un ET X tiene la propiedad de punto fijo (PPF) si cada mapa $f : X \rightarrow X$ tiene un punto fijo. Propiedad que la PPF es una propiedad topológica.
27. Probar or refutar que los siguientes ET son CPT:
- (a) $\mathbf{S}^1 \simeq_h \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$
 - (b) $\mathbf{S}^2 \simeq_h \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
 - (c) $\mathbf{X} = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$
 - (d) $\mathbf{R}_2^* = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
28. Probar en detalle que la propiedad de ser conexo es una propiedad topológica.
29. Probar que cada subconjunto conexo de \mathbf{R} es un intervalo.
30. Un punto p de un ET X es un punto de corte si $X \setminus \{p\}$ es desconexo. Probar que la propiedad de tener un punto de corte es una propiedad topológica.
31. Sea $f \in C([0, 1], \mathbf{R}^n)$, $n \geq 2$, una función uno-uno. Probar que $f([0, 1])$ no tiene interior.
32. Un ET es totalmente desconexo si sus componentes conexas son todas singuletes. Probar que cualquier espacio métrico contable es totalmente desconexo.
33. Probar que cada componente conexa de un ET es cerrada.
34. Mostrar por contraejemplo que una componente conexa de un ET no es necesariamente abierta.
35. Un ET es localmente conexo (LC) si, para cada punto $p \in X$ y cada conjunto abierto U que contiene a p , existe un conjunto abierto conexo V con $p \in V$ y $V \subset U$. Probar que cada componente conexa de un ET LC es abierta.
36. Probar que cualquier subintervalo de \mathbf{R} (cerrado, abierto, o semiabierto) es CPT.

37. Probar que la propiedad de ser CPT es una propiedad topológica.
38. Probar que si X es CPT y $f : X \rightarrow Y$ es un mapa, entonces $f(X)$ es CPT.
39. Un espacio X es localmente conexo por trayectorias (LCPT) si, para cada subconjunto abierto V de X y cada $x \in V$, existe un vecindario U de x tal que x puede conectarse a cada punto de U por una trayectoria en V . Probar que las componentes de trayectorias de un ET LCPT coinciden con las componentes conexas.
40. Probar que si E_j es un subconjunto cerrado de X_j , $1 \leq j \leq n$, entonces $E_1 \times \cdots \times E_n$ es un subconjunto cerrado de $X_1 \times \cdots \times X_n$.
41. Probar que las componentes conexas de $X_1 \times \cdots \times X_n$ son los conjuntos de la forma $E_1 \times \cdots \times E_n$, donde E_j es una componente conexa de X_j , $1 \leq j \leq n$. Probar que un resultado similar es válido para componentes de trayectorias.
42. Probar que cada proyección π_β de ΠX_α sobre un espacio coordinado X_β es un mapa abierto.
43. Probar que el producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.
44. Sea X/\sim el espacio cociente determinado por una relación de equivalencia \sim en un ET X . Probar las siguientes afirmaciones:
- (a) Si X es compacto, entonces X/\sim es compacto.
 - (b) Si X es conexo, entonces X/\sim es conexo.
 - (c) Si X es CPT, entonces X/\sim es CPT.
45. Sea f un mapa abierto continuo de un ET X sobre un ET Y . Probar que Y es homeomorfo al espacio cociente de X obtenido al identificar cada conjunto de nivel de f con un punto.
46. Sea $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ un producto de espacios topológicos. Definir una relación de equivalencia \sim en X declarando que $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ ssi $x_1 = y_1$. Probar que X/\sim es homeomorfo a X_1 . Probar un resultado análogo para un espacio producto infinito $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Bibliografía

- [1] *T. W. Gamelin, R. E. Greene. (1999). Introduction to Topology. 2a Ed. Dover Publications.*
- [2] *A. Hatcher. (2001). Algebraic Topology. Electronic version.*
- [3] *J. R. Munkres. Topology. 2a Ed. Pearson.*
- [4] *Hecht, F. FreeFEM Documentation. Release 4.2.1.*
- [5] *F. Vides (2018). Introducción al Cómputo Científico e Industrial con GNU Octave. (Lecturas de Clase UNAH)*
- [6] *F. Vides (2019). On Cyclic Finite-State Approximation of Data-Driven Systems. <https://arxiv.org/pdf/1907.06568.pdf>*