Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Departamento de Matemática Pura
Ejercicios complementarios de repaso para el Parcial I
MM 425 Topología

Profesor: Dr. Fredy Vides

Instrucciones: Resolver las siguientes problemas, dejando evidencia de argumentos precisos y rigurosos que respalden sus resultados y conclusiones.

1. Considerando las normas vectoriales definidas para cualquier $x = [x_j] \in \mathbb{R}^n$ por las expresiones:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

y

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

   - Probar que las funciones $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ y $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ definen métricas en $\mathbb{R}^n$.
   - Probar o refutar que $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ para cualquier par $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Dada $A = [a_{jk}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, probar o refutar que para cada $x = [x_j] \in \mathbb{R}^n$.

$$\|Ax\|_2 \leq \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|\right) \|x\|_2$$

3. Considerando la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = Ax + b$ para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Es la función f continua?
   (b) Es la función f uniformemente continua?
   (c) Existen condiciones para A, b que garanticen que la función f sea un homeomorfismo?

   Idea: Considere la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|x \cdot y| \leq \|x\|_2\|y\|_2$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

4. Sea $\mathbf{1}_n$ la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que la matriz $T_A = [t_{jk}] = \mathbf{1}_n - A$ es invertible:
   (a) Probar que la función $f(x) = Ax + b$ tiene un único punto fijo $x \in \mathbb{R}^n$ para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Suponiendo que:

$$0 < \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |t_{jk}| < 1$$

   Probar que para $\{x_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^n$ definida en por las ecuaciones de recurrencia:

$$x_{k+1} = T_A x_k + b, x_1 = b$$

- $\{x_k\}_{k\geq 1}$ es de Cauchy
- $x = \lim_{t\to\infty} x_k$ es un punto fijo de $f(x)$.
- $x_k \to (\mathbf{1}_n - A)^{-1}b$.