练习 (1): 对域 K, 利用 PID 上有限生成模的结构定理,请证明 如下的 "二次中心化子定理": 对矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(K)$, 其中 n 是正整数, 若矩阵 B 满足, 对所有和 A 交换的矩阵 C (即满足 $AC = CA$ 的矩阵), 都有 B 和 C 也可交换 (即 $BC = CB$), 则存在多项式 $f \in K[X]$, 使得 $B = f(A)$.

注记: 对 (非交换) 环 R 及其子集 S, 我们记 $C_R(S) = \left\{r \in R : rs = sr \text{对所有} s \in S \text{成立}\right\}$, 称作 S 的中心化子, 则练习 (1) 可以陈述为: 对 $R = \mathrm{M}_n(K)$, $A \in R$, 则 $C_R(C_R(A)) = K[A]$. 这解释了其名称中 "二次中心化子" 的含义.

提示: 这个问题并不是平凡的, 因此我在下一页给出了一份证明的概要. 如果你确信你无法独立完成证明的话, 你可以尝试将补完其细节作为本练习的内容.

证明的概要: 通过作用 $f(X)v=f(A)v$, 将 $V=K^n$ 看作是 $K[X]$-模, 则 $C\in\mathrm{End}_K(V)$ 与 A 交换当且仅当 $C\in D=\mathrm{End}_{K[X]}(V)$, 因此我们只需证 $\mathrm{End}_D(V)=K[A]$. 由主理想整环上有限生成模的结构定理, 有 $V=\frac{K[X]}{(m_1(X))}\oplus...\oplus\frac{K[X]}{(m_d(X))}$, 其中 $m_1(X)|...|m_d(X)$. 有 $\mathrm{End}_{K[X]}(\frac{K[X]}{(m(X))})=\frac{k[X]}{(m(X))}$. 对 $B\in\mathrm{End}_D(V)$, 由于它和 V 到 $\frac{K[X]}{(m_i(X))}$ 的投影可交换, 因此每个 $\frac{K[X]}{(m_i(X))}$ 都是 B 的不变子空间, 且 B 限制在每个 $\frac{K[X]}{(m_i(X))}$ 上都是某个多项式的左乘作用 (这是因为 $\mathrm{End}_{K[X]}(\frac{K[X]}{(m_i(X))})\cong\frac{K[X]}{(m_i(X))}$). 对 $i>j$, 由于 $m_j(X)|m_i(X)$, 因此存在典范投影 $\frac{K[X]}{(m_i(X))}\to\frac{K[X]}{(m_j(X))}$, 利用 B 和所有这样的投影的可交换性, 则 B 在每个 $\frac{K[X]}{(m_i(X))}$ 上的作用可以由同一个多项式给出, 进而 $B\in K[A]$.