

Appunti di Analisi Vettoriale

Alessandro Marcelli

2019



Contents

1 Spazi metrici e successioni di funzioni	1
1.1 Distanze	1
1.2 Intorni	1
1.3 Esempi di metriche	1
1.3.1 Metrica discreta	1
1.3.2 Metrica Euclidea	2
1.3.3 Metriche "equivalenti"	3
1.4 Spazio delle funzioni continue	4
1.5 Spazi normati	4
1.6 Tipologie di punti	4
1.7 Successioni	5
1.7.1 Successioni convergenti	5
1.7.2 Successioni di Cauchy	5
1.8 Spazi	6
1.8.1 Spazi compatti	6
1.8.2 Spazi completi	6
1.8.2.1 Spazi completi (Ex.)	6
1.8.2.2 Spazi <u>non</u> completi (Ex.)	6
1.8.2.3 $(C^0([a, b]), \ \cdot\ _\infty)$ (Ex.)	6
1.8.3 Spazi di Banach	7
1.9 Funzioni Continue	8
1.9.1 Lipschitzianità di una funzione	8
1.9.2 Contrazioni	9
1.9.2.1 Esempio di contrazione	9
1.9.2.2 Teorema di Banach-Cacciopoli (Principio di contrazione)	9
1.10 Successioni di funzioni	11
1.10.1 Criteri di convergenza	11
1.10.1.1 Convergenza Puntuale	11
1.10.1.2 Convergenza Uniforme	11
1.10.1.3 Esempi	11
1.10.2 Teoremi sulle successioni	13
1.10.2.1 Primo Teorema	13
1.10.2.2 Secondo Teorema (Scambio Limite e Integrale)	14
1.10.2.3 Terzo Teorema (Scambio Derivata e Limite)	14
1.10.3 Completezza di $C^1([a, b])$	16
2 Curve ed integrali curvilinei	17
2.1 Curve	17
2.1.1 Curve regolari	17
2.1.1.1 Esempi di curve regolari a tratti	17
2.1.2 Curve semplici	18
2.1.3 Curve equivalenti	18
2.1.4 Lunghezza di una curva	18
2.1.4.1 Esempio: Elica Cilindrica	18
2.1.4.2 Forma cartesiana	19
2.1.4.3 Lunghezze di curve equivalenti	19
2.1.5 Ascissa curvilinea	20
2.1.6 Curve in forma polare	20
2.1.7 Esempi di curve	21
2.1.7.1 Cicloide	21
2.1.7.2 Ellittica	21
2.1.7.3 Cardioidi (curva in forma polare)	22
2.1.7.4 Spirale logaritmica	22
2.1.7.5 Spirale di Archimede	22
2.2 Integrali curvilinei	23

2.2.1	Integrali curvilinei di I tipo (o di funzione)	23
2.2.2	Esempi di I.C. di I o tipo	24
2.2.3	Baricento (o centro di massa) di una curva	24
2.2.4	Integrali curvilinei di II tipo (o di campo vettoriale)	25
2.2.4.1	Esempi di Integrali curvilinei di II tipo	25
3	Funzioni in \mathbb{R}^n	27
3.1	Limiti di funzioni	27
3.1.1	Limiti in \mathbb{R}	27
3.2	Funzioni continue in \mathbb{R}^n	27
3.2.1	Connessione	27
3.2.2	Teoremi sulle funzioni continue	28
3.3	Funzioni in \mathbb{R}^2	28
3.3.0.1	Esempi di calcolo dell'insieme di definizione	28
3.3.0.2	Funzioni radiali	28
3.3.1	Calcolo dei limiti	29
3.3.1.1	Calcolo dei limiti in forma polare	30
3.3.1.2	Esempi di calcolo di limiti	31
3.3.2	Funzioni derivabili	33
3.3.2.1	Derivate Parziali e derivabilità	33
3.3.2.2	Derivate direzionali	34
3.3.3	Differenzialibilità	35
3.3.3.1	Teoremi sulle funzioni differenziabili	35
3.3.3.2	Piani tangenti in \mathbb{R}^3	36
3.3.3.3	Esempi sulla differenziabilità	37
3.3.3.4	Teorema del Differenziale Totale	39
3.3.4	Esercizio da esame	40
3.4	Proposizione sugli insiemi	42
3.5	Funzioni in \mathbb{R}^n	42
3.5.1	Derivazione di funzioni composte in \mathbb{R}^n	42
3.5.1.1	Esempio	43
3.5.2	Funzioni composte e curve di livello	43
3.5.3	Teorema di Lagrange (o del valor medio) in \mathbb{R}^n	43
3.5.4	Teorema delle funzioni costanti	44
3.5.4.1	Esempio	44
3.5.5	Derivate successive	45
3.5.6	Teorema di Schwartz	45
3.5.7	Funzioni vettoriali	46
3.5.7.1	Derivazione di funzioni composte vettoriali	46
3.5.8	Formula di Taylor in \mathbb{R}^n	47
3.5.8.1	Approssimazione al I ordine con resto di Lagrange al II ordine	48
3.5.8.2	Approssimazione al II ordine con resto di Peano	49
3.5.8.3	Esempio di PdT del 1o ordine	50
3.5.9	Punti critici per funzioni a più variabili	51
3.5.9.1	Teorema di Fermat per punti critici interni	51
3.5.9.2	Forme quadratiche	52
3.5.10	Classificazione dei punti critici interni	54
3.5.11	Funzioni convesse	56
3.5.12	Ricerca dei punti critici	57
3.5.13	Punti critici di funzioni coercitive	58
3.6	Funzioni implicite	60
3.6.1	Th. di Dini per funzioni scalari ad una variabile	61
3.6.2	Esempi di esercizi	64
3.6.3	Teorema di Dini per funzioni scalari a più variabili	66
3.6.4	Teorema di Dini per sistemi di funzioni	67
3.6.5	Teorema di Dini nel caso generale	68
3.6.6	Invertibilità Locale	68
3.7	Punti di massimo e minimo vincolati	69
3.7.1	Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange in \mathbb{R}^2	70
3.7.2	Esempi	72
3.7.3	Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange in \mathbb{R}^3	74
3.7.4	Interpretazione geometrica dei moltiplicatori di Lagrange	77
3.7.5	Oss. sui punti critici	78
3.7.6	Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange nel caso generale	79

4 Campi conservativi e irrotazionali	83
4.1 Richiamo sui campi vettoriali	83
4.2 Forme lineari	83
4.3 Campi conservativi	85
4.3.1 Caratterizzazione dei campi conservativi	85
4.4 Domini semplicemente connessi	88
4.5 Lemma di Poincaré	89
5 Integrali	91
5.1 Integrali a più variabili	91
5.1.1 Misura di Peano-Jordan e integrabilità secondo Riemann	91
5.1.2 Misura di Lebesgue	91
5.1.2.1 Insiemi misurabili	91
5.1.2.2 Insiemi misurabili secondo Lebesgue	93
5.1.2.3 Teoremi sugli insiemi misurabili	94
5.1.2.4 Misurabilità di $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ secondo Lebesgue	94
5.1.2.5 Insieme di Cantor	94
5.1.2.6 Misurabilità di insiemi chiusi e aperti secondo Lebesgue	94
5.1.2.7 Misura di un prodotto tra spazi	95
5.2 Integrali di Lebesgue	95
5.2.1 Proprietà degli integrali di Lebesgue	96
5.2.2 Funzioni misurabili	96
5.2.3 "Quasi Ovunque"	97
5.2.4 Criterio del confronto per la sommabilità	98
5.2.5 Criterio del confronto asintotico	98
5.2.6 Teorema di passaggio al limite	98
5.2.7 Teorema di convergenza di Poeno-Segre	99
5.2.8 Scambio tra somma e integrale per serie a termini non negativi	99
5.2.9 Teorema di Lebesgue per la convergenza dominata	100
5.2.10 Spazi di Lebesgue L^p	101
5.2.11 Derivazione sotto segno di integrale	101
5.2.12 Misura di insiemi in \mathbb{R}^2	104
5.2.13 Teorema di Fubini	106
5.2.14 Centro di Massa di una superficie	108
5.2.15 Calcolo dei volumi	109
5.2.16 Cambio di variabili (MANCANTE)	109
5.3 Integrali impropri di Riemann	110
5.3.1 Integrali impropri di I tipo	110
5.3.2 Integrali impropri di II tipo	110
5.3.3 Criterio del confronto per integrali impropri	111

Chapter 1

Spazi metrici e successioni di funzioni

Si parla di spazi metrici quando si può definire su di essi una **metrica**, e si può quindi definire la coppia (X, d) .

1.1 Distanze

Sia un insieme di elementi $X \neq \emptyset$, definiamo come **distanza** un'applicazione

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty) \quad (1.1)$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) \quad (1.2)$$

che rispetta le seguenti proprietà

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ [disuguaglianza triangolare]

1.2 Intorni

Sia $x_0 \in X$, si definisce un suo intorno di **raggio** R come

$$I(x_0, R) = \{x \in X : d(x, x_0) < R\} \quad (1.3)$$

Gli intorni si dividono in due categorie:

1. Aperti

preso $A \subset X$, A si dice aperto se

$$\forall x \in A \quad \exists R > 0 : I(x, R) \subset A \quad (1.4)$$

2. Chiusi

preso $C \subset X$, C si dice chiuso se il suo complementare $\overline{C} = X \setminus C$ è aperto

1.3 Esempi di metriche

Vediamo degli esempi notevoli

1.3.1 Metrica discreta

$$X : d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (1.5)$$

$$I(x, R) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } R < 1 \\ X & \text{se } R \geq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Si nota subito come le proprietà della distanza siano rispettate.

Notiamo che per come è definita la metrica, ogni sottoinsieme è discreto.

1.3.2 Metrica Euclidea

$$X = \mathbb{R}^n \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n) \quad (1.7)$$

$$d_n(x, y) = |x - y|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (1.8)$$

Verifichiamo come $d_n(x, y)$ sia una buona metrica.

Le prime due proprietà sono evidenti, la terza un po' meno.

$$|x - y|_n \stackrel{?}{\leq} |x - z|_n + |z - y|_n \quad (1.9)$$

definiamo

$$x - z = a \quad (1.10)$$

$$z - y = b \quad (1.11)$$

$$x - y = x - z + z - y = a + b \quad (1.12)$$

e riscriviamo

$$|a + b|_n \stackrel{?}{\leq} |a|_n + |b|_n \quad (1.13)$$

Dimostrare questo è equivalente a dimostrare

$$|a + b|_n^2 \stackrel{?}{\leq} (|a|_n + |b|_n)^2 \quad (1.14)$$

Procediamo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} |a + b|_n^2 &\stackrel{?}{\leq} (|a|_n + |b|_n)^2 \\ \downarrow & \\ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &\stackrel{?}{\leq} |a|_n^2 + |b|_n^2 + 2|a|_n|b|_n \\ \downarrow & \\ \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 + 2a_i b_i &\stackrel{?}{\leq} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2|a|_n|b|_n \\ \downarrow & \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i &:= \langle a | b \rangle \stackrel{?}{\leq} |a|_n|b|_n \end{aligned} \quad (1.15)$$

Per verificare questo ci serve la **diseguaglianza di Cauchy-Schwartz**, che ricaviamo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + tb_i)^2 &\geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \downarrow & \\ \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2 + 2ta_i b_i) &\geq 0 \\ \downarrow & \\ |a|_n^2 + |b|_n^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq 0 \\ \downarrow & \\ |a|_n^2 + |b|_n^2 + 2t \langle a | b \rangle &\geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Quest'ultima disequazione rappresenta un luogo di punti contenuto in una parabola convessa che incrocia gli assi al massimo in un punto, quindi segue che $\Delta \leq 0$, ovvero

$$\begin{aligned} \Delta = 4t^2 |\langle a | b \rangle|^2 - 4t^2 |a|_n^2 |b|_n^2 &\leq 0 \\ \downarrow & \\ |\langle a | b \rangle|^2 &\leq |a|_n^2 |b|_n^2 \\ \downarrow & \\ |\langle a | b \rangle| &\leq |a|_n |b|_n \quad [\text{disequazione di Cauchy-Schwartz}] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Siccome sappiamo che $a \leq |a| \forall a$ ne segue la nostra dimostrazione:

$$\langle a|b \rangle \leq |\langle a|b \rangle| \leq |a|_n|b|_n \rightarrow \langle a|b \rangle \leq |a|_n|b|_n \quad (1.18)$$

in metrica euclidea gli intorni si dicono "circolari", dato che assumono forme del tipo:

$$I(0, R) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R \right\} \quad (1.19)$$

che è l'equivalente di una circonferenza di raggio R^2 .

1.3.3 Metriche "equivalenti"

Si parla di **metriche equivalenti** quando si ha che

$$m, M > 0 : m\delta(x, y) < d(x, y) < M\delta(x, y) \quad (1.20)$$

$$I_d(x, mR) \subset I_\delta(x, R) \subset I_d(x, MR) \quad (1.21)$$

In altri termini, in ogni intorno nella metrica δ posso avere un intorno della metrica d . Alcuni esempi sono:

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i(x_i - y_i)^2} ; \quad a_i > 0, a_i \in \mathbb{R} \quad (1.22)$$

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|_1 \quad (1.23)$$

$$d_3(x, y) = \max_{i \in [1, n]} |x_i - y_i|_1 \quad (1.24)$$

Tutti gli spazi su cui sono applicabili sono metrici, e gli intorni saranno del tipo:

$$I_1(0, R) = \left\{ (x_1, x_2) : \sqrt{a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2} < R \right\} \quad \text{intorno circolare} \quad (1.25)$$

$$I_2(0, R) = \{(x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| < R\} \quad \text{intorno romboidale} \quad (1.26)$$

$$I_3(0, R) = \{(x_1, x_2) : \max(|x_1|, |x_2|) < R\} \quad \text{intorno quadrato} \quad (1.27)$$

1.4 Spazio delle funzioni continue

$$X = C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } [a, b]\} \quad (1.28)$$

Definiamo la **metrica uniforme** come

$$d(f, g) = \sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty \quad (1.29)$$

Vediamo come rispetti le proprietà delle distanze:

Le prime due sono evidenti, dimostriamo solo la terza

GLI APPUNTI CHE MI HANNO GIRATO NON HANNO SENSO, VEDERE CON QUALCUNO

Possiamo quindi dire che $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ costituiscono uno spazio metrico.

1.5 Spazi normati

Si dice che uno spazio vettoriale X è anche normato se vi è definibile

$$\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty) \quad (1.30)$$

con le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Possiamo fare le seguenti osservazioni:

1. uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è anche metrico con $d(x, y) = \|x - y\|$
2. $C^0([a, b])$ è spazio normato con $\|x\| = |x|_n = \sqrt{\sum x_i^2}$: $\|f\| = \|f\|_\infty$
3. \mathbb{R} con la metrica discreta non è uno spazio normato, infatti

$$\|x\| = d(x, 0) \quad (1.31)$$

$$\|\lambda x\| = d(\lambda x, 0) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

1.6 Tipologie di punti

Sia uno spazio metrico (X, d) con $D \subseteq X$, preso un $x \in D$, esso sarà, rispetto a D :

1. Interno

se $\exists R > 0 : I(x, R) \subset D$

Osservazione: Se D è aperto tutti i suoi punti sono interni, e viceversa.

2. Esterno

se $\exists R > 0 : I(x, R) \subset X \setminus D$

3. di Frontiera ($x \in \partial D$)

se $\forall R > 0$ si ha $I(x, R) \cap D \neq \emptyset \neq I(x, R) \cap X \setminus D$

Si definisce **chiusura di D** l'insieme $\overline{D} = D \cup \partial D$

4. di Accumulazione

se $\forall R > 0$ in $I(x, R)$ cade almeno un punto di D diverso da x .

L'insieme dei punti di accumulazione $acc(D)$ prende il nome di **Derivato di D**.

Osservazione: C chiuso $\Leftrightarrow \partial C \subseteq C \Leftrightarrow acc(C) \subseteq C \Leftrightarrow C = \overline{C}$

1.7 Successioni

Sia (X, d) uno spazio metrico, si definisce come **successione di funzioni** come

$$\{x_k\}_{k \geq 1} ; \quad x_k \in X \quad (1.33)$$

1.7.1 Successioni convergenti

Si dice che una successione $\{x_k\}_{k \geq 1} \in X$ è convergente ad $x_0 \in X$ quando

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_0) = 0 \leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \leftrightarrow x_k \xrightarrow{d} x_0 \quad (1.34)$$

Vediamone alcuni **esempi**:

1. in \mathbb{R} avremo $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_0|_1 = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$
2. in \mathbb{R}^n avremo $\lim_{k \rightarrow \infty} |\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^0|_n = 0 \implies \underline{x}^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \underline{x}^0$
3. $\underline{x}^{(k)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{e^{x^2}}, \sin(\frac{1}{k})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0, 0, 0)$

cosa dubbia, cercare appunti altrui

1.7.2 Successioni di Cauchy

Dato uno spazio metrico (X, d) , una successione $\{x_k\}_{k \geq 1} \in X$ si dice **di Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : d(x_{n+p}, x_n) < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon, \forall p > 0 \quad (1.35)$$

Uno strumento utile è il seguente **teorema**:

se $\{x_k\}_{k \geq 1} \in X$ converge ad x^0 allora è anche **di Cauchy**.

La dimostrazione è semplice:

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x^0) + d(x^0, x_p) \quad (1.36)$$

Siccome per ipotesi la successione è convergente avremo, $\forall n > n_\epsilon$

$$d(x_{n+p}, x^0) < \frac{\epsilon}{2} \quad (1.37)$$

$$d(x^0, x_p) < \frac{\epsilon}{2} \quad (1.38)$$

e quindi

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (1.39)$$

E il teorema è quindi dimostrato.

NOTA BENE: Non è detto il viceversa!

1.8 Spazi

1.8.1 Spazi compatti

Si dice che uno spazio è **compatto** se $\forall \{x_k\}_{k \geq 1} \in X$ è possibile ricavare una sottosuccessione convergente.

Un'altro modo per definire la compattezza è tramite il teorema di **Heine-Borel**, che afferma:

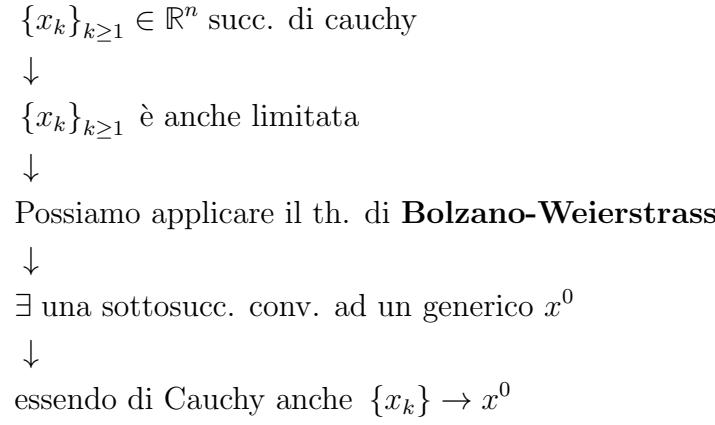
$A \subset \mathbb{R}$ è compatto se e solo se A è chiuso e compatto

1.8.2 Spazi completi

Si dice che uno spazio X è **completo** qualora ogni successione di Cauchy in esso converga ad un $x \in X$

1.8.2.1 Spazi completi (Ex.)

Tutti gli $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ sono spazi metrici completi. Diamo una dimostrazione semplice e poco approfondita:



1.8.2.2 Spazi non completi (Ex.)

1. $(\mathbb{Q}, |\cdot|_1)$ non è completo, dato che

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad (1.40)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \notin \mathbb{Q} \quad (1.41)$$

2. $X = (0, 2)$

$$x_n = \frac{1}{n} \in X \quad (1.42)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin X \quad (1.43)$$

1.8.2.3 $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ (Ex.)

Dimostriamo come lo spazio delle funzioni continue sia completo in metrica $\|\cdot\|_\infty$

Sia $\{f_n(x)\} \in C^0([a, b])$ una successione di Cauchy, ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : \|f_{n+p} - f_n\| < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon, \forall p > 0 \quad (1.44)$$

Fissato $x \in [a, b]$ avremo

$$|f_{n+p} - f_n| \leq \|f_{n+p}(x) - f_n(x)\|_\infty < \epsilon \quad (1.45)$$

Ne segue quindi che $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in \mathbb{R} , e siccome esso è completo questo vuol dire che abbiamo un candidato limite:

$$\exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (1.46)$$

Ora ci rimane da dimostrare che

$$1. f_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f(x)$$

$$2. f(x) \in C^0([a, b])$$

Partiamo dal primo punto:

Abbiamo che

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n > n_\epsilon \\ \forall p > 0 \\ \forall x \in [a, b] \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Per costruzione sappiamo che

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_{n+p}(x) = f(x) \quad (1.48)$$

Da cui

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n > n_\epsilon \\ \forall x \in [a, b] \end{array} \right. \quad (1.49)$$

$$\downarrow \\ \sup_{[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon \quad (1.50)$$

$$\downarrow \\ \|f(x) - f_n(x)\|_\infty \leq \epsilon \quad \text{Q.E.D.} \quad (1.51)$$

Il secondo punto si dimostra nel seguente modo:

Possiamo scrivere, utilizzando la dis. triangolare

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \quad (1.52)$$

Ma sappiamo che

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n > n_\epsilon \text{ per convergenza uniforme} \quad (1.53)$$

$$|f_n(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall x : |x - x_0| < \delta_\epsilon \text{ per continuità} \quad (1.54)$$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n > n_\epsilon \text{ per convergenza uniforme} \quad (1.55)$$

Da cui segue la dimostrazione con

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon \quad (1.56)$$

1.8.3 Spazi di Banach

Sono detti **di Banach** quegli spazi normati $(X, \|\cdot\|)$ che sono anche completi nella metrica indotta dalla norma.

1.9 Funzioni Continue

Sia definita una funzione come un'applicazione del tipo

$$f : (X, d_x) \longrightarrow (Y, d_y) \quad (1.57)$$

$$x \in X \longrightarrow y \in Y \quad (1.58)$$

Essa sarà continua in $x_0 \in X$ se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon : d_x(x, x_0) < \delta_\epsilon \implies d_y(y, y_0) < \epsilon \quad (1.59)$$

Esempi di tali applicazioni posso essere:

1. Funzione di una variabile

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.60)$$

2. Curva nel piano

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow (x(t), y(t)) \end{aligned} \quad (1.61)$$

3. Curva nello spazio

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \quad (1.62)$$

4. Superficie nello spazio

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longrightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned} \quad (1.63)$$

5. Funzionali (ex. l'integrale)

$$\begin{aligned} T : C^0([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow T(f) \end{aligned} \quad (1.64)$$

1.9.1 Lipschitzianità di una funzione

Si dice che un'applicazione $T : X \longrightarrow X$ è Lipschitziana se

$$\exists L > 0 : d(T_x, T_y) < L d(x, y) \quad \forall x, y \in X \quad (1.65)$$

(NOTA: $T_x = T(x)$ per eleganza)

1.9.2 Contrazioni

Preso uno spazio (X, d) le contrazioni sono una categoria di applicazioni continue e lipschitziane $T : X \rightarrow X$ tali che

$$d(T_x, T_y) < \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X ; \alpha \in (0, 1) \quad (1.66)$$

1.9.2.1 Esempio di contrazione

Dimostriamo come la seguente applicazione sia una contrazione

$$T : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]) \quad (1.67)$$

$$f \rightarrow T_f = 1 + \int_0^1 dt te^{-xt} f(t)$$

$$\begin{aligned} |T_{f(x)} - T_{g(x)}| &= \left| \int_0^1 dt te^{-xt} [f(t) - g(t)] \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 dt te^{-xt} |f(x) - g(x)| \leq \\ &\leq \int_0^1 dt te^{-xt} \sup_{[0,1]} |f(x) - g(x)| \leq \\ &\leq \int_0^1 dt te^{-xt} \|f - g\|_\infty = \|f - g\|_\infty \int_0^1 dt te^{-xt} \leq \\ &\leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 dt t = \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty \end{aligned} \quad (1.68)$$

E quindi ne segue che $\|T_f - T_g\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty$, che è una contrazione con $\alpha = \frac{1}{2}$

1.9.2.2 Teorema di Banach-Cacciopoli (Principio di contrazione)

Il principio di contrazione afferma che

Dati (X, d) spazio metrico completo con $X \neq \emptyset$ e T contrazione di X in se stesso, avremo che T ammette un solo punto fisso $\bar{x} : T_{\bar{x}} = \bar{x}$

Inziamo la dimostrazione prendendo $x_0 \in X$ e definendo una successione $\{x_n\}_{n \geq 1} \in X$ per ricorrenza come

$$x_1 = T_{x_0}, x_2 = T_{x_1}, \dots, x_{n+1} = T_{x_n} \quad (1.69)$$

Per prima cosa dimostriamo come essa sia di Cauchy:

Per costruzione e per definizione di contrazione avremo che

$$d(x_1, x_2) = d(T_0, T_1) \leq \alpha d(x_0, x_1) \quad (1.70)$$

Da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leq \alpha d(x_1, x_2) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1) \\ &\downarrow \\ d(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha^n d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (1.71)$$

Da questo segue che, usando la diseguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (\alpha^{n+p-1} + \dots + \alpha^n) d(x_0, x_1) = \alpha^n \sum_{k=0}^{p-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Ma la sommatoria è una ridotta della serie geometrica, di cui conosciamo la somma! Possiamo quindi scrivere

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \alpha^n \frac{1 - \alpha^{p-1}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \quad (1.73)$$

Ma notando come con le maggiorazioni sia sparita la dipendenza da p , e ricordando che α è infinitesimo, ricaviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0 \implies d(x_{n+p}, x_n) < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon ; \forall p > 0 \quad (1.74)$$

E sono quindi verificate le ipotesi di Cauchy.

Ora che abbiamo questa informazione sappiamo anche che, nello spazio metrico completo (X, d) avremo che

$$\exists \bar{x} \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \quad (1.75)$$

Dobbiamo ora dimostrare il suo essere un punto fisso:

$$0 \leq d(T_{x_n}, T_{\bar{x}}) \leq \alpha d(x_n, \bar{x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies d(T_{x_n}, T_{\bar{x}}) = 0 \quad (1.76)$$

ma per costruzione $T_{x_n} = x_{n+1}$, questo significa che

$$d(x_{n+1}, T_{\bar{x}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (1.77)$$

E per il teorema dell'unicità del limite segue che $T_{\bar{x}} = \bar{x}$

Rimane ora solo da dimostrarne l'unicità. Procediamo per assurdo:

$$\exists \hat{x}, \bar{x} \in X, \hat{x} \neq \bar{x}, T_{\hat{x}} = \hat{x}, T_{\bar{x}} = \bar{x} \quad (1.78)$$

$$0 \leq d(\hat{x}, \bar{x}) = d(T_{\hat{x}}, T_{\bar{x}}) \leq \alpha d(\hat{x}, \bar{x}) < d(\hat{x}, \bar{x}) \quad (1.79)$$

Il che è impossibile, perché ci troviamo ad avere una distanza strettamente minore di se stessa, essendo $\alpha < 1$. Il teorema è così dimostrato.

1.10 Successioni di funzioni

Si parla di successioni di funzioni quando si ha

$$\{f_n\}_{n \geq 1} ; f_n : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.80)$$

1.10.1 Criteri di convergenza

1.10.1.1 Convergenza Puntuale

Si dice che $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge **puntualmente** in I se

$$\forall x \in I \quad \exists f(x) : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (1.81)$$

In simboli si scrive $f_n(x) \rightarrow f(x)$

1.10.1.2 Convergenza Uniforme

Si dice che $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge **uniformemente** a $f(x) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in I se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (1.82)$$

Si può anche scrivere $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n(x) - f(x)\|_\infty$ ma si perde l'informazione dell'intervallo.

In simboli si scrive $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$

Osservazione: La convergenza uniforma implica quella puntuale, infatti siccome

$$x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \quad (1.83)$$

Se c'è convergenza uniforme allora $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ è infinitesimo, allora

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (1.84)$$

Da cui segue la conv. puntuale.

1.10.1.3 Esempi

1. $f_n(x) = x^n ; x \in [0, 1]$

(a) convergenza puntuale

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^n & x \in (0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad (1.85)$$

(b) convergenza uniforme

$$\{f_n(x)\} \in C^0([0, 1]) \quad (1.86)$$

Se $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ allora $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $C^0([0, 1])$

Ma allora, essendo $C^0([0, 1])$ uno spazio metrico completo anche $f(x)$ dovrebbe appartenere, ma ciò non è perché è discontinua. Quindi non c'è convergenza uniforme in $[0, 1]$.

$$2. f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

(a) convergenza puntuale

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2} = |x| = f(x) \quad (1.87)$$

(b) convergenza uniforme

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \right) = \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \right) \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}} = \\ &= \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}} \frac{1}{n^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\frac{1}{n}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (1.88)$$

Non dipendendo da x il sup e annullandosi abbiamo convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} .

$$3. f_n(x) = \begin{cases} nx & x \in [0, n^{-1}] \\ 2 - nx & x \in (n^{-1}, 2 \cdot n^{-1}) \\ 0 & x \in [2 \cdot n^{-1}, 1] \end{cases}$$

(a) convergenza puntuale

$$f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.89)$$

per $x > 0$ avremo che per n molto grandi $x \in (\frac{2}{n}, 1]$

\downarrow

$$f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall n > \frac{2}{\lambda} \quad (1.90)$$

Abbiamo quindi convergenza puntuale a $f(x) \equiv 0$

(b) convergenza uniforme

$$\sup_I |f_n(x) - 0| = \max_I f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.91)$$

E quindi non si ha convergenza uniforme.

$$4. f_n(x) = (1-x)x^n \quad x \in [0, 1]$$

(a) convergenza puntuale

$$f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.92)$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad x \in (0, 1) \quad (1.93)$$

$$f_n(1) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.94)$$

Abbiamo quindi convergenza puntuale a $f(x) \equiv 0$

(b) convergenza uniforme

$$\|(1-x)x^n - 0\|_\infty = \max_I (1-x)x^n = \max_I g(x) \geq 0 \quad (1.95)$$

Per trovare questo massimo procediamo nel seguente modo

$$\begin{aligned} g(x) = (1-x)x^n &\implies g'(x) = -x^n + (1-x)nx^{n-1} \\ &\downarrow \\ x^{n-1}(n - xn - x) &= x^{n+1}[n(1+n)x] = 0 \\ &\downarrow \\ \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \frac{n}{1+n} < 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} g(x_0) = 0 \\ g(x_1) = \frac{1}{1+n}(\frac{n}{1+n})^n > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.96)$$

Il punto di max è chiaramente x_1 , quindi ci troviamo a studiare

$$\begin{aligned} \|(1-x)x^n - 0\|_\infty &= \max_I g(x) = g(x_1) = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{\frac{1}{n} + 1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 \end{aligned} \quad (1.97)$$

Essendo il risultato indipendente da x abbiamo convergenza uniforme su tutto \mathbb{R} .

5. $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}$; $I = [-1, +1]$

(a) convergenza puntuale

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ f_n(x) & x \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies f(x) \equiv 0 \quad (1.98)$$

(b) convergenza uniforme

$$\|f_n(x) - 0\|_\infty = \max_I \left| \frac{nx}{1+(nx)^2} \right| \quad (1.99)$$

Poniamo $t = nx$ e studiamo $g(t) = \frac{t}{1+t^2}$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{1+t^2} - 2 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \\ &= \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = 0 \implies \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = +1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.100)$$

Da cui avremo che il punto di massimo si ha per $x_M = \frac{1}{n}$, e quindi

$$\|f_n(x) - 0\|_\infty = \max_I \left| \frac{nx}{1+(nx)^2} \right| = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \quad (1.101)$$

E non si ha quindi convergenza uniforme.

1.10.2 Teoremi sulle successioni

1.10.2.1 Primo Teorema

Date $\{f_n\}_{n \geq 1}$ con $f_n(x) \in C^0(I)$ $I \subseteq \mathbb{R}$, avremo che

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \implies f(x) \in C^0(I) \quad (1.102)$$

Osservazione: $I = [a, b]$ segue dalla completezza di $C^0([a, b])$

Dimostriamo il teorema:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \implies \forall \epsilon > 0 \quad \exists n > n_\epsilon : \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (1.103)$$

Per la diseguaglianza triangolare avremo che

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon+1}(x)| + |f_{n_\epsilon+1}(x) - f_{n_\epsilon+1}(x_0)| + |f_{n_\epsilon+1}(x_0) - f(x_0)| \quad (1.104)$$

Ma sappiamo che

$$|f(x) - f_{n_\epsilon+1}(x)| \leq \|f_{n_\epsilon+1}(x) - f(x)\|_\infty < \epsilon \quad (1.105)$$

$$|f_{n_\epsilon+1}(x) - f_{n_\epsilon+1}(x_0)| < \epsilon \quad \text{per continuità di } f_{n_\epsilon+1} \quad (1.106)$$

$$|f_{n_\epsilon+1}(x_0) - f(x_0)| \leq \|f_{n_\epsilon+1}(x_0) - f(x_0)\|_\infty < \epsilon \quad (1.107)$$

E quindi segue che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon : |f(x) - f(x_0)| < 3\epsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta_\epsilon \quad (1.108)$$

e il teorema è dunque dimostrato.

1.10.2.2 Secondo Teorema (Scambio Limite e Integrale)

Date $\{f_n\}_{n \geq 1}$ con $f_n(x) \in C^0([a, b])$ $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, avremo che

$$f_n(x) \rightrightarrows_{[a,b]} f(x) \implies \int_a^b dt \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dt f_n(t) \quad (1.109)$$

e quindi anche

$$\int_a^b dt f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dt f_n(t) \quad (1.110)$$

La dimostrazione si svolge nel seguente modo

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b dt f_n(t) - \int_a^b dt f(t) \right| &= \left| \int_a^b dt [f_n(t) - f(t)] \right| \leq \\ &\leq \int_a^b dt |f_n(t) - f(t)| \leq \\ &\leq \int_a^b dt \max_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \\ &= \int_a^b dt \|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \\ &= \|f_n(x) - f(x)\|_\infty \int_a^b dt = \\ &= \|f_n(x) - f(x)\|_\infty (b - a) \end{aligned} \quad (1.111)$$

Ma se $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ segue che $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Da cui, ricordando che il modulo è una quantità non negativa, otteniamo il risultato desiderato:

$$0 \leq \left| \int_a^b dt f_n(x) - \int_a^b dt f(x) \right| \leq 0 \quad (1.112)$$

1.10.2.3 Terzo Teorema (Scambio Derivata e Limite)

Siccome abbiamo visto come sotto determinate condizioni è possibile scambiare anche derivata e limite.

Come per l'integrale, la risposta in generale è: **No**, com'è vediamo negli esempi che seguono.

1. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$; $x \in I \subseteq \mathbb{R}$

Infatti

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \implies f'_n(0) = 0 \quad (1.113)$$

Ma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x| \quad (1.114)$$

Che non è derivabile in 0.

2. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \in \mathbb{R}$ oppure $[a, b]$

$$f'_n(x) = \cos(nx) \quad (1.115)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & nx = 0 \\ 0 & nx : \sin(nx) \neq 0 \end{cases} \implies f(x) \equiv 0 = f'(x) \quad (1.116)$$

Ma $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(nx)$, e quindi non si possono scambiare.

Enunciamo quindi il **Teorema di Scambio tra Derivata e Limite**:

Sia $\{f_n\}$ con $f_n(x) \in C^1([a, b])$ se valgono le seguenti ipotesi:

1. $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \in \mathbb{R}$
2. $\{f'_n\} : f'_n(x) \rightrightarrows g(x)$

Allora segue che:

1. $f_n \rightrightarrows f(x)$
2. $f(x) \in C^1([a, b]) ; f'(x) = g(x) \leftrightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$

Per la dimostrazione si parte dal th. fondamentale del calcolo, che ci dice:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x dt f'_n(t) \quad (1.117)$$

Da cui otteniamo, passando a limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = l + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x dt f'_n(t) \quad (1.118)$$

ma siccome le ipotesi sono le stesse del th. di scambio fra limite e integrale scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = l + \int_{x_0}^x dt g(t) \quad (1.119)$$

Ma questo implica che

$$\exists f(x) = l + \int_{x_0}^x dt g(t) \quad \forall x \in [a, b] : f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad (1.120)$$

Questo ci porta ad avere

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x_0) - l + \int_{x_0}^x dt [f'_n(t) - g(t)]| \leq \\ &\leq |f_n(x_0) - l| + \left| \int_{x_0}^x dt [f'_n(t) - g(t)] \right| \leq \\ &\leq |f_n(x_0) - l| + \|f'_n(t) - g(t)\|_\infty |x - x_0| \leq \\ &\leq |f_n(x_0) - l| + \|f'_n(t) - g(t)\|_\infty |b - a| \end{aligned} \quad (1.121)$$

Ma sappiamo che

$$|f_n(x_0) - l| < \epsilon \quad \text{per continuità delle } f_n(x) \quad (1.122)$$

$$\|f'_n(t) - g(t)\|_\infty < \epsilon \quad \text{per la seconda ipotesi del teorema} \quad (1.123)$$

Questo implica, essendo entrambi **strettamente minori**, che anche

$$\|f_n(x_0) - l\|_\infty < \epsilon \quad \forall x \in [a, b], \forall n > n_\epsilon \quad (1.124)$$

Questo dimostra la prima tesi, mentre la seconda di nuovo dal th. fondamentale del calcolo, in quanto

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x dt f'(x) \quad (1.125)$$

ma

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = l + \int_{x_0}^x dt \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) \quad (1.126)$$

e dato che per continuità $f(x_0) = l$, sottraendo membro a membro otteniamo infine che

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) \quad (1.127)$$

1.10.3 Completezza di $C^1([a, b])$

Abbiamo visto come C^0 sia completo con la norma $d_0(f, g) = \|f - g\|_\infty$

Ci chiediamo ora: con quale metrica sarà completo C^1 ? Non con $d_0(f, g)$, visto che

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \Rightarrow |x| \quad x \in [-1, +1] \quad (1.128)$$

Che è sì di Cauchy, ma non converge ad una funzione di classe C^1 .

Introduciamo quindi la seguente metrica

$$d_1(f, g) = \sup_{[a, b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{[a, b]} |f'(x) - g'(x)| = \quad (1.129)$$

$$= \|f(x) - g(x)\|_\infty + \|f'(x) - g'(x)\|_\infty \quad (1.130)$$

Con questa metrica avremo che se $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $(C^1([a, b]), d_1)$ allora

$$\|f(x) - g(x)\|_\infty < \epsilon \quad (1.131)$$

$$\|f'(x) - g'(x)\|_\infty < \epsilon \quad (1.132)$$

Questo vuol dire che entrambe sono di Cauchy in $(C^0([a, b]), d_0)$, e che sono anche verificate le ipotesi del teorema di scambio fra derivata e limite, e troviamo quindi che

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \in C^1([a, b]) \\ f'_n \Rightarrow f'(x) \end{array} \right. \implies f_n \xrightarrow{d_1} f \in C^1([a, b]) \quad (1.133)$$

E quindi $(C^1([a, b]), d_1)$ è completo.

Un altro esempio di metrica in cui C^1 è completo si ha, preso ad esempio l'intervallo $[0, 1]$ con

$$\begin{aligned} \tilde{d}(f, g) &= |f(x) - g(x)| + \sup_{[0, 1]} |f'(x) - g'(x)| = \\ &= |f(x) - g(x)| + \|f'(x) - g'(x)\|_\infty \end{aligned} \quad (1.134)$$

Data $\{f_n(x)\} \in C^1([0, 1])$ se è di Cauchy allora $f_n(x) \xrightarrow{\tilde{d}} f(x)$

Deve essere inoltre che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : |f_{n+p} - f_n| + \|f'_{n+p} - f'_n\|_\infty < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon \quad \forall p > 0 \quad (1.135)$$

Ma questo implica che

$$|f_{n+p}(0) - f_n(0)| < \epsilon \implies \{f_n(0)\} \text{ di Cauchy in } \mathbb{R} \text{ completo} \quad (1.136)$$

$$\|f'_{n+p} - f'_n\|_\infty < \epsilon \implies \{f'_n\} \text{ di Cauchy in } (C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \quad (1.137)$$

La seconda implica anche che $f'(x) \Rightarrow g(x) \in (C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, e abbiamo quindi tutte le ipotesi del th. di scambio tra limite e derivata!

Ci troviamo quindi a lavorare con una metrica che fa sì che

$$f_n \xrightarrow{\tilde{d}} f \quad (1.138)$$

$$f'_n \xrightarrow{\tilde{d}} f' \quad (1.139)$$

E abbiamo quindi la completezza di C^1 con la metrica \tilde{d} .

Chiudiamo il discorso delle successioni di funzioni con un **esempio**:

$$f_n(x) = \frac{x[(nx)^2 - 2]}{(nx)^2 + 1} \quad (1.140)$$

1. convergenza puntuale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x[(nx)^2 - 2]}{(nx)^2 + 1} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x & x \neq 0 \end{cases} \quad (1.141)$$

2. convergenza uniforme:

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{x[(nx)^2 - 2]}{(nx)^2 + 1} - x \right| = \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{x}{(nx)^2 + 1} \right| \quad (1.142)$$

In modo analogo ad altri esercizi studiamo la derivata della $f_n(x)$ e troviamo un punto di massimo in $x = \frac{1}{n}$ da cui

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{x}{(nx)^2 + 1} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1.143)$$

E abbiamo quindi convergenza uniforme.

Chapter 2

Curve ed integrali curvilinei

2.1 Curve

Si definiscono **Curve nello spazio** quelle applicazioni

$$\underline{r}(t) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

$$t \longrightarrow (x(t), y(t), z(t)) \quad (2.2)$$

con

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in C^0([a, b]) ; |r(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} \quad (2.3)$$

$$\gamma = \{x(t), y(t), z(t), t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ sostegno della curva} \quad (2.4)$$

Se $z(t) = 0$ si parla di **Curve nel piano**.

2.1.1 Curve regolari

Si dice che una curva è **regolare** se

1. $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in C^1([a, b])$
2. $\underline{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0) \leftrightarrow |r'(t)| > 0$

Mentre si parla di curve **regolari a tratti** quando non c'è regolarità complessiva ma si può scomporre in sottocurve regolari.

la comodità di lavorare con le curve regolari sta, fra le altre cose, nel poter definire il **Versore tangente** alla curva:

$$\underline{T} = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{|r'(t)|} \quad (2.5)$$

e la **Retta tangente** alla curva in un punto $(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + x'(t_0)(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + y'(t_0)(t - t_0) \\ z(t) = z_0 + z'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad (2.6)$$

Dal punto di vista cinematico, le quantità riguardanti le curve regolari possono essere viste come:

1. $\underline{r}'(t)$ è il vettore velocità
2. $|r'(t)|$ è la velocità tangente
3. $\underline{r}''(t)$ è il vettore accelerazione (solo se $\underline{r}(t) \in C^2$)

2.1.1.1 Esempi di curve regolari a tratti

1. $\underline{r}(t) = (t, |t|, t^3) ; t \in (-1, 3)$

Questa curva non è regolare, essendo $|t| \notin C^1((-1, 3))$, ma può essere spezzata in due curve con la stessa rappresentazione negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, 3)$ che sono invece regolari.

2. $\underline{r}(t) = (t^3, t^2) ; t \in (-1, +1)$

Questa non è regolare in 0, dove si annullano le derivate, ma lo è a tratti nello stesso modo della precedente

2.1.2 Curve semplici

Si dice che una curva è **semplice** se $\underline{r}(t)$ è iniettiva in (a, b) ($\underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2) \Leftrightarrow t_1 \neq t_2$) o, in parole povere, non si "attorciglia". Gli estremi sono esclusi, altrimenti non si potrebbero avere curve semplici chiuse.

Un esempio sono tutti i grafici di funzione su \mathbb{R} .

2.1.3 Curve equivalenti

Dati

$$\underline{r}(t) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.7)$$

$$\tilde{\underline{r}}(\tau) : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.8)$$

Due curve $(\underline{r}(t), \gamma)$ e $(\tilde{\underline{r}}(\tau), \tilde{\gamma})$ si dicono **equivalenti** se

$$\exists \phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b] \quad ; \quad \phi \in C^1([\alpha, \beta]) \quad (2.9)$$

$$\exists \phi^{-1} : [a, b] \longrightarrow [\alpha, \beta] \quad ; \quad \phi^{-1} \in C^1([a, b]) \quad (2.10)$$

Ovvero abbiamo un **diffeomorfismo** tale che $\underline{r}(\phi(\tau)) = \tilde{\underline{r}}(\tau)$

Se $\phi(\tau) > 0$ gli estremi delle curve saranno uguali, altrimenti saranno invertiti.

2.1.4 Lunghezza di una curva

Consideriamo la curva γ di sostegno $[a, b]$ in figura

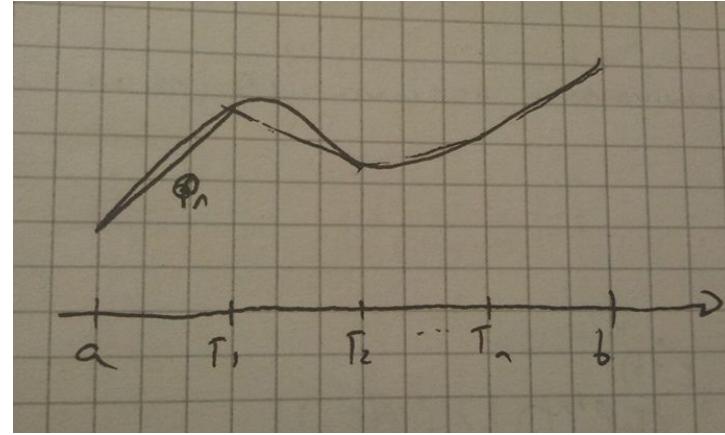


Figure 2.1:

Una volta partizionato il sostegno in n infinitesime parti ed individuata una spezzata poligonale $p(t)$ inscritta in γ possiamo definire la lunghezza di γ come

$$lung(\gamma) = \sup_{\gamma} |lung(p)| \quad (2.11)$$

Ma c'è un problema: chi ci dice che questa quantità è finita? Nessuno.

Diciamo allora che una curva è **rettificabile** se la sua lunghezza è finita.

Questa definizione è però troppo vaga per essere di utilità operativa, enunciamo quindi senza dimostrazione ("Sono pagine di conti che a noi non interessano" [cit. Lanzara]) il seguente **Teorema**:

Se una curva è regolare o regolare a tratti allora è rettificabile, e si avrà

$$lung(\gamma) = \int_a^b dt |\underline{r}'(t)| = \int_a^b dt \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \quad (2.12)$$

Nota: Per le curve regolari a tratti avremo $lung(\gamma) = \sum_{i=1}^n lung(\gamma_i)$

2.1.4.1 Esempio: Elica Cilindrica

$$\underline{r}(t) = (R \cos(t), R \sin(t), ct) \quad ; \quad t \in [0, 2\pi], R > 0, c > 0$$

Notiamo come la curva sia regolare, essendo tutte le componenti di classe quantomeno $C^1([0, 2\pi])$ ed essendo $|\underline{r}'(t)| \neq (0, 0, 0)$ $t \in (0, 2\pi)$ essendo $c > 0$

Avremo allora

$$lung(\gamma) = \int_0^{2\pi} dt \sqrt{R^2 + c^2} = 2\pi\sqrt{R^2 + c^2}$$

2.1.4.2 Forma cartesiana

Sia $y = f(x) \in C^1([a, b])$; $x \in [a, b]$, possiamo scrivere

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \implies lung(l) = \int_a^b dt \sqrt{1 + (f'(t))^2} \quad (2.13)$$

Che può però risultare scomoda, come vediamo nel seguente esempio:

$$y = f(x) = x^2 \quad x \in [0, 1] \implies f'(x) = 2x \quad f(x) \in C^1([0, 1]) \quad (2.14)$$

$$lung(l) = \int_0^1 dx \sqrt{1 + 4x^2} \rightarrow \begin{cases} t = 2x \\ dt = 2dx \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 dt \sqrt{1 + t^2} \quad (2.15)$$

Facendo la sostituzione

$$t = \sinh(y) \quad (2.16)$$

$$dt = \cosh(y)dy \quad (2.17)$$

$$t \in [0, 2] \rightarrow y \in [0, \bar{y}] \quad (2.18)$$

Avremo

$$\begin{aligned} lung(l) &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{y}} dy \cosh(y) \sqrt{1 + \sinh^2(y)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{y}} dy \cosh(y) \sqrt{\cosh^2(y)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\bar{y}} dy \cosh^2(y) = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\bar{y}} dy [1 + \cosh(2y)] = \\ &= \frac{1}{4} \left(\bar{y} + \frac{1}{2} \sinh(2\bar{y}) \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.1.4.3 Lunghezze di curve equivalenti

Supponiamo di avere due curve equivalenti (\underline{r}, γ) e $(\tilde{r}, \tilde{\gamma})$.

Dimostriamo come abbiano la stessa lunghezza:

$$lung(\gamma) = \int_a^b dt |r'(t)| = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} d\tau \phi'(\tau) |r'(\phi(\tau))| \quad (2.20)$$

$$lung(\tilde{\gamma}) = \int_{\alpha}^{\beta} d\tau |\tilde{r}'(\tau)| \quad (2.21)$$

$$\tilde{r}'(\tau) = \frac{d}{d\tau} \tilde{r}(\tau) = \frac{d}{d\tau} r(\phi(\tau)) = r'(\phi(\tau)) \phi'(\tau) \quad (2.22)$$

Da cui ci troviamo con due casi:

1. $\phi'(\tau) > 0$

In questo caso punti di inizio e fine coincidono e si ha direttamente che $lung(\gamma) = lung(\tilde{\gamma})$

2. $\phi'(\tau) < 0$

In questo caso si hanno i punti invertiti, ma tanto $|\phi'| = -\phi'$ e si ha

$$\begin{aligned} lung(\gamma) &= \int_{\beta}^{\alpha} d\tau |r'(\phi(\tau))| (-\phi'(\tau)) = \int_{\alpha}^{\beta} d\tau |r'(\phi(\tau))| \phi'(\tau) = \\ &= lung(\tilde{\gamma}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.1.5 Ascissa curvilinea

Data una curva γ con $r(t) \in [a, b]$ definiamo la funzione che calcola la lunghezza lungo la curva come

$$s(t) = \int_a^t d\tau |r'(\tau)| \quad ; \quad s(t) : [a, b] \longrightarrow [0, L = lung(\gamma)] \quad (2.24)$$

$$s(a) = 0, \quad s(b) = L \quad (2.25)$$

$$s(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.26)$$

$$s(t) \in C^1([a, b]) \quad s'(t) = |r'(t)| > 0 \quad (2.27)$$

Dall'ultima proprietà segue che $s(t)$ è anche invertibile, e si può definire l'inversa

$$t(s) : [0, L] \longrightarrow [a, b] \quad (2.28)$$

Cosa succede se $s(t)$ e $t(s)$ rappresentano curve equivalenti?

Avremo due curve equivalenti $(r(t), \gamma)$ e $(\tilde{r}(s), \tilde{\gamma})$, con

$$\tilde{r}(s) = r(t(s)) \quad ; \quad s \in [0, L] \quad (2.29)$$

E in questo caso s prende il nome di **ascissa curvilinea**, la cui utilità giace nel fatto che utilizzandola il vettore tangente si normalizza, diventando versore:

$$\frac{d}{ds} \tilde{r}(s) = \frac{d}{ds} r(t(s)) = \frac{\partial}{\partial t} r(t) \frac{dL}{ds} = \frac{r'(t)}{|s'(t)|} = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \quad (2.30)$$

2.1.6 Curve in forma polare

Introduciamo le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \quad ; \quad \rho = 0 \leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \quad (2.32)$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \text{ oppure } \theta \in [-\pi, \pi] \quad ; \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \forall x \neq 0 \\ \frac{(2k+1)\pi}{2} & k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.33)$$

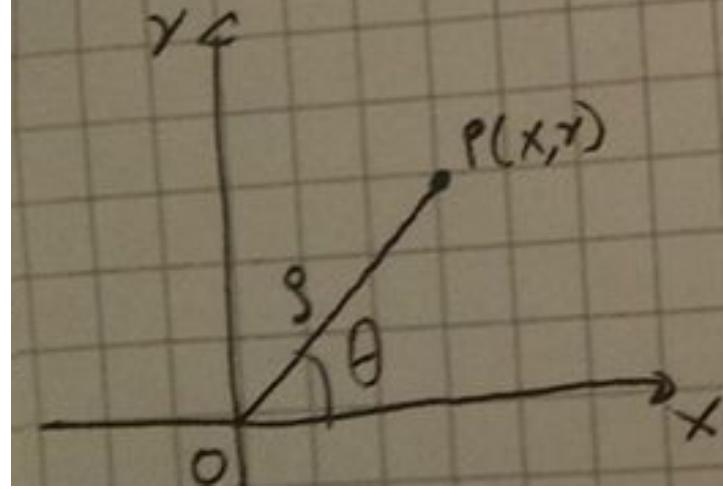


Figure 2.2:

Possiamo definire una curva in **forma polare** nel seguente modo

$$\gamma : \underline{\rho} = \rho(\theta) \in C^1([\theta_1, \theta_2]) \quad , \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2] \quad (2.34)$$

Intuitivamente viene da scrivere che

$$lung(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta |\rho'(\theta)| \quad (2.35)$$

Ma questo è **SBAGLIATISSIMO!**

Bisogna procedere nel seguente modo:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.36)$$

Da cui

$$\begin{aligned} |r'(\theta)|^2 &= [\rho'(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta)]^2 + [\rho'(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta)]^2 = \\ &= [\rho'(\theta) \cos(\theta)]^2 - 2\rho'(\theta) \cos(\theta)\rho(\theta) \sin(\theta) + [\rho(\theta) \sin(\theta)]^2 + \\ &\quad + [\rho'(\theta) \sin(\theta)]^2 + 2\rho'(\theta) \cos(\theta)\rho(\theta) \sin(\theta) + [\rho(\theta) \cos(\theta)]^2 = \\ &= [\rho'(\theta)]^2[\cos(\theta)^2 + \sin^2(\theta)] + [\rho(\theta)]^2[\cos(\theta)^2 + \sin^2(\theta)] = \\ &= [\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Questo ci porta ad avere una quantità maggiore di zero solo in caso di curve regolari e ad avere

$$|r'(\theta)| = \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2} \quad (2.38)$$

Che ci porta alla corretta espressione di lunghezza di una curva in forma polare:

$$lung(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2} \quad (2.39)$$

2.1.7 Esempi di curve

2.1.7.1 Cicloide

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = r \cdot (t - \sin(t)) \\ y(t) = r \cdot (1 - \cos(t)) \end{cases}; \quad t \in [0, 2\pi] \quad (2.40)$$

Notiamo come le componenti siano ben più che di classe C^1 e otteniamo

$$\underline{r}'(t) = \begin{cases} x'(t) = r \cdot (1 - \cos(t)) \\ y'(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad (2.41)$$

$$|r'(t)|^2 = r^2 \cdot (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)) = 2r^2(1 - \cos(t)) \quad (2.42)$$

$$|r'(t)|^2 > 0 \quad \forall t \in (0, 2\pi) \quad (2.43)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{2} r \sqrt{1 - \cos(t)} \quad (2.44)$$

Da cui ricaviamo

$$lung(\gamma) = \sqrt{2} r \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 - \cos(t)} = 2r \int_0^{2\pi} dt \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 8r \quad (2.45)$$

2.1.7.2 Ellittica

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1; \quad a, b > 0 \quad (2.46)$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}; \quad t \in [0, 2\pi] \quad (2.47)$$

$$|r'(t)| = [-a \sin(t)]^2 + [b \cos(t)]^2 \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} lung(\gamma) &= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{[-a \sin(t)]^2 + [b \cos(t)]^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{a^2[1 - \cos^2(t)] + b^2 \cos^2(t)} = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2(t)} = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cos^2(t)} = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 + e \cos^2(t)}; \quad e = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \quad \text{elliticità} \end{aligned} \quad (2.49)$$

questi integrali non sono di facile risoluzione e o si trovano tabulati o si approssima.

2.1.7.3 Cardioide (curva in forma polare)

$$\rho(\theta) = a[1 + \cos(\theta)] \quad ; \quad \theta \in [-\pi, +\pi], a > 0 \quad (2.50)$$

$$\rho'(\theta) = -a \sin(\theta) \quad (2.51)$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = a[1 + \cos(\theta)] \cos(t) \\ y(t) = a[1 + \cos(\theta)] \sin(t) \end{cases} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi] \quad (2.52)$$

Per semplicità poniamo $a = 1$ e otteniamo

$$\begin{aligned} lung(\gamma) &= \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \sqrt{\sin^2(\theta) + [1 + \cos(\theta)]^2} = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \sqrt{2 + 2 \cos(\theta)} = \\ &= \sqrt{2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \sqrt{1 + \cos(\theta)} = 2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = 8 \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.1.7.4 Spirale logaritmica

$$\rho = e^\theta \quad ; \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (2.54)$$

$$\underline{r}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = e^\theta \cos(\theta) \\ y(\theta) = e^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.55)$$

$$lung(\gamma) = \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta e^\theta = \sqrt{2}(e^{2\theta} - 1) \quad (2.56)$$

2.1.7.5 Spirale di Archimede

$$\rho = \theta \quad ; \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{6}] \quad (2.57)$$

$$\underline{r}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \theta \cos(\theta) \\ y(\theta) = \theta \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.58)$$

$$lung(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \sqrt{1 + \theta^2} = \int_0^{\bar{u}} du \cosh^2(u) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sinh\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (2.59)$$

Abbiamo applicato il seguente cambio di variabile

$$\theta = \sinh(u) \implies d\theta = \cosh(u)du \quad (2.60)$$

$$1 + \theta^2 = 1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u) \quad (2.61)$$

2.2 Integrali curvilinei

2.2.1 Integrali curvilinei di I tipo (o di funzione)

Sia una curva regolare

$$\gamma : \underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad ; \quad t \in [a, b] \quad (2.62)$$

e sia

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.63)$$

$$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) \quad (2.64)$$

quantomeno continua e tale che $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_3) \longrightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, avremo allora

$$\int_{\gamma} ds f = \int_a^b dt f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \quad (2.65)$$

Che ci rappresenta questa quantità? Possiamo dargli due interpretazioni:

1. Geometrica:

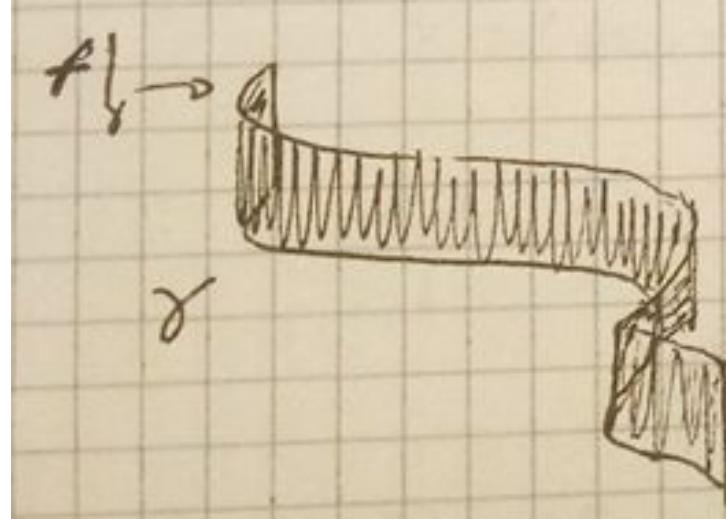


Figure 2.3:

L'integrale misura il "muro" che viene "innalzato" lungo γ da $f(x, y, z)$

2. Fisica:

L'integrale misura la massa di un filo di lunghezza γ e densità $f(x, y, z)$ (ha senso se $f(x, y, z) \geq 0$)

Per curve equivalenti $\gamma_1 \gamma_2$ si ha che

$$\int_{\gamma_1} ds f = \int_{\gamma_2} ds f \quad (2.66)$$

Con indipendenza dal verso di percorrenza. La dimostrazione di questa proprietà discende direttamente da quella della lunghezza di curve equivalenti.

Caso particolare: la funzione identità restituisce la lunghezza della curva!

Gli integrali curvilinei del I tipo godono delle seguenti proprietà:

1. Linearità:

$$\int_{\gamma} ds (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\gamma} ds f + \beta \int_{\gamma} ds g \quad (2.67)$$

2. Monotonia:

$$f \leq g \implies \int_{\gamma} ds f \leq \int_{\gamma} ds g \quad (2.68)$$

3. Teorema del modulo:

$$\left| \int_{\gamma} ds f \right| \leq \int_{\gamma} ds |f| \quad (2.69)$$

2.2.2 Esempi di I.C. di Io tipo

$$1. \gamma : x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad x, y \geq 0 = z$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(\theta) \\ y(t) = \sin(\theta) \end{cases} ; \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.70)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1 \quad ; \quad ds = |r'(t)|dt = dt \quad (2.71)$$

$$\int_{\gamma} ds(x + y - 1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (\cos(\theta) + \sin(\theta) - 1) = \dots = 2 - \frac{\pi}{2} \quad (2.72)$$

$$2. \gamma : \underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases} ; \quad t \in [0, \pi] \implies |r'(t)| = 2, ds = \sqrt{2}dt$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds(x^2 + y^2 + z^2) &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} dt (1 + t^2) = \sqrt{2} \left[t \Big|_0^{\pi} + \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &= \sqrt{2} \left(\pi + \frac{\pi^3}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

2.2.3 Baricento (o centro di massa) di una curva

Si definisce **baricentro** di una curva con densità lineare $f \geq 0$ il punto con coordinate

$$x_B = \frac{\int_{\gamma} ds x \cdot f}{\int_{\gamma} ds f} \quad (2.74)$$

$$y_B = \frac{\int_{\gamma} ds y \cdot f}{\int_{\gamma} ds f} \quad (2.75)$$

$$z_B = \frac{\int_{\gamma} ds z \cdot f}{\int_{\gamma} ds f} \quad (2.76)$$

Nota bene: non è detto che $(x_B, y_B, z_B) \in \gamma$

Vediamo in pratica di cosa si parla con l'esempio del quarto di asteroide:

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} ; \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.77)$$

$$f = 1 \quad \text{densità costante} \quad (2.78)$$

$$|r'(t)| = 3 \sin(t) \cos(t) \quad (2.79)$$

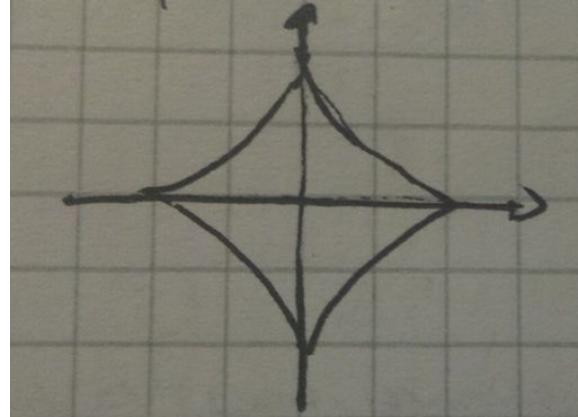


Figure 2.4:

$$\begin{aligned} lung(\gamma) &= \int_{\gamma} ds f = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin(t) \cos(t) \rightarrow \begin{cases} u = \cos(t) \\ du = -\sin(t)dt \end{cases} \rightarrow 3 \int_0^1 du u = \\ &= \frac{3}{2} u^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned}
x_B &= \int_{\gamma} ds \mathbf{x} \cdot \mathbf{f} = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \cos^3(t) \cdot \sin(t) \cos(t) = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \cos^4(t) \sin(t) = \\
&= -3 \int_1^0 du u^4 = \frac{3}{5} u^5|_0^1 = \frac{3}{5}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}
y_B &= \int_{\gamma} ds \mathbf{y} \cdot \mathbf{f} = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \sin^3(t) \cdot \sin(t) \cos(t) = \\
&= \dots = \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

2.2.4 Integrali curvilinei di II tipo (o di campo vettoriale)

Prima di definirli, ci domandiamo: cos'è un campo vettoriale?

È un vettore tale che

$$\begin{aligned}
\underline{F}(x, y, z) : A \subseteq \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(x, y, z) &\longrightarrow (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Le cui componenti sono quantomeno continue.

Supponiamo ora di avere $\gamma \in A$, e definiamo il **versore tangente** come

$$\underline{T}(t) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} \tag{2.84}$$

E possiamo infine definire gli **integrali curvilinei di II tipo** come

$$\int_{\gamma} ds \underline{F} \cdot \underline{T} \tag{2.85}$$

Questa quantità ha un significato fisico ben preciso: è il lavoro del campo di forze \underline{F} per spostare lungo γ un corpo puntiforme. Lo indicheremo quindi con W .

Operativamente questa definizione è però poco utile, memori quindi di quanto fatto per gli integrali di primo tipo, e svolgendo il prodotto tra i due vettori otteniamo:

$$\begin{aligned}
W &= \int_{\gamma} ds \underline{F} \cdot \underline{T} = \\
&= \int_a^b dt \left[F_1(r(t)) \frac{x'(t)}{|r'(t)|} + F_2(r(t)) \frac{y'(t)}{|r'(t)|} + F_3(r(t)) \frac{z'(t)}{|r'(t)|} \right] |r'(t)| = \\
&= \int_a^b dt [F_1(r(t))x'(t) + F_2(r(t))y'(t) + F_3(r(t))z'(t)]
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Nota bene: Mentre per gli integrali di I tipo per curve equivalenti il risultato era lo stesso anche per versi opposti, in questo caso il verso di percorrenza è rilevante.

2.2.4.1 Esempi di Integrali curvilinei di II tipo

Calcoliamo ora il lavoro di una serie di campi vettoriali.

1. $\underline{F} = (1, 0, 0)$ lungo il segmento $\underline{x}_0 = (0, 0, 0) \rightarrow \underline{x}_1 = (1, 2, 3)$

L'unica rappresentazione possibile per il segmento sarà:

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \implies \underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 3t \end{cases}; \quad \underline{r}'(t) = \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2 \\ z'(t) = 3 \end{cases}$$

$$W = \int_0^1 dt [1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3] = \int_0^1 dt = 1 \tag{2.87}$$

2. $\underline{F} = (y, x^2 + y^2, 0) = (y, x^2 + y^2)$

lungo l'arco di circ. $x^2 + y^2 = 4$ con estremi $\underline{x}_0 = (-2, 0) \rightarrow \underline{x}_1 = (0, 2)$

$$\underline{x}_0 = (-2, 0) \rightarrow \underline{x}_1 = (0, 2) \implies t_0 = \pi \rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2} \quad (2.88)$$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = 2 \sin(t) \end{cases}; \quad \underline{r}'(t) = \begin{cases} x'(t) = -2 \sin(t) \\ y'(t) = +2 \cos(t) \end{cases} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt [2 \sin(t) \cdot (-2 \sin(t)) + 4 \cdot (2 \cos(t))] = \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt [\sin(t) - 2 \cos(t)] = \dots = \pi + 8 \end{aligned} \quad (2.90)$$

3. Il campo gravitazionale: $\underline{F} = \frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z)$

Data una generica curva $\gamma : r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in [a, b]$ contenuta in $A \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

$$\begin{aligned} W &= -Gm \int_a^b dt \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} [x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)] = \\ &= -Gm \int_a^b dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -Gm \int_a^b dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|r(t)|} \right) = \\ &= Gm \left(\frac{1}{|r(b)|} - \frac{1}{|r(a)|} \right) \end{aligned} \quad (2.91)$$

Notiamo l'indipendenza dal percorso ma non dai punti di inizio e fine.

Chapter 3

Funzioni in \mathbb{R}^n

3.1 Limiti di funzioni

Sia una funzione

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \quad n, m \geq 1 \\ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) &\longrightarrow \underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})) \end{aligned} \tag{3.1}$$

e sia $\underline{x}^0 \in acc(A)$, avremo

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^m \tag{3.2}$$

Ma questo implica che

$$\lim_{x_i \rightarrow x_i^0} f_i(x_i) = l_i \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{3.3}$$

e quindi il problema si riduce allo studio dei limiti $l_i \in \mathbb{R}$

3.1.1 Limiti in \mathbb{R}

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\underline{x}^0 \in acc(A)$, si definisce il **limite** di f ad \underline{x}^0 come:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \tag{3.4}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \forall U(l) \exists I_\delta(\underline{x}^0) : f(\underline{x}) \in U(l) \quad \forall \underline{x} \in I_\delta(\underline{x}^0) \setminus \{\underline{x}^0\} \end{array} \tag{3.5}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon : |f(\underline{x}) - l|_1 < \epsilon \quad \forall \underline{x} \in A : |\underline{x} - \underline{x}^0|_n \leq \delta_\epsilon \end{array} \tag{3.6}$$

Nota bene: Tutti i teoremi per i limiti validi in \mathbb{R} lo sono anche per \mathbb{R}^n .

3.2 Funzioni continue in \mathbb{R}^n

Si parla di **continuità in un punto** $\underline{x}^0 \in A$ quando

$$\exists \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) \tag{3.7}$$

e di **continuità in tutto l'insieme** A quando vale $\forall x \in A$.

3.2.1 Connessione

Si dice che un insieme A è connesso se $\nexists A_1, A_2$ tali che

1. $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $A = A_1 \cup A_2$

3.2.2 Teoremi sulle funzioni continue

Enunciamo senza dimostrazione alcuni teoremi utili sulle funzioni continue:

1. Primo teorema:

f è continua se e solo se $\forall E \in \mathbb{R}$ si ha che $f^{-1}(E)$ è aperto

2. Teorema di Weierstrass:

Sia f continua in $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato (compatto), allora f ammette massimo e minimo in D tali che

$$x_m : f(x_m) = \min_{x \in D} f(x) \leq f(x) \quad \forall x \in D \quad (3.8)$$

$$x_M : f(x_M) = \max_{x \in D} f(x) \geq f(x) \quad \forall x \in D \quad (3.9)$$

3. Teorema dell'esistenza dei valori intermedi:

Siano $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e D chiuso, limitato e connesso.

Allora f assume tutti i valori possibili tra il suo massimo e il suo minimo.

3.3 Funzioni in \mathbb{R}^2

Studiamo ora un categoria di funzioni in \mathbb{R}^n molto specifica, le funzioni in \mathbb{R}^2 , ovvero tali che

$$\begin{aligned} f : A &\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow f(x, y) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Chiamiamo **Grafico** di una funzione il seguente insieme:

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in D ; z = f(x, y)\} \quad (3.11)$$

E chiamiamo **curve (o linee) di livello**:

$$\{(x, y) \in D : f(x, y) = \text{cost.}\} \quad (3.12)$$

3.3.0.1 Esempi di calcolo dell'insieme di definizione

$$1. f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \implies D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$2. f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2) \implies D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$$

3.3.0.2 Funzioni radiali

Sono una categoria di $f \in \mathbb{R}^2$ del tipo

$$f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (3.13)$$

che possono essere quindi espresse come funzioni di una sola variabile.

Le linee di livello di queste funzioni possono essere solo circonferenze.

Un esempio di funzione radiale è scritto poco sopra, infatti

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4 - t^2} = f(t = \sqrt{x^2 + y^2})$$

3.3.1 Calcolo dei limiti

Iniziamo dando nuovamente la definizione di limite:

$$\lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} f(x, y) = l \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

$$\downarrow \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x, y) - l| < \epsilon \quad \forall (x_0, y_0) : d(\underline{p}, \underline{p}_0) < \delta_\epsilon \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{p} = (x, y) ; \quad \underline{p}_0 = (x_0, y_0) \\ d(\underline{p}, \underline{p}_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Il calcolo dei limiti in più dimensione è una questione molto più complicata rispetto a quelli in una sola.

Infatti affinché esista un limite, la funzione vi deve tendere da tutte le infinite direzioni e traiettorie possibili! (e quindi non solo dalle rette parallele agli assi, per esempio).

Come procediamo allora?

Innanzitutto dobbiamo trovare un **candidato limite**, che potrebbe (ma non è detto che sia) il valore da noi cercato.

Dato un punto (x_0, y_0) possiamo utilizzare due metodi:

1. **Limite lungo le parallele agli assi:**

$$l_x = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) \quad (3.17)$$

$$l_y = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) \quad (3.18)$$

se $l_x = l_y$ abbiamo un candidato limite valido (ma non è detto sia il limite!), altrimenti possiamo fermarci subito.

2. **Limite lungo una curva γ :**

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t)) = l_\gamma \quad (3.20)$$

Anche qui, se troviamo due curve γ_1 e γ_2 tali che $l_{\gamma_1} \neq l_{\gamma_2}$ possiamo interrompere subito la ricerca.

Vediamo alcuni esempi calcolabili con le scarse conoscenze al momento in nostro possesso:

$$1. \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} ; \quad \underline{p}_0 = (0, 0) ; \quad x \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{p}_0\}$$

Cerchiamo un candidato limite col primo metodo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow x_0} |x| = 0 \quad (3.21)$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = 0 \quad (3.22)$$

Abbiamo quindi un candidato in $l = 0$.

Applichiamo la definizione di limite:

$$\left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \quad (3.23)$$

Abbiamo maggiorato x^2 con $x^2 + y^2$.

Notiamo come $\sqrt{x^2+y^2}$ nella def. di limite deve essere $< \delta_\epsilon$, e quindi avremo

$$\left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \delta_\epsilon = \epsilon \quad \forall (x, y) : \sqrt{x^2+y^2} < \delta_\epsilon \quad (3.24)$$

E quindi 0 è effettivamente il limite.

$$2. \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} ; \quad \underline{p}_0 = (0,0) ; \quad x \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{p}_0\}$$

In questo caso, procedendo col primo metodo avremo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|x|} = +\infty \quad (3.25)$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = 0 \quad (3.26)$$

E vediamo già che $l_x \neq l_y$ e quindi fermiamo subito la ricerca.

$$3. \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{x-y}{x+y} ; \quad \underline{p}_0 = (0,0) ; \quad x \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=y\}$$

Con il primo metodo troviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{x} = +1 \quad (3.27)$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y}{-y} = -1 \quad (3.28)$$

e quindi buca, visto che $l_x \neq l_y$

Vediamo come anche col secondo metodo non si abbia limite:

Prendendo tutte le rette possibili con $y = mx$

$$y = mx \implies f(x, mx) = \frac{x+mx}{x-mx} = \frac{1+m}{1-m} \quad (3.29)$$

Abbiamo qualcosa dipendente da una variabile, e quindi infiniti possibili risultati, mentre il limite deve essere unico per tutte le direzioni.

$$4. \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} ; \quad \underline{p}_0 = (0,0) ; \quad x \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{p}_0\}$$

è evidente come $f(0, y) = 0 = f(x, 0)$ e come

$$f(x, mx) = \frac{m^2x^2}{1+m^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

E quindi con entrambi i metodi si trova un candidato in $l = 0$

Applicando la definizione di limite si trova

$$0 \leq \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq x^2 + y^2 < \delta_\epsilon^2 \quad (3.30)$$

E facendo discorsi analoghi all'esempio 2 possiamo dire che $l = 0$ è proprio il nostro limite.

3.3.1.1 Calcolo dei limiti in forma polare

Un comodo metodo per risolvere i limiti è quello di lavorare in coordinate polari nel seguente modo:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\downarrow \quad |f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) - l| < \epsilon \leftrightarrow \rho \in [0, \delta_\epsilon] \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.32)$$

Questo implica anche che

$$s(\rho) = \sup_{\theta} |f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) - l| < \epsilon \leftrightarrow \rho \in [0, \delta_\epsilon] \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.33)$$

$$s(\rho) \geq 0 \quad (3.34)$$

E quindi avremo che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} s(\rho) = 0 \leftrightarrow \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} f(x, y) = l \quad (3.35)$$

E ci basta maggiorare $s(\rho)$ con quantità infinitesime non dipendenti da θ per verificare che il candidato l è effettivamente il limite cercato.

Vediamo un **esempio operativo**: $\lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = ?$; $\underline{p}_0 = (0,0)$

Con il primo metodo troviamo subito un candidato in $l = 0$
passiamo in coordinate polari e avremo

$$0 \leq \frac{\rho^4(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta))}{\rho^2} = \rho^2(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \leq \rho^2(1+1) = 2\rho^2 \quad (3.36)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 = 0 \implies \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0 \quad (3.37)$$

Nota 1: Abbiamo maggiorato sia $\cos^4(\theta)$ che $\sin^4(\theta)$ con 1, che non dipende da θ .

Nota 2: potevamo procedere anche senza questo metodo maggiorando il denominatore con $x^2 + y^2$ e applicando la definizione di limite come in esempi precedenti.

3.3.1.2 Esempi di calcolo di limiti

$$1. \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{xy}{x^2+y^2} = ? ; \quad \underline{x}^0 = (0,0)$$

Col primo metodo troviamo che $f(0,y) = f(x,0) = 0 \stackrel{?}{=} l$

Passiamo in coordinate polari

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \sin(\theta) \cos^2(\theta)}{\rho^2(\rho^2 \cos^4(\theta) + \sin^2(\theta))} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin(\theta) \cos^2(\theta)}{\rho^2 \cos^4(\theta) + \sin^2(\theta)} = 0 \quad \forall \theta \quad (3.38)$$

Ma questo non basta, dovremmo maggiorare il suo sup, ma non abbiamo modo di dimostrarlo. Se invece studiamo il limite lungo la curva $y = x^2$ troviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad (3.39)$$

e quindi in $(0,0)$ non esiste limite.

$$2. \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{x^2+y^2}{y} = ? ; \quad y \neq 0$$

Col primo metodo troviamo $l \stackrel{?}{=} 0 = f(0,y)$

Proviamo a muoverci lungo la famiglia di rette $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{(1+m^2)x^2}{mx} = \frac{1+m^2}{m}x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad (3.40)$$

Di nuovo, questo non vuol dire nulla, potremmo avere una qualche curva che da risultati diversi.

Passiamo in coordinate polari

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\rho \sin(\theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\sin(\theta)} = 0 \quad (3.41)$$

Ma anche questo non basta! Infatti dobbiamo vedere come si comporta $s(\rho)$, che stavolta possiamo stimare:

$$s(\rho) = \sup \left| \frac{\rho}{\sin(\theta)} \right| = \infty \neq 0 \quad (3.42)$$

E quindi nonostante finora sembrasse tutto ok, il limite non esiste.

Inoltre, volendo ulteriori conferme, provando con la parabola $y = x^2$ troviamo $l_\gamma = 1 \neq 0$.

$$3. f(x, y) = \frac{\sin(2(x-y))}{x-y}$$

Esiste il limite a $(1,1)$?

Iniziamo notando che questa funzione appartiene ad una categoria particolare di funzioni, quelle che possono essere riscritte come funzioni di una variabile:

$$g(x, y) = x - y = (x - 1) + (y - 1) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,1)} 0 \quad (3.43)$$

$$g(t) = t = x - y \quad (3.44)$$

$$f(t) = \frac{\sin(2t)}{t} = \frac{2 \sin(2t)}{2t} = 2 \frac{\sin(2t)}{2t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2 \quad (3.45)$$

Nota bene: Le funzioni radiali rientrano in questa categoria a pieno titolo, ma allora passando in coordinate polari si avrà che non c'è dipendenza da θ , ciò implica che anche il *sup* tenderà alla stessa quantità implicando infine l'unicità del limite, riducendo il problema dei limiti di funzioni radiali a

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) \quad (3.46)$$

4. $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$; $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$f(x, y)$ è chiaramente radiale, quindi possiamo scrivere $f(\rho) = e^{-\frac{1}{\rho^2}}$ e avere

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{\rho^2}} = 0 \quad (3.47)$$

In casi come questo si dice che la funzione è **prolungabile per continuità** al punto in questione e si ha la funzione

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3.48)$$

5. $f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \sin^\alpha(|x| + |y|) & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Ci chiediamo per quali valori di α la funzione è continua. Avremo tre casi:

(a) $\alpha = 0 \implies g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

In questo caso abbiamo già visto come non esista il limite

(b) $\alpha < 0 \implies g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \frac{1}{\sin^{|\alpha|}(|x|+|y|)}$

Vediamo subito come per la retta $y = x$ si abbia

$$g(x, x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} \frac{1}{\sin^{|\alpha|}(|x|+|x|)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^{|\alpha|}(2|x|)} \quad (3.49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^{|\alpha|}(2|x|)} = +\infty \neq 0 \quad (3.50)$$

e quindi anche qui non c'è limite

(c) $a > 0 \implies g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \sin^{|a|}(|x| + |y|)$

Notiamo come $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \implies (|x| - |y|)^2 \geq 0$

E possiamo quindi scrivere, ricordando che $|\sin(x)| \leq |x|$

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x, y) - 0| &\leq \frac{1}{2} |\sin(|x| + |y|)|^a \leq \frac{1}{2} (|x| + |y|)^a \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (2\sqrt{x^2+y^2})^a = \\ &= 2^{a-1} \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Per il teorema del confronto il limite è dunque 0 e quindi per $a > 0$ la funzione è continua

3.3.2 Funzioni derivabili

Vediamo ora come si estende il concetto di derivabilità alle funzioni

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.52)$$

3.3.2.1 Derivate Parziali e derivabilità

Si dice che $f(\underline{x})$ è dotata in $\underline{x}^0 \in A$ di **derivata parziale** rispetto a x_i se esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)}{h} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\underline{x}^0} \quad (3.53)$$

Altre notazioni equivalenti sono $f_{x_i}(\underline{x}^0)$, $\partial_{x_i} f(\underline{x}^0)$.

In parole povere: si fissano tutte le variabili tranne una e si procede come nel caso di funzioni in \mathbb{R} .

Qualora $f(\underline{x})$ ammetta derivate parziali $\forall x_i$ si dice che la funzione è **derivabile** in \underline{x}^0 , e in tal caso possiamo anche definire il **gradiente** della funzione nel punto come

$$\text{grad}(f(\underline{x}^0)) = \nabla f(\underline{x}^0) = (f_{x_1}(\underline{x}^0), \dots, f_{x_n}(\underline{x}^0)) \quad (3.54)$$

Vediamo ora alcuni **esempi**:

$$1. \quad f(x, y) = x^3 \sin(y) \quad ; \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \implies \underline{x} = (x, y)$$

Questa funzione è derivabile? Assolutamente sì:

$$f_x(x, y) = 3x^2 \sin(y) \quad (3.55)$$

$$f_y(x, y) = x^3 \cos(y) \quad (3.56)$$

$$2. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

il problema qui va diviso in due parti:

$$(a) \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Il denominatore non si annulla mai e si trovano facilmente entrambe le derivate parziali

$$(b) \quad (x, y) = (0, 0)$$

In questo caso applichiamo la definizione:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2 \cdot 0}{h^2 + 0} = 0 \quad (3.57)$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \cdot \frac{0 \cdot k}{k^2 + 0} = 0 \quad (3.58)$$

E quindi la funzione ammette derivate parziali in $(0, 0)$.

$$3. \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ è derivabile in } \underline{0} = (0, 0)?$$

$$f_x(\underline{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| \quad (3.59)$$

$$f_y(\underline{0}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0 + k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} |k| \quad (3.60)$$

Nessuno dei due limiti esiste, quindi niente derivabilità in $\underline{0}$.

$$4. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ci troviamo di fronte ad una grande differenza rispetto all'analisi in \mathbb{R} : questa funzione, come abbiamo già visto in un precedente esempio, **non è continua**.

Ma se andiamo a studiarne la derivabilità troviamo che:

$$f_x(\underline{0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2 + 0} \frac{1}{h} = 0 \quad (3.61)$$

$$f_y(\underline{0}) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{0 + k^2} \frac{1}{k} = 0 \quad (3.62)$$

E quindi ci accorgiamo di come in \mathbb{R}^n per $n \geq 2$ la derivabilità **non implica** la continuità!

3.3.2.2 Derivate direzionali

Le derivate parziali da sole sono riduttive, in quanto studiano l'andamento delle funzioni solo lungo le parallele agli assi. Per avere una visione complessiva dobbiamo introdurre le **Derivate Direzionali**.

Si dice che $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è dotata in $\underline{x}^0 \in A$ di derivata direzionale lungo la direzione individuata dal versore \hat{v} se esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\hat{v}) - f(\underline{x}^0)}{t} = \left. \frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \right|_{\underline{x}^0} = D_{\hat{v}} f(\underline{x}^0) \quad (3.63)$$

Notiamo come il concetto di derivata direzionale inglobi quello di derivata parziale, che altro non è che una derivata direzionale calcolata lungo una direzione parallela ad uno degli assi.

L'espressione diventa meno criptica se mostriamo il caso particolare che più interessa a noi : \mathbb{R}^2

$$D_{\hat{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (3.64)$$

Vediamone ora un **esempio**:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

Avremo derivate direzionali lungo tutte le possibili direzioni?

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_x, tv_y) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{(tv_x)^2 tv_y}{(tv_x)^4 + (tv_y)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_x^2 v_y}{t^2 v_x^4 + v_y^2} = \\ &= \frac{v_x^2}{v_y} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Questo risultato vale solo per $v_y \neq 0$, mentre per $v_y = 0$ avremo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_x, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{0}{(tv_x)^4} = 0 \quad (3.67)$$

e quindi complessivamente

$$\exists D_{\hat{v}} f(0) = \begin{cases} \frac{v_x^2}{v_y} & v_y \neq 0 \\ 0 & v_y = 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

Notiamo che anche questa funzione non è continua, e che quindi anche per le derivate direzionali vale il discorso fatto sulla derivabilità in \mathbb{R}^n con $n \geq 2$

3.3.3 Differenzialibilità

Si dice che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **differenziabile** in $\underline{x}^0 \in A$ se, definito

$$R(\underline{x}, \underline{x}^0) = f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) - \langle a | X \rangle \quad ; \quad X = \underline{x} - \underline{x}^0 \quad (3.69)$$

si ha che $\exists a \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{R(\underline{x}, \underline{x}^0)}{|\underline{x} - \underline{x}^0|_n} = 0 \Leftrightarrow R(\underline{x}, \underline{x}^0) = o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n) \quad \text{per } \underline{x} \rightarrow \underline{x}^0 \quad (3.70)$$

3.3.3.1 Teoremi sulle funzioni differenziabili

1. Primo teorema: Differenzialibilità e Continuità

Se $f(\underline{x})$ è differenziabile in \underline{x}^0 allora è anche continua in quel punto.

la dimostrazione procede nel seguente modo:

$$R(\underline{x}, \underline{x}^0) = o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n) \implies \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} R(\underline{x}, \underline{x}^0) = 0 \quad (3.71)$$

$$X = \underline{x} - \underline{x}^0 \implies \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} X = 0 \implies \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \langle a | X \rangle = 0 \quad (3.72)$$

Questo significa che

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} R(\underline{x}, \underline{x}^0) = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} (f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) - \langle a | X \rangle) = 0 \quad (3.73)$$

Da cui segue la definizione di continuità $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$

2. Secondo teorema: Differenzialibilità e Derivabilità

Se $f(\underline{x})$ è differenziabile in \underline{x}^0 allora è anche derivabile in quel punto, e si avrà:

$$\underline{a} = \nabla f(\underline{x}^0) \quad ; \quad a_i = f_{x_i}(\underline{x}^0) \quad \forall i \quad (3.74)$$

la dimostrazione procede nel seguente modo:

Fissiamo tutte le variabili tranne una e calcoliamo il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0) - \langle a | X \rangle}{|x_1 - x_1^0|} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{R(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0, , \underline{x}^0)}{|x_1 - x_1^0|} = 0 \\ \downarrow \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(\underline{x}^0) - \langle a | X \rangle}{|x_1 - x_1^0|} \cdot \frac{x_1 - x_1^0}{x_1 - x_1^0} &= 0 \\ \downarrow \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(\underline{x}^0) - \langle a | X \rangle}{x_1 - x_1^0} \cdot \frac{x_1 - x_1^0}{|x_1 - x_1^0|} &= 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

Siccome $\frac{x_1 - x_1^0}{|x_1 - x_1^0|}$ può assumere solo i valori ± 1 , segue che deve essere

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(\underline{x}^0) - \langle a | X \rangle}{x_1 - x_1^0} &= 0 \\ \downarrow \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \frac{f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(\underline{x}^0)}{x_1 - x_1^0} &= \frac{\langle a | X \rangle}{x_1 - x_1^0} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Notando come $\frac{X}{x_1 - x_1^0}$ altro non sia altro che il versore di lungo la direzione di x_1 e quindi

$$\frac{\langle a | X \rangle}{x_1 - x_1^0} = a_i \quad (3.77)$$

come $x_1 = x_1^0 + h$ otteniamo il risultato cercato

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0)}{h} = a_i \implies a_i = f_{x_i}(x_1^0) \quad (3.78)$$

3. Terzo teorema: Differenzialibilità e Derivate Direzionali

Se $f(\underline{x})$ è differenziabile in \underline{x}^0 allora è anche dotata di derivate direzionali in quel punto, che possono essere espresse come:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \Big|_{\underline{x}^0} = \langle \nabla f(\underline{x}^0) | v \rangle = f_{x_1}(\underline{x}^0) \cdot v_1 + \cdots + f_{x_n}(\underline{x}^0) \cdot v_n \quad (3.79)$$

Nota bene: Se f non è continua o derivabile in \underline{x}^0 allora sicuro non è nemmeno differenziabile.

la dimostrazione procede nel seguente modo:

Abbiamo visto come per funzioni differenziabili sia vero il limite

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{f(\underline{x}_n) - f(\underline{x}^0) - \langle a | X \rangle}{|\underline{x} - \underline{x}^0|_n} = 0 \quad (3.80)$$

Poniamo ora $\underline{x} = \underline{x}^0 + t\hat{v}$ e avremo che $|\underline{x} - \underline{x}^0|_n = |t|$ e quindi il limite diventa

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\hat{v}) - f(\underline{x}^0) - \langle a | v \rangle t}{|t|} = 0 \\ & \downarrow \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\hat{v}) - f(\underline{x}^0) - \langle a | v \rangle t}{|t|} \cdot \frac{t}{t} = 0 \\ & \downarrow \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\underline{x}^0 + t\hat{v}) - f(\underline{x}^0)}{t} - \langle a | v \rangle \right) \cdot \frac{t}{|t|} = 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Come prima il limite deve annullarsi per la quantità tra parentesi, essendo $\frac{t}{|t|} = \pm 1 \neq 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\hat{v}) - f(\underline{x}^0)}{t} - \langle a | v \rangle = 0 \\ & \downarrow \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\hat{v}) - f(\underline{x}^0)}{t} = \langle a | v \rangle \implies \langle a | v \rangle = D_{\hat{v}} f(\underline{x}^0) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Ma sappiamo dal precedente teorema che in caso di differenzialibilità $a = \nabla f(\underline{x}^0)$ e sostituendo troviamo il risultato cercato.

3.3.3.2 Piani tangentii in \mathbb{R}^3

Iniziamo scrivendo l'espressione di differenzialibilità in \mathbb{R}^2 :

$$\underline{x} = (x, y) ; \quad \underline{x}^0 = (x_0, y_0) \quad (3.83)$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) - f_x(\underline{x}^0)(x - x_0) - f_y(\underline{x}^0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \quad (3.84)$$

Sia ora il **grafico di funzione**

$$S = \{(x, y, z = f(x, y)) ; (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2\} \quad (3.85)$$

E sia il punto

$$\underline{p}^0 = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)) \in S \quad (3.86)$$

Per \underline{p}^0 passeranno infiniti piani definiti da

$$z = p(x, y) = f(\underline{x}^0) + a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) \quad (3.87)$$

Ci chiediamo ora: quale di questi piani meglio approssima S in un intorno di \underline{p}^0 ?

Ovvero cerchiamo quel piano tale che in un intorno di \underline{p}^0 farà sì che

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{|f(x, y) - p(x, y)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \quad (3.88)$$

o, in altre parole

$$|f(x, y) - p(x, y)| = o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \quad (3.89)$$

Guardando la definizione di differenziabilità ci accorgiamo che i valori di a e b che cerchiamo altro non sono che

$$a = f_x(x_0, y_0) \quad ; \quad b = f_y(x_0, y_0) \quad (3.90)$$

E troviamo così l'espressione del **piano tangente** ad S in \underline{x}^0 :

$$p_t(x, y) = f(\underline{x}^0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad (3.91)$$

Notiamo l'analogia con l'analisi in \mathbb{R} , dove la derivabilità in un punto permetteva di definire l'equazione della retta tangente nel punto.

Definiamo infine la **normale al piano** come $\hat{N} = \frac{-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0)}{\sqrt{1+f_x^2(x_0)+f_y^2(x_0)}}$

3.3.3.3 Esempi sulla differenziabilità

1. $f(x, y) = |xy|$

Vediamo se è differenziabile nei seguenti punti:

(a) $\underline{x}^0 = (0, 0)$

$$f(0, 0) = 0 \quad (3.92)$$

$$0 \leq |xy| \leq (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} 0 \quad (3.93)$$

E quindi si ha $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ ed è quindi continua.

È anche derivabile, visto che

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \quad (3.94)$$

$$f_y(0, 0) = \text{stessi conti} = 0 \quad (3.95)$$

Possiamo quindi vedere se è anche differenziabile:

$$R(x, y; 0, 0) = |xy| - 0 - 0 \cdot (x - 0) - 0 \cdot (y - 0) = |xy| \quad (3.96)$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{R(x, y; 0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \stackrel{?}{=} 0 \implies \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \stackrel{?}{=} 0 \quad (3.97)$$

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} 0 \quad (3.98)$$

Quindi per confronto il limite esiste e la funzione è anche differenziabile, con piano tangente pari a

$$p_t(x, y) = 0 + 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) = 0 \implies z = 0 \quad (3.99)$$

(b) $\underline{x}^0 = (0, 1)$

Sarà continua? Sì:

Maggioriamo $|x|$ con $\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ e otteniamo

$$0 \leq |xy| \leq |y| \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} 0 \quad (3.100)$$

E quindi ancora una volta per confronto abbiamo

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(x, y) = 0 = f(0, 1) \quad (3.101)$$

Invece, per quanto riguarda la derivabilità abbiamo

$$f_x(0, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 1) - f(0, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} \quad (3.102)$$

ma in questo caso si ha che

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} |h| = \begin{cases} +1 & h^+ \rightarrow 0 \\ -1 & h^- \rightarrow 0 \end{cases} \implies \nexists \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} |h| \quad (3.103)$$

Possiamo allora fermarci subito perché sicuro non sarà differenziabile.

$$2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vediamo per prima la continuità:

$$0 \leq \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot y \leq 1 \cdot |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{x \rightarrow x^0} 0 \quad (3.104)$$

Quindi $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(x, y) = 0$ e la continuità è verificata.

Per la derivabilità otteniamo lo stesso risultato con conti analoghi.

La funzione non è però differenziabile, e lo notiamo dal fatto che

$$\begin{aligned} D_{\hat{v}} f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_x, tv_y) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 v_x^2 v_y}{t^2 (v_x^2 + v_y^2)} = \\ &= \frac{v_x^2 v_y}{v_x^2 + v_y^2} \end{aligned} \quad (3.105)$$

Ma $v_x^2 + v_y^2 = 1$, e quindi $D_{\hat{v}} f(x, y) = v_x^2 v_y$

Dov'è il problema? Se $f(x, y)$ fosse differenziabile allora dovrebbe valere che $\langle a|v \rangle = \nabla f(\underline{x})$, ma siccome $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ e $v_x^2 v_y \neq 0$ allora quest'espressione non è valida e $f(x, y)$ non può essere differenziabile.

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad \alpha \geq 0$$

Studiamo continuità, derivabilità e differenziabilità in $\underline{x}^0 = (0, 0)$ al variare di α .

(a) *Continuità:*

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^2} - 0 \right| &= \left| \frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}\alpha} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2} = \\ &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Da qui otteniamo

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases} \quad (3.107)$$

Quindi si ha continuità solo per $\alpha > 1$

(b) *Derivabilità:*

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \cdot 0}{h} = 0 \quad (3.108)$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} f(0, k) \quad (3.109)$$

Per $f_y(0, 0)$ il discorso va diviso in due casi:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(0, k) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \frac{1 \cdot k}{k^2} = \infty & \alpha = 0 \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \frac{0 \cdot k}{k^2} = 0 & \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (3.110)$$

(c) *Differenziabilità:*

Ci dobbiamo porre in $\alpha > 1$ per la continuità. Avremo che

$$\begin{aligned} \frac{R(x, \underline{x}^0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^2} - 0 - 0 \cdot x - 0 \cdot y \right) = \\ &= \frac{|x|^\alpha y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.111)$$

Per quali valori di α il limite si annullerà?

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|x|^\alpha y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} &\leq \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}\alpha} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}\alpha - 1} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Che tende a 0 solo per $\alpha > 2$

3.3.3.4 Teorema del Differenziale Totale

Consideriamo ora le funzioni della famiglia

$$f : \underset{\text{aperto}}{A} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.113)$$

e ricordando la definizione

$$C^1(A) = \{f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua in } A, \exists f_{x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ continue in } A\}$$

Possiamo enunciare il **Teorema del Differenziale Totale**:

Sia $f(\underline{x}) \in C^1(A)$, allora $f(\underline{x})$ è anche differenziabile $\forall \underline{x} \in A$.

Nota bene: Non è vero il contrario! È vero che la differenziabilità implica derivabilità per tutte le variabili, ma chi ci garantisce che siano continue?

Dimostriamo il teorema nel caso di \mathbb{R}^2 nel seguente modo:

$$\begin{aligned} R(\underline{x}, \underline{x}^0) &= f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \\ &= [f(x, y) - f(x_0, y)] + [f(x_0, y) - f(x_0, y_0)] - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = \\ &= f_x(\xi, y)(x - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y - y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned} \quad (3.114)$$

Cos'è successo nell'ultimo passaggio? Abbiamo applicato il **teorema del valor medio di Lagrange**, con $\xi \in I(x, x_0)$ e $\eta \in I(y, y_0)$.

Ora raccogliamo ancora e potremo scrivere

$$R(\underline{x}, \underline{x}^0) = [f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)](y - y_0) \quad (3.115)$$

Adesso ci chiediamo:

$$\begin{aligned} \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{R(\underline{x}, \underline{x}^0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\stackrel{?}{=} 0 \\ \downarrow \\ \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} [f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0)] \frac{(x - x_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + [f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)] \frac{(y - y_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\stackrel{?}{=} 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

Notiamo subito come

$$\frac{(x - x_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1 \quad ; \quad \frac{(y - y_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1 \quad (3.117)$$

E possiamo quindi fare la seguente maggiorazione:

$$0 \leq \left| \frac{R(\underline{x}, \underline{x}^0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0)| + |f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)| \quad (3.118)$$

Entra finalmente in gioco la continuità delle f_{x_i} , dicendoci che

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\xi, y) = f(x_0, y_0) \quad (3.119)$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(x, \eta) = f(x_0, y_0) \quad (3.120)$$

Da cui segue

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} |f(\xi, y) - f(x_0, y_0)| = 0 \quad (3.121)$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} |f(x, \eta) - f(x_0, y_0)| = 0 \quad (3.122)$$

E grazie al teorema del confronto ottiamo il risultato cercato, ovvero che

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{R(\underline{x}, \underline{x}^0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (3.123)$$

3.3.4 Esercizio da esame

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy) - x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3.124)$$

Vogliamo studiarne continuità e differenziabilità in \mathbb{R}^2 e calcolarne le derivate direzionali in $(0, 0)$.

1. Continuità:

In tutti i punti a parte l'origine la funzione è continua, essendo il denominatore $\neq 0 \quad \forall (x, y)$.

In $\underline{x}^0 = (0, 0)$ avremo

$$\begin{aligned} \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}, y) &= \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{1 - \cos(xy) - x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} - \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{(xy)^2}{(xy)^2} = \\ &= \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (3.125)$$

Il primo è però il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$ e quindi possiamo scrivere

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}, y) = \frac{1}{2} \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \quad (3.126)$$

Sapendo che $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ avremo che $|xy| \leq x^2 + y^2$ e possiamo quindi maggiorare

$$0 \leq \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} 0 \quad (3.127)$$

2. Differenziabilità:

in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ abbiamo che $f \in C^1(A)$, e per il th. del differenziale totale $f(x, y)$ è anche differenziabile.

In $\underline{x}^0 = (0, 0)$ dobbiamo iniziare studiando la derivabilità:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - h^3}{h} = -1 \quad (3.128)$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - 2k^3}{k} = 2 \quad (3.129)$$

Questo ci porta a scrivere

$$\begin{aligned} R(\underline{x}, \underline{x}^0) &= f(\underline{x}, y) - 0 - (-1)x - 2y = f(\underline{x}, y) + x - 2y = \\ &= \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} - \frac{x^3}{x^2 + y^2} + 2 \frac{y^3}{x^2 + y^2} + x - 2y = \dots = \\ &= \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} + \frac{xy^2 - 2(xy)^2}{x^2 + y^2} \stackrel{?}{=} o(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned} \quad (3.130)$$

Procediamo analogamente a prima, scrivendo

$$\frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{(xy)^2}{x^2 + y^2} \quad (3.131)$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} \frac{R(\underline{x}, \underline{x}^0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2} \cdot \frac{(xy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - 2 \frac{(xy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\downarrow \\ \frac{R(\underline{x}, \underline{x}^0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{1}{2} \cdot 0 + \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} g(x, y) + 0 \end{aligned} \quad (3.132)$$

E troviamo però che

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} g(x, y) = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{xy^2 - 2(xy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \quad (3.133)$$

Infatti, lungo la retta $y = x$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} g(x, x) = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{x^3 - 2x^4}{2^{\frac{3}{2}}x^3} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0 \quad (3.134)$$

E quindi la funzione non è differenziabile in $(0, 0)$.

3. Derivate direzionali:

In $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la nostra funzione è differenziabile, e quindi possiamo esprimere le derivate direzionali tramite l'espressione

$$D_{\hat{v}} f(x, y) = f_x(x, y)v_x + f_y(x, y)v_y \quad (3.135)$$

è un'altra storia in $\underline{x}^0 = (0, 0)$, dove $f(x, y)$ non è differenziabile.

Dobbiamo quindi procedere con la definizione:

$$\begin{aligned} D_{\hat{v}} f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_x, tv_y) - f(0, 0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1 - \cos(t^2 v_x v_y)}{t^2(v_x^2 + v_y^2)} - \frac{t^3 v_x^3}{t^2} + 2 \frac{t^3 v_y^3}{t^2} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1 - \cos(t^2 v_x v_y)}{t^2} - t v_x^3 + 2 t v_y^3 \right] \end{aligned} \quad (3.136)$$

Se $v_x \neq 0 \neq v_y$

$$\begin{aligned} D_{\hat{v}} f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1 - \cos(t^2 v_x v_y)}{t^2} - v_x^3 + 2 t v_y^3 \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1 - \cos(t^2 v_x v_y)}{t^2} \cdot \frac{(t^2 v_x v_y)^2}{(t^2 v_x v_y)^2} \right] - v_x^3 + 2 v_y^3 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t^2 v_x v_y)}{(t^2 v_x v_y)^2} \cdot \frac{(t^2 v_x v_y)^2}{t} - v_x^3 + 2 t v_y^3 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 - v_x^3 + 2 t v_y^3 = -v_x^3 + 2 t v_y^3 \end{aligned} \quad (3.137)$$

Notiamo come in $(0, 0)$ non valga l'espresione

$D_{\hat{v}} f(x, y) = f_x(x, y)v_x + f_y(x, y)v_y$, che ci restituisce

$$f_x(0, 0) = 1 \quad ; \quad f_y(0, 0) = 2 \implies D_{\hat{v}} f(0, 0) = v_x + 2v_y \quad (3.138)$$

Ma questo risultato è diverso da quello operativo $\forall \hat{v} \neq (0, 0)$

3.4 Proposizione sugli insiemi

Diamo l'enunciato in \mathbb{R}^2 ma vale $\forall n$.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua in A . Allora possiamo definire i seguenti sottoinsiemi di A :
i sottoinsiemi **aperti**

$$A_1 = \{(x, y) \in A : f(x, y) < c\} \quad (3.139)$$

$$A_2 = \{(x, y) \in A : f(x, y) > c\} \quad (3.140)$$

$$(3.141)$$

ed i sottoinsiemi **chiusi**

$$D_1 = \{(x, y) \in A : f(x, y) \leq c\} = \mathbb{R}^2 \setminus A_2 \quad (3.142)$$

$$D_2 = \{(x, y) \in A : f(x, y) \geq c\} \quad (3.143)$$

$$D_3 = \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\} = D_1 \cap D_2 \quad (3.144)$$

Dimostriamo solo il primo:

$$\underline{p}^0 = (x_0, y_0) \in A_1 \implies f(\underline{p}^0) - c < 0 \quad (3.145)$$

Questo implica l'esistenza di $I(\underline{p}^0) \in A : f(x) < c$ ma per definizione $I(\underline{p}^0) \subset A_1$ che è quindi aperto.

3.5 Funzioni in \mathbb{R}^n

3.5.1 Derivazione di funzioni composte in \mathbb{R}^n

Siano

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{diff. } \forall \underline{x} \in \underset{\text{aperto}}{A} \quad (3.146)$$

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(\underline{x})$$

$$\underline{x}(t) : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{der. } \forall t \in (a, b) \quad (3.147)$$

$$t \rightarrow \underline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in A \quad \forall t \in (a, b)$$

Allora avremo che $F(t) = f(\underline{x}(t))$ è derivabile in (a, b) e si avrà che

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(\underline{x}(t)) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\underline{x}(t)) \cdot x'_i(t) = \langle \nabla f(\underline{x}(t)) | x'(t) \rangle \quad (3.148)$$

Ma come arriviamo a questo risultato?

Sappiamo che $f(\underline{x})$ è differenziabile in A . Questo vuol dire che lo sarò per un generico $\underline{x}^0 \in A$ e che, posto $\underline{X} = \underline{x} - \underline{x}^0$ avremo che per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0$

$$R(\underline{x}, \underline{x}^0) = f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) - \langle \nabla f(\underline{x}^0) | \underline{X} \rangle = o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n) \quad (3.149)$$

Mettiamo questo risultato da parte e notiamo come la derivabilità di $\underline{x}(t)$ ci permetta di scrivere

$$\underline{x}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)}{h} \implies \underline{x}(t+h) - \underline{x}(t) = h\underline{x}'(t) - o(|h|) \quad (3.150)$$

Poniamo ora che

$$\underline{x} = \underline{x}(t+h) \quad ; \quad \underline{x}^0 = \underline{x}$$

Combinando i due risultati ottenuti otteniamo

$$\begin{aligned} f(\underline{x}(t+h)) - f(\underline{x}(t)) &= \nabla f(\underline{x}(t)) \cdot (\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)) + o(|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)|) \\ &\downarrow \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}(t+h)) - f(\underline{x}(t))}{h} &= \nabla f(\underline{x}(t)) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)|)}{h} \\ &\downarrow \\ \frac{d}{dt} f(\underline{x}(t)) &= \langle \nabla f(\underline{x}(t)) | x'(t) \rangle + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)|)}{h} \end{aligned} \quad (3.152)$$

Ma quanto vale il limite rimasto a destra? Utilizzando il risultato ottenuto dalla derivabilità possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)|)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|h\underline{x}'(t) - o(h)|)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{x}'(t)o(|h|)}{h} = \\ &= \underline{x}'(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|h|)}{h} = 0 \end{aligned} \quad (3.153)$$

Siccome $\underline{x}'(t)$ non dipende da h lo abbiamo potuto portare fuori.

Abbiamo così dimostrato il teorema.

3.5.1.1 Esempio

Sia

$$f(x, y) = y^3 \cos(x) \quad ; \quad \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad (3.154)$$

Avremo

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (-y^3 \sin(x), 3y^2 \cos(x)) \\ &\downarrow \\ \nabla f(x(t), y(t)) &= (-\sin^3(t) \sin(e^t), 3\sin^2(t) \cos(e^t)) \end{aligned} \quad (3.155)$$

$$\underline{x}'(t) = (e^t, \cos(t)) \quad (3.156)$$

Da cui

$$\langle \nabla f(\underline{x}(t)) | \underline{x}'(t) \rangle = -e^t \sin^3(t) \sin(e^t) + 3\sin^2(t) \cos(t) \cos(e^t) \quad (3.157)$$

Che è la nostra $F'(t)$.

3.5.2 Funzioni composte e curve di livello

Sia una funzione $f(\underline{x}(t))$ differenziabile in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (per comodità ci poniamo in \mathbb{R}^2 , ma vale ovunque), e siano le sue curve di livello

$$\gamma : \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\} \quad ; \quad \underline{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \quad (3.158)$$

Siccome lungo γ la funzione è costante, deve essere che

$$f'(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \gamma \quad (3.159)$$

Ma allora $\forall (x, y) \in \gamma$ avremo che

$$f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad (3.160)$$

Da cui segue che

$$\langle \nabla f(x(t)) | \underline{x}'(t) \rangle = 0 \quad \forall x(t) \in \gamma \quad (3.161)$$

Che altro non vuol dire che il gradiente di $f(\underline{x})$ è perpendicolare alle curve di livello della funzione.

3.5.3 Teorema di Lagrange (o del valor medio) in \mathbb{R}^n

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in A , e sia il segmento s_{xy} che unisce i due punti \underline{x} e \underline{y} (in quest'ordine, invertendoli scriviamo s_{yx}). Allora avremo anche un $\underline{z} \in s_{xy}$ tale che

$$f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{z}) | S \rangle \quad ; \quad \underline{S} = \underline{y} - \underline{x} \quad (3.162)$$

Nota bene: Per gli scopi del corso possiamo porre una condizione più restrittiva ma più comoda, ovvero che $f \in C^1(A)$.

Andiamo ora a dare la dimostrazione del teorema, che si appoggia pesantemente a quella del caso 1D.

Il segmento s_{xy} avrà rappresentazione

$$\hat{\underline{x}}(t) = t\underline{y} + (1-t)\underline{x} = \underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) = \underline{x} + t\underline{S} \quad ; \quad t \in [0, 1] \quad (3.163)$$

$$\hat{\underline{x}}'(t) = \underline{y} - \underline{x} = \underline{S} \quad (3.164)$$

$$\hat{\underline{x}}(0) = \underline{x} \quad ; \quad \hat{\underline{x}}(1) = \underline{y} \quad (3.165)$$

Cosa succede quando studiamo la funzione lungo il segmento s_{xy} ? Succede che troviamo un tipo di funzione a noi familiare, infatti

$$f(\underline{x})|_{\underline{x} \in s_{xy}} = f(\hat{\underline{x}}(t)) = F(t) \quad (3.166)$$

Che possiamo trattare come una funzione ad una sola variabile! Dal teorema di Lagrange in una dimensione ricaviamo che

$$\exists \tau \in (0, 1) : 1 \cdot F'(\tau) = F(1) - F(0) \quad (3.167)$$

$$\hat{\underline{x}}(\tau) \in s_{xy} \implies \hat{\underline{x}}(\tau) = \underline{z} \quad (3.168)$$

Ma noi sappiamo due cose:

$$F(1) = f(\underline{y}) \quad ; \quad F(0) = f(\underline{x}) \quad (3.169)$$

$$F'(t) = \langle \nabla f(\hat{\underline{x}}(t)) | \hat{\underline{x}}'(t) \rangle = \langle \nabla f(\hat{\underline{x}}(t)) | \underline{S} \rangle \quad (3.170)$$

Combinando tutte queste informazioni otteniamo che, calcolando $F(t)$ in τ otteniamo il risultato cercato:

$$\langle \nabla f(\hat{\underline{x}}(\tau)) | \hat{\underline{x}}'(\tau) \rangle = \langle \nabla f(\underline{z}) | \underline{S} \rangle = f(\underline{y}) - f(\underline{x}) \quad (3.171)$$

3.5.4 Teorema delle funzioni costanti

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(A)$, con A aperto e connesso. Avremo che se

$$\nabla f(\underline{x}) \equiv \underline{0} \Leftrightarrow f_{x_i}(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in A \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.172)$$

Allora $f(\underline{x}) = \text{cost.}$ $\forall \underline{x} \in A$

Come procediamo per la dimostrazione?

Siano

$$\hat{\underline{x}} \in A \quad ; \quad A_0 = \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) = f(\hat{\underline{x}}) \} \neq \emptyset \quad (3.173)$$

Verifichiamo come A_0 sia aperto. Sia

$$\underline{x}^0 \in A_0 \implies \underline{x}^0 \in A \quad (3.174)$$

Avremo che $\exists I(\underline{x}^0) \subset A$.

Prendiamo ora $\underline{x}^1 \in I(\underline{x}^0)$ e applichiamo il teorema di Lagrange:

$$f(\underline{x}^1) - f(\underline{x}^0) = \nabla f(\underline{z}) \cdot (\underline{x}^1 - \underline{x}^0) = 0 \implies f(\underline{x}^1) = f(\underline{x}^0) \quad (3.175)$$

E questo risultato varrà $\forall \underline{x} \in I(\underline{x}^0)$, ma siccome $\underline{x}^0 \in A_0$ avremo che

$$f(\underline{x}^1) = f(\underline{x}^0) = f(\hat{\underline{x}}) \quad (3.176)$$

Da questo segue che $I(\underline{x}^0)$ è tutto contenuto in A_0 e che quindi A_0 è aperto.

Consideriamo ora il complementare

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) \neq f(\hat{\underline{x}}) \} = \\ &= \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) < f(\hat{\underline{x}}) \} \cup \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) > f(\hat{\underline{x}}) \} \end{aligned} \quad (3.177)$$

Essendo entrambi i sottoinsiemi aperti avremo che anche A_1 lo sarà. Abbiamo inoltre che

$$A_0 \neq \emptyset \quad ; \quad A = A_0 \cup A_1 \neq \emptyset \quad (3.178)$$

Ma siccome A è connesso abbiamo che deve essere $A_1 = \emptyset$ e quindi $A = A_0$, e quindi la funzione è costante in tutto l'insieme. Abbiamo così dimostrato il teorema.

3.5.4.1 Esempio

Un'interessante applicazione di questo teorema si ha con la funzione

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.179)$$

Se studiamo la funzione nel I quadrante troviamo che

$$f_x = 0 = f_y \quad \forall (x, y) \in I = \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \quad (3.180)$$

E quindi $f(x, y) = \text{cost.}$ e grazie al teorema possiamo porci in un punto comodo per trovare questo valore, per esempio $(1, 1)$:

$$f(1, 1) = 2 \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \implies f(x, y) = \frac{\pi}{2} \quad \forall (x, y) \in I \quad (3.181)$$

3.5.5 Derivate successive

Consideriamo funzioni del tipo

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.182)$$

Già sappiamo che avremo n derivate al primo ordine. Quante derivate avremo al secondo? Siccome avremo n derivate per ogni f_{x_i} segue che avremo in totale n^2 derivate. E così via.

Uno strumento utile per studiare le derivate successive al primo ordine è la **Matrice Hessiana**, definita come:

$$\mathbf{H}_f(\underline{x}) = (f_{x_i x_j}(\underline{x}))_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} \quad (3.183)$$

Che nel caso \mathbb{R}^2 (quello che vedremo di più) si riduce a

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \quad (3.184)$$

3.5.6 Teorema di Schwartz

Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se si ha che $f \in C^2(A)$ (continua con derivate prime e seconde e continue) allora le derivate miste coincidono ($f_{x_i x_y} = f_{x_y x_i}$).

Non ne diamo la dimostrazione ma mostriamo un **esempio negativo**:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3.185)$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= (f_x)_y|_{(0,0)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - 0}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k)}{h} \right] = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \right] = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k^2}{k^2} = -1 \end{aligned} \quad (3.186)$$

$$f_{yx}(0, 0) = (f_y)_x|_{(0,0)} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h^2} = 1 \quad (3.187)$$

E notiamo come $f_{xy} \neq f_{yx}$

3.5.7 Funzioni vettoriali

Vediamo ora come ci si comporta con la famiglia più generale possibile di funzioni, ovvero

$$\begin{aligned}\underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \underline{x} &\longrightarrow \underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))\end{aligned}\tag{3.188}$$

Come si traducono i concetti espressi per le funzioni scalari ($\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$)?

La definizione di **continuità** è identica:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) \Leftrightarrow \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0)| = 0\tag{3.189}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x}^0) \end{array}\tag{3.190}$$

Così come quella di **derivabilità**.

Quella di **differenziabilità** anche è molto simile.

Iniziamo definendo

$$R(\underline{x}, \underline{x}^0) = \underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}^0) - \mathbf{J}(\underline{x}^0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^0)\tag{3.191}$$

Ma cos'è in questo caso \mathbf{J} ? Per far tornare dimensionalmente i conti deve essere una matrice ad m righe ed n colonne, e per estensione al caso monodimensionale la definiamo come il **gradiente** di f , e prende il nome di **matrice jacobiana**:

$$\mathbf{J}(\underline{x}^0) = \left(\begin{array}{ccc} \partial_{x_1} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1} f_m & \dots & \partial_{x_n} f_m \end{array} \right) \Bigg|_{\underline{x}^0}; \quad \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\tag{3.192}$$

O, in forma compatta

$$\mathbf{J}(\underline{x}^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\underline{x}^0) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}\tag{3.193}$$

Si dice infatti che $\underline{f}(\underline{x})$ è differenziabile in \underline{x}^0 se

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{|R(\underline{x}, \underline{x}^0)|_m}{|\underline{x} - \underline{x}^0|_n} = 0\tag{3.194}$$

Notiamo come nel caso $m = 1$ si ottenga il caso studiato in precedenza.

Siccome si deduce che la differenziabilità di una funzione vettoriale dipende dalla differenziabilità di tutte le sue componenti, possiamo estendere a tali funzioni vettoriali i teoremi dimostrati nel caso scalare, che varranno per le singole componenti.

3.5.7.1 Derivazione di funzioni composte vettoriali

Prendiamo le due funzioni

$$\begin{aligned}\underline{g} : A \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow B \subset \mathbb{R}^k \\ \underline{x}(t) &\longrightarrow \underline{g}(\underline{x}(t))\end{aligned}\tag{3.195}$$

$$\begin{aligned}\underline{f} : B \subset \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \underline{g}(\underline{x}(t)) &\longrightarrow \underline{f}(\underline{g}(\underline{x}(t)))\end{aligned}\tag{3.196}$$

Avremo che se

1. \underline{g} diff. in B allora avremo $\mathbf{J}_g(\underline{x})$ con m righe e n colonne ($m \times n$)
2. \underline{f} diff. in A allora avremo $\mathbf{J}_f(\underline{x})$ con k righe e n colonne ($k \times n$)

Allora anche $\underline{F}(\underline{x})$ sarà differenziabile, e avremo che

$$\mathbf{J}_{\underline{F}}(\underline{x}) = \mathbf{J}_f(\underline{x}) \times \mathbf{J}_g(\underline{x})\tag{3.197}$$

Non dimostriamo nulla di quanto affermato, e ci limitiamo a dare un **esempio**:

$$\begin{aligned}\underline{g} : A \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow B \subset \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longrightarrow (x(u, v), y(u, v))\end{aligned}\tag{3.198}$$

$$\begin{aligned}\underline{f} : B \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x(u, v), y(u, v)) &\longrightarrow f(x(u, v), y(u, v))\end{aligned}\tag{3.199}$$

Avremo che

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\underline{f}}(\underline{x}) \times \mathbf{J}_{\underline{g}}(\underline{x}) &= \mathbf{J}_{\underline{F}}(\underline{x}) = (f_x, f_y) \times \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \\ &= (f_x x_u + f_y y_u, f_x x_v + f_y y_v) \end{aligned} \quad (3.200)$$

3.5.8 Formula di Taylor in \mathbb{R}^n

Per arrivare alla definizione della formula di Taylor in \mathbb{R}^n ci appoggeremo pesantemente al caso in \mathbb{R} . Ci basta lavorare con funzioni scalari, in quanto per funzioni vettoriali si procede per componenti.

Noi non ce ne siamo accorti, ma negli esempi fatti in precedenza abbiamo già trovato delle formule di Taylor in due occasioni!

1. $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\underline{x}^0 \in A$; $\underline{X} = \underline{x} - \underline{x}^0$

Se $f(\underline{x})$ è diff. in \underline{x}^0 allora si ha che

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{R(\underline{x}, \underline{x}^0)}{|\underline{x} - \underline{x}^0|_n} = 0 \quad (3.201)$$

Che implica, per $|\underline{x} - \underline{x}^0|_n \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} 0$:

$$\begin{aligned} R(\underline{x}, \underline{x}^0) &= o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n) \\ &\downarrow \\ f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) - \langle \nabla f(\underline{x}^0) | \underline{X} \rangle &= o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n) \\ &\downarrow \\ f(\underline{x}) &= f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0) | \underline{X} \rangle + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n) \end{aligned} \quad (3.202)$$

Che altro non è che una **formula di Taylor al primo ordine**, con la **migliore approssimazione lineare possibile in \underline{x}^0**

$$P_1(\underline{x}^0) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0) | \underline{X} \rangle \quad (3.203)$$

Sommata al **resto di Peano**

$$o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n) \quad (3.204)$$

2. $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\underline{x}, \underline{x}^0, s_{\underline{x}, \underline{x}^0} \in A$; $\underline{X} = \underline{x} - \underline{x}^0$

Per il teorema di Lagrange abbiamo che

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla z(\underline{x}) | \underline{X} \rangle \quad ; \quad z \in s_{\underline{x}, \underline{x}^0} \quad (3.205)$$

Che altro non è che una **formula di Taylor di ordine 0**, con **resto di Lagrange** pari a

$$\langle \nabla z(\underline{x}) | \underline{X} \rangle \quad (3.206)$$

Queste sono però semplici approssimazioni lineari. Se volessimo aumentare la precisione dell'approssimazione dobbiamo porre delle condizioni più stringenti sulla funzione di partenza: Abbiamo bisogno che $f(\underline{x}) \in C^2(A)$.

3.5.8.1 Approssimazione al I ordine con resto di Lagrange al II ordine

Immaginiamo ora di procedere lungo il segmento $s_{\underline{x}, \underline{x}^0}$ e di avere quindi la rappresentazione

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{x}^0 + t\underline{X} \quad t \in [0, 1] \quad ; \quad \underline{X} = \underline{x} - \underline{x}^0 \quad (3.207)$$

$$\hat{\underline{x}}(0) = \underline{x}^0 \quad ; \quad \hat{\underline{x}}(1) = \underline{x} \quad (3.208)$$

$$\hat{\underline{x}}'(t) = \underline{X} \quad (\text{è costante rispetto a } t!) \quad (3.209)$$

Studiando $f(\underline{x})$ lungo $s_{\underline{x}, \underline{x}^0}$ avremo

$$F(t) = f(\hat{\underline{x}}(t)) \implies F(t) \in C^2([0, 1]) \quad (3.210)$$

$$F(0) = f(\underline{x}^0) \quad ; \quad F(1) = f(\underline{x}) \quad (3.211)$$

$$F'(t) = \frac{d}{dt} f(\hat{\underline{x}}(t)) = \langle \nabla \underline{x}^0(|) \hat{\underline{x}}'(t) \rangle = \langle \nabla \underline{x}^0(|) X \rangle \quad (3.212)$$

Scriviamo in modo comodo le derivate:

$$F'(t) = \langle \nabla \underline{x}^0(|) X \rangle = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\underline{x}^0) \cdot (x_i - x_i^0) \quad (3.213)$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt} F'(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\underline{x}^0) \cdot (x_i - x_i^0) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} f_{x_i}(\underline{x}^0) \cdot (x_i - x_i^0) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\hat{\underline{x}}(t)) \cdot \hat{x}_j(t) \right) \cdot (x_i - x_i^0) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\hat{\underline{x}}(t)) \cdot (x_j - x_j^0) \right) \cdot (x_i - x_i^0) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\hat{\underline{x}}(t)) \cdot (x_j - x_j^0) \cdot (x_i - x_i^0) \end{aligned} \quad (3.214)$$

Per compattezza scriviamo

$$\hat{\underline{x}}(\tau) = \underline{\xi} \quad (3.215)$$

$$\underline{Y}(\hat{\underline{x}}(t)) = \underline{H}_f(\hat{\underline{x}}(t)) \times \underline{X} \quad (3.216)$$

E possiamo riscrivere:

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\hat{\underline{x}}(t)) \cdot (x_j - x_j^0) \cdot (x_i - x_i^0) = \langle Y(\hat{\underline{x}}(t)) | X \rangle \quad (3.217)$$

Partendo dalla formula di Taylor per \mathbb{R}

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(\tau) \quad \forall \tau \in (0, 1) \quad (3.218)$$

Arriviamo ad avere, sostituendo quanto trovato finora

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla \underline{x}^0(|) X \rangle + \frac{1}{2} \langle Y(\underline{\xi}) | X \rangle \quad \forall \tau \in (0, 1) \quad (3.219)$$

con l'ultimo termine a destra che è il nostro **resto di Lagrange**.

3.5.8.2 Approssimazione al II ordine con resto di Peano

La formula di Taylor al II ordine con resto di Peano si esprime nel seguente modo:

$$f(\underline{x}) = P_2(\underline{x}, \underline{x}^0) + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2) \quad (3.220)$$

$$P_2(\underline{x}, \underline{x}^0) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0) | X \rangle + \frac{1}{2} \langle Y(\underline{x}^0) | X \rangle \quad (3.221)$$

Ricordando che

$$\underline{X} = \underline{x} - \underline{x}^0 \quad ; \quad \underline{Y} = \mathbf{H}_f(\hat{\underline{x}}(t)) \times \underline{X} \quad (3.222)$$

Per avere una visione più chiara di questa espressione scriviamo il caso in \mathbb{R}^2 che ci servirà anche più avanti:

$$\begin{aligned} P_2(x, y; x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &\downarrow \\ P_2(x, y; x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2] \end{aligned} \quad (3.223)$$

Nota bene: Siccome $f(x, y) \in C^2(A)$ vale il th. di Schwartz e quindi le der. miste sono uguali.

Dimostriamo ora come dall'espressione trovata nel paragrafo precedente

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0) | X \rangle + \frac{1}{2} \langle Y(\underline{x}^0) | X \rangle \quad (3.224)$$

Possiamo ricavare

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0) | X \rangle + \frac{1}{2} \langle Y(\underline{x}^0) | X \rangle + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2) \quad (3.225)$$

Per dimostrarlo dobbiamo verificare che, definito

$$\underline{Z} = (\mathbf{H}_f(\underline{\xi}) - \mathbf{H}_f(\underline{x}^0)) \underline{X} \quad (3.226)$$

$$\frac{1}{2} \langle Z | X \rangle + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2) = o(3.225) \quad (3.227)$$

Avremo che, dividendo tutto per $o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)$ otterremo

$$\frac{1}{2} \frac{\langle Z | X \rangle}{o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)} + \frac{o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)}{o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)} = \frac{o(3.225)}{o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)} \quad (3.228)$$

E ci basta studiare se

$$\frac{\langle Z | X \rangle}{o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)} = o(3.224) \quad (3.229)$$

Prendiamo il discorso alla lontana.

Sia la matrice simmetrica generica \mathbf{Q} ($q_{ij} = q_{ji}$). Assumiamo che, preso un generico vettore \underline{x} , avremo

$$\underline{A} = \mathbf{Q} \underline{x} \quad (3.230)$$

$$|\langle A | X \rangle| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n q_{ij}^2} \cdot |\underline{x}|_n^2 \quad (3.231)$$

Da cui abbiamo

$$\frac{|\langle A | X \rangle|}{|\underline{x}|_n^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n q_{ij}^2} \quad (3.232)$$

Se la nostra matrice è $\mathbf{H}_f(\underline{\xi}) - \mathbf{H}_f(\underline{x}^0)$ allora segue direttamente la 3.229, e quindi abbiamo che le due espressioni si implicano a vicenda.

Vediamo ora come la 3.224 si implica a vicenda con la 3.232:

Avremo che, essendo le derivate seconde continue

$$\frac{\langle Z | X \rangle}{|\underline{x}|_n^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j}^n [f_{x_i x_j}(\underline{\xi}) - f_{x_i x_j}(\underline{x}^0)]^2} \xrightarrow[\underline{\xi} \rightarrow \underline{x}^0]{\frac{x}{\underline{x}}} 0 \quad (3.233)$$

E quindi 3.229 è infinitesima in un intorno di \underline{x}^0 come volevamo dimostrare, e abbiamo quindi anche dimostrato come dal resto di Lagrange si possa passare a quello di Peano.

Prima di chiudere questo discorso dobbiamo porci una domanda: come si dimostra la 3.232?
Avevamo che

$$\underline{A} = \mathbf{Q}\underline{x} \quad (3.234)$$

$$|\langle A|x \rangle|_n \leq |\mathbf{Q}\underline{x}|_n \cdot |\underline{x}|_n \quad (3.235)$$

Abbiamo però che

$$|\underline{A}|_n^2 = |\mathbf{Q}\underline{x}|_n^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{Q}\underline{x})_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \right)^2 \quad (3.236)$$

Siccome

$$\left(\sum_{j=1}^n q_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n q_{ij}^2 \cdot |\underline{x}|_n^2 \quad (3.237)$$

Avremo la reazione a catena

$$\begin{aligned} |\mathbf{Q}\underline{x}|_n^2 &\leq \sum_{j=1}^n q_{ij}^2 \cdot |\underline{x}|_n^2 \\ &\downarrow \\ |\mathbf{Q}\underline{x}|_n &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n q_{ij}^2} \cdot |\underline{x}|_n = \underline{A} \\ &\downarrow \\ |\langle A|x \rangle|_n &\leq |\mathbf{Q}\underline{x}|_n \cdot |\underline{x}|_n \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n q_{ij}^2} \cdot |\underline{x}|_n \cdot |\underline{x}|_n = \sqrt{\sum_{j=1}^n q_{ij}^2} \cdot |\underline{x}|_n^2 \end{aligned} \quad (3.238)$$

Che è il nostro risultato.

3.5.8.3 Esempio di PdT del 1o ordine

$$f(x, y) = e^{3x+5y} \quad ; \quad (x_0, y_0) = (0, 0) \quad (3.239)$$

$$f(0, 0) = 1$$

$$f_x(0, 0) = 3e^{0+0} = 3$$

$$f_y(0, 0) = 5e^{0+0} = 5$$

↓

$$P_1(x, y ; 0, 0) = 1 + (3, 5) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + 3x + 5y \quad (3.240)$$

Per il calcolo del resto abbiamo bisogno dell'Hessiano

$$\begin{aligned} f_{xx}(\xi, \eta) &= 9e^{3\xi+5\eta} \\ f_{xy}(\xi, \eta) &= 15e^{3\xi+5\eta} = f_{yx}(\xi, \eta) \\ f_{yy}(\xi, \eta) &= 25e^{3\xi+5\eta} \\ &\downarrow \\ \mathbf{H}_f(\xi, \eta) &= e^{3\xi+5\eta} \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \\ &\downarrow \\ \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (9x + 15y, 15x + 25y) \\ (9x + 15y, 15x + 25y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 9x^2 + 30xy + 25y^2 \\ &\downarrow \\ R_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} e^{3\xi+5\eta} (9x^2 + 30xy + 25y^2) \end{aligned} \quad (3.241)$$

E arriviamo a dare infine

$$f(x, y) = 1 + 3x + 5y + \frac{1}{2} e^{3\xi+5\eta} (9x^2 + 30xy + 25y^2) \quad (3.242)$$

3.5.9 Punti critici per funzioni a più variabili

Come per il caso di funzioni in \mathbb{R} , data una

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.243)$$

definiamo $\underline{x}^0 \in A$ come punto di

1. **Massimo Relativo (o locale)** se

$$\exists I(\underline{x}^0) : f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^0) \quad \forall \underline{x} \in A \cap I(\underline{x}^0) \quad (3.244)$$

2. **Minimo Relativo (o locale)** se

$$\exists I(\underline{x}^0) : f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^0) \quad \forall \underline{x} \in A \cap I(\underline{x}^0) \quad (3.245)$$

Per individuare candidati ai punti di max e min uno strumento utile (ma non l'unico) è il seguente teorema.

3.5.9.1 Teorema di Fermat per punti critici interni

Il teorema di Fermat ci dice che

Data una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.246)$$

Preso un $\underline{x}^0 \in A$, se valgono le seguenti ipotesi:

1. \underline{x}^0 è punto di massimo o minimo relativo
2. \underline{x}^0 è interno ad A
3. $f(\underline{x})$ è diff. in \underline{x}^0

Allora si ha che

$$\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0} \Leftrightarrow f_{x_i}(\underline{x}^0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.247)$$

E i punti che rispettano queste condizioni vengono detti **punti critici**.

Vediamo ora come dimostriamo tale teorema:

Poniamoci in \underline{x}^0 punto di massimo relativo. Allora avremo che

$$f(x) \leq f(\underline{x}^0) \quad \forall x \in I(\underline{x}^0) \subset A \quad (3.248)$$

Preso il versore \hat{v} studiamo l'andamento della funzione nel segmento descritto da

$$\underline{x}(t) = \underline{x}^0 + t\hat{v} \implies f(\underline{x}(t)) = F(t) \quad (3.249)$$

$$F(0) = f(\underline{x}(0)) = f(\underline{x}^0) \quad (3.250)$$

Avremo che

$$f(\underline{x}^0 + t\hat{v}) \leq f(\underline{x}^0) \quad (3.251)$$

Fissando \underline{x}^0 e \hat{v} questo implica che

$$F(t) \leq F(0) \quad (3.252)$$

e quindi $t = 0$ è un punto di massimo per la funzione in \mathbb{R} , e sappiamo bene che per punti di massimo e minimo in \mathbb{R} si ha che

$$F'(0) = 0 \quad (3.253)$$

E da qui otteniamo il risultato cercato utilizzando l'ormai nota espressione per le derivate di funzioni composte otteniamo il risultato cercato:

$$F'(0) = \langle \nabla f(\underline{x}^0) | v \rangle = 0 \implies \nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0} \quad (3.254)$$

Vediamo un **esempio** in \mathbb{R}^2 che ci illustra perché il th. di Fermat non è l'unico strumento e non è sufficiente da solo per lo studio dei punti critici:

$$(x_0, y_0) = (0, 0) \quad (3.255)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \implies f(0, 0) = 0 \\ &\downarrow \\ \nabla f(x, y) &= (2x, 2y) \implies \nabla f(0, 0) = (0, 0) \end{aligned} \quad (3.256)$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x^2 - y^2 \implies f(0, 0) = 0 \\ &\downarrow \\ \nabla g(x, y) &= (2x, -2y) \implies \nabla g(0, 0) = (0, 0) \end{aligned} \quad (3.257)$$

$$\begin{aligned} h(x, y) &= -x^2 - y^2 \implies f(0, 0) = 0 \\ &\downarrow \\ \nabla h(x, y) &= (-2x, 2y) \implies \nabla h(0, 0) = (0, 0) \end{aligned} \quad (3.258)$$

Tutte e tre le funzioni si annullano nell'origine, e tutte hanno gradiente nullo, ma **non sappiamo che tipo di punto critico sia l'origine per le tre funzioni!**

Dobbiamo studiare il comportamento della funzione in un intorno dell'origine e vediamo come

1. $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in I(0, 0)$ e quindi è punto di minimo
2. $h(x, y) \leq 0 \quad \forall (x, y) \in I(0, 0)$ e quindi è punto di massimo
3. per $g(x, y)$ dipende dalla traiettoria, e quindi prende il nome di **punto di sella**.

Abbiamo quindi tre tipologie di punti critici.

Inoltre il test di Fermat **non individua i punti critici che sono anche punti di non differenziabilità!**

3.5.9.2 Forme quadratiche

Introduciamo le forme quadratiche, che ci serviranno fra poco per classificare i punti critici. Data una

$$\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \quad ; \quad q_{ij} = q_{ji} \quad (3.259)$$

si dice che \mathbf{Q} è una **forma quadratica** se si ha che

$$q(\underline{x}) = (\mathbf{Q}\underline{x}) \cdot \underline{x} = \sum_{i,j}^n q_{ij}x_i x_j \quad (3.260)$$

In altre parole

$$\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.261)$$

Si dice che una forma quadratica è

1. **Definita positiva** se

$$q(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{x}^0\} \quad (3.262)$$

2. **Definita negativa** se

$$q(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{x}^0\} \quad (3.263)$$

3. **Semidefinita positiva** se

$$q(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{x}^0\} \quad (3.264)$$

4. **Semidefinita negativa** se

$$q(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{x}^0\} \quad (3.265)$$

5. **Indefinita** se

$$\exists \underline{x}^1, \underline{x}^2 : q(\underline{x}^1) < 0, q(\underline{x}^2) > 0 \quad (3.266)$$

Ma queste sono ovviamente definizioni troppo vaghe per essere di utilità pratica. Ma allora come facciamo a categorizzare una forma quadratica? Diamo due metodi:

1. Test di Sylvester:

Data la matrice $n \times n$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.267)$$

se ne definisce la ridotta \mathbf{Q}_k come la matrice formata dalle prime k righe e colonne di \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{k1} & \dots & q_{kk} \end{pmatrix} ; \quad k \leq n \quad (3.268)$$

E si dice che \mathbf{Q} è:

- (a) **Definita positiva** se $\det \mathbf{Q}_k > 0 \quad \forall k$
- (b) **Definita negativa** se $(-1)^k \det \mathbf{Q}_k > 0 \quad \forall k$

Vediamone un esempio semplice in \mathbb{R}^2 , con l'**Hessiano**:

$$\mathbf{H}_f(\underline{x}) = \left(\begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{array} \right) \Big|_{\underline{x}} \quad (3.269)$$

Avremo che $\mathbf{H}_f(\underline{x})$ sarà

- (a) **Definita positiva** se

$$\begin{cases} f_{xx} > 0 \\ f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \end{cases} \quad (3.270)$$

- (b) **Definita negativa** se

$$\begin{cases} f_{xx} < 0 \\ f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \end{cases} \quad (3.271)$$

2. Test degli autovalori:

Sia $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ con $q_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j$

Presi gli autovalori ordinati in ordine crescente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

avremo che \mathbf{Q} sarà

- (a) **Definita positiva** se

$$\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.272)$$

- (b) **Definita negativa** se

$$\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3.273)$$

- (c) **Semiefinita positiva** se

$$\lambda_1 = 0, \lambda_i > 0 \quad \forall i = 2, \dots, n \quad (3.274)$$

- (d) **Semidefinita negativa** se

$$\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \lambda_n = 0 \quad (3.275)$$

- (e) **Indefinita** se

$$\lambda_1 < 0, \lambda_n > 0 \quad (3.276)$$

3.5.10 Classificazione dei punti critici interni

Abbiamo finalmente tutto quello che ci serve per classificare i punti critici interni!

Con gli strumenti che abbiamo ora possiamo enunciare le seguenti condizioni:

1. Condizione necessaria del II ordine:

Sia una

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^f(\underline{x}) \in C^2(A) \quad (3.277)$$

E sia \underline{x}^0 interno e stazionario ad A

$$\underline{x}^0 \in A : \nabla f(\underline{x}^0) = 0 \quad (3.278)$$

Allora avremo che \underline{x}^0 sarà

- (a) **Punto di massimo relativo** se $\mathbf{H}_f(\underline{x}^0)$ è semidefinita positiva
- (b) **Punto di minimo relativo** se $\mathbf{H}_f(\underline{x}^0)$ è semidefinita negativa

La dimostrazione discende dalla formula di Taylor con resto di Peano:

Sia \underline{x}^0 punto di minimo. Ricordando che e che

$$\underline{Y} = \mathbf{H}_f(\underline{x}^0)\underline{X} \quad (3.279)$$

$$\underline{X} = \underline{x} - \underline{x}^0 \quad (3.280)$$

Avremo

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= f(\underline{x}^0) + \frac{1}{2} \langle \underline{Y}(\underline{x}^0) | \underline{X} \rangle + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2) \geq f(\underline{x}^0) \\ &\downarrow \\ &\frac{1}{2} \langle \underline{Y}(\underline{x}^0) | \underline{X} \rangle + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2) \geq 0 \\ &\downarrow \\ &\langle \underline{Y}(\underline{x}^0) | \underline{X} \rangle \geq o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2) \quad \forall \underline{x} \in I(\underline{x}^0) \end{aligned} \quad (3.281)$$

Se ci poniamo di nuovo nella rappresentazione

$$\underline{x} = \underline{x}^0 + t\underline{\hat{v}} \in I(\underline{x}^0) \quad \text{per } t \text{ abbastanza piccolo} \quad (3.282)$$

Avremo che

$$\underline{Y}(t\underline{\hat{v}}) = \mathbf{H}_f(t\underline{\hat{v}})t\underline{\hat{v}} ; \quad \underline{X} = t\underline{\hat{v}} \quad (3.283)$$

$$\langle \underline{Y}(t\underline{\hat{v}}) | \underline{X} \rangle = t^2 (\mathbf{H}_f(t\underline{\hat{v}})\hat{v}) \cdot \hat{v} = t^2 \sum_{ij} q_{ij} x_i x_j \quad (3.284)$$

Da cui

$$\begin{aligned} t^2 \sum_{ij} q_{ij} x_i x_j &\geq o(t^2 |\hat{v}|_n^2) = o(t^2) \\ &\downarrow \\ &\sum_{ij} q_{ij} x_i x_j \geq \frac{o(t^2)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \\ &\downarrow \\ &(\mathbf{H}_f(t\underline{\hat{v}})\hat{v}) \cdot \hat{v} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.285)$$

Da cui segue che, essendo $|\hat{v}|_n^2 > 0$ deve anche essere che

$$|\mathbf{H}_f(t\underline{\hat{v}})|_n = \det \mathbf{H}_f(t\underline{\hat{v}}) \geq 0 \quad (3.286)$$

da cui abbiamo il risultato che cercavamo. Analogamente si dimostra l'altro caso.

2. Condizione sufficiente del II ordine:

Sia una

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^f(\underline{x}) \in C^2(A) \quad (3.287)$$

E sia \underline{x}^0 interno e stazionario ad A

$$\underline{x}^0 \in A : \nabla f(\underline{x}^0) = 0 \quad (3.288)$$

Allora avremo che se $\mathbf{H}_f(\underline{x}^0)$ sarà

- (a) **def. pos.** allora \underline{x}^0 sarà punto di min. rel.
- (b) **def. neg.** allora \underline{x}^0 sarà punto di max. rel.
- (c) **indef.** allora \underline{x}^0 sarà punto di sella
- (d) **semidef. pos./neg** allora il test è inconcludente, e bisogna studiare il comportamento della funzione in un intorno di \underline{x}^0 .

Per le dimostrazioni partiamo dalla formula di Taylor al II ordine con resto di Peano.

- (a) Sia $\det \mathbf{H}_f(\underline{x}^0) > 0$ allora avremo che

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \langle \nabla f(\underline{x}^0) | \underline{X} \rangle + \frac{1}{2} \langle Y | X \rangle + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|) \quad (3.289)$$

$$\underline{Y} = \mathbf{H}_f(\underline{x}^0) \underline{X} ; \quad \underline{X} = \underline{x} - \underline{x}^0$$

$$f(\underline{x}^0) + \frac{1}{2} \langle Y | X \rangle + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2) \geq f(\underline{x}^0) + \frac{1}{2} m |\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2 + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)$$

↓

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^0) + \frac{1}{2} m |\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2 + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)$$

↓

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) \geq \frac{1}{2} m |\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2 + o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)$$

↓

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) \geq \left(\frac{1}{2} m + \frac{o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)}{|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2} \right) |\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2 \quad (3.290)$$

La quantità tra parentesi è > 0 per \underline{x} vicini a \underline{x}^0 , con

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} \frac{o(|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2)}{|\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2} = 0 \quad (3.291)$$

E quindi avremo il risultato cercato

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) &\geq \frac{1}{2} m |\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2 \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} 0 \\ &\downarrow \\ f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) &\geq 0 \quad \forall \underline{x} \in I(\underline{x}^0, \delta) \end{aligned} \quad (3.292)$$

- (b) La dimostrazione è identica, ma stavolta avremo che

$$\langle Y | X \rangle \leq m |\underline{x} - \underline{x}^0|_n^2$$

- (c) Segue per esclusione dalle precedenti

- (d) *mancante?*

Vediamo ora un paio di **esempi** in \mathbb{R}^2 :

1. $f(x, y) = x^2 + y^4$

Avremo in questo caso che

$$f_x = 2x \quad (3.293)$$

$$f_y = 4y^3 \quad (3.294)$$

$$f_{xx} = 2 \quad (3.295)$$

$$f_{xy} = 0 \quad (3.296)$$

$$f_{yy} = 12y^2 \quad (3.297)$$

Da cui abbiamo che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 4y_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies (x_0, y_0) = (0, 0) \quad (3.298)$$

$$\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \implies \text{semidef. pos.} \quad (3.299)$$

Il test è quindi inconcludente, e dobbiamo studiare il comportamento della funzione. Notiamo però come per forza sia $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$, che è quindi un punto di minimo relativo.

2. $g(x, y) = x^2 - y^4$

Otteniamo gli stessi risultati nei conti, ma stavolta abbiamo che

$$f(x, 0) = +x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (3.300)$$

$$f(0, y) = -y^4 < 0 \quad \forall y \neq 0 \quad (3.301)$$

e quindi $(0, 0)$ in questo caso è un punto di sella.

3. $h(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

non ho capito, andare venerdì a chiedere

3.5.11 Funzioni convesse

Iniziamo dando la definizione di **Insieme convesso**, ovvero un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che

$$\lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{z} \in A \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{x}, \underline{z} \in A \\ \forall \lambda \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (3.302)$$

In parole povere, un insieme è convesso se due punti qualsiasi possono essere collegati da traiettorie lineari.

Da qui, dati

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^A \text{ convesso} \quad (3.303)$$

possiamo dire che f sarà una **funzione convessa** se

$$f(\lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{z}) \leq \lambda f(\underline{x}) + (1 - \lambda) f(\underline{z}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{x}, \underline{z} \in A \\ \forall \lambda \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (3.304)$$

In \mathbb{R} questo significava che

$$x_1 < x_2 \implies f(x) \leq s_{x_1 x_2} \quad \forall x \in [x_1, x_2] \quad (3.305)$$

Le funzioni convesse sono molto comode da analizzare, dato che ci sono una serie di teoremi che ne semplificano allo studio. Ad esempio è possibile dimostrare (ma noi non lo faremo), che in un aperto connesso una funzione convessa è continua.

Visto questo fatto è utile definire dei **criteri di convessità**:

1. **Criterio della differenziabilità:**

Se $f(\underline{x})$ è differenziabile in A aperto e connesso, si avrà che sarà convessa se

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^0) + \nabla f(\underline{x}^0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^0) \quad \forall \underline{x}, \underline{x}^0 \in A \quad (3.306)$$

Nota 1: Ovvero $f(\underline{x})$ è sempre sopra al piano tangente in \underline{x}^0

Nota 2: se \underline{x}^0 è un punto critico allora sarà sicuramente di minimo, infatti l'espressione si riduce a

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^0) \quad (3.307)$$

2. **Criterio dell'Hessiano:** Se $f(\underline{x}) \in C^2(A)$ con A aperto e connesso, si avrà che sarà convessa se $\mathbf{H}_f(\underline{x})$ è semi/def. positiva $\forall \underline{x} \in A$

3.5.12 Ricerca dei punti critici

Il th. di Weierstrass che abbiamo già enunciato garantisce l'esistenza di punti di max. e min. per insiemi chiusi e limitati. Noi per ora li abbiamo cercati solo interni, ma niente impedisce di averne sulla frontiera!

La lista dei candidati diventa quindi:

1. Punti interni:

- (a) punti di non derivabilità/differenziabilità
- (b) punti critici

2. punti di frontiera

Per i punti interni sappiamo come muoverci, ma per quelli di frontiera? Non possiamo applicare gli stessi criteri per ovvi motivi, dobbiamo trovare altre strade.

Una possibile via è quella di parametrizzare la frontiera e studiare il problema come una funzione di una variabile.

Vediamo come si tradue in \mathbb{R}^2 per semplicità didattica. Chiamando γ_D la frontiera dell'insieme D avremo che

$$f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.308)$$

$$\gamma_D : \underline{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \implies F(t) = f(x(t), y(t)) \quad \forall (x, y) \in \gamma_D \quad (3.309)$$

Vediamo ora un **esempio** con studio su tutti e tre i possibili candidati:

$$f(x, y) = (2x - 3)e^{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (3.310)$$

$$f(x, y) \in C^0(D) \quad (3.311)$$

D è chiuso e limitato, ergo Weierstrass ci garantisce l'esistenza di max. e min.
Andiamo a cercarli.

1. Punti interni:

- (a) punti di non derivabilità/differenziabilità

Guardando la funzione ci viene il dubbio che l'origine sia un punto di questo tipo, controlliamo:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(2h - 3)e^{|h|} - 3] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[2e^{|h|} - 3 \frac{e^{|h|} - 1}{h} \right] = 2 - 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{|h|} - 1}{h} \end{aligned} \quad (3.312)$$

Il limite rimasto è noto ($\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$) ed essendoci il modulo si ha che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{|h|} - 1}{h} = \begin{cases} +1 & h \rightarrow 0^+ \\ -1 & h \rightarrow 0^- \end{cases} \quad (3.313)$$

E dato che $f_x(0, 0)$ e $f(x, y)$ non è quindi derivabile in $(0, 0)$, abbiamo un candidato interno, che sappiamo studiare.

- (b) punti critici

$$f_x(x, y) = 2e^{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x(2x - 3)}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (3.314)$$

$$f_y(x, y) = \frac{y(2x - 3)}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (3.315)$$

chiedere alla lanzara come per gli esempi prima

2. punti di frontiera

$$\gamma_D : x^2 + y^2 = 1 \quad \forall (x, y) \in \gamma_D \implies \begin{cases} x = x(\theta) = \cos(\theta) \\ y = y(\theta) = \sin(\theta) \end{cases} \quad (3.316)$$

$$F(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (2 \cos(\theta) - 3)e \quad (3.317)$$

Senza dover ricorrere alle derivate notiamo come

$$\max_{\gamma_D} F(\theta) = (2 \cdot 1 - 3)e = -e \implies \theta = 0, 2\pi \quad (3.318)$$

$$\min_{\gamma_D} F(\theta) = (2 \cdot (-1) - 3)e = -5e \implies \theta = \pi \quad (3.319)$$

Da cui segue infine

$$(x, y)_M = (1, 0) \quad (3.320)$$

$$(x, y)_m = (0, -1) \quad (3.321)$$

3.5.13 Punti critici di funzioni coercitive

Finora abbiamo svolto uno studio parziale sui limiti, considerando solo quelli a valore finito tendenti a valori finiti. Rimediamo subito:

1. **Limite infinito:**

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}) = +\infty \quad (3.322)$$

$$\uparrow \\ \forall k > 0 \quad \exists \delta_k : f(\underline{x}) > K \quad \forall \underline{x} \in D : |\underline{x} - \underline{x}^0|_n < \delta_k \quad (3.323)$$

2. **Limite all'infinito:**

$$\lim_{|\underline{x}|_n \rightarrow +\infty} f(\underline{x}) = l \quad (3.324)$$

$$\uparrow \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists k_\epsilon : |f(\underline{x}) - l| < \epsilon \quad \forall \underline{x} \in D : |\underline{x}|_n > k_\epsilon \quad (3.325)$$

3. **Limite infinito all'infinito:**

$$\lim_{|\underline{x}|_n \rightarrow +\infty} f(\underline{x}) = +\infty \quad (3.326)$$

$$\uparrow \\ \forall k > 0 \quad \exists L_k : |f(\underline{x})| > k \quad \forall \underline{x} \in D : |\underline{x}|_n > L_k \quad (3.327)$$

Il concetto di **funzione coercitiva** discende dal terzo di limiti enunciato. Se una funzione è dotata di tale limite in insieme allora la funzione appartiene a questa famiglia e l'insieme è illimitato.

Possiamo enunciare ora il **II Teorema di Weierstrass**:

Sia f quantomeno $\in C^0(D)$ e coercitiva, e dia D un insieme chiuso e illimitato allora per ovvi motivi non avremo un massimo, ma avremo che

$$\exists \underline{x}_m \in D : f(\underline{x}_m) \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in D \quad (3.328)$$

La dimostrazione procede nel seguente modo:

Dato che f è coercitiva allora

$$\exists L_k : f(\underline{x}) > k \quad \forall \underline{x} : |\underline{x}|_n > L_k \quad (3.329)$$

Se consideriamo la palla chiusa $B(\underline{0}, L_k) = \{|\underline{x}|_n \leq L_k\}$, dove valgono le ipotesi del I th. di Weierstrass, avremo che

$$\exists \inf_{D \cap B(\underline{0}, L_k)} f(\underline{x}) = \min_{D \cap B(\underline{0}, L_k)} f(\underline{x}) \quad (3.330)$$

Siccome fuori B la funzione cresce all'infinito avremo che sicuramente

$$\min_{B(\underline{0}, L_k)} f(\underline{x}) \leq \min_{D \setminus \{B(\underline{0}, L_k)\}} f(\underline{x}) \implies \min_{D \cap B(\underline{0}, L_k)} f(\underline{x}) = \min_{B(\underline{0}, L_k)} f(\underline{x}) \quad (3.331)$$

E quindi esiste un punto di minimo ed è interno all'insieme.

Vediamo ora un paio di **esempi**:

1. Sia la forma quadratica definita positiva

$$q(\underline{x}) = \langle y|x \rangle \quad ; \quad \underline{y} = \mathbf{Q}\underline{x} \quad (3.332)$$

avremo che

$$\exists m > 0 : q(\underline{x}) \geq m|\underline{x}|_n^2 \quad (3.333)$$

Siccome $\lim_{|\underline{x}|_n \rightarrow +\infty} |\underline{x}|_n^2 = +\infty$ allora per confronto $q(\underline{x})$ è coercitiva. Questo implica che sarà dotata di minimo, che in questo caso è evidente essere

$$q(\underline{x}) = 0 \quad (3.334)$$

2. Sia la funzione con forma quadratica def. pos.

$$f(\underline{x}) = \langle y|x \rangle + \langle b|x \rangle + c \quad (3.335)$$

Avremo che

$$f(\underline{x}) \geq m|\underline{x}|_n^2 - |\underline{b}|_n \cdot |\underline{x}|_n + c = |\underline{x}|_n^2 \left(m + \frac{|\underline{b}|_n}{|\underline{x}|_n^2} + \frac{c}{|\underline{x}|_n^2} \right) \quad (3.336)$$

Siccome il termine a destra va all' ∞ per confronto $f(\underline{x})$ è coercitiva. Cerchiamo fra i punti critici e troviamo che

$$\begin{aligned} \nabla f(\underline{x}_m) = 0 &\implies 2\underline{y}_m + \underline{b} = \mathbf{Q}\underline{x}_m + \underline{b} = 0 \\ &\downarrow \\ \underline{x}_m &= \mathbf{Q}^{-1}\underline{b} \end{aligned} \quad (3.337)$$

Che è l'unico punto critico che possiamo avere per il II th. di weierstrass e possiamo quindi fermare la ricerca.

3.6 Funzioni implicite

Sia una funzione del tipo

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.338)$$

e sia che fissato x si ha $f(x, y) = 0$, ci chiediamo se

$$\exists! g : f(x, g(x)) \stackrel{?}{=} 0 \quad (3.339)$$

In altre parole, possiamo considerare la curva di livello

$$\gamma = \{(x, y) \in A : f(x, y) = 0\} \quad (3.340)$$

come il grafico di una funzione $g = g(x)$? Di base **no**, come vediamo nei seguenti due esempi:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

Ci troviamo a studiare $x^2 + y^2 = 0$ che nel nostro campo di studi (in \mathbb{R}^n) ha soluzione solo nell'origine.

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

In questo caso abbiamo soluzioni anche fuori dall'origine, ma per $(x, y) \neq (0, 0)$ avremo due valori possibili di y per ogni x , il che ci esclude la possibilità di avere $y = g(x)$.

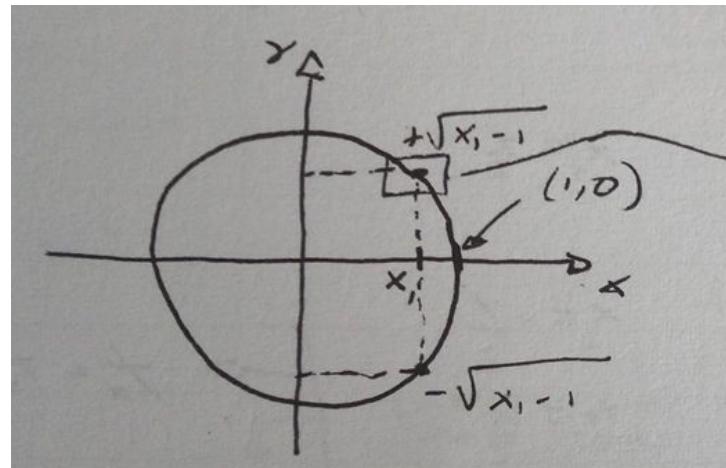


Figure 3.1:

Se però restringiamo il campo di studio nel seguente modo

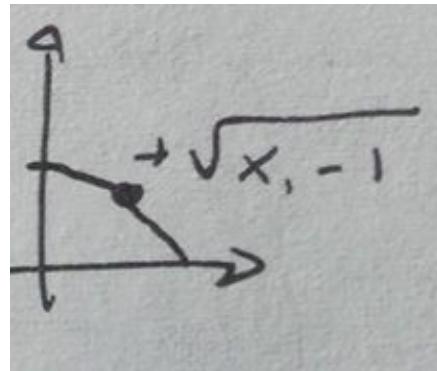


Figure 3.2:

Notiamo che abbiamo un grafico di funzione validissimo.

Quello che traiamo da questi due esempi è che affinché sia definita una funzione implicita devono esserci condizioni molto stringenti, e sarà valido solo per ben definite regioni di piano.

Ci viene in aiuto il teorema di Dini, nelle prossime pagine.

3.6.1 Th. di Dini per funzioni scalari ad una variabile

siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$1. f \in C^0(A)$$

$$2. \exists f_y \in C^0(A)$$

e $(x_0, y_0) \in A$ tale che

$$1. f(x_0, y_0) = 0$$

$$2. f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora si ha che

$$\exists I(x_0), J(y_0) : I \times J \in A \quad (3.341)$$

$$I \times J : \exists !y \in J : f(x, y) = 0 \quad (3.342)$$

Possiamo quindi definire l'applicazione

$$g = g(x) : I \rightarrow J ; g(x) \in C^0(I) \quad (3.343)$$

definita implicitamente da $f(x, g(x)) = 0$, con l'unicità di y che impone $g(x_0) = y_0$.

Il teorema può essere dimostrato in diversi modi. Quello che noi useremo si appoggia al **principio delle contrazioni**. La dimostrazione si snoda in tre passi, che vediamo dalla pagina successiva.

Come step preliminare riscriviamo la tesi in modo comodo

$$f(x, y) = 0 \leftrightarrow \frac{f(x, y)}{f_y(x_0, y_0)} = 0 \leftrightarrow y - \frac{f(x, y)}{f_y(x_0, y_0)} = y \leftrightarrow G(x, y) = y \quad (3.344)$$

$$G(x_0, y_0) = y_0 - \frac{f(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = y_0 - 0 = y_0 \quad (3.345)$$

$$G_y(x, y) = 1 - \frac{f_y(x, y)}{f_y(x_0, y_0)} \quad (3.346)$$

$$G_y(x_0, y_0) = 1 - \frac{f_y(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = 1 - 1 = 0 \quad (3.347)$$

E definendo gli intorni come

$$I(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \quad (3.348)$$

$$J(y_0) = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \quad (3.349)$$

$$\bar{I} \times \bar{J} \in A \quad (3.350)$$

1. **I passo:** Dimostrare che $(X, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio metrico completo, dato $X = \{g \in C^0(\bar{I}) : \|g - y_0\|_\infty < \epsilon\}$

Ci basta trovare una successione di Cauchy g_n tale che

$$\{g_n\} \in X : g_n \rightarrow \underline{x} \in X \subset C^0(\bar{I}) \quad (3.351)$$

Siccome già sappiamo che

$$\{g_n\} \text{ di Cauchy in } C^0(\bar{I}) \text{ completo} \quad (3.352)$$

$$\exists g \in C^0(\bar{I}) : g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g \quad (3.353)$$

Ci basta dimostrare che $g \in X$. Siccome $g_n \in X$ allora

$$|g_n(x) - y_0| < \|g_n(x) - y_0\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall x \in \bar{I} \quad (3.354)$$

Siccome $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x) - y_0| = |g(x) - y_0| \leq \epsilon \quad \forall x \in \bar{I} \quad (3.355)$$

Che implica a sua volta

$$\|g(x) - y_0\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall x \in \bar{I} \implies g(x) \in X \quad (3.356)$$

e abbiamo finito il primo passo.

2. **II passo:** Cerchiamo ora di dimostrare come $G(x, g(x))$ sia una contrazione. Ovvero definita

$$T[g](x) = G(x, g(x)) : X \longrightarrow C^0(\bar{I}) \quad (3.357)$$

Innanzitutto ci serve che

- (a) $X = C^0(\bar{I})$
- (b) $\|T[g](x) - y_0\|_\infty$

Sia ora $x \in I$, avremo che

$$\begin{aligned} |T[g] - y_0| &= |G(x, g(x)) - y_0| = |G(x, g(x)) - G(x_0, g(x_0))| = \\ &= |G(x, g(x)) - G(x_0, g(x_0)) + G(x_0, g(x_0)) - G(x, g(x))| \leq \\ &\leq |G(x, g(x)) - G(x, y_0)| + |G(x, y_0) - G(x_0, g(x_0))| \end{aligned} \quad (3.358)$$

Studiamo separatamente i due pezzi:

- (a) Facendo uso di Lagrange 1D, e ponendoci in

$$\eta \in [y_0, g(x)] \subset [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon] \quad (3.359)$$

Potremo scrivere

$$\begin{aligned} |G(x, g(x)) - G(x, y_0)| &= |G(x, \eta)(g(x) - y_0)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}|g(x) - y_0| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\|g(x) - y_0\|_\infty \leq \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned} \quad (3.360)$$

Questo perché, essendo $G_y(x_0, y_0) = 0$, in un intorno di tale punto si ha che $G_y(x, y)$ è molto piccola e si può maggiorare con $\frac{1}{2}$.

- (b) Il secondo pezzo è più semplice, basta proseguire nel seguente modo:

$$|G(x, y_0) - G(x_0, g(x_0))| \leq \frac{1}{2}\epsilon \quad \forall x \in I(x_0) \quad (3.361)$$

$$I(x_0) \subset [x_0 - r, x_0 + r] \quad (3.362)$$

Da cui segue infine

$$|T[g] - y_0| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \implies \max_I |T[g] - y_0| \leq \epsilon \quad \forall x \in \bar{I} \quad (3.363)$$

Il che vuol dire che

$$\|T[g] - y_0\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall x \in \bar{I} \quad (3.364)$$

Che è il risultato cercato.

3. **III passo:** Dimostriamo l'altra condizione affinché $G(x, g(x))$ sia una contrazione, ovvero che

$$\exists \alpha \in (0, 1) : \|T[g] - T[h]\|_\infty \leq \alpha \|g - h\|_\infty \quad (3.365)$$

Avremo che

$$\|T[g] - T[h]\|_\infty = \|G(x, g(x)) - G(x, h(x))\|_\infty \quad (3.366)$$

Usando di nuovo il th. di Lagrange nello stesso modo del punto precedente avremo

$$\|T[g] - T[h]\|_\infty = \|G_y(x, \eta)(g(x) - h(x))\|_\infty \quad (3.367)$$

Analogamente a prima, dato che $G(x_0, y_0) = 0 = G_y(x_0, y_0)$ avremo che per $\forall \eta \in [h(x), g(x)] \subset [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ Sicuramente avremo

$$|G_y(x, \eta)| \leq \frac{1}{2} \quad (3.368)$$

Ma essendo $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ lo possiamo assumere come valore di α ! Ci troviamo quindi ad avere

$$\|G(x, g(x)) - G(x, h(x))\|_\infty = \frac{1}{2} \|g(x) - h(x)\|_\infty \quad (3.369)$$

E abbiamo così dimostrato come $G(x, g(x))$ sia una contrazione! Possiamo quindi chiudere la dimostrazione applicando il **Principio di contrazione**:

$$\exists ! g \in X : T[g](x) = g(x) \quad (3.370)$$

$$\uparrow \\ G(x, g(x)) = g(x) \quad (3.371)$$

$$\uparrow \\ f(x, g(x)) = 0 \quad (3.372)$$

Il th. di Dini ci garantisce l'esistenza, ma non ci dice che forma abbia $g(x)$.
Ci serve quindi di enunciare il seguente **teorema**:

Se valgono le ipotesi del teorema di Dini, con aggiunta la condizione

$$\exists f_x(x, y) \in C^0(A) \implies f(x, y) \in C^1(A) \quad (3.373)$$

Allora possiamo scrivere

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \quad (3.374)$$

E se $f \in C^k(I)$ allora avremo che

$$g^{(k)}(x) = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} g'(x) = -\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \right) \quad (3.375)$$

Per la dimostrazione iniziamo ponendo

$$\begin{aligned} f(x, g(x)) &= 0 \implies f(x + h, g(x + h)) = 0 \quad \forall x, x + h \in I(x_0) \\ &\downarrow \\ f(x + h, g(x + h)) - f(x, g(x)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.376)$$

Il th. di Lagrange in due variabili afferma che

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = f_x(x_3, y_3)(x_1 - x_2) + f_y(x_3, y_3)(y_1 - y_2) \quad (3.377)$$

Da cui otteniamo, posto $(\xi, \eta) \in [(x + h, g(x + h)), (x, g(x))]$

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + h, g(x + h)) - f(x, g(x)) = f_x(\xi, \eta)h + f_y(\xi, \eta)(g(x + h) - g(x)) \\ &\downarrow \\ f_x(\xi, \eta)h &= -f_y(\xi, \eta)(g(x + h) - g(x)) \\ &\downarrow \\ \frac{g(x + h) - g(x)}{h} &= -\frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)} \\ &\downarrow \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)} \end{aligned} \quad (3.378)$$

Siccome per $h \rightarrow 0$ si ha che

$$\begin{aligned} (\xi, \eta) &\in [(x + h, g(x + h)), (x, g(x))] \xrightarrow{h \rightarrow 0} [(x, g(x)), (x, g(x))] \\ &\downarrow \\ (\xi, \eta) &= (x, g(x)) \end{aligned} \quad (3.379)$$

Allora si ottiene il risultato cercato

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \\ &\downarrow \\ g'(x) &= -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \end{aligned} \quad (3.380)$$

Una dimostrazione più semplice ma che può essere applicata solo per funzioni di classe C^1 si basa sulla formula delle derivate di funzioni composte che già conosciamo.

Nota bene: Tutti i risultati ricavati finora possono essere ricavati a variabili invertite, basta scambiare le condizioni.

Chiudiamo il discorso mostrando l'espressione delle derivate al II ordine:

$$f \in C^2(A) \implies g \in C^2(A) \quad (3.381)$$

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

↓

$$g'(x)f_y(x, y) = -f_x(x, y)$$

↓

$$g'(x)f_y(x, y) + f_x(x, y) = 0$$

↓

$$\frac{d}{dx}(g'(x)f_y(x, y) + f_x(x, y)) = 0$$

↓

$$f_{xx}(x, y) + f_{xy}(x, y)g'(x) + [f_{xy}(x, y) + f_{yy}(x, y)g'(x)] \cdot g'(x) + f_y(x, y)g''(x) = 0$$

↓

$$f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)g'(x) + f_{yy}(x, y)[g'(x)]^2 + f_y(x, y)g''(x) = 0$$

↓

$$g''(x) = -\frac{f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)g'(x) + f_{yy}(x, y)[g'(x)]^2}{f_y(x, y)} \quad (3.382)$$

Se $g'(x) = 0$ l'espressione si semplifica notevolmente in $g''(x) = -\frac{f_{xx}(x, y)}{f_y(x, y)}$

3.6.2 Esempi di esercizi

1. Data l'equazione

$$xe^y = y \quad (3.383)$$

- (a) Dire se in un intorno di $(0, 0)$ essa descrive una curva $(x, g(x))$
- (b) Determinare l'equazione della retta tangente alla curva in $x = 0$
- (c) Tracciare un grafico approssimativo

Procediamo in ordine:

- (a) Verifichiamo se la nostra $f(x, y) = xe^y - y$ rispetta le condizioni di Dini:

$$f \in C^k(\mathbb{R}^2) \quad \forall k \quad (3.384)$$

$$f(0, 0) = 0 \quad (3.385)$$

$$f_y(x, y) = xe^y - 1 \implies f_y(0, 0) = 0 - 1 = -1 \neq 0 \quad (3.386)$$

$$f_x(x, y) = e^y \implies f_x(0, 0) = 1 \quad (3.387)$$

Le condizioni sono rispettate, quindi avremo

$$\exists I(x_0) \times J(y_0) \subset A : \forall x \in I(x_0) \quad \exists ! y \in J(y_0) : xe^y - y = 0 \quad (3.388)$$

$$y = y(x) : I \longrightarrow J \quad ; \quad g(0) = 0 \quad ; \quad g^k(I) \quad (3.389)$$

- (b) La retta tangente è data da

$$\begin{aligned} y &= y_0 + g'(x_0)(x - x_0) = 0 - \left. \frac{f_x}{f_y} \right|_{(0,0)} x = 0 - \frac{1}{-1} x = x \\ &\downarrow \\ y - x &= 0 \end{aligned} \quad (3.390)$$

- (c) Per tracciare il grafico della funzione abbiamo bisogno delle derivate successive

$$f_{xx} = 0 \implies f_{xx}(0, 0) = 0 \quad (3.391)$$

$$f_{xy} = e^y = f_{yx} \implies f_{xy}(0, 0) = 1 \quad (3.392)$$

$$f_{yy} = xe^y \implies f_{yy}(0, 0) = 0 \quad (3.393)$$

$$g''(0) = -\frac{0 + 2 + 0}{-1} = 2 \quad (3.394)$$

E con Taylor avremo

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 + o(x^2) = 0 + x + x^2 + o(x^2) \quad (3.395)$$

2. Data l'equazione

$$e^x \sin(y) + e^y \cos(x) - 1 = 0 \quad (3.396)$$

In un intorno di $(0, 0)$

- (a) Verificare l'esistenza di una funzione implicita
- (b) Verificare che in $x = 0$ abbia un punto critico
- (c) Categorizzare tale punto

- (a) Verifichiamo le condizioni di Dini

$$f \in C^k(I) \quad (3.397)$$

$$f(0, 0) = 1 - 1 = 0 \quad (3.398)$$

$$f_y = e^x \cos(y) + e^y \cos(x) \implies f_y(0, 0) = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad (3.399)$$

$$f_x = e^x \sin(y) - e^y \sin(x) \implies f_x(0, 0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \quad (3.400)$$

Le condizioni sono verificate, e abbiamo quindi sicuro una $g(x)$

- (b) Verificare che in $x = 0$ abbia un punto critico

$$g'(0) = -\frac{f_x(0, 0)}{f_y(0, 0)} = -\frac{0}{2} = 0 \quad (3.401)$$

Quindi $x = 0$ è punto critico

- (c) Categorizziamo tale punto

$$f_{xx} = e^x \sin(y) - e^y \cos(x) \implies f_{xx}(0, 0) = -1 \quad (3.402)$$

Siccome $g'(0) = 0$ possiamo usare la forma ridotta

$$g''(0) = -\frac{f_{xx}(0, 0)}{f_y(0, 0)} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \quad (3.403)$$

E quindi $x = 0$ è un punto di minimo.

3. Data l'equazione

$$y^2 + x + e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \quad (3.404)$$

Studiamo le stesse richieste del precedente esercizio in un intorno di $(0, 0)$, con aggiunto il calcolo della retta tangente.

- (a) Verifichiamo le condizioni di Dini

$$f \in C^k(I) \quad (3.405)$$

$$f(0, 0) = 0 + 0 + 1 - 1 = 0 \quad (3.406)$$

$$f_y = 2y(1 + e^{x^2+y^2}) \implies f_y(0, 0) = 0 \quad (3.407)$$

$$f_x = 1 + 2e^{x^2+y^2} \implies f_x(0, 0) = 1 + 0 = 1 \neq 0 \quad (3.408)$$

Ci troviamo stavolta nel caso opposto, che avevamo brevemente detto esistere. Avremo cioè che

$$\exists I(x_0) \times J(y_0) : \forall y \in J \quad \exists! x : f(h(y), y) = 0 \quad (3.409)$$

- (b) Avremo in $y = 0$ un punto critico, infatti

$$h'(0) = -\frac{f_y(0, 0)}{f_x(0, 0)} = 0 \quad (3.410)$$

- (c) Per classificare $y = 0$ ci basta calcolare

$$f_{yy}(0, 0) = [2(1 + e^{x^2+y^2}) - 4y^2 e^{x^2+y^2}]|_{(0,0)} = 4 \quad (3.411)$$

$$h''(0) = -\frac{f_{yy}(0, 0)}{f_x(0, 0)} = -4 \quad (3.412)$$

Abbiamo quindi un punto di massimo

- (d) La retta tangente avrà equazione

$$h(y) = h(0) + h'(0)y + \frac{1}{2}h''(0)y^2 + o(y^2) = 2y^2 + o(y^2) \quad (3.413)$$

3.6.3 Teorema di Dini per funzioni scalari a più variabili

Siano

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \quad y \in \mathbb{R} \quad (3.414)$$

$$f(\underline{x}, y) : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.415)$$

Se valgono le seguenti condizioni in $(\underline{x}^0, y_0) \in A$

1. $f(\underline{x}, y), f_y(\underline{x}, y) \in C^0(A)$
2. $(\underline{x}^0, y_0) : f(\underline{x}^0, y_0) = 0 \neq f_y(\underline{x}^0, y_0)$

Allora si ha che

$$\exists I(\underline{x}^0) = \{\underline{x} : |\underline{x} - \underline{x}^0| \leq r\} \text{ intorno sferico} \quad (3.416)$$

$$\exists J(y_0) = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \quad (3.417)$$

con

$$I \times J \subset A : \forall \underline{x} \in I \quad \exists ! y : f(\underline{x}, y) = 0 \leftrightarrow y = g(\underline{x}) : I \longrightarrow J \quad (3.418)$$

Inoltre se $f \in C^1(A)$ si ha anche $g \in C^1(I)$ e si può scrivere

$$g_{x_i} = -\frac{f_{x_i}(\underline{x}, g(\underline{x}))}{f_y(\underline{x}, g(\underline{x}))} \quad (3.419)$$

Non diamo la dimostrazione del teorema, non essendoci necessaria ai fini del corso. Ci chiediamo però: in termini pratici, che ci dice questa versione del teorema? Notiamo come in realtà sia una forma più generale del caso che abbiamo già enunciato, che è qui rappresentato nel caso $n = 1$, mentre il caso $n = 2$ sarà

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.420)$$

$$\Sigma = \{\underline{P} = (x, y, z) : f(\underline{P}) = 0\} \quad (3.421)$$

$$\underline{P}^0 \in A : f(\underline{P}^0) = 0 \neq f_z(\underline{P}^0) \quad (3.422)$$

$$z = g(x, y) \quad (3.423)$$

$$g_x = -\left. \frac{f_x}{f_z} \right|_{\underline{P}^0} ; \quad g_y = -\left. \frac{f_y}{f_z} \right|_{\underline{P}^0} \quad (3.424)$$

$$T(z, \underline{P}^0) = z_0 + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (3.425)$$

Vediamo, per chiarirci di più le idee, un **esempio**:

$$e^z + ze^{x+y} - e^{x-y} = 0 \implies f(x, y, z) = e^z + ze^{x+y} - e^{x-y} \quad (3.426)$$

$$f \in C^k(\mathbb{R}^3) \quad \forall k \quad (3.427)$$

$$f_z(x, y, z) = e^z + e^{x+y} \implies f_z(0, 0, 0) = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad (3.428)$$

Avremo quindi

$$g(x, y) \in C^k(I) \quad \forall k : I(0, 0) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow J(0, 0) \subset \mathbb{R} \quad (3.429)$$

Andiamo a calcolarne il piano tangente:

$$f_x = ze^{x+y} - e^{x-y} \implies f_x(0, 0) = -1 \quad (3.430)$$

$$f_y = ze^{x+y} + e^{x-y} \implies f_y(0, 0) = +1 \quad (3.431)$$

$$T(z, \underline{P}^0) = 0 - \left(\frac{1}{2} \right) x - \left(\frac{1}{2} \right) y = \frac{1}{2}(x - y) \quad (3.432)$$

3.6.4 Teorema di Dini per sistemi di funzioni

Poniamoci ora la seguente domanda: chi chiediamo se il sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (3.433)$$

Possa definire una curva γ tale che

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (3.434)$$

La risposta è: dipende.

Ad esempio col seguente sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} by + cz = -d - ax \\ \beta y + \gamma z = -\delta - \alpha x \end{cases} \quad (3.435)$$

Avremo una soluzione solo se è rispettata la **condizione di Kramer**, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} b & c \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.436)$$

Affinché quindi abbia soluzione il sistema e si possa definire la curva che rappresenta l'intersezione tra i due piani servono condizioni restrittive.

Enunciamo il **Teorema di Dini per sistemi di funzioni**:

Se si ha

$$f(x, y, z), g(x, y, z) \in C^1(A), A \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.437)$$

$$\underline{P}^0 = (x_0, y_0, z_0) : f(\underline{P}^0) = 0 = g(\underline{P}^0) \quad ; \quad \det \begin{pmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{pmatrix} \Big|_{\underline{P}^0} \neq 0 \quad (3.438)$$

Allora avremo che

$$\exists I(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r), J(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.439)$$

$$I \times J \subset A : \exists !(y, z) \in J \text{ soluzioni del sistema} \quad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} : \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \text{ per } x \in I \quad (3.440)$$

Che forma avranno le derivate? Proviamo a calcolarle

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_x + f_y y' + f_z z' = 0 \\ g_x + g_y y' + g_z z' = 0 \end{cases} \\ \downarrow \\ \begin{cases} f_x + f_z z' = -f_y y' \\ g_x + g_z z' = -g_y y' \end{cases} ; \quad \begin{cases} f_y y' + f_z z' = -f_x \\ g_y y' + g_z z' = -g_x \end{cases} \end{aligned} \quad (3.441)$$

Come nell'esempio prima avremo che devono valere

$$\det \begin{pmatrix} -f_x & f_z \\ -g_x & g_z \end{pmatrix} \neq 0 \quad ; \quad \det \begin{pmatrix} f_y & -f_x \\ g_y & -g_x \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.442)$$

Da cui ricaviamo

$$y'(x) = - \frac{\begin{pmatrix} -f_x & f_z \\ -g_x & g_z \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{pmatrix}} \Big|_{(x,y)} \quad ; \quad z'(x) = - \frac{\begin{pmatrix} f_y & -f_x \\ g_y & -g_x \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{pmatrix}} \Big|_{(x,y)} \quad (3.443)$$

3.6.5 Teorema di Dini nel caso generale

Siano

$$\underline{f} : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (3.444)$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \longrightarrow \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = (f_1, \dots, f_m)|_{(\underline{x}, \underline{y})}$$

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) ; \quad \underline{y} = (y_1, \dots, y_m) \quad (3.445)$$

Se dato $(\underline{x}^0, \underline{y}^0)$ sono rispettate le seguenti proprietà

$$\underline{f} \in C^1(A) \quad (3.446)$$

$$(\underline{x}^0, \underline{y}^0) : \underline{f}(\underline{x}^0, \underline{y}^0) = 0 \quad (3.447)$$

$$\det \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}} \right) \Big|_{P^0} \neq 0 ; \quad \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}} \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \quad (3.448)$$

Allora si ha che esistono

$$\exists I(\underline{x}^0) \subset \mathbb{R}^n, J(\underline{y}^0) \subset \mathbb{R}^m : I \times J \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad (3.449)$$

Tali che

$$\forall \underline{x} \in I \quad \exists! \underline{y} : \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \quad (3.450)$$

$$\underline{y} = g(\underline{x}) \in C^1(I) : I \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow J \subset \mathbb{R}^m \quad (3.451)$$

$$\underline{J}_g((\underline{x})) = - \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right) \quad (3.452)$$

3.6.6 Invertibilità Locale

Un'interessante applicazione del teorema di Dini si ha nello studio dell'invertibilità locale delle funzioni.

Supponiamo di avere

$$\underline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n \quad (3.453)$$

Con A, B aperti e $\underline{f}(A) \in C^1(A)$.

Ci chiediamo: sotto quali ipotesi \underline{f} è invertibile localmente in A , con $\underline{f}^{-1} \in C^1(B)$? O, in altri termini, quando \underline{f} è un **diffeomorfismo** locale tra A e B ?

Ci viene in aiuto il **Teorema di Inversione Locale**:

Siano

$$\underline{f} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n \quad (3.454)$$

$$\underline{f} \in C^1(A) \quad (3.455)$$

$$\underline{x}^0 \in A \quad (3.456)$$

Se

$$\det \underline{J}_{\underline{f}}(\underline{x}^0) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \neq 0 \quad (3.457)$$

Allora f è localmente invertibile.

La dimostrazione discende dal caso generale di Dini.

Posti

$$F(x, \underline{y}) = \underline{y} - \underline{f}(x) \quad (3.458)$$

$$\underline{y}^0 = \underline{f}(\underline{x}^0) \quad (3.459)$$

Applichiamo Dini in $(\underline{x}^0, \underline{y}^0)$. Le ipotesi sono verificate per costruzione, dato che

$$F(\underline{x}^0, \underline{y}^0) = \underline{y}^0 - \underline{f}(\underline{x}^0) = \underline{y}^0 - \underline{y}^0 = 0 \quad (3.460)$$

$$\underline{F} \in C^1(A \times \mathbb{R}^n) \quad (3.461)$$

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}} \Big|_{(\underline{x}^0, \underline{y}^0)} = - \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Big|_{(\underline{x}^0, \underline{y}^0)} \neq 0 \text{ per ipotesi} \quad (3.462)$$

Questo vuol dire che

$$\exists I(\underline{x}^0), J(\underline{y}^0) : \forall \underline{y} \in J \quad \exists \underline{x} = \underline{h}(\underline{y}) \in I : \underline{F}(\underline{h}(\underline{y}), \underline{y}) = 0 \quad (3.463)$$

Ma questo vuol dire anche che

$$\underline{y} = f(\underline{h}(\underline{y})) \implies \underline{h}(\underline{y}) = f^{-1}(\underline{y}) \quad (3.464)$$

E il teorema è dimostrato.

Le derivate avranno forma

$$\frac{\partial \underline{h}(\underline{y})}{\partial \underline{y}} = - \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{y}} \right) \quad (3.465)$$

Ma per come abbiamo definito \underline{F} il secondo termine diventa

$$\frac{\partial \underline{h}(\underline{y})}{\partial \underline{y}} = - \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}} \right)^{-1} \mathbb{1}_n = - \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{x}} \right)^{-1} \implies \underline{J}_{f^{-1}}(\underline{x}) = (\underline{J}_f(\underline{x}))^{-1} \quad (3.466)$$

Ma a noi tutto questo è familiare! Infatti in \mathbb{R} avevamo che se

$$y = f(x) \in C^1((a, b)) \quad ; \quad f'(x_0) \neq 0, x_0 \in (a, b) \quad (3.467)$$

Allora

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (3.468)$$

La differenza giace però nell'invertibilità globale. Infatti mentre in \mathbb{R} la derivabilità in tutto l'insieme implica monotonia e quindi invertibilità in tutto l'insieme, in $\mathbb{R}^{n>1}$ non è detto, come vediamo nel seguente **esempio in \mathbb{R}^2** :

$$\underline{y} = \underline{f}(\underline{x}) = \begin{cases} y_1 = e^{x_1} \cos(x_2) \\ y_2 = e^{x_1} \sin(x_2) \end{cases} \quad (3.469)$$

$$\underline{J}_{\underline{f}}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +e^{x_1} \cos(x_2) & -e^{x_1} \sin(x_2) \\ +e^{x_1} \sin(x_2) & +e^{x_1} \cos(x_2) \end{pmatrix} \quad (3.470)$$

Da cui segue che

$$\det \underline{J}_{\underline{f}}(\underline{x}) = e^{2x} \neq 0 \quad \forall \underline{x} \quad (3.471)$$

Però la funzione non è iniettiva, e quindi non può essere invertibile globalmente.

3.7 Punti di massimo e minimo vincolati

Per amor di semplicità studiamo il problema nel piano.

Dati

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.472)$$

$$g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.473)$$

$$Z = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\} \neq \emptyset \quad (3.474)$$

Definiamo (x_0, y_0)

1. **punto di max. vincolato di f su Z** se

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in Z \cap I(x_0, y_0) \quad (3.475)$$

2. **punto di min. vincolato di f su Z** se

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in Z \cap I(x_0, y_0) \quad (3.476)$$

Ci domandiamo: perché stiamo studiando di nuovo il problema? Non abbiamo già il teorema di Fermat? La risposta è **no**, visto che Fermat considera solo gli insiemi aperti!

Siamo quindi costretti a trovare altre vie per tale studio.

Un metodo lo conosciamo già, dato che Z è una curva: parametrizziamo nel seguente modo

$$Z = \{(x(t), y(t)) , t \in [a, b]\} \quad (3.477)$$

E ci troviamo a studiare una funzione in \mathbb{R} , dove abbiamo tutti gli strumenti per lavorare:

$$f(x, y)|_Z = f(x(t), y(t)) = F(t) \quad (3.478)$$

Un altro metodo molto interessante è quello dei **Moltiplicatori di Lagrange**, che vediamo nella pagina successiva.

3.7.1 Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange in \mathbb{R}^2

Se abbiamo

1. $f, g \in C^1(A)$
2. $(x_0, y_0) \in A$ tale che
 - (a) $g(x_0, y_0) = 0 \leftrightarrow (x_0, y_0) \in Z$
 - (b) $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0 \leftrightarrow (x_0, y_0)$ punto regolare
 - (c) (x_0, y_0) punto di max. (o min.) vincolato per f

Allora avremo un risultato che può essere enunciato in tre modi equivalenti:

$$1. \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} = 0$$

$$2. \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

$$3. Data L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \exists \lambda_0 : \nabla L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

Prima di dare la dimostrazione mostriamo perché le tre formulazioni siano equivalenti:

La prima scrittura implica che i gradienti siano **linearmente dipendenti** e che quindi $\exists \lambda_0 : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$ che è la seconda scrittura.

La terza implica che

$$\begin{cases} L_x(x_0, y_0, \lambda_0) = [f_x - \lambda_0 g_x]|_{(x_0, y_0, \lambda_0)} = 0 \\ L_y(x_0, y_0, \lambda_0) = [f_y - \lambda_0 g_y]|_{(x_0, y_0, \lambda_0)} = 0 \\ L_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = -g|_{(x_0, y_0, \lambda_0)} = 0 \end{cases} \quad (3.479)$$

La terza derivata è un'ipotesi, le altre due altro non sono che il secondo enunciato.

Vediamo come dimostrare il teorema.

Per ipotesi in (x_0, y_0) abbiamo che

$$g_y(x_0, y_0) \neq 0 = g(x_0, y_0) \quad (3.480)$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Dini, da cui abbiamo che

$$\exists I(x_0) \times J(y_0) : \forall x \quad \exists ! y = h(x) : f(x, h(x)) = 0 \quad (3.481)$$

Sia ora $\underline{P}^0 = (x_0, y_0)$ punto di max.vincolato, ovvero

$$\begin{aligned} f(x, y) &\leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in Z \cap I(x_0) \times J(y_0) \\ &\downarrow \\ f(x, h(x)) &\leq f(x_0, h(x_0)) \quad \forall x \in I(x_0) \\ &\downarrow \\ F(x) &\leq F(x_0) \quad \forall x \in I(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \end{aligned} \quad (3.482)$$

Per Fermat avremo che

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= 0 \\ &\downarrow \\ \frac{d}{dx} f(x_0, h(x_0)) &= 0 \\ &\downarrow \\ f_x(x_0, h(x_0)) + f_y(x_0, h(x_0))h'(x_0) &= 0 \\ &\downarrow \\ f_x(x_0, h(x_0)) - f_y(x_0, h(x_0))\frac{g_x(x_0)}{g_y(x_0)} &= 0 \quad \text{per il th. di Dini} \\ &\downarrow \\ \frac{f_x(x_0, h(x_0))g_y(x_0) - f_y(x_0, h(x_0))g_x(x_0)}{g_y(x_0)} &= 0 \\ &\downarrow \\ \frac{1}{g_y(x_0)} \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{\underline{P}^0} &= 0 \\ &\downarrow \\ \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{\underline{P}^0} &= 0 \end{aligned} \quad (3.483)$$

Che è la nostra prima formulazione, e quindi il th. è dimostrato.

Vediamo ora un **esempio**: la massimizzazione dell'area di rettangoli inscritti in un'ellisse.

Sia l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a, b > 0 \quad (3.484)$$

E sia il rettangolo inscritto

$$f(x, y) = xy \quad (3.485)$$

Ci chiediamo

$$\max_{g(x,y)=0} f(x, y) = ? \quad (3.486)$$

Per quanto riguarda $f(x, y)$ sappiamo che

1. $f(x, y)$ è continua su tutto \mathbb{R}^2
2. $f(a, 0) = f(0, b) = 0$

Ponendo ora

$$g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad (3.487)$$

E tenendo conto del fatto che la lunghezza dei lati del rettangolo deve essere positiva, avremo

$$Z = \{(x, y) : g(x, y) = 0 \quad ; \quad x, y \geq 0\} \subset [-a, +a] \times [-b, +b] \quad (3.488)$$

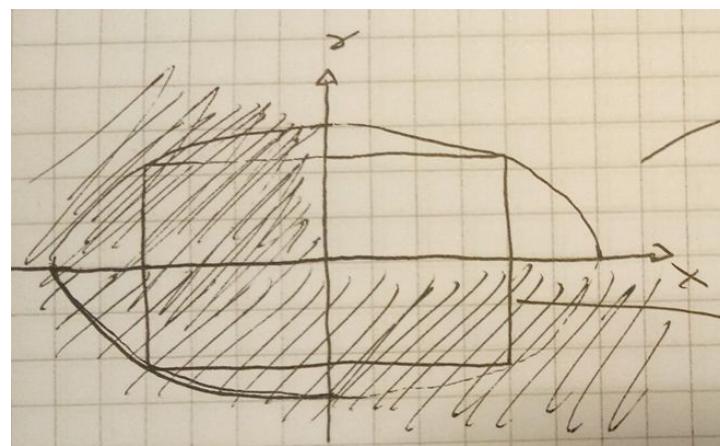


Figure 3.3:

Z è chiuso e limitato e per Weierstrass sicuro esistono max. e min. su Z . Il minimo lo sappiamo già ad occhio, visto che abbiamo solo valori non negativi di x e y deve essere che

$$\min_{(x,y) \in Z} f(x, y) = 0 \implies (0, b), (a, 0) \text{ punti di minimo} \quad (3.489)$$

Andiamo a trovare il massimo tramite Lagrange, ma prima accertiamoci che non ci siano punti non regolari:

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies (x, y) = (0, 0) \quad (3.490)$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies (x, y) = (0, 0) \quad (3.491)$$

Ma l'origine non è compresa in Z , quindi nessun problema.

Possiamo quindi applicare Lagrange, costruendo il sistema

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (3.492)$$

Da cui si ricava

$$\begin{cases} y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \\ \frac{2}{a^2} x^2 = 1 \end{cases} \implies x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (3.493)$$

Scartando i risultati negativi per costruzione abbiamo trovato il nostro punto di massimo in

$$(x, y)_M = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.494)$$

3.7.2 Esempi

- Massimizzazione dell'area di rettangoli a somma dei lati costante.

Come prima avremo la funzione che descrive il perimetro

$$f(x, y) = xy \quad ; \quad \nabla f(x, y) = (y, x) \quad (3.495)$$

Mentre stavolta il vincolo sarà dato dall'equazione

$$x + y = c > 0 \implies g(x, y) = x + y - c \quad (3.496)$$

$$Z = \{(x, y) \geq 0 : x + y = c\} \quad (3.497)$$

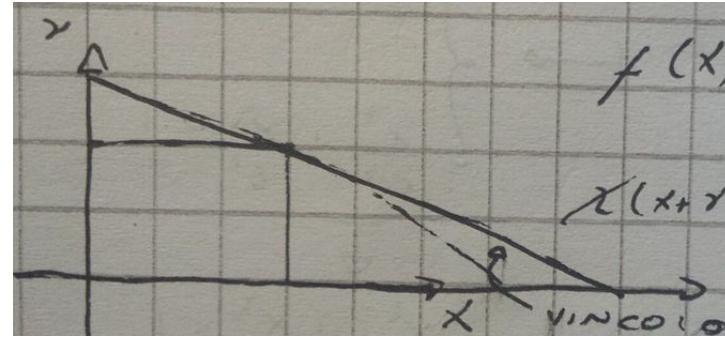


Figure 3.4:

Z è chiuso e limitato, ergo per Weierstrass ci sono max. e min.

Come nell'esempio precedente il minimo si avrà lungo gli assi, mentre per il massimo utilizziamo Lagrange:

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{P^0} = 0 \\ x + y = c \end{cases} \implies \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = c \end{cases} \quad (3.498)$$

E otteniamo quindi un punto di massimo in

$$(x, y)_M = \left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2} \right) \quad (3.499)$$

- Studiare l'esistenza di punti critici della funzione

$$f(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \quad (3.500)$$

$$\nabla f(x, y) = (2(x + 1), 2(y - 1)) \quad (3.501)$$

Con vincolo dato da

$$x^2 + y^2 = 4 \implies g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \quad (3.502)$$

Nel dominio chiuso e limitato

$$D = \{(x, y) : g(x, y) \leq 0\} \quad (3.503)$$

Siccome

$$f \in C^0(\mathbb{R}^2) \implies f \in C^0(Z) \quad (3.504)$$

Quindi per Weierstrass abbiamo punti di massimo e minimo. Dividiamo lo studio in due parti:

- punti interni: Non esistono punti di non derivabilità, quindi cerchiamo solo punti critici:

$$\nabla f(x, y) = 0 \implies \begin{pmatrix} 2(x + 1) \\ 2(y - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.505)$$

Abbiamo quindi un candidato in

$$\underline{x}^0 = (-1, +1) \quad (3.506)$$

(b) punti di frontiera:

La frontiera sarà

$$\partial D = \{x^2 + y^2 = 4\} = \{(x, y) : g(x, y) = 0\} \quad (3.507)$$

Assicuriamoci di non avere punti di non regolarità:

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \underline{x}^? = (0, 0) \quad (3.508)$$

Che non è sulla frontiera, quindi possiamo usare tranquillamente Lagrange.

$$\left\{ \begin{array}{l} \det \begin{pmatrix} 2(x+1) & 2(y-1) \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+1 & y-1 \\ x & y \end{pmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ \downarrow \\ \begin{cases} y(x+1) - x(y-1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -x \\ 2x^2 = 4 \end{cases} \\ \downarrow \\ \begin{cases} y = \mp\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \implies \begin{array}{l} \underline{x}^1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \\ \underline{x}^2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{array} \end{array} \right. \quad (3.509)$$

Per vedere quale punto è quale semplicemente calcoliamo la funzione:

$$f(\underline{x}^0) = 0 \quad (3.510)$$

$$f(\underline{x}^1) = 2(\sqrt{2} + 1)^2 \quad (3.511)$$

$$f(\underline{x}^2) = 2(\sqrt{2} - 1)^2 \quad (3.512)$$

E quindi \underline{x}^0 è chiaramente un punto di minimo e \underline{x}^1 di massimo.

3.7.3 Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange in \mathbb{R}^3

Siano

1. $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; $f, g \in C^1(A)$
2. $Z = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$
3. $\underline{P}^0 = (x_0, y_0, z_0) : \nabla g(\underline{P}^0) \neq 0 = g(\underline{P}^0)$
4. \underline{P}^0 punto di min./max. vincolato per f

Allora come nel caso in \mathbb{R}^2 abbiamo tre risultati equivalenti:

1. $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}$ di rango 1
2. $\exists \lambda_0 : \nabla f(\underline{P}^0) = \lambda_0 \nabla f(\underline{P}^0)$
3. $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda_0 g(x, y, z) \implies \exists \lambda_0 : \nabla \mathcal{L}(\underline{P}^0, \lambda_0) = 0$

Come prima, dimostriamo la prima versione, che implica le altre:

Siccome nelle ipotesi sono verificate le ipotesi di Dini del secondo caso, avremo che

$$\exists I(x_0, y_0) \times J(z_0) : \forall (x, y) \in I(x_0, y_0) \quad \exists! z = h(x, y) : f(x, y, h(x, y)) = 0 \quad (3.513)$$

Sia inoltre \underline{P}^0 punto di maxssimo. Avremo che

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\leq f(\underline{P}^0) \quad \forall (x, y, z) \in Z \cap I(x_0, y_0) \\ &\downarrow \\ f(x, y, h(x, y)) &\leq f(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) \quad \forall (x, y) \in I(x_0, y_0) \\ &\downarrow \\ F(x, y) &= F(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in I(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (3.514)$$

Ricordando anche i risultati del th. di Dini, per Fermat avremo che

$$\begin{aligned} F'(x_0, y_0) &= 0 \\ &\downarrow \\ \frac{d}{dx} F(x_0, y_0) &= 0 \\ &\downarrow \\ \frac{d}{dx} f(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) &= 0 \\ &\downarrow \\ f_x(\underline{P}^0) + f_z(\underline{P}^0)h_x(x_0, y_0) &= 0 \\ &\downarrow \\ \frac{f_x(\underline{P}^0)g_z(\underline{P}^0) - f_z(\underline{P}^0)g_x(\underline{P}^0)}{g_z(\underline{P}^0)} &= 0 \\ &\downarrow \\ f_x(\underline{P}^0)g_z(\underline{P}^0) - f_z(\underline{P}^0)g_x(\underline{P}^0) &= 0 \\ &\downarrow \\ \det \left(\begin{pmatrix} f_x & f_z \\ g_x & g_z \end{pmatrix} \Big|_{\underline{P}^0} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.515)$$

Ciò ci dice che la matrice

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} \quad (3.516)$$

è di rango 1. Il teorema è quindi dimostrato.

Vediamo ora un paio di **esempi**:

- la massimizzazione del prodotto tra tre variabili non negative a somma costante.

$$x, y, z \geq 0 \quad (3.517)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3.518)$$

$$x + y + z = c > 0 \implies g(x, y, z) = x + y + z - c \quad (3.519)$$

$$Z = \{x, y, z \geq 0 : g(x, y, z) = 0\} \quad (3.520)$$

Il problema è equivalente alla massimizzazione del volume di un tetragramma, come si vede in figura

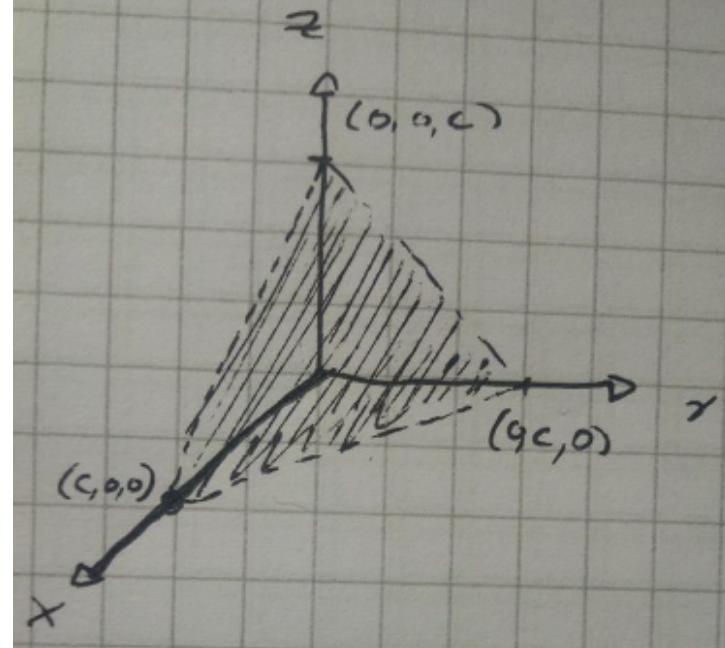


Figure 3.5:

Calcoliamo i gradienti

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1) \quad (3.521)$$

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy) \quad (3.522)$$

Vediamo subito come g non abbia punti di non regolarità, e possiamo quindi applicare Lagrange, dove la prima formulazione della tesi ci porta a scrivere il sistema

$$\begin{cases} yz - xz = 0 \\ xz - xy = 0 \\ yz - xy = 0 \\ x + y + z = c \end{cases} \implies \begin{cases} yz = xz \\ xz = xy \\ yz = xy \\ x + y + z = c \end{cases} \quad (3.523)$$

Notiamo come la situazione sia un po' intricata.

Se $z = 0$ abbiamo che anche $xy = 0$ da cui segue che uno dei due deve essere nullo e quindi in automatico anche il rimanente. Ma a noi interessa il massimo, quindi escludiamo valori nulli. Allora avremo

$$\begin{cases} y = x \\ z = y \\ z = x \\ x + y + z = c \end{cases} \implies x + x + x = 3x = c \implies x = \frac{c}{3} \quad (3.524)$$

Abbiamo quindi il nostro punto di massimo in

$$(x, y, z)_M = \left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right) \quad (3.525)$$

2. Si studi se la funzione

$$f(x, y, z) = x^2 - x + y^2 + z^2 \quad (3.526)$$

ammette massimo e minimo nel dominio

$$D = \left\{ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\} \quad (3.527)$$

Studiamo prima i gradienti

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \underline{x}^1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right) \quad (3.528)$$

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \\ \frac{z}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \underline{x}^? = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \partial D \quad (3.529)$$

Abbiamo quindi un candidato in \underline{x}^1 e nessun punto di non regolarità sulla frontiera per g .

Possiamo quindi applicare Lagrange

$$\begin{cases} \text{Rango} \begin{pmatrix} 2x - 1 & 2y & 2z \\ 2x & \frac{1}{2}y & \frac{2}{9}z \end{pmatrix} = 1 \\ g(x, y, z) = 0 \\ \downarrow \\ \begin{cases} \frac{y}{2}(2x - 1) = 4xy \\ \frac{4}{9}yz = yz \\ \frac{2}{9}yz = yz \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y(6x + 1) = 0 \\ yz = 0 \\ z(16x + 1) = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases} \end{cases} \quad (3.530)$$

Studiando la seconda equazione del sistema avremo due casi:

(a) $y = 0$

In questo caso dalla terza equazione del sistema avremo le seguenti opzioni

i. $z = 0$ Avremo dalla quarta equazione che

$$x = \pm 1 \quad (3.531)$$

E quindi otteniamo due candidati nei punti

$$\underline{x}^{2,3} = (\pm 1, 0, 0) \quad (3.532)$$

ii. $x = -\frac{1}{16}$ Sostituendo nell'equazione del vincolo otteniamo

$$\frac{1}{16^2} + \frac{z^2}{9} = 1 \implies z = \pm \frac{3}{16}\sqrt{255} \quad (3.533)$$

Abbiamo così ricavato altri due candidati

$$\underline{x}^{4,5} = \left(-\frac{1}{16}, 0, \pm \frac{3}{16}\sqrt{255} \right) \quad (3.534)$$

(b) $z = 0$ In questo caso dalla prima equazione del sistema avremo di nuovo due casi

i. $y = 0$

In questo caso riotteniamo i candidati $\underline{x}^{2,3}$

ii. $z = 0$

In questo caso otteniamo

$$x = -\frac{1}{6} \quad (3.535)$$

Sostituendo nel vincolo otteniamo

$$\frac{1}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \implies y = \pm \frac{\sqrt{35}}{3} \quad (3.536)$$

Da cui infine gli ultimi due candidati

$$\underline{x}^{6,7} = \left(-\frac{1}{6}, 0, \pm \frac{\sqrt{35}}{3} \right) \quad (3.537)$$

Trovati tutti i punti basta calcolare la funzione in tali punti e vedere il più grande e il più piccolo valore assunti.

3.7.4 Interpretazione geometrica dei moltiplicatori di Lagrange

Per amor di semplicità affrontiamo il discorso nel piano, ma vale in generale.

Consideriamo una $f(x, y)$ con curva di livello

$$\gamma : f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (3.538)$$

Con retta tangente in (x_0, y_0)

$$r : f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad (3.539)$$

e sia il vincolo

$$g(x, y) = 0 ; g(x_0, y_0) = 0 \quad (3.540)$$

con retta tangente in (x_0, y_0)

$$\tilde{r} : g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (3.541)$$

Per la seconda formulazione del metodo dei moltiplicatori di lagrange abbiamo che **le due rette tangenti sono coincidenti, dato che i gradienti delle due funzioni coincidono**.

Questo vuol dire che nei punti di max. e min. la curva di livello corrispondente è tangente al vincolo, e quindi di base si può trattare il problema graficamente, come vediamo nei seguenti **esempi**:

1. $f(x, y) = xy ; g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ Notiamo come graficamente ricaviamo 4 punti critici. Se

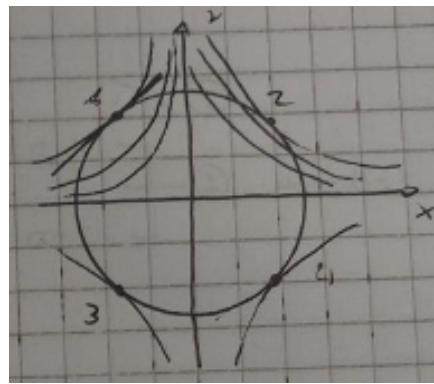


Figure 3.6:

applichiamo lagrange troviamo

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2y^2 = 1 \end{cases}$$

↓

$$x^{1,2,3,4} = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) \quad (3.542)$$

E quindi abbiamo quattro punti critici anche qui.

2. $f(x, y) = x + y ; g(x, y) = x + y^2 - 1$

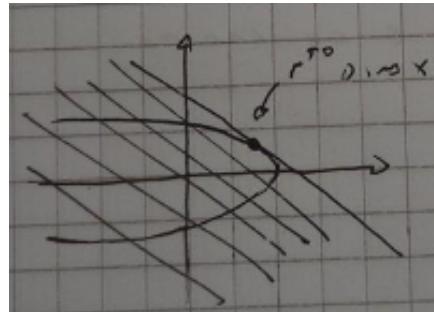


Figure 3.7:

In questo caso abbiamo solo un punto di massimo, non essendoci altri punti di tangenza.

3.7.5 Oss. sui punti critici

$$f(x, y) \in X \quad \text{if } \frac{x-a}{a-y} \neq 0. \quad \forall f = (f_1, f_2)$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 > 0$$

$\hookrightarrow x^2 - y^2 \geq 0 \iff x \in D \quad f(x,0) \in G = f(0,0) \quad f \text{ ist univ. stetig}$

$$\text{Def. } \forall g = (g^x, g^y) \mapsto \vartheta_g: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), (0, 0) \in \{g = 0\}$$

$$(X, Y, \lambda) : \begin{cases} X = \lambda x \\ Y = \lambda y \\ \exists z \end{cases} \mapsto \begin{cases} 1 = \lambda x^2 \\ 0 = \lambda^{-2} y \\ z = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \mapsto 1 = 0 \times \\ \lambda \neq 0 \mapsto y = 0 \mapsto x = 0 \mapsto z = 0 \end{array} \right]$$

Chrysanthemum: The flower has no segments, it has a whorl-like arrangement of petals.

$$\left\{ \begin{array}{l} \det \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = 0 \iff xy = 0 \iff x=0 \text{ or } y=0 \\ g(x,y) = x^2 - 0 = 0 \iff x=0 \end{array} \right. \implies (x,y) = (0,0)$$

Figure 3.8:

3.7.6 Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange nel caso generale

Siano

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} ; \quad g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m ; \quad m < n \quad (3.543)$$

$$f, g \in C^1(A) \quad (3.544)$$

(Notare come il numero di vincoli deve essere inferiore al numero di variabili.)

E sia $\underline{x}^0 \in A$ tale che

1. $g(\underline{x}^0) = 0$
2. $\mathbf{J}_g(\underline{x}^0)$ è di rango massimo (\underline{x}^0 pto regolare per g)
3. \underline{x}^0 punto di ma./min. vincolato di f per $g(\underline{x}^0) = \underline{0}_m$

Allora avremo di nuovo un risultato esprimibile in tre modi equivalenti:

1. La matrice

$$\begin{pmatrix} \nabla f(\underline{x}^0) \\ \nabla g_1(\underline{x}^0) \\ \dots \\ \nabla g_m(\underline{x}^0) \end{pmatrix} \quad (3.545)$$

Sarà di rango massimo.

2. $\exists \underline{\lambda}^0 : \nabla f(\underline{x}^0) = \langle \underline{\lambda}^0 | \nabla g(\underline{x}^0) \rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 \nabla g_j(\underline{x}^0)$
3. $\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) - \langle \underline{\lambda} | \nabla g(\underline{x}^0) \rangle \implies \exists \underline{\lambda}^0 : \nabla \mathcal{L}(\underline{x}^0, \underline{\lambda}^0) = \underline{0}_n$

Non diamo dimostrazione, ma un paio di esempi operativi nelle prossime pagine.

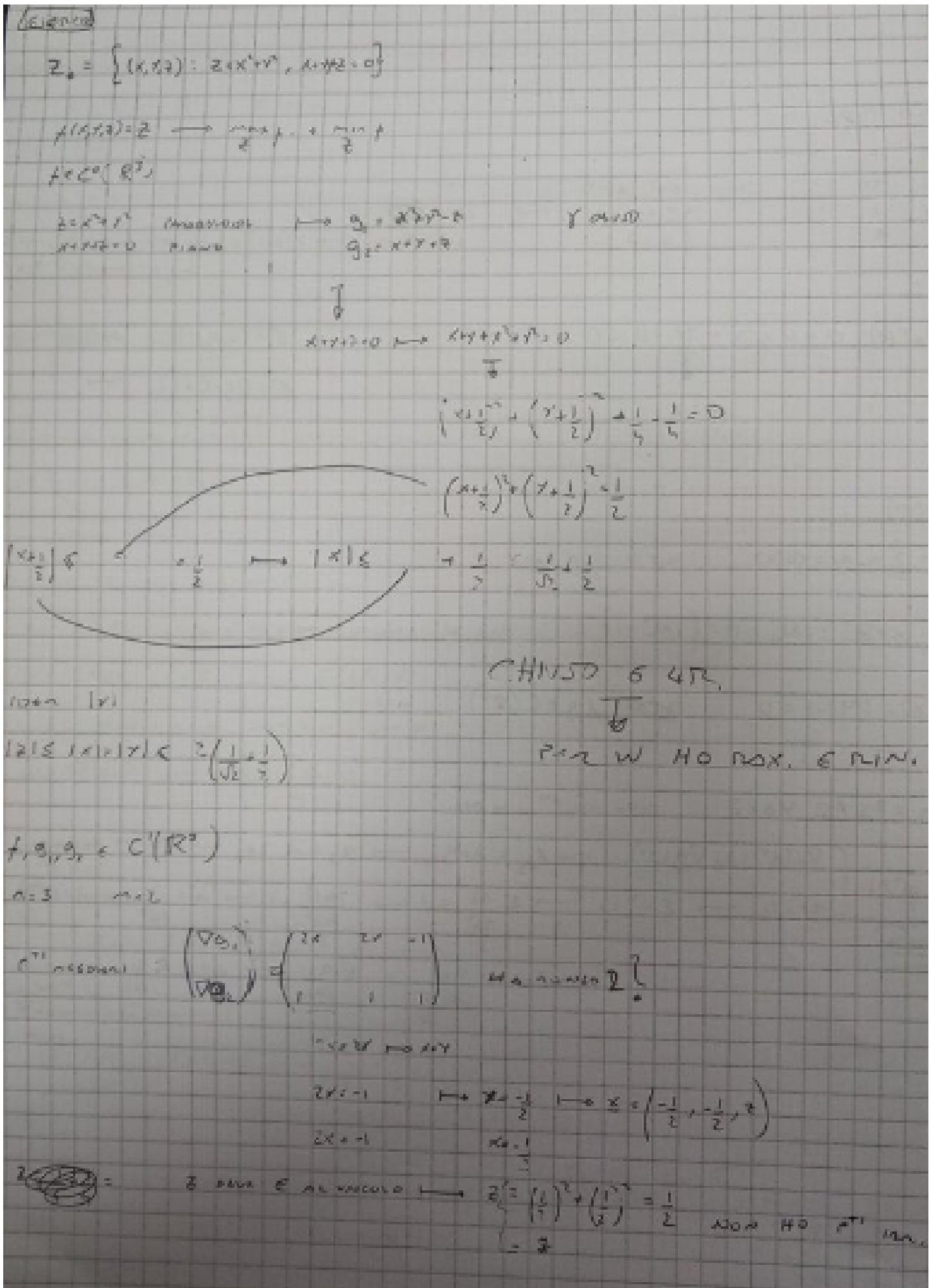


Figure 3.9:

Calcolo PDL

$$\begin{array}{l} \nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(\lambda) = 0 \\ \lambda^2 + 1 = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = i \\ \lambda = 1 \end{cases} \\ \lambda = 0 \rightarrow \gamma(f(x)) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0 \\ \lambda = i \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ \lambda = 1 \rightarrow x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

$$\det(\lambda) = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 = 0 \quad \lambda' = (0, 0, 1) \quad \text{Punto} \\ \downarrow \\ x = y \quad \lambda'' = (-1, 1, 1) \quad \text{Punto}$$

Esempio

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a, x \rangle \quad a_i \neq 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1 \right\} = \left\{ \|x\|_2 = 1 \right\} \quad \text{circo di raggiro minimo e massimo}$$

$$g(x) = \|x\|_2^2 - 1 = 0 \quad \text{con } f, g \in C^1(E) \quad \text{min} \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - 1$$

$$\nabla g = 2x \neq 0 \quad \forall x \in E \quad \text{non ha estremi locali}$$

$$(x^*, \lambda^*) = \begin{cases} \nabla f(x^*) = \lambda \cdot \nabla g(x^*) \\ \nabla g(x^*) = 0 \end{cases} \rightarrow f_{x_2} = \lambda \cdot g_{x_2} \rightarrow a_2 = \lambda \cdot 2x_2 \rightarrow \lambda x_0 = x_2 \cdot \frac{a_2}{2} \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 1 = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\lambda^2} = 1 \rightarrow \frac{\|a\|_2^2}{\lambda^2} = 1 \rightarrow \lambda^2 = \frac{\|a\|_2^2}{n} \rightarrow \lambda = \pm \frac{\|a\|_2}{\sqrt{n}} \\ \rightarrow x_2 = \pm \frac{a_2}{2x_0} = \pm \frac{a_2}{\|a\|_2} \rightarrow x_0 = \pm \frac{a_2}{\|a\|_2} \quad \text{min} \quad \max \\ \text{non è massimo}$$

Figure 3.10:

Chapter 4

Campi conservativi e irrotazionali

Affronteremo i successivi discorsi in \mathbb{R}^3

4.1 Richiamo sui campi vettoriali

Ricordiamo come un campo vettoriale in sia una funzione del tipo

$$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ; \quad A \text{ aperto} \quad (4.1)$$

$$\underline{F} \in C^0(A) \quad (4.2)$$

Abbiamo già definito il **lavoro di un campo vettoriale** come

$$W_{ab} = \int_{\gamma} ds \langle \underline{F} | T \rangle = \int_a^b dt \sum_{i=1}^3 F_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot x'_i(t) \quad (4.3)$$

4.2 Forme lineari

Le forme lineari sono un modo alternativo per studiare i campi vettoriali.

La forma ω associata al campo \underline{F} si esprime come

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \quad (4.4)$$

Per le forme lineari vale la proprietà di linearità:

$$\omega_1 = \sum F_i dx_i ; \quad \omega_2 = \sum G_i dx_i ; \quad \alpha, \beta \in R \quad (4.5)$$

$$\omega = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 = \sum (\alpha F_i + \beta G_i) dx_i \quad (4.6)$$

Le forme lineari possono quindi essere anche viste come

$$\omega = \langle \underline{F} | dr \rangle \quad (4.7)$$

E quindi si può esprimere il lavoro come

$$W_{ab} = \int_{\gamma} \omega \quad (4.8)$$

E possiamo quindi riscrivere le proprietà come

1. Linearità

$$\int_{\gamma} \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 = \alpha \int_{\gamma} \omega_1 + \beta \int_{\gamma} \omega_2 \quad (4.9)$$

2. Additività sui cammini

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad ; \quad \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset \implies \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \quad (4.10)$$

3. Curve analoghe

Date γ_1 e γ_2 equivalenti si avrà che

- (a) con stesso orientamento

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad (4.11)$$

- (b) con orientamento opposto

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega \quad (4.12)$$

Vediamo un paio di esempi.

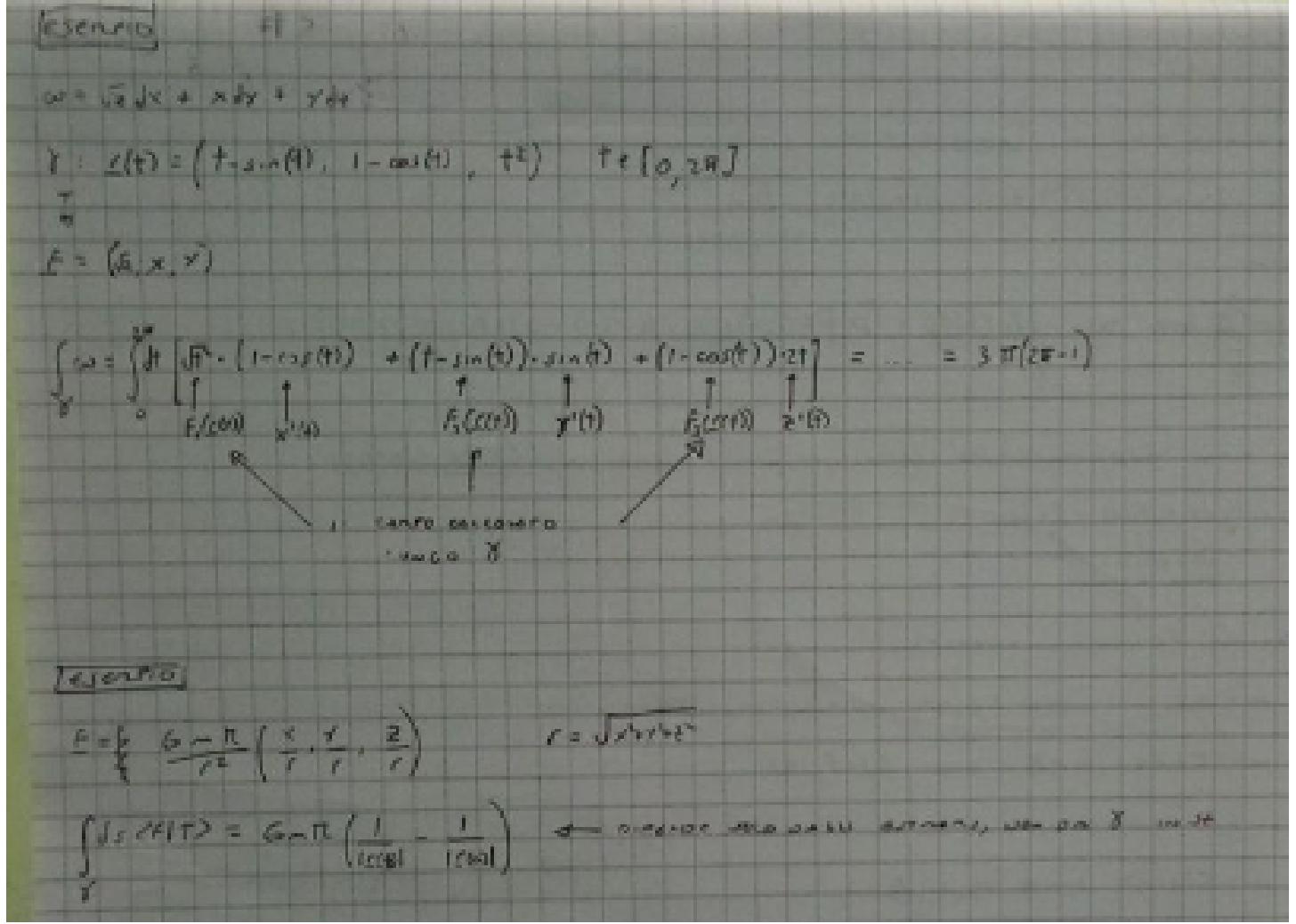


Figure 4.1:

4.3 Campi conservativi

Il secondo esempio del paragrafo precedente ci spinge a farci una domanda: quando si ha che il lavoro di un campo vettoriale dipende solo dagli estremi del percorso?

Questo ci porta a dare la definizione di **campo conservativo**, ovvero un campo \underline{F} tale che

$$\exists U : A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, U \in C^1(A) ; \quad \nabla U = \underline{F} \quad (4.13)$$

Con U che prende il nome di **potenziale** di \underline{F} .

Nel linguaggio delle forme lineari si dice che è una forma ω è **esatta** se

$$\exists U : \omega = \sum_{i=1}^3 U_{x_i} dx_i \quad (4.14)$$

Ma quanti potenziali può ammettere \underline{F} in un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto?

Supponiamo di avere due potenziali U, V per \underline{F} . Avremo che in A

$$\nabla U = \nabla V \implies \nabla(U - V) = \underline{0} \implies U - V = \text{cost.} \quad (4.15)$$

E che quindi tutti i potenziali in A sono uguali a meno di una costante.

Ma in che modo ci sono utili questi potenziali? Lo scopriamo nel seguente **teorema**:

Sia \underline{F} un campo conservativo dotato di potenziale U e sia γ curva di estremi \underline{P}_i e \underline{P}_f , avremo che

$$\int_{\gamma} ds \langle F | T \rangle = U(\underline{P}_f) - U(\underline{P}_i) \quad (4.16)$$

Per la dimostrazione si procede notando che

$$\frac{d}{dt} U(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \sum_{i=1}^3 U_{x_i} x'_i(t) = \sum_{i=1}^3 F_i x'_i(t) \quad (4.17)$$

E quindi sostituendo nell'integrale del lavoro otteniamo, avendo definito $\underline{P}_i = \underline{r}(a)$ e $\underline{P}_f = \underline{r}(b)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ds \langle F | T \rangle &= \int_a^b dt \sum_{i=1}^3 F_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot x'_i(t) = \\ &= \int_a^b dt \frac{d}{dt} U(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = U(\underline{P}_f) - U(\underline{P}_i) \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.3.1 Caratterizzazione dei campi conservativi

Sia un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto e connesso, e sia un campo vettoriale $\underline{F} \in C^0(A)$. Avremo che le tre seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. \underline{F} è conservativo
2. $\oint_{\gamma} ds \langle F | T \rangle = 0 \quad \forall \gamma$ chiusa $\subset A$
3. $\int_{\gamma_1} ds \langle F | T \rangle = \int_{\gamma_2} ds \langle F | T \rangle$ date due curve γ_1, γ_2 con stessi estremi ed orientamento

Vediamo come la 1 implichia la 2, dato che utilizzando il teorema dei potenziali e prendendo $\underline{P}_f = \underline{P}_i$ otteniamo un integrale chiuso il risultato è nullo.

A sua volta la 2 implica la 3, dato che se due curve hanno gli stessi estremi si avrà che

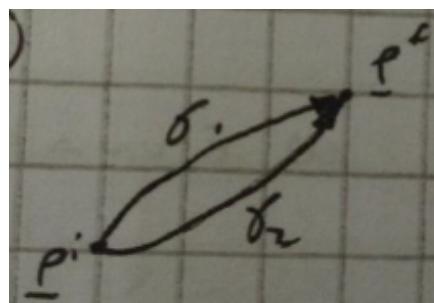


Figure 4.2:

$$\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \text{ curva chiusa} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} ds \langle F | T \rangle &= \int_{\gamma_1} ds + \int_{-\gamma_2} ds = \int_{\gamma_1} ds - \int_{\gamma_2} ds \\ &\downarrow \\ \oint_{\gamma} ds \langle F | T \rangle &= 0 \implies \int_{\gamma_1} ds - \int_{\gamma_2} ds = 0 \implies \int_{\gamma_1} ds = \int_{\gamma_2} ds \end{aligned} \quad (4.20)$$

Infine la 3 implica la 1. Fissato $\underline{P}^0 \in A$ e definita $\Gamma(\underline{P}) = \gamma_{\underline{P}^0 \rightarrow \underline{P}} \subset A$
Dimostriamo come dato

$$\int_{\Gamma(\underline{P})} ds \langle F | T \rangle = U(\underline{P}) \quad (4.21)$$

$U(\underline{P})$ sia un potenziale.

Ci chiediamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} \stackrel{?}{=} F_1 \quad (4.22)$$

Iniziamo scomponendo $\Gamma(\underline{P}^h)$ nel seguente modo

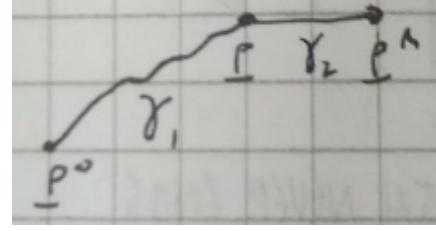


Figure 4.3:

$$U(x+h, y, z) = \int_{\Gamma(\underline{P}^h)} ds \langle F | T \rangle = \int_{\gamma_1} ds \langle F | T \rangle + \int_{\gamma_2} ds \langle F | T \rangle \quad (4.23)$$

Il primo integrale è semplicemente $U(x, y, z)$, mentre la curva γ_2 può essere parametrizzata nel seguente modo

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y \\ z(t) = z \end{cases} \quad t \in [x, x+h] \quad (4.24)$$

Otteniamo così

$$\begin{aligned} U(x+h, y, z) &= U(x, y, z) + \int_x^{x+h} dt [F_1(x, y, z) \cdot 1 + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0] = \\ &= U(x, y, z) + \int_x^{x+h} dt F_1(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sostituendo nel rapporto incrementale otteniamo

$$\begin{aligned} U_x(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(U(x, y, z) + \int_x^{x+h} dt F_1(x, y, z) - U(x, y, z) \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} dt F_1(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} F_1(x, y, z) \int_x^{x+h} dt = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} F_1(x, y, z) h = F_1(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.26)$$

In modo analogo si dimostrano le altre due componenti, e abbiamo così dimostrato che $U(x, y, z)$ è un potenziale, e che quindi \underline{F} è un campo conservativo. E che per un campo conservativo non importa il tragitto, ma solo gli estremi, dato che $\Gamma(\underline{P}^h)$ poteva essere parametrizzata in diversi modi ottenendo sempre lo stesso risultato.

Ci chiediamo però: operativamente, come riconosciamo quanto un campo è conservativo? Entra in gioco il **rotore** del campo \underline{F} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{F} &= \text{curl } \underline{F} = \nabla \times \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

La matrice è detta **simbolica** e il determinante è detto **formale**, perché non rappresentano quantità esistenti ben definite, ma solo "concetti".

Notiamo come se una delle componenti del campo è nulla, e quindi ci troviamo su un piano, il rotore si ridurrà ad una sola componente.

Introduciamo quindi il concetto di **campo irrotazionale**, ovvero di campo con rotore nullo

$$\nabla \times \underline{F} = 0 \quad (4.28)$$

Una forma differenziale associata ad un campo irrotazionale viene detta **chiusa**. E possiamo quindi dare la **condizione necessaria di conservatività**:

Se un campo $\underline{F} \in C^1(A)$ è conservativo, allora è anche irrotazionale.

La dimostrazione si appoggia al teorema di Schwartz sulle derivate miste. Infatti essendo $U_{x_i x_j} = U_{x_j x_i}$ si ha che

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \implies \frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i, j \implies \nabla \times \underline{F} = 0 \quad (4.29)$$

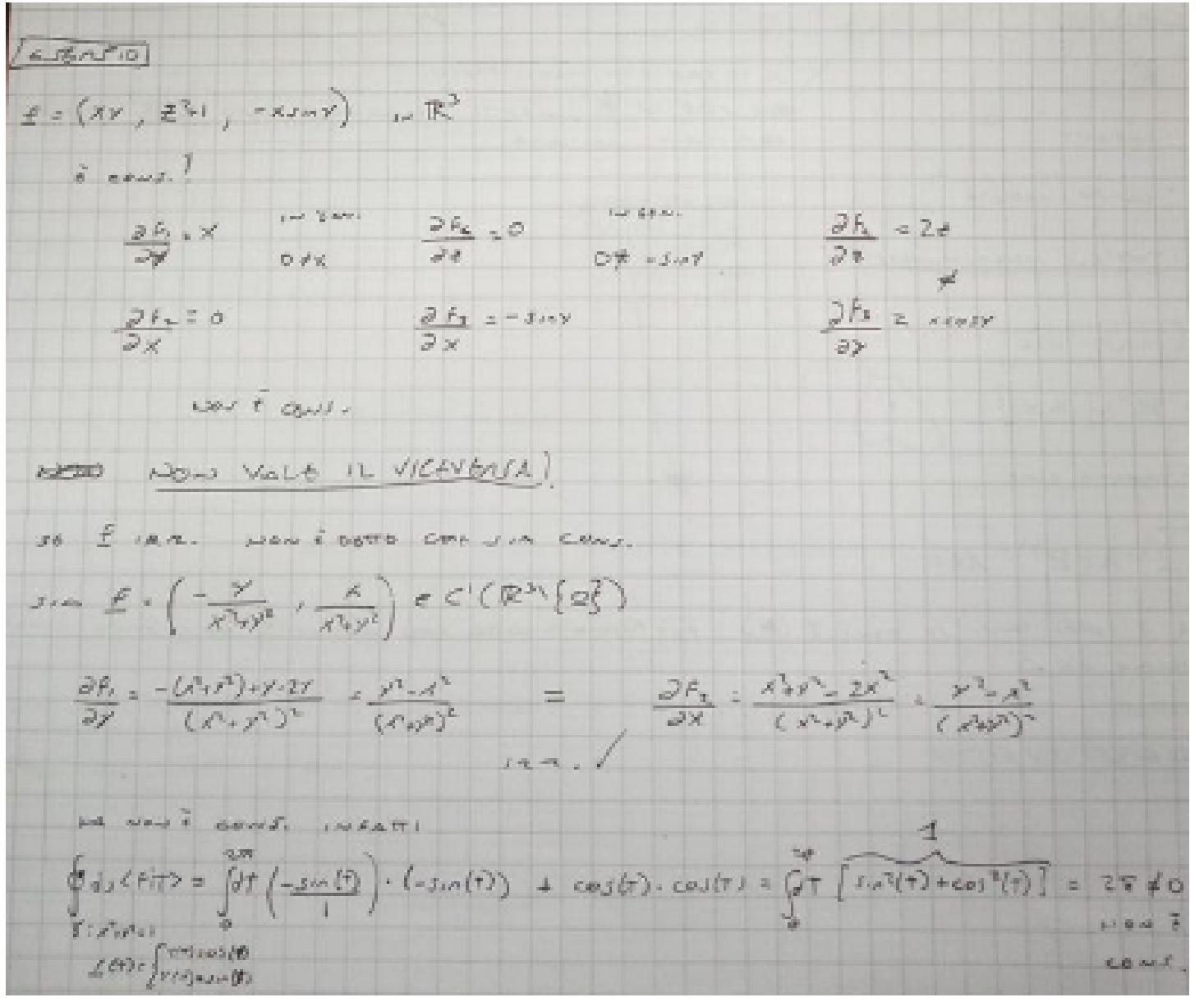


Figure 4.4:

4.4 Domini semplicemente connessi

Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un dominio aperto e connesso. Avremo che se ogni curva $\gamma \subset A$ chiusa, regolare/a tratti e semplice è frontiera di un insieme $D \subset A$ allora si dice che A è **semplicemente connesso**.

In altre parole un dominio A è s.c. se ogni $\gamma \subset A$ può essere ridotta con continuità ad un punto senza uscire da A .

In \mathbb{R}^2 questo significa che un dominio s.c. non ammette buchi al suo interno; cosa che invece cambia per $n \geq 3$, dove se il buco è di un singolo punto il dominio è comunque s.c.

Esempi di insiemi s.c. sono tutti gli insiemi convessi, \mathbb{R}^2 e campi circolari, mentre non sono s.c. corone circolari $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ o $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{una retta}\}$.

I domini semplicemente connessi sono molto comodi da studiare, in quanto portano con loro diversi teoremi utili:

1. S.C. e convessità

Sia \underline{F} un campo irrotazionale in $A \subset \mathbb{R}^3$

Allora se A è s.c. segue che \underline{F} è convesso in A .

La dimostrazione viene rimandata a quando studieremo il th. di Stokes, in quanto semplifica notevolmente lo studio.

2. S.C. e conservatività locale

Se un campo \underline{F} è irrotazionale in un dominio aperto $A \subset \mathbb{R}^{2,3}$, allora è anche localmente conservativo in A .

Avremo quindi dei potenziali **locali** e che $\exists I(\underline{P}^0 \in A) : \text{se } I(\underline{P}^0) \text{ s.c.} \implies \underline{F} \text{ cons. e che } I(\underline{P}^0) = B(\underline{P}^0, r)$.

3. S.C. e conservatività nel piano

Dato un campo vettoriale $\underline{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, se per $(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$ si ha che $F_{1_x} = F_{2_y}$ allora \underline{F} è conservativo.

Diamo in questo caso una dimostrazione del teorema più restrittiva nel prossimo paragrafo, giusto per darci un'idea su come si costruiscono i potenziali.

4.5 Lemma di Poincaré

Prima di procedere diamo una definizione utile ai fini di una del seguente teorema:

Un dominio si dice **stellato rispetto al punto \underline{x}^0** se ogni punto del dominio è collegabile a \underline{x}^0 tramite un segmento.

Nota: un insieme convesso è stellato rispetto ad ogni suo punto.

Nota: Un dominio stellato è anche s.c., ma un dominio s.c. non è detto sia stellato (e.x. domini a "ferro di cavallo").

Diamo ora il **Lemma di Poincaré**, il quale ci dice che

Sia \underline{F} irrotazionale in un dominio A stellato rispetto ad un punto \underline{P}^0 , allora \underline{F} è anche conservativo.

Diamo del lemma una dimostrazione costruttiva, ovvero dimostriamo il lemma costruendo un potenziale, e per semplicità ci poniamo in \mathbb{R}^2 con $\underline{P}^0 = (0, 0)$.

Sia $\gamma = s_{\underline{P}^0 \rightarrow \underline{P}}$ il segmento che unisce i punti a $(0, 0)$, avremo che

$$\gamma : \underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = tx \\ y(t) = ty \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (4.30)$$

E dato

$$U(x, y) = \int_{\gamma} ds \langle \underline{F} | T \rangle = \int_0^1 dt [F_1(tx, ty) \cdot x + F_2(tx, ty) \cdot y] \quad (4.31)$$

Dobbiamo dimostrare che

$$U_x = F_1 \quad ; \quad U_y = F_2 \quad (4.32)$$

Per farlo commettiamo un "abuso" e utilizziamo una nozione, lo scambio tra derivata e integrale, che ancora non sappiamo dimostrare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 dt [F_1(tx, ty) \cdot x + F_2(tx, ty) \cdot y] = \\ &= \int_0^1 dt \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_1(tx, ty) \cdot x) + \frac{\partial}{\partial x} (F_2(tx, ty) \cdot y) \right] = \\ &= \int_0^1 dt [F_1(tx, ty) + (F_{1x}(tx, ty) \cdot t) \cdot x + (F_{2x}(tx, ty) \cdot t) \cdot y] = \\ &= \int_0^1 dt [F_1(tx, ty) + t(F_{1x}(tx, ty) \cdot x + F_{2x}(tx, ty) \cdot y)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Facciamo ora uso dell'irrotationalità di \underline{F} e integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \int_0^1 dt [F_1(tx, ty) + t(F_{1x}(tx, ty) \cdot x + F_{2x}(tx, ty) \cdot y)] = \\ &= \int_0^1 dt \left[F_1(tx, ty) + \frac{d}{dt} F_1(tx, ty) \right] = \\ &= \int_0^1 dt F_1(tx, ty) + \int_0^1 dt \frac{d}{dt} F_1(tx, ty) = \\ &= \int_0^1 dt F_1(tx, ty) + t F_1(tx, ty)|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 dt \overline{F_1(tx, ty)} = \\ &= F_1(x, y) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Che è ciò che volevamo. In modo identico si dimostra $U_y = F_2$.

Abbiamo così un pratico criterio per studiare la conservatività di un campo in un dominio:

1. $\nabla \times \underline{F} \stackrel{?}{=} \underline{0}$
2. A è s.c. o stellato?

Se la risposta è positiva ad entrambe le domande il campo è conservativo nel dominio A .

Chapter 5

Integrali

5.1 Integrali a più variabili

5.1.1 Misura di Peano-Jordan e integrabilità secondo Riemann

per le funzioni in \mathbb{R} si è definita l'integrazione secondo Riemann, dove bastava che $f(x)$ fosse limitata in un intervallo $[a, b]$ per avere

$$\int_a^b dx f(x) \quad (5.1)$$

Riemann può essere esteso ad \mathbb{R}^2 tramite la **misura di Peano-Jordan**. A noi però non interessano, in quanto sono strumenti limitati, come dimostrò Dirichlet con la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0, 1], x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (5.2)$$

Che non è integrabile in alcun modo con le precedenti definizioni.

Inoltre ci troviamo con le mani legate su molte cose, come lo scambio tra limite e integrale, etc. etc. Entra quindi in gioco la misura di Lebesgue.

5.1.2 Misura di Lebesgue

5.1.2.1 Insiemi misurabili

La prima domanda che dobbiamo porci è: cos'è un insieme misurabile?

Affrontiamo per semplicità il discorso in \mathbb{R}^2 , ma le nozioni che verranno date sono estensibili a \mathbb{R}^n .

Sia il rettangolo

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \quad (5.3)$$

Come sappiamo dalla geometria, una misura sensata della sua area deve dare per forza

$$m(R) = (b_2 - a_2) \cdot (b_1 - a_1) \quad (5.4)$$

Definiamo ora un **Plurirettangolo** come l'unione di n rettangoli R_i

$$P = R_1 \cup \dots \cup R_n \quad (5.5)$$

la cui misura sarà

$$m(P) = \sum_{i=1}^n m(R_i) \quad (5.6)$$

Possiamo ora iniziare a studiare domini di forme diverse, usando i Plurirettangoli.

Per esempio dato un insieme aperto $A \neq \emptyset$ possiamo definirne la misura come

$$m(A) = \sup\{m(P), P \subset A\} \quad (5.7)$$

Dato invece un insieme chiuso $K \neq \emptyset$ possiamo definirne la misura come

$$m(K) = \inf\{m(P), K \subset P\} \quad (5.8)$$

Il caso in \mathbb{R}^n si ottiene generalizzando le formule nel seguente modo:

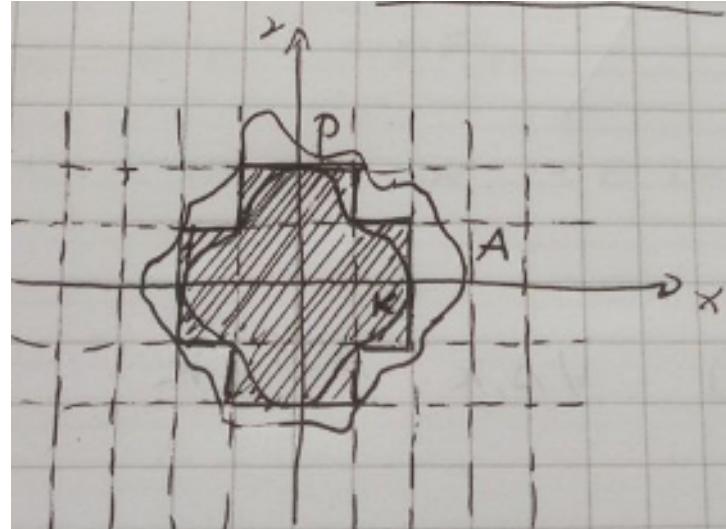
$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad (5.9)$$

$$m(R) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) \quad (5.10)$$

$$P = R_1 \cup \dots \cup R_m \quad ; \quad R_i \cap R_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad (5.11)$$

$$m(P) = \sum_{i=1}^m m(R_i) \quad (5.12)$$

E le definizioni date per $m(A)$ e $m(K)$ sono identiche a quelle già date.

Figure 5.1: Misura in R^2

Preso ora un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ possiamo definirne:

1. Misura esterna:

$$\overline{m}(E) = \inf\{m(A), E \subset \text{aperto}\} \quad (5.13)$$

2. Misura interna:

$$\underline{m}(E) = \sup\{m(K), K \subset \text{chiuso} \subset E\} \quad (5.14)$$

E affermiamo che $\underline{m}(E) \leq \overline{m}(E)$, dando solo un'idea di dimostrazione:

Se $K \subset E \subset A$ allora $\exists P : K \subset P \subset A$

Questo implica che

$$m(K) \leq m(P) \leq m(A) \implies m(K) \leq m(A) \quad \forall A, K : K \subset P \subset A \quad (5.15)$$

Notiamo ora come preso un dominio aperto A si ha che

$$m(A) = \overline{m}(A) \quad (5.16)$$

$$\underline{m}(A) \geq m(P) \quad \forall P \subset A \quad (5.17)$$

Ma la seconda equazione ci porta ad avere

$$\underline{m}(A) \geq \sup\{m(P), \forall P \subset A\} = m(A) \implies \underline{m}(A) \geq m(A) = \overline{m}(A) \quad (5.18)$$

Ma per definizione $\overline{m}(A) \geq \underline{m}(A)$ e quindi si ha che

$$\underline{m}(A) = \overline{m}(A) = m(A) \quad (5.19)$$

Questo vale non solo per tutti gli aperti A , ma anche per i compatti K con procedimento analogo. Questo risultato ci tornerà utile nel prossimo paragrafo.

5.1.2.2 Insiemi misurabili secondo Lebesgue

Un insieme $E \subset R^n$ si dice misurabile secondo Lebesgue (L_{mis}) se

$$\underline{m}(E) = \overline{m}(E) = M \quad ; \quad M = \text{quantità finita} \quad (5.20)$$

$$m(E) = M \quad (5.21)$$

Prendendo in considerazione quanto detto nel paragrafo precedente possiamo dire che tutti gli aperti e i compatti sono sempre L_{mis} .

Gli insiemi L_{mis} godono delle seguenti proprietà:

1. Dati due insiemi E ed F misurabili lo saranno anche

- (a) $E \cup F$
- (b) $E \cap F$
- (c) $E \setminus F$

2. Sommando i due insiemi si ha $m(E + F) \leq m(E) + m(F)$ e se $E \cap F = \emptyset$ allora $m(E + F) = m(E) + m(F)$

3. Sommando n domini E_i L_{mis} si ha

- (a) $m(E) \leq \sum_{i=1}^n m(E_i)$ e si parla di subadditività finita
- (b) $m(E) = \sum_{i=1}^n m(E_i)$ se $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j$ e si parla di additività finita

Nota: L'insieme degli insiemi misurabili secondo PJ (PJ_{mis}) è un sottoinsieme dei L_{mis} , in quanto la famiglia di domini integrabili è più restrittiva e si ha

$$\overline{m}_{PJ}(E) = \inf\{m(\dot{P}), E \subset \dot{P}\} \quad ; \quad \dot{P} = \text{plurirett. con punti interni} \quad (5.22)$$

$$\underline{m}_{PJ}(E) = \sup\{m(\dot{P}), \dot{P} \subset E\} \quad (5.23)$$

Da cui si ha

$$mm_{PJ}(E) \leq \underline{m}_L(E) \leq \overline{m}_L(E) \leq \overline{m}_{PJ}(E) \quad (5.24)$$

E quindi se un insieme è PJ_{mis} è anche L_{mis} .

The handwritten notes show two parts of a proof. The first part, under the heading "[EsenPIO]", defines a point $x \in \mathbb{R}^n$ and its singleton set $E = \{x\}$. It then states "perciò" followed by a blank space. The second part, under the heading "[EsenPIO]", defines a set $E = \{(x,y) : y=0, x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$. It then shows the calculation of the outer measure $\overline{m}(E) = \inf \{m(A), A \supset E\} \leq \inf \{m(A_\epsilon), A_\epsilon \supset E\} = \inf \{2\epsilon(1/\epsilon)\} = 0$. Below this, it says $0 \leq \underline{m}(E) \leq \overline{m}(E) = 0 \Rightarrow m(E) = 0$.

Figure 5.2:

5.1.2.3 Teoremi sugli insiemi misurabili

Diamo ora alcuni teoremi utili ai fini dello studio degli insiemi misurabili.

1. Teorema dell'additività numerabile della misura

Siano E_1, \dots, E_n misurabili, con $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j$

Dato $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ se si ha che $\bar{m}(E) < +\infty$ allora

E è misurabile e si ha che $m(E) = \sum_{i=1}^n m(E_i)$

2. Teorema della subadditività numerabile della misura

Siano E_1, \dots, E_n misurabili

Dato $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ se si ha che $\bar{m}(E) < +\infty$ allora

E è misurabile e si ha che $m(E) \leq \sum_{i=1}^n m(E_i)$

3. Teorema degli intervalli incapsulati

Siano E_1, \dots, E_n misurabili, con $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n$

Allora si ha $m(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(E_i)$

5.1.2.4 Misurabilità di $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ secondo Lebesgue

Visto che secondo Lebesgue una retta ($\{r_j\}$) è un insieme a misura nulla, e dato che

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_1, \dots, r_n\} \cdot \{r_j\} \quad (5.25)$$

Si ha che è un insieme a misura nulla.

5.1.2.5 Insieme di Cantor

L'insieme di Cantor viene costruito per ricorrenza nel seguente modo

$$C_0 = [0, 1] \quad (5.26)$$

$$C_1 = C_0 \setminus E_1 \quad ; \quad E_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \quad (5.27)$$

$$C_2 = C_1 \setminus E_2 \quad ; \quad E_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right) \cup \left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9} \right) \quad (5.28)$$

$$\vdots \quad (5.29)$$

Con

$$\dots \subset C_k \subset C_{k-1} \subset \dots \subset C_0 \quad (5.30)$$

Da cui si ottiene

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad (5.31)$$

L'insieme di Cantor gode delle seguenti proprietà:

1. È un insieme chiuso
2. $C \neq \emptyset$
3. non contiene int. (CHE CAZZO VUOL DIRE, CHIEDERE)
4. Non è numerabile
5. È misurabile nel seguente modo (si dimostra per induzione)

$$m(C) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \quad ; \quad m(E_k) = \frac{2^{k-1}}{3^k} \quad (5.32)$$

5.1.2.6 Misurabilità di insiemi chiusi e aperti secondo Lebesgue

Dato un insieme aperto $E \subset \mathbb{R}^n$, avremo che sarà L_{mis} se è misurabile $E \cap B(0, r)$ per ogni $r > 0$ e si definisce

$$m(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(E \cap B(0, r)) \quad (5.33)$$

Questo ci permette di poter scrivere

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \text{ aperto e misurabile} \\ A \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto e misurabile} \end{cases} \implies C = \mathbb{R}^n \setminus A \text{ chiuso e misurabile}$$

5.1.2.7 Misura di un prodotto tra spazi

Dati due spazi $E \subset \mathbb{R}^n$ ed $F \subset \mathbb{R}^k$ a misure rispettivamente m_n ed m_k si ha che dato

$$E \times F = \{(\underline{x}, \underline{y}), \underline{x} \in E, \underline{y} \in F\} \subset \mathbb{R}^{n+k} \implies m_{n+k}(E \times F) = m_n(E) \times m_k(F) \quad (5.34)$$

5.2 Integrali di Lebesgue

Iniziamo il discorso sugli integrali di Lebesgue introducendo le **funzioni caratteristiche**. Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ avremo

$$\chi_E(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \underline{x} \in E \\ 0 & \underline{x} \notin E \end{cases} \quad (5.35)$$

Avremo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\underline{x} \chi_E(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} d\underline{x} \cdot 0 + \int_E d\underline{x} = m(E) \quad (5.36)$$

E possiamo ora definire le **funzioni semplici** come combinazione lineare di un numero finito di funzioni caratteristiche

$$\Phi(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(\underline{x}) \quad (5.37)$$

Da cui

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\underline{x} \Phi(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n a_j \int_{\mathbb{R}^n} d\underline{x} \chi_{E_j}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n a_j m(E_j) \quad (5.38)$$

E, prese due funzioni semplici Φ e Ψ avremo

1. **Linearità:**

$$\int d\underline{x} [\alpha \Phi(\underline{x}) + \beta \Psi(\underline{x})] = \alpha \int d\underline{x} \Phi(\underline{x}) + \beta \int d\underline{x} \Psi(\underline{x}) \quad \forall \alpha, \beta \quad (5.39)$$

2. **Monotonìa:**

$$\Phi \leq \Psi \implies \int d\underline{x} \Phi(\underline{x}) \leq \int d\underline{x} \Psi(\underline{x}) \quad (5.40)$$

Prendiamo ora una generica

$$f(\underline{x}) : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (5.41)$$

limitata e a supporto compatto, ovvero l'insieme

$$K = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) \neq 0\} \quad (5.42)$$

è limitato.

Definiamo

$$S_f^+ = \{\Phi \in S : \Phi(\underline{x}) \geq f(\underline{x})\} \text{ Funzioni semplici maggioranti} \quad (5.43)$$

$$S_f^- = \{\Psi \in S : \Psi(\underline{x}) \leq f(\underline{x})\} \text{ Funzioni semplici minoranti} \quad (5.44)$$

$$S_f^+, S_f^- \neq \emptyset \quad (5.45)$$

$$|f(\underline{x})| \leq M \implies \begin{cases} \Phi(\underline{x}) = +M \chi_K(\underline{x}) \in S_f^+ \\ \Psi(\underline{x}) = -M \chi_K(\underline{x}) \in S_f^- \end{cases} \quad (5.46)$$

Possiamo ora iniziare ad avvicinarci alla definizione di integrale. Infatti ora che abbiamo queste due funzioni possiamo definire

$$\int^+ d\underline{x} f(\underline{x}) = \inf \left\{ \int d\underline{x} \Phi, \Phi \in S_f^+ \right\} \text{ Integrale superiore di } f(\underline{x}) \quad (5.47)$$

$$\int^- d\underline{x} f(\underline{x}) = \sup \left\{ \int d\underline{x} \Psi, \Psi \in S_f^- \right\} \text{ Integrale inferiore di } f(\underline{x}) \quad (5.48)$$

Si ha che

$$\int^+ d\underline{x} f(\underline{x}) \geq \int^- d\underline{x} f(\underline{x}) \quad (5.49)$$

E si dice che la funzione è **integrabile secondo Lebesgue** se

$$\int^+ d\underline{x} f(\underline{x}) = \int^- d\underline{x} f(\underline{x}) = \int d\underline{x} f(\underline{x}) \quad (5.50)$$

Nota: Per integrare secondo Riemann ci serviva una classe di funzioni più restrittive, quella delle **funzioni semplici elementari**, che sono un sotto insieme di quelle necessarie per Lebesgue. Segue quindi che una funzione integrabile per Riemann lo è anche per Lebesgue ma non viceversa.

5.2.1 Proprietà degli integrali di Lebesgue

Le proprietà sono le stesse degli integrali di Riemann, ne ricordiamo le più importanti:

1. Se una funzione f è sommabile allora lo saranno anche

- (a) cf $c = \text{costante}$
- (b) $f^\pm = \begin{cases} \max\{f, 0\} \\ \min\{-f, 0\} \end{cases}$
- (c) $|f|$
- (d) $f + a$

2. Linearità

3. Monotonia

5.2.2 Funzioni misurabili

Una funzione

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^* ; \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad (5.51)$$

Si dice **misurabile** se l'insieme

$$F_r = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) > r\} \quad (5.52)$$

È misurabile per qualunque $r > 0$

Nota: se una funzione è continua è anche misurabile.

Un utilizzo per la definizione di misurabilità si ha nel seguente **teorema**:

Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ questa sarà sommabile se e solo se è misurabile.

Per la dimostrazione iniziamo prendendo un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$.

La funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sarà sommabile in E se lo sarà anche

$$f^*(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \underline{x} \in E \\ 0 & \underline{x} \notin E \end{cases} = f(\underline{x}) \cdot \chi_E(\underline{x}) \quad (5.53)$$

Da cui si avrà che

$$\int_E d\underline{x} f(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}} d\underline{x} f^*(\underline{x}) \quad (5.54)$$

Sia ora f non negativa in E , se si ha che

1. $f_r(\underline{x}) = \max(f(\underline{x}), r)$ è sommabile in $E^* = E \cap B(0, r)$ per ogni $r > 0$
2. Esiste finito $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{E^*} d\underline{x} f_r(\underline{x})$

Allora anche $f(\underline{x})$ è sommabile in E .

Se f è a segno qualsiasi si procede nel seguente modo

$$f = f^+ - f^- ; \quad \begin{cases} f^+ = \max(+f, 0) \\ f^- = \max(-f, 0) \end{cases} ; \quad |f| = f^+ + f^- \quad (5.55)$$

Se f^+ e f^- sono sommabili allora anche f lo sarà e si avrà

$$\int_E d\underline{x} f = \int_E d\underline{x} f^+ - \int_E d\underline{x} f^- \quad (5.56)$$

Nota: Se f è sommabile allora lo sarà anche $|f|$.

Un'ultima considerazione da fare è che f sarà anche integrabile se

1. $f_r(\underline{x})$ è sommabile
2. almeno uno tra f^+ e f^- è sommabile

$\pm\infty$ sono soluzioni accettabili per l'integrale

Se vale la prima delle due allora $f(\underline{x})$ è anche misurabile. Quindi possiamo riassumere il tutto come segue:

$$\{f^{ni} \text{ sommabili}\} \subset \{f^{ni} \text{ integrabili}\} \subset \{f^{ni} \text{ misurabili}\} \quad (5.57)$$

Esempio

$$\text{Def} \quad f(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f^+(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = f^-(x)$$

$$\int_R dx f^+ = +\infty = \int_R dx f^-$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, a] \\ 0 & x \notin [0, a] \end{cases} \quad \rightarrow \quad f^+ = \begin{cases} 1 & x \in [0, a] \\ 0 & x \notin [0, a] \end{cases} \quad f^- = \begin{cases} 0 & x \in [0, a] \\ 1 & x \notin [0, a] \end{cases}$$

$$\int_R dx f^+ = a \quad \int_R dx f^- = +\infty \quad f \text{ è int., da cui tra uno e l'altro}$$

Figure 5.3:

5.2.3 "Quasi Ovunque"

Apriamo una brevissima parentesi sul concetto di "Quasi Ovunque", abbreviato *Q.O.* (in inglese "Almost Everywhere", A.E.), che ci tornerà utile più avanti.

Si dice che una proprietà è valida *Q.O.* in un dominio A se è verificata in tutti i suoi sottoinsiemi tranne quelli a misura nulla.

Esempio

$$f_\epsilon(x) = x^\epsilon \quad x \in [0, 1] \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x \in (0, 1) \end{cases} \quad \text{ogni punto di } A \text{ ha misura zero}$$

Possiamo dire che $\int_0^1 f_\epsilon(x) dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ Q.O.

Esempio

f sono s.m.s. E

$$F = \{x \in E : f(x) = \pm \infty\} \quad \rightarrow \quad m(F) = 0 \quad \rightarrow \quad f \text{ è finita Q.O.}$$

Esempio

se $f(x) = 0$ a.o. m.s. $\rightarrow \int_E dx f(x) = 0$

Esempio

$$f(x) = g(x) \quad \text{Q.O.} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \quad m(\mathcal{L}) = 0$$

$$\rightarrow \int_E dx f(x) = \int_E dx g(x)$$

Esempio

$$f \geq 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon \quad \int_E dx f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad f(x) = 0 \quad \text{Q.O. m.s.}$$

Figure 5.4:

5.2.4 Criterio del confronto per la sommabilità

Siano due funzioni

$$f, g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.58)$$

Con E misurabile, e sia che

1. $g(x)$ sommabile in E , con $g(x) \geq 0$
2. $f(x)$ misurabile in E

Se $|f(x)| \leq g(x)$ Q.O. in E allora $f(x)$ è sommabile in E .

5.2.5 Criterio del confronto asintotico

Sia $E = [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ e siano f e g sommabili in $[a, c]$ con $c < b$ ed esista il limite $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, avremo allora che

1. $l \in (0, +\infty)$

$$\int_a^b dx f(x) < +\infty \Leftrightarrow \int_a^b dx g(x) < +\infty \quad (5.59)$$

2. $l = 0$

$$\int_a^b dx g(x) < +\infty \Rightarrow \int_a^b dx f(x) < +\infty \quad (5.60)$$

3. $l = +\infty$

$$\int_a^b dx g(x) = +\infty \Rightarrow \int_a^b dx f(x) = +\infty \quad (5.61)$$

ESEMPIO

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ è finito?

$0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

per esempio $g(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2^{1/2}} = l$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \rightarrow 1} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Figure 5.5:

$f(x) = e^{-x^2}$ è sommabile in $(1, +\infty)$?

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ è sommabile in $(1, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f(x) \text{ è sommabile}$

Figure 5.6:

5.2.6 Teorema di passaggio al limite

Sia la successione di funzioni

$$\{f_n\} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; \quad \{f_n\} \in C^0(I) \quad (5.62)$$

Se si ha che $f_n \rightharpoonup f$ in I allora si ha che

1. $f \in C^0(I)$
2. $\int dx \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx f_n(x)$

Se si ha solo $f_n \rightarrow f$ il teorema non vale.

5.2.7 Teorema di convergenza di Poeno-Segre

Data una successione di funzioni $\{f_n\} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se vengono rispettate le seguenti condizioni

1. E misurabile
2. $\{f_k(\underline{x})\}_{k \geq 1}$
3. $0 \leq f_1(\underline{x}) \leq f_2(\underline{x}) \leq \dots \leq f_n(\underline{x})$ (la non negatività è opzionale, come vedremo più avanti)

Si avrà che se $f(\underline{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\underline{x})$ allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E d\underline{x} f_k(\underline{x}) = \int_E d\underline{x} f(\underline{x}) = \int_E d\underline{x} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\underline{x}) \quad (5.63)$$

Perché la non negatività è una condizione opzionale? Perché basta trovare una $g(\underline{x}) \leq f_1(\underline{x})$ e definire

$$F_k(\underline{x}) = -g(\underline{x}) + f_k(\underline{x}) \quad (5.64)$$

Che sarà per forza non negativa, e quindi si può applicare il teorema su questa.

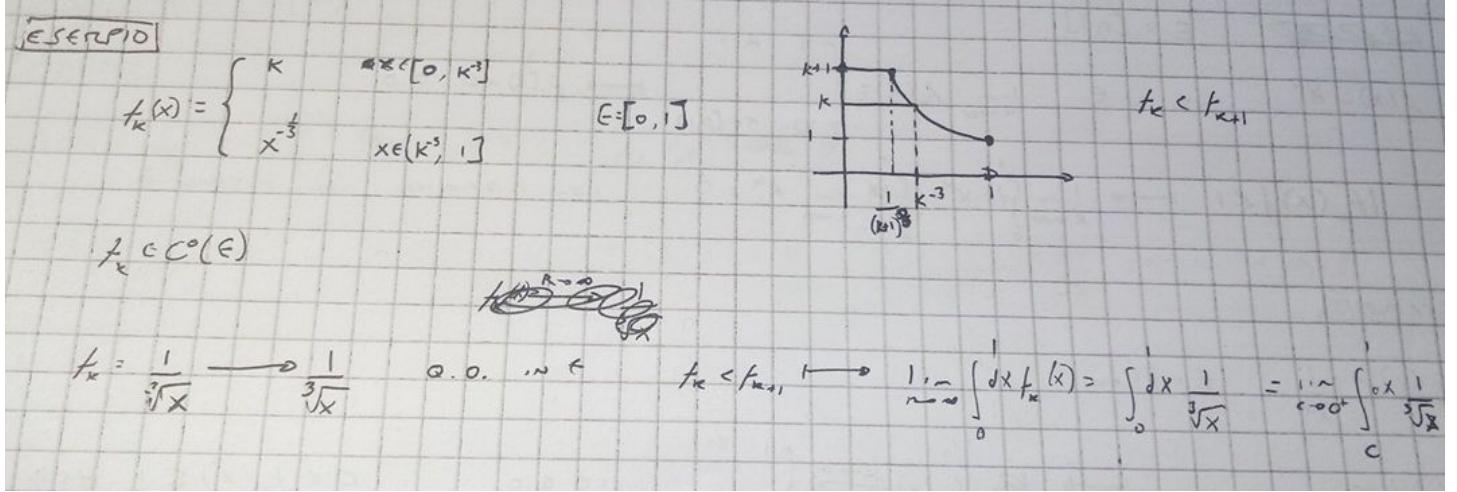


Figure 5.7:

5.2.8 Scambio tra somma e integrale per serie a termini non negativi

Sia una serie

$$\{u_k(\underline{x})\}_{k \geq 1} ; u_k(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall k, \forall \underline{x} \in E \subset \mathbb{R}^n \quad (5.65)$$

E siano E misurabile e gli u_k integrabili in E .

Possiamo definire

$$f_k(\underline{x}) = \sum_{j=1}^k u_j(\underline{x}) ; \quad k \geq 1 \quad (5.66)$$

Da cui possiamo ricavare

$$f_{k+1} = f_k + u_{k+1} \geq f_k \quad (5.67)$$

Il che ci permette di scrivere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E d\underline{x} \sum_{j=1}^k u_j(\underline{x}) = \int_E d\underline{x} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k u_j(\underline{x}) \quad (5.68)$$

Nel termine a sinistra la serie è a termini finiti, e quindi per linearità possiamo invertire serie e integrale e scrivere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_E d\underline{x} u_j(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_E d\underline{x} u_j(\underline{x}) \quad (5.69)$$

mentre nel secondo termine semplicemente scriviamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k u_j(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{+\infty} u_j(\underline{x}) \quad (5.70)$$

E otteniamo quindi

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \int_E d\underline{x} u_j(\underline{x}) = \int_E d\underline{x} \sum_{j=1}^{+\infty} u_j(\underline{x}) \quad (5.71)$$

5.2.9 Teorema di Lebesgue per la convergenza dominata

Se vengono rispettate le seguenti condizioni

1. $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile
2. $\{f_k(\underline{x})\}$ integrabile in E e tale che $\exists f(\underline{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\underline{x})$
3. $\exists g(\underline{x}) \geq 0$ sommabile in E tale che $|f_k(\underline{x})| \leq g(\underline{x})$ Q.O. in E

Allora si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E d\underline{x} f_k(\underline{x}) = \int_E d\underline{x} f(\underline{x}) = \int_E d\underline{x} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\underline{x}) \quad (5.72)$$

Non dimostriamo il teorema, perché so' conti e non ci serve dimostrarlo.

Rispetto a Poeno-Segre abbiamo l'esistenza di $g(\underline{x})$ che domina sia la successione che la funzione a cui tende. Questo ci torna utile qualora ci si trovi a lavorare con una successione limitata. Infatti se $\exists M > 0 : |f_k(\underline{x})| \leq M$ Q.O. in E e si ha che $m(E) < +\infty$ possiamo definire

$$g(\underline{x}) = M \chi_E(\underline{x}) \quad (5.73)$$

E possiamo quindi applicare il teorema di Lebesgue.

Un'altra conseguenza del teorema è che per il teorema del confronto le $f_k(\underline{x})$ sono anche sommabili in E .

Figure 5.8:

5.2.10 Spazi di Lebesgue L^p

Dato un dominio $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, possiamo definirvi sopra degli spazi L^p . Iniziamo col grado più basso, ovvero

$$L^1(E) = \left\{ f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \int_E d\underline{x} |f(\underline{x})| < +\infty \right\} \quad (5.74)$$

$L^1(E)$ è uno spazio normato, con

$$\|f\|_1 = \int_E d\underline{x} |f(\underline{x})| \quad (5.75)$$

Generalizziamo al caso L^p

$$L^p(E) = \left\{ f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \int_E d\underline{x} |f(\underline{x})|^p < +\infty \right\} \quad (5.76)$$

Anche $L^p(E)$ è uno spazio normato, con

$$\|f\|_p = \left(\int_E d\underline{x} |f(\underline{x})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.77)$$

Gli spazi $(L^p, \|\cdot\|_p)$ sono anche spazi di banach, ovvero normati e completi.

Inoltre gli elementi dello spazio sono classi di equivalenza rispetto alla relazione $f = g$ Q.O. in E .

Un caso particolarmente interessante si ha per $p = 2$, che è anche spazio di Hilbert, dove si ha anche definito il prodotto scalare!

$$\|f\|_2 = \left(\int_E d\underline{x} |f(\underline{x})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad \langle f | g \rangle = \int_E d\underline{x} f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x}) \quad (5.78)$$

5.2.11 Derivazione sotto segno di integrale

Prendiamo in considerazione un dominio $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, un dominio $A = (c, d) \subset \mathbb{R}$ aperto e sia

$$\begin{aligned} f : E \times A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{x}, t) &\longrightarrow f(\underline{x}, t) \end{aligned} \quad (5.79)$$

Fissiamo t in modo tale che $f(\cdot, t)$ sia integrabile in A e definiamo

$$F(t) = \int_E d\underline{x} f(\underline{x}, t) ; \quad t \in A \quad (5.80)$$

Ci chiediamo ora: quando è possibile scambiare l'integrale rispetto a \underline{x} e la derivata rispetto a t ? Innanzitutto dobbiamo assicurarci che F sia continua. Per questo ci viene in aiuto il seguente **teorema**:

Se vengono rispettate le seguenti condizioni:

1. $f : \underline{x} \longrightarrow f(\underline{x}, t)$ è sommabile in $E \forall t \in A$
2. $f : t \longrightarrow f(\underline{x}, t)$ è continua Q.O. in $A \forall \underline{x} \in E$
3. $\exists g(\underline{x})$ sommabile in E tale che $f(\underline{x}, t) \leq g(\underline{x}) \quad \forall t \in A, \forall \underline{x} \in E$ Q.O.

Allora $F(t)$ è continua in A .

Per la dimostrazione, piuttosto che verificare

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \stackrel{?}{=} F(t_0) \quad (5.81)$$

Riscriviamo il problema come

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(t_k) \stackrel{?}{=} F(t_0) \quad \forall \{t_k\}_{k \geq 1} : t_k \longrightarrow t_0 \quad (5.82)$$

Ci troviamo quindi con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E d\underline{x} f(\underline{x}, t_k) \quad (5.83)$$

Grazie alla terza ipotesi possiamo applicare il th. di convergenza dominata, e quindi scrivere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(t_k) = \int_E d\underline{x} \lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}, t_k) \quad (5.84)$$

Grazie alla seconda ipotesi possiamo scrivere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{x}, t_k) = f(\underline{x}, t_0) \quad (5.85)$$

E quindi ci troviamo ad avere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(t_k) = \int_E d\underline{x} f(\underline{x}, t_0) = F(t_0) \quad (5.86)$$

E il teorema è dimostrato.

Ora che ci siamo assicurati di avere fra le mani una funzione continua possiamo enunciare il seguente **teorema**:

Se vengono rispettate le seguenti condizioni:

1. $f : \underline{x} \rightarrow f(\underline{x}, t)$ è sommabile in $E \forall t \in A$
2. $f : t \rightarrow f(\underline{x}, t)$ è continua Q.O. in $A \forall \underline{x} \in E$
3. $\exists g(\underline{x})$ sommabile in E tale che $f(\underline{x}, t) \leq g(\underline{x}) \quad \forall t \in A, \forall \underline{x} \in E$ Q.O.
4. $f : t \rightarrow f(\underline{x}, t) \in C^1(A) \leftrightarrow f_t(\underline{x}, t) \in C^0(A)$
5. $\exists g_1(\underline{x})$ sommabile in E tale che $f_t(\underline{x}, t) \leq g_1(\underline{x}) \quad \forall t \in A, \forall \underline{x} \in E$ Q.O.

Allora avremo che

$$F(t) \in C^1(A) \quad ; \quad F'(t) = \int_E d\underline{x} \frac{\partial}{\partial t} f(\underline{x}, t) \quad (5.87)$$

Per la dimostrazione procediamo in modo analogo a prima.

Invece di verificare che

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \text{quantità finita} \quad (5.88)$$

Verifichiamo che

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(t_k) - F(t_0)}{t_k - t_0} = \text{quantità finita} \quad \forall \{t_k\}_{k \geq 1} : t_k \rightarrow t_0 \quad (5.89)$$

Iniziamo scrivendo il rapporto incrementale

$$\frac{F(t_k) - F(t_0)}{t_k - t_0} \quad (5.90)$$

Per linearità possiamo scrivere

$$\frac{F(t_k) - F(t_0)}{t_k - t_0} = \int_E d\underline{x} \frac{f(\underline{x}, t_k) - f(\underline{x}, t_0)}{t_k - t_0} \quad (5.91)$$

Utilizzando il th. di Lagrange avremo

$$\int_E d\underline{x} \frac{f(\underline{x}, t_k) - f(\underline{x}, t_0)}{t_k - t_0} = \int_E d\underline{x} \frac{\partial}{\partial t} f(\underline{x}, \xi_k) \quad ; \quad \xi_k \in I(t_k, t_0) \quad (5.92)$$

Passando a limite, facendo uso del th. della conv. dominata e della continuità della derivata avremo

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(t_k) - F(t_0)}{t_k - t_0} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E d\underline{x} \frac{\partial}{\partial t} f(\underline{x}, \xi_k) = \\ &= \int_E d\underline{x} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} f(\underline{x}, \xi_k) = \quad [\text{conv. dominata}] \\ &= \int_E d\underline{x} \frac{\partial}{\partial t} f(\underline{x}, t_0) \quad [\text{continuità della der.}] \end{aligned} \quad (5.93)$$

E il teorema è così dimostrato.

ESEMPIO

$F(x) = \int_0^x e^{-t} \sin(tx) dt$ $F(t) = \int_0^\infty e^{-x} \sin(tx) dx$ $t \in \mathbb{R}, t > 0$

$F(0) = 0$ $F(t) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin(-tx)}{-x} dx = -F(-t)$

pero $T \rightarrow |f(x,t)| \leq e^{-x} \cdot \frac{|1| \cdot x}{x} \leq e^{-x} = o(x)$ somm. in $(0,+\infty)$ ✓

$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| = \left| \frac{e^{-x} \cos(tx) \cdot x}{x} \right| \leq e^{-x}$ somm. in $(0,+\infty)$ ✓

$F'(t) = \int_0^\infty e^{-x} \cos(tx) dx$ per part. $= - \left[e^{-x} \cos(tx) \right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty e^{-x} t \sin(tx) dx = - \left[-1 + t \int_0^\infty e^{-x} \sin(tx) dx \right] =$ per part. $-d(e^{-x}) = +e^{-x}$

$= 1 + t \left[e^{-x} \sin(tx) \right]_{x=0}^{x=\infty} - t \int_0^\infty e^{-x} \sin(tx) dx = 1 - T^2 F'(t) \rightarrow F'(t) + T^2 F'(t) = 1$

dato che $F(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$\rightarrow F'(t) = \frac{1}{1+t^2} + F(t) = \arctan(t) + C$

BEST FRIENDS

avendo $\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin(tx)}{x} dx = \arctan(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Figure 5.9:

FOGLIO 25 BLOCKNOTES NON SI CAPISCHE UN CAZZO

5.2.12 Misura di insiemi in \mathbb{R}^2

Per effettuare la misura di un insieme E in \mathbb{R}^2 come quello in figura si può procedere in due modi:

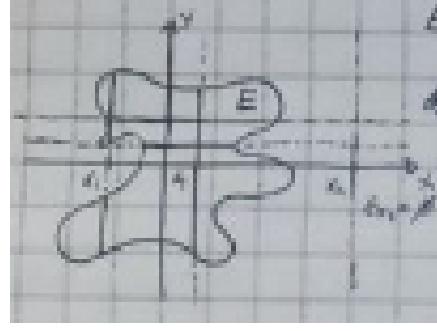


Figure 5.10:

1. Fissando la x

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\} ; m_2(E) = \int_R dx m_1(E_x) \quad (5.94)$$

2. Fissando la y

$$E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\} ; m_2(E) = \int_R dy m_1(E_y) \quad (5.95)$$

Un insieme si dice

1. Normale rispetto all'asse x se si ha che

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\alpha(x), \beta(x)]\} \quad (5.96)$$

$$\alpha(x), \beta(x) \in C^0([a, b]) ; \alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (5.97)$$

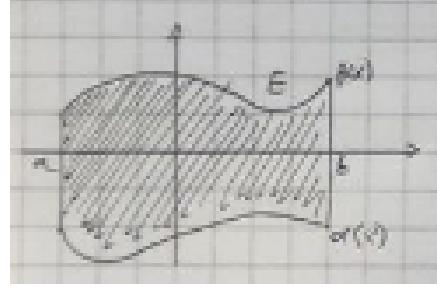


Figure 5.11:

In questo caso

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & x \notin [a, b] \\ \{y \in \mathbb{R} : y \in [\alpha(x), \beta(x)]\} & x \in [a, b] \end{cases} \quad (5.98)$$

$$m_1(E_x) = \beta(x) - \alpha(x) \implies m_2(E) = \int_a^b dx [\beta(x) - \alpha(x)] \quad (5.99)$$

2. Normale rispetto all'asse y se si ha che

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], x \in [\gamma(y), \delta(y)]\} \quad (5.100)$$

$$\gamma(y), \delta(y) \in C^0([c, d]) ; \gamma(y) \leq \delta(y) \quad \forall y \in [c, d] \quad (5.101)$$

In questo caso

$$E_y = \begin{cases} \emptyset & y \notin [c, d] \\ \{x \in \mathbb{R} : x \in [\gamma(y), \delta(y)]\} & y \in [c, d] \end{cases} \quad (5.102)$$

$$m_1(E_y) = \delta(y) - \gamma(y) \implies m_2(E) = \int_c^d dy [\delta(y) - \gamma(y)] \quad (5.103)$$

Ovviamente non è detto che se un insieme è normale rispetto ad un asse lo sarà anche rispetto all'altro.

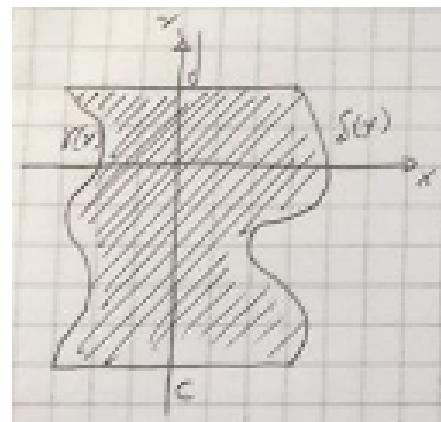


Figure 5.12:

ESEMPI SU FOTO SCOMODI DA FOTOGRAFARE, COPIARE POI

5.2.13 Teorema di Fubini

Supponiamo di avere una $f(x, y)$ sommabile in \mathbb{R}^2 . Allora se si ha che

1. Fissato x e considerata $f(y)$, essa è sommabile in \mathbb{R} .

$f(y) : y \rightarrow f(x, y)$ è sommabile in \mathbb{R} per x fissato Q.O. se è ben definito $\int_R dy f(x, y) = g(x)$

2. $g(x)$ è sommabile in \mathbb{R}

Allora si avrà che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f(x, y) \quad (5.104)$$

Oppure, invertendo le variabili nelle ipotesi si avrà

$$\iint_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx f(x, y) \quad (5.105)$$

Ma c'è un problema! Per come lo abbiamo definito, il teorema non considera domini finiti. E quindi, data una funzione continua definita su $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$, come calcoliamo l'integrale sul dominio? Basta farci furbi e definire

$$f^*(x) = f(x) \cdot \chi_E(x) = \begin{cases} f(x) & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases} \quad (5.106)$$

E applicare il th. di Fubini su questa funzione. Questo ci permette di scrivere

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy f^*(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy f^*(x, y) \\ &\downarrow \\ \iint_E dx dy f(x, y) &= \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy f(x, y) \end{aligned} \quad (5.107)$$

ESEMPI CHE NON POSSO SCANNARE, DA TRASCRIVERE POI

5.2.14 Centro di Massa di una superficie

Diamo, in modo analogo al caso di una curva, la definizione di baricentro (o CDM) di una superficie E con densità $\rho(x, y) > 0$

$$x_B = \frac{\iint_E dx dy x \cdot \rho(x, y)}{\iint_E dx dy \rho(x, y)} \quad ; \quad y_B = \frac{\iint_E dx dy y \cdot \rho(x, y)}{\iint_E dx dy \rho(x, y)} \quad (5.108)$$

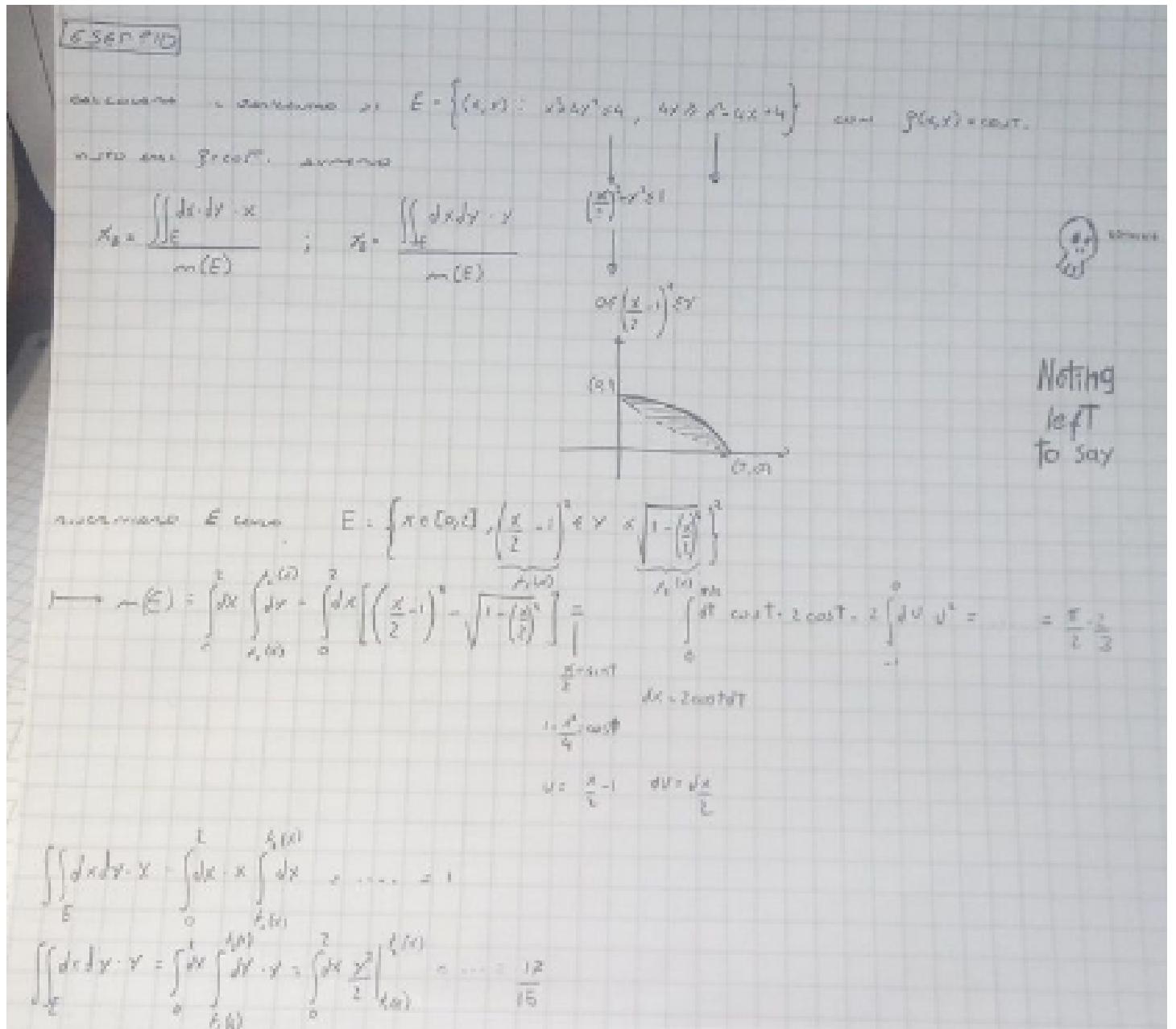


Figure 5.13:

5.2.15 Calcolo dei volumi

Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^3$, come troviamo il suo volume?

Fissiamo z in modo tale da avere

$$E_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in E\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (5.109)$$

Possiamo procedere come per il caso in \mathbb{R}^2 , "affettando" il dominio E perpendicolarmente a z , e calcolando $m_2(E_z)$, per infine ottenere

$$m_3(E) = \int_R dz m_2(E_z) \quad (5.110)$$

Questo metodo viene chiamato **Integrazione per strati**.

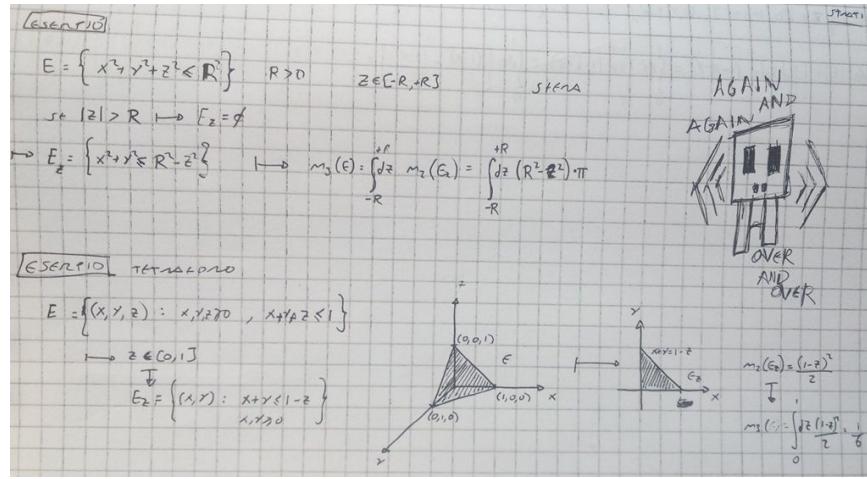


Figure 5.14:

Alternativamente si può procedere **per fili**, ovvero dividendo il dominio E nel seguente modo

$$E_{xy} = \{z \in (x, y, z) \in E\} \subset \mathbb{R} \quad (5.111)$$

Per poi calcolare

$$m_3(E) = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy m_1(E_{xy}) \quad (5.112)$$

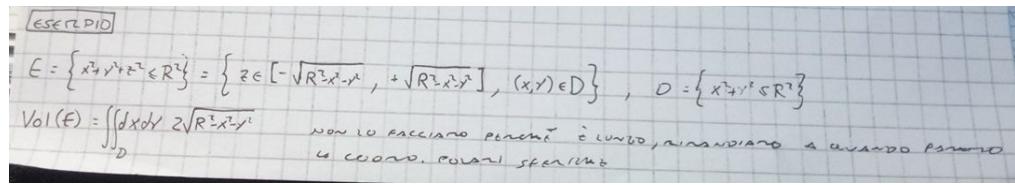


Figure 5.15:

5.2.16 Cambio di variabili (MANCANTE)

Iniziamo ricordando cos'è un diffeomorfismo. Data

$$g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subset \mathbb{R}^n \quad (5.113)$$

Con A, B aperti. g è un diffeomorfismo se

1. g è iniettiva in A
- 2.

5.3 Integrali impropri di Riemann

Torniamo un attimo agli integrali di Riemann. Gli integrali di Riemann hanno una limitazione: non possono lavorare con intervalli aperti o infiniti. Come si può risolvere questo problema? Utilizzando i limiti.

5.3.1 Integrali impropri di I tipo

Sia una $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Se si ha che

1. $f(x)$ è R_{int} in $[a, c]$ con $c < b$
2. Esiste finito $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c dx f(x)$

Allora si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[a, b)$ e si ha che

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c dx f(x) \quad (5.114)$$

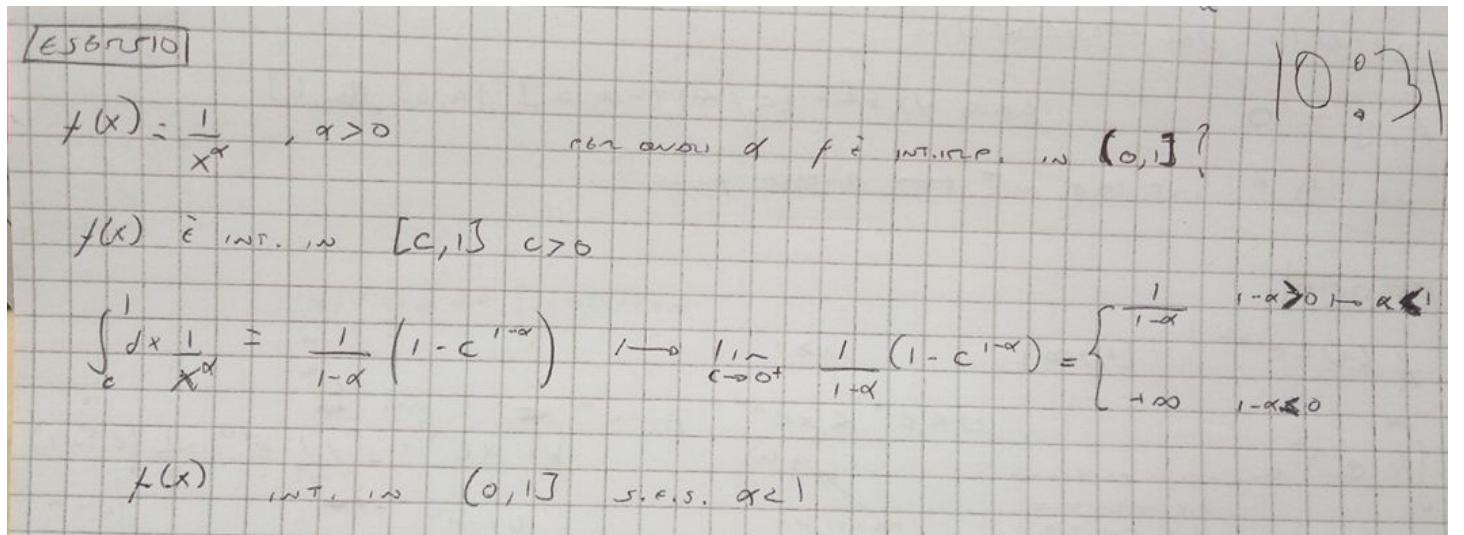


Figure 5.16:

5.3.2 Integrali impropri di IIo tipo

Sia ora una $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Se si ha che

1. $f(x)$ è R_{int} in $[a, c]$ con $c > a$
2. Esiste finito $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c dx f(x)$

Allora si dice che $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$

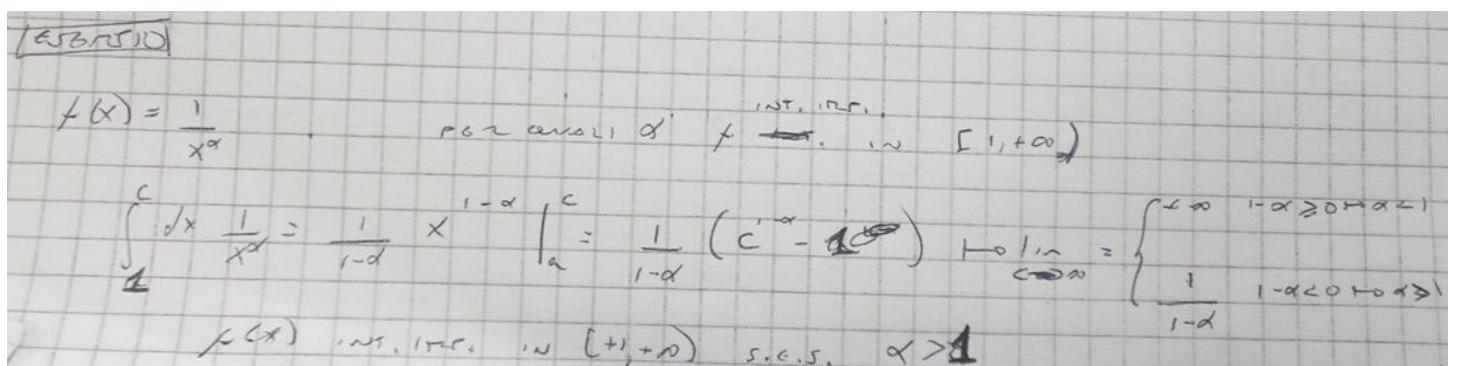


Figure 5.17:

$$f(x) = e^{-x}$$

int. imp. in $(0, +\infty)$? $\sim [0, +\infty)$ sì.

$\cdot \int_0^c x e^{-x} = -e^{-x} \Big|_0^c = 1 - e^{-c} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 1$

Figure 5.18:

5.3.3 Criterio del confronto per integrali impropri

Siano due funzioni $f, g \geq 0 : f \leq g \quad \forall x \in I = [a, +\infty), (-\infty, +a], [a, b], (a, b]$

Se g è integrabile in senso improprio in I allora anche f lo è.

ESEMPIO

$$f(x) = e^{-x^2} \quad [1, +\infty)$$

$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}$ non converge
calcoliamo
il limite

$0 < e^{-x} < \underbrace{xe^{-x}}_{g(u)} \quad x \geq 1$

$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{2} (e^{-\infty} - 1)$

$U = -x^2$
 $dU = -2x dx$
 $x dx = -\frac{1}{2} dU$

per confronto anche f int. imp. in $[1, +\infty)$

Figure 5.19:

