

练习 (1): 对群 G , 请证明: $G \rightarrow G, g \mapsto g^2$ 是群同态当且仅当 G 是交换群.

练习 (2): 对群 G , H, K 是 G 的有限子群, 请证明: 若 $|H|, |K|$ 互素, 则 $|H \cap K| = 1$.

练习 (3): 对群 G , N 是 G 的正规子群, 请证明: 对 G 的子群 H_1, H_2 , 满足 $H_1 \supset N, H_2 \supset N$, 则 $H_1/N \cap H_2/N = H_1 \cap H_2/N$ (这里将 H_i/N 和 $H_1 \cap H_2/N$ 看作 G/N 的子群)

练习 (4): 记 $G = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$, H 是由 $(2 \bmod 12, 6 \bmod 12)$ 生成的循环子群. 请将 商群 G/H 表示为循环群的乘积.

练习 (5): 对群 G 及子群 H , 请证明: 若 $[G : H] = 2$, 则 H 是 G 的正规子群.

练习 (6): 对群 G 及子群 A, B , 请证明: 子集 AB 构成 G 的子群当且仅当 $AB = BA$.

练习 (7): 对群 G 及子群 H , 请证明: $Hx = Hy$ 当且仅当 $x^{-1}H = y^{-1}H$, 进而若 $\{x_i\}_{i \in I}$ 构成 G 对 H 的左陪集代表元系, 则 $\{x_i^{-1}\}_{i \in I}$ 构成 G 对 H 的右陪集代表元系.