2024 Al for Mathematics: 数学形式化和定理证明

一、课程及活动安排

LEAN 是最初由微软开发的一款强大的交互式证明辅助软件,旨在验证和确保数学证明的正确性。自 2013 年推出以来,LEAN 通过形式化逻辑和自动化工具,帮助用户精确地构建和检查复杂的数学证明。它具有相对高效的定理证明器,用户友好的界面及庞大的数学定理库Mathlib,适用于各种数学领域的研究和教育。通过使用LEAN,数学家可以减少人为错误,提升证明的可靠性和严谨性,我们预期未来可能LEAN 会成为现代数学研究中不可或缺的工具。

这次暑期学校希望学生在五周的时间内

- 1. 学习并掌握抽象代数的标准课程
- 2. 学习熟练使用 LEAN 这一数学形式化的工具
- 3. 了解和 AI for Math 相关的工具和发展

本次暑期学校上午主要进行抽象代数的学习(涵盖标准的大学抽象代数课程内容,即群、环、模、域、Galois 理论等),下午进行相应的 LEAN 语言的学习(主要使用网上教材 Mathematics in LEAN: https://leanprover-community.github.io/mathematics_in_lean/)每周四周日上午安排关于抽象代数的习题课,下午学员可以休息或者自由讨论。

每天的安排如下:

9:00-10:10	抽象代数课程 1		
10:20-11:30	抽象代数课程 2		
午饭及午休			
1:30-2:30	LEAN 课程 / 讲座		
2:40-3:40	LEAN 课程 2		
茶歇			
4:00-4:50	自主练习		
5:00-5:30	习题讲解		
晚饭			
7:30-9:30	自习及讨论		

这次暑校大致安排如下:

第1周:抽象代数方向介绍群的基本定义和结构, 学习 LEAN 语言并通过一系列针对性的习题的训练基本掌握 LEAN 语言的基本使用方法。

第2周:抽象代数方向介绍群理论的高级内容,在第一周 LEAN 学习的基础之上,熟练抽象代数领域 LEAN 形式化的技术和相关技巧。

第 3-5 周:抽象代数方向讲授环、模、Galois 理论,熟练使用 LEAN 形式化抽象代数习题,我们安排多场 AI、机器学习及自动定理证明相关的报告及袁坤老师关于大语言模型的小短课。

二、暑期学校开始前的准备

1. 我们强烈建议参加暑期学校的同学们在暑期学校开始之前自主学习 LEAN 语言为初学者 设计的两个"游戏",通过这两个游戏的学习,同学们可以对 LEAN 的使用有一些初步的 了解。

LEAN "游戏" 服务器, 特别推荐其中的 "Natural Number Game" 和 "Set Theory Game" https://adam.math.hhu.de/#/

更多的 LEAN 的学习资料可以在下面的网页找到 https://leanprover-community.github.io/learn.html

- 2. 我们建议参加暑期学校的同学们在自己的笔记本电脑上预先安装 lean。如果你的电脑能够顺利连接国际网络,且已在终端中配置代理,可遵循以下步骤进行安装:
 - a. 在 VS code 中安装 lean4 (以 windows 系统为例):
 - i. 安装 VS code。安装 Git。安装 Github Desktop。
 - ii. 打开 VS Code,在屏幕左侧的"activity bar" 中点击 "extension" 图标。在出现的搜索框中,输入 lean4,然后选择出现的 lean4 扩展,并点击安装按钮。
 - iii. 在 "File" 菜单下,选择 "New text file",此时会出现一个标记为 Untitled-1 的新窗口。在这个窗口中会有一个提示 "Select a language", 应点击它并选择 Lean4。(或者可以任意新建一个以.lean 为后缀名的文件并用 VS code 打开它) 一旦将语言设置为 Lean4, 屏幕右下角会出现一个对话框,显示 "Failed to start 'lean' language server",并有一个按钮 "Install Lean using Elan"。点击这个按钮即可在 VS Code 内的终端窗口中看到安装过程开始。
 - iv. 完成后, 返回 Untitled-1 编辑器, 并在文件中输入 lean 代码

#eval 18 + 19

如果在 "#eval" 下出现蓝色下划线, 并且在右侧的 "Lean Infoview" 面板中显示结果 37, 那么 Lean 4 已安装成功。

MacOS 系统可以参见

https://leanprover-community.github.io/install/macos.html

windows 系统也可以参见

https://leanprover-community.github.io/install/windows.html

- b. 下载教材 Mathematics in lean 和 mathlib 库。
 - i. 打开 Github Desktop, 在"File" 菜单下点击 "clone repository" (或者可以直接使用快捷键 Ctrl + Shift + O)。在弹出的对话框中选择 URL 并将网址 https://github.com/leanprover-community/mathematics_in_lean.git

粘贴到 "URL or username/repository" 框中,在 "local path" 框中选择本地的储存地址 (请确保储存地址所在的硬盘至少有 5G 的空闲储存空间,且存储路径中的文件夹名尽量都是英文的),最后点击 "Clone" 按钮,等待Mathematics in lean 的下载。

ii. 打开下载好的 mathematics_in_lean 文件夹,在鼠标右键菜单中点击 "在终端打开"。确认电脑的终端配置好网络后,在终端命令行中输入

lake exe cache get

此时将开始下载 mathlib4 库作为运行的依赖。

- iii. 启动 VS Code。可以直接在命令行输入 "code .", 也可以通过应用菜单启动, 然后在"File"菜单中点击 "Open folder" (在 Mac 上为 "Open"), 然后选择 mathematics_in_lean 文件夹 (而不是其子文件夹之一)。
- iv. 此时使用左侧的文件资源管理器,即可浏览教材 Mathematics in lean 的所有内容。

也可以参见

https://leanprover-community.github.io/install/project.html#working-on-an-existing-project

- 3. 如果你无法顺利地连接国际网络,你可以选择使用镜像进行 lean 的安装配置,下面是以windows 系统为例的安装步骤,其中安装 VSCode 与 git 的步骤与上同(你可以选择 GitHub Desktop 与 git 中的任意一个进行安装):
 - a. 进入上交镜像站安装必要工具
 - i. 在<u>上海交通大学 Linux 用户组 软件源镜像服务 (sjtu.edu.cn)</u>的列表中找到 elan, 点击后选择 Browse elan, 可以看到新的列表。
 - ii. 点击新列表中的 elan,不断点击直到列表内容为 elan 开头的多个压缩包,选择你电脑系统架构对应的包下载,windows 系统解压后双击其中的 exe 文件,在 弹出的命令行窗口中按 1 再回车。可打开新的终端输入 elan 测试是否安装成功。
 - iii. 回到选择 Browse elan 后弹出的界面,点击 glean,不断点击直到出现压缩包列表,选择恰当系统架构的包下载并解压。将压缩包中的 glean.exe 文件移动到 C:\Users\<yourname>\.elan\bin 下。
 - b. 配置 mathematics_in_lean
 - i. 打开终端,运行以下命令将 mathematics_in_lean 克隆到本地:

git clone https://mirror.sjtu.edu.cn/git/lean4packages/mathematics_in_lean

ii. 查看 lean-toolchain 文件中的内容,确定需要的版本号(如 4.8.0-rc2),运行以下命令:

glean -install lean -version 4.8.0-rc2

该命令会安装对应版本的 lean 工具链,安装完成后在终端中输入 lean -v 确认是否安装成功 (需在 mathematics_in_lean 目录下)

- iii. 在终端中直接输入 glean,将依赖克隆到本地。
- iv. 在终端中运行 lake build, 等待构建完成。

具体步骤可参见教学视频 Lean4 Windows 安装_哔哩哔哩_bilibili

三、生活及住宿等相关事项

1.入校与入住宿舍时间为2024年6月30日8时起,退寝时间为8月5日12时;8月5日出校后入校权限失效,不能再次入校。具体宿舍安排、取餐卡与宿舍钥匙地点会在群内提前

- 1-2 日公布。
- 2.室内设备配置每间:空调、上下床、书桌柜、窗帘。

室内卧具配置每人:夏凉被、褥子、床单、枕头、枕套各1件,拖鞋一双,脸盆1个,衣架5个。

- 3.学员可使用楼内自助洗衣机,使用费自付。
- 4.楼内热水器为学员免费提供饮用水。
- 5.需要办理住宿或餐卡的同学,卡内储值两周的生活补助,500元入卡,定额餐卡由于食堂伙食有补助的原因,收取 25%手续费,余额 375元;如后续需要补充餐费再与活动接口人实时联络,余下生活补助将于活动结束后发放至银行卡。校内亦有无需餐卡可就餐的地点,但寝室卡必须绑定餐卡,因此**住宿同学**默认均需办理一张定额 500 元的餐卡。
- 6.为保证安全, 乙方和乙方入住人员不得私配房间钥匙, 如有钥匙遗失, 须交纳 5 元成本费后由甲方统一配制。

7.活动主办方将在夏令营活动期间为学生配置意外险。

附件一:暑期学校日程安排(暂定)

红字部分为特邀报告内容 紫色部分为抽象代数内容 蓝色部分为选听专业报告

	上午 (抽象代数)	下午 (LEAN)
	Al for Mathematics:数学的数	Math in LEAN 第 2-3 章
7月1日(周一)	字化与智能化(董彬)	Width III 22, II V 35 2 0 4
7月2日(周二)	群的定义、例子、同构	群和集合在 LEAN 中的实现
7月3日(周三)	子群、陪集、拉格朗日定理	LEAN 的结构和框架,子群的实现
7月4日(周四)	抽代习题课	休息及自由讨论
7月5日(周五)	正规子群、商群、群同态、核	函数和同态在 LEAN 中的实现
7月6日(周六)	同构定理、Holder 纲领	等价类和商群在 LEAN 中的实现
7月7日(周日)	抽代习题课	休息及自由讨论
7月8日(周一)	Jordan-Holder 定理、直积、有	LEAN 中的归纳法和归纳定义
	限生成阿贝尔群的分类	
7月9日(周二)	置换群、交错群、An是单群	置换群在 LEAN 中的实现
7月10日(周三)	群作用、轨道、类方程	Mathlib4 上的语义检索(高国雄)
7月11日(周四)	抽代习题课	休息及自由讨论
7月12日(周五)	自同构群、西罗定理	抽象代数习题形式化讨论
7月13日(周六)	西罗定理及其应用	抽象代数习题形式化讨论
7月14日(周日)	抽代习题课	休息及自由讨论
7月15日(周一)	交换子群、幂零群、p群	AlphaGeometry 介绍(谢宇晨)
7月16日(周二)	环、理想、商环	大语言模型简介
7月17日(周三)	环同态基本定理	大语言模型简介
7月18日(周四)	抽代习题课	休息及自由讨论
7月19日(周五)	抽象代数期中测验	期中测验题目讲解
7月20日(周六)	休息及自由讨论	
7月21日(周日)	休息及自由讨论	逻辑、范畴与形式化证明(徐一铭)
7月22日(周一)	中国剩余定理,极大理想和素	符号计算与自动定理证明(夏壁

	理想,主理想整环	灿)
7日22日(田一)	欧几里德整环和唯一析因整环	以数据为中心的机器学习(张文
7月23日(周二)		涛)
7月24日(周三)	多项式环的 UFD 性质	机器学习数学基础 (吴磊)
7月25日(周四)	抽代习题课	逻辑、范畴与形式化证明(徐一铭)
7月26日(周五)	模、Cayley-Hamilton 定理	常见的 Al4formalizing(王子彧)
7月27日(周六)	PID 上有限生成模的分类	引理分解在自动形式化中的使用
7 月 27 日(月八)		(王子彧)
7月28日(周日)	抽代习题课	逻辑、范畴与形式化证明(徐一铭)
7月29日(周一)	交换幺环上的有限代数	基于 LLM 的自然语言数学推理 (秦
7万29日(月)		子瀚)
7月30日(周二)	域扩张、代数闭包	Math Al Agent(高国雄)
7月31日(周三)	域上的有限可分代数	BB 助教(刘梓豪)
8月1日(周四)	抽代习题课	休息及自由讨论
8月2日(周五)	分裂域,Galois 扩张	待定
8月3日(周六)	Galois 群,Galois 理论	待定
8月4日(周日)	抽代期末考试	考试题讲解+返程