**问题 (1):** 本系列问题是为了期中考试复习而设置的.
**问题 (1.1):**请你求出 二面体群 $D_{2n}$ 中每个元素的阶数.
**问题 (1.2):**请证明 关于群的可解性我们有如下事实成立:

(1) 若 $G$ 是可解群, 则 $G$ 的子群和商群都是可解的.

(2) 反之, 对群 $G$ 及正规子群 $N$, 若 $N$ 和 $G/N$ 都是可解的, 则 $G$ 也是可解的.

(3) 群 $G$ 是可解群当且仅当 $G$ 的 Jordan-Hölder 因子都是交换群.

**问题 (1.3):** 对正整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 考虑环 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,请证明: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是整环当且仅当 $n$ 是素数.

**问题 (2):** 本系列问题中, 我们考虑集合 $X$ 的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 构成的环.
**问题 (2.1):** 对于集合 $X$, 我们记 $\mathcal{P}(X)$ 是 $X$ 的所有子集构成的集合,请证明: 若在 $\mathcal{P}(X)$ 中定义加法 $E+F=(E-F)\cup(F-E)$ 以及乘法 $E\times F=E\cap F$, 则 $\mathcal{P}(X)$ 构成一个含幺环.
**提示:** 事实上, 我们可以将 $\mathcal{P}(X)$ 看作所有从 $X$ 到 $\{0,1\}$ 的映射的集合. 对于 $E\in\mathcal{P}(X)$, 我们将其映射为 $E$ 的特征函数 $\chi_E$, 这里:$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & 若 x\in E\\ 0 & 若 x\notin E\end{cases}$. 如果我们将 $\{0,1\}$ 看作 $\mathbb{F}_2$ 的话, 则从 $X$ 到 $\mathbb{F}_2$ 的映射存在自然的加法和乘法:$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$. 由 $\mathbb{F}_2$ 是域, 则这里的加法和乘法赋予了 $\mathcal{P}(X)$ 含幺环结构 (幺元是 $X$, 零元是 $\emptyset$). 因此只需验证 $\chi_E+\chi_F=\chi_{E+F}$, $\chi_E\chi_F=\chi_{E\times F}$ 即可.
**问题 (2.2):** 对于 $\mathcal{P}(X)$ 的子集 $A$,请证明:$A$ 构成 $\mathcal{P}(X)$ 的含幺子环当且仅当 $A$ 满足如下的性质:

(1) $\emptyset\in A$.

(2) 若 $E,F\in A$, 则 $E\cup F\in A$.

(3) 若 $E\in A$, 则 $X-E\in A$.

**说明:** 在测度论中, 我们称满足上述 (1), (2), (3) 的子集族为一个环. 该问题说明, 测度论中定义的环确实构成一个环.
**问题 (2.3):** 对于集合间的映射 $f:X\to Y$,请证明: $\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y), E\mapsto f(E)$ 不一定是环同态.
**问题 (2.4):** 在 (2.3) 的条件下,请证明: $\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X), F\mapsto f^{-1}(E)$ 是环同态.
**问题 (2.5):** 对环 $R$, 若 $f^2=f$ 对所有 $f\in R$ 都成立, 则称 $f$ 是一个 Boolean 环.请证明如下事实:

(1) 对集合 $X$, $\mathcal{P}(X)$ 是 Boolean 环.

(2) 若 $R$ 是 Boolean 环, 则任取 $f\in R$, 都有 $f+f=0$.

(3) 若 $R$ 是 Boolean 环, 则 $R$ 是交换的.

**补充说明:** 可以证明, 若 $R$ 是 Boolean 环, 则 $R$ 同构于某个 $\mathcal{P}(X)$ 的子代数. 如果你熟悉交换代数的话, 上述嵌入是这样构造的: 令 $X=\mathrm{Spec}(R)$, 考虑 $R\to\mathcal{P}(X), f\mapsto D(f)$.

**问题 (3):** 本系列问题中, 我们研究交换环 $R$ 上的形式幂级数环 $R[[X]]$. 在本系列问题中, 我们固定 $R$ 是一个 (含幺) 交换环.

**问题 (3.1):** 我们记 $R[[X]]$ 是全体映射 $\mathbb{Z}_{\geq 0}\to R$ 的映射, 当 $a_n=f(n)$, 则我们用符号 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ 表示 $f$. 在 $R[[X]]$ 上, 我们定义加法 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nX^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nX^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)X^n$ 和乘法 $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nX^n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nX^n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k})X^n$.<u>请证明</u>:$R[[X]]$ 构成一个含幺交换环.

**补充说明:** 事实上, 多项式环的严格定义就是通过类似 (3.1) 的方式构造的. 即对于交换环 $R$, 我们定义:

$$R[X]=\left\{f\text{是映射}\mathbb{Z}_{\geq 0}\to R:\text{只有有限多个}f(n)\text{非零}\right\},$$

此时, 当 $a_i=f(i)$, 且 $n$ 是使得 $f(n)\neq 0$ 的最大正整数, 则我们用符号 $f(X)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_iX^i$ 表示 $f$, 并记 $\deg(f)$ 为 $n$. 通过这种方式定义的多项式环满足多项式环的泛性质: 对任意交换环 $S$ 和环同态 $\phi:R\to S$, 任取 $s\in S$, 存在唯一环同态 $\widetilde{\phi}:R[X]\to S$, 满足 $\widetilde{\phi}(X)=s$ 且 $\widetilde{\phi}|_R=\phi$(即多项式环是 $R$-代数范畴中的自由对象) ——因此这种对多项式环的定义是合理的.

**问题 (3.2):**<u>请证明</u>: 多项式环 $R[X]$ 在自然的意义下构成 $R[[X]]$ 的子环.

**问题 (3.3):** 我们记 $I_k=\left\{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nX^n:\text{当}n<k\text{时}a_n=0\right\}$,<u>请证明</u>: 对所有 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, 都有 $I_k$ 是 $R[[X]]$ 的理想.

**问题 (3.4):** 对 $f(X)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nX^n\in R[[X]]$,<u>请证明</u>: $f(X)$ 在 $R[[X]]$ 中可逆当且仅当 $a_0$ 在 $R$ 中可逆.

**提示**: 一个最简单的例子是 $(1-X)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} X^n$. 当 $a_0$ 可逆, 则可以归纳地构造 $b_0,b_1,\ldots,b_n$, 使得 $f(X)(\sum\limits_{k=0}^{n} b_nX^n)=1+X^{n+1}h(X)$, 进而 $f(X)(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_nX^n)=1$.

**问题 (3.5):** 若 $K$ 是域, <u>请证明</u>: 若 $I$ 是 $K[[X]]$ 的非平凡理想, 则存在 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 使得 $I=I_k$.

**提示**: 对 $f(X)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nX^n$, 记 $N$ 是使得 $a_N\neq 0$ 的最小正整数, 则 $f(X)=X^Nf_0(X)$, 其中 $f_0(X)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+N}X^n$. 由 (3.4), 则 $f_0(X)$ 可逆.

**问题 (4):** 本系列问题中, 我们将研究 $\mathrm{M}_n(R)$ 的理想. 为了避免不必要的麻烦, 在本系列问题中, 我们规定 $R$ 是一个 (含幺) 交换环, 且 $R$ 中有足够数量的元素.

**问题 (4.1):**请证明:$\mathrm{M}_n(R)$ 对于矩阵的加法和乘法构成一个 (含幺) 环, 且在 $n \geq 2$ 时,$\mathrm{M}_n(R)$ 是非交换的.
**问题 (4.2):** 若 $I$ 是 $R$ 的理想,请证明:$\mathrm{M}_n(R) \to \mathrm{M}_n(R/I), (a_{ij}) \mapsto (a_{ij} \mod I)$ 是良定的环同态, 进而其核 $\mathrm{M}_n(I)$ 构成 $\mathrm{M}_n(R)$ 的理想.
**问题 (4.3):** 若 $J$ 是 $\mathrm{M}_n(R)$ 的 (双边) 理想,请证明:

$$I = \left\{a \in R : 存在(a_{ij}) \in J以及1 \leq i, j \leq n使得a = a_{ij}\right\}$$

构成 $R$ 的理想.
**提示**: 对 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, 记 $E_{ij}$ 是只有 $(i,j)$-元为 1, 其余元为 0 的矩阵. 则 $a_{ij}E_{ij} = E_{ii}AE_{jj}, b_{kl}E_{kl} = E_{kk}BE_{ll}$, 进而 $(a_{ij} + b_{kl})E_{ij} = a_{ij}E_{ij} + E_{ik}(b_{kl}E_{kl})E_{lj}$, 因此 $I$ 对加法封闭.
**问题 (4.4):** 在 (2.3) 的条件下,请证明: $J = \mathrm{M}_n(I)$.
**提示:** 对 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(I)$, 则存在 $A_{ij} \in J$, 使得 $A_{ij}$ 的 $(k_{ij}, l_{ij})$-元是 $a_{ij}$, 进而 $A = \sum\limits_{i,j} E_{i,k_{ij}} A_{ij} E_{l_{ij},j}$.
**问题 (4.5):** 对含幺交换环 $R$,请证明: 若 $I$ 是 $R$ 的极大的非平凡理想, 则 $R/I$ 是域.
**问题 (4.6):**请证明: 当 $n \geq 2$, 若 $J$ 是 $\mathrm{M}_n(R)$ 的极大的非平凡 (双边) 理想, 则 $\mathrm{M}_n(R)/J$ 不是除环, 即 $\mathrm{M}_n(R)/J$ 中并非所有非零元都可逆.

**问题 (5):** 本系列问题中, 我们将研究多项式环在置换群作用下的不变量.
**问题 (5.1):** 对于群 $G$ 和环 $R$, 若群 $G$ 在集合 $R$ 上有作用, 使得对任意的 $g \in G$, 都有 $r \mapsto gr$ 是 $R$ 的环自同态, 则我们称这个作用是群 $G$ 在环 $R$ 上的一个作用. 我们记:

$$R^G = \left\{r \in R : r = gr对所有g \in G成立\right\},$$

请证明: 若群 $G$ 在环 $R$ 上有作用, 则 $R^G$ 是 $R$ 的子环.
**问题 (5.2):** 对交换环 $A$, 记 $R = A[X_1, \ldots, X_n]$ 是 $R$ 上的 $n$-元多项式环.请证明: 存在唯一置换群 $S_n$ 在环 $R$ 上的作用, 满足:$\sigma(X_i) = X_{\sigma(i)}$. 我们称 $f(X) \in R^{S_n}$ 为 $R$ 中的对称多项式.
**问题 (5.3):** 我们定义:

$$\begin{aligned}
e_1(X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{1 \leq i \leq n} X_i \\
e_2(X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j \\
e_3(X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} X_i X_j X_k \\
&\cdots\cdots \\
e_n(X_1, \ldots, X_n) &= X_1 X_2 \ldots X_n
\end{aligned}$$

请证明:$e_1, e_2, \ldots, e_n \in R^{S_n}$, 我们称 $e_1, \ldots, e_n$ 为 $R$ 中的初等对称多项式..

**问题 (5.4):** 对 $f(X) \in R$, 记 $f_l(X)$ 是 $f(X)$ 所有只包含 $X_1, \ldots, X_{n-1}$ 的项构成的多项式,请证明 下列事实:

(1) 若 $f(X) \in A[X_1, \ldots, X_n]^{S_n}$, 则 $f_l(X) \in A[X_1, \ldots, X_{n-1}]^{S_{n-1}}$.

(2) 对 $f(X), g(X) \in R^{S_n}$, 当 $f(X), g(X)$ 不包含被 $X_1X_2\ldots X_n$ 整除的项, 则 $f_l(X) = g_l(X)$ 当且仅当 $f(X) = g(X)$.

**提示:** 对于 (2), 只需证明若 $f_l = 0$, 则 $f = 0$. 若 $f \neq 0$, 则 $f(X)$ 中含有非零项 $X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n}$. 由 $f(X)$ 没有被 $X_1 \ldots X_n$ 整除的项, 则 $m_i$ 至少有一个为 0, 进而存在 $\sigma \in S_n$, 使得 $\sigma(X_1^{m_1} \ldots X_n^{m_n})$ 中只含 $X_1, \ldots, X_{n-1}$, 此时它是 $f_l$ 的项, 故 $f_l \neq 0$.

**问题 (5.5)**: 利用归纳法, 请证明: $R^{S_n} = A[e_1, \ldots, e_n]$, 即若 $f(X)$ 是对称多项式, 则存在 $g(X) \in A[X_1, \ldots, X_n]$, 使得 $f(X) = g(e_1(X), \ldots, e_n(X))$.

**提示:** 这里我认为要同时对变元的个数和 $f(X)$ 的次数进行归纳. 用 $X_1 \ldots X_n$ 进行带余除法, 则 $f(X) = g(X) + X_1 \ldots X_n r(X)$, 其中 $g(X)$ 满足 (5.4) 的 (2), 而 $r(X)$ 的次数严格小于 $f(X)$ 的次数. 对前者, 考虑 $g_l$, 使用关于变元个数的归纳. 对于后者, 使用关于多项式次数的归纳.

**关于问题 (5) 的补充说明**: 记 $K(X_1, \ldots, X_n)$ 是域 $K$ 上有理函数构成的域,(5.5) 说明 $K(X_1, \ldots, X_n)^{S_n} = K(e_1, \ldots, e_n)$. 注意到 $\prod_{i=1}^{n}(T - X_i) = T^n - e_1T^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n$. 因此一般 $n$ 次方程 $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ 可以被根式解当且仅当 $X_1, \ldots, X_n$ 可以被表达为关于 $e_1, \ldots, e_n$ 的根式. 利用 Galois 理论, 这当且仅当域扩张 $K(X_1, \ldots, X_n)/K(e_1, \ldots, e_n)$ 的 Galois 群是可解的. 而 (5.5) 说明 $K(X_1, \ldots, X_n)/K(e_1, \ldots, e_n)$ 的 Galois 群恰好是 $S_n$, 进而 $n \geq 5$ 时一般 $n$ 次方程没有根式解. 事实上, 当 $A$ 是域, 则 (5.5) 可以通过 Galois 理论和一些简单的交换环论得到证明, 你可以在学期结束时回来读一读下面的证明: 记 $L = K(e_1, \ldots, e_n), M = K(X_1, \ldots, X_n)$, 则 $M$ 是 $\prod_{i=1}^{n}(T - X_i) = X^n - e_1X^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n$ 在 $L$ 上的分裂域, 进而 $M/L$ 是 Galois 扩张, 且 $\mathrm{Gal}(M/L)$ 在 $X_1, \ldots, X_n$ 上的作用给出嵌入 $\mathrm{Gal}(M/L) \to S_n$. 注意到 $S_n$ 在 $M$ 上有自然的作用, 且 $L \subset M^{S_n}$, 故 $S_n \subset \mathrm{Gal}(M/L)$, 则 $\mathrm{Gal}(M/L) = S_n$, 进而 $M^{S_n} = L$. 记 $R = K[X_1, \ldots, X_n], S = K[e_1, \ldots, e_n]$, 则 $M^{S_n} = \mathrm{Frac}(R^{S_n}), L = \mathrm{Frac}(S)$, 则 $S, R^{S_n}$ 具有相同的分式域. 注意到 $R^{S_n}/S$ 是整扩张, 而 $S$ 是 UFD, 进而是整闭, 故 $R^{S_n} = S$.

**问题 (6):** 本系列问题是为熟悉分析学的人准备的, 如果你认为自己对分析学的熟练度不足, 你可以忽略本系列问题.

**问题 (6.1):** 若 $W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集,请证明: $C_0(W)$ 对函数的逐点加法和逐点乘法构成一个交换环, 且 $C_0(W)$ 中存在幺元当且仅当 $W$ 是紧集. 这里 $C_0(W)$ 是所有满足如下条件的函数 $f : W \to \mathbb{C}$ 的集合:

(1) $f$ 是连续的, 即若 $W$ 中的序列 $w_n$ 收敛到 $w$, 则 $f(w_n)$ 收敛到 $f(w)$.

(2) 对所有 $\varepsilon > 0$, $\{w \in W : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ 是紧集合.

**问题 (6.2):** 对 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中的理想 $I$, 若对于 $I$ 中的函数列 $f_n$, 当 $f_n$ 一致收敛到 $f$, 便有 $f \in I$, 则我们称 $I$ 是 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的一个闭理想.<u>请证明</u>: 对 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $S$, 则 $I(S) = \left\{f \in C_0(\mathbb{R}^n) : f(s) = 0\text{对所有}s \in S\text{成立}\right\}$ 是 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的闭理想.

**问题 (6.3):** 对 $\mathbb{R}^n$ 的闭集 $W$,<u>请证明</u>: $C_0(\mathbb{R}^n) \to C_0(W), f \mapsto f|_W$ 诱导了环同构 $C_0(\mathbb{R}^n)/I(W) \cong C_0(W)$.

**提示:** 你可以直接使用 Tietz 扩张定理的推论: 对局部紧拓扑空间 $X$(特别地, 当 $X = \mathbb{R}^n$), 若 $Y$ 是 $X$ 的闭集, 则 $C_0(X) \to C_0(Y), f \mapsto f|_Y$ 是满射.

**问题 (6.4):** 对 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的理想 $I$,<u>请证明</u>:$V(I) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\text{对所有}f \in I\text{成立}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集.

**问题 (6.5):** 对 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $S$,<u>请证明</u>:$V(I(S)) = \overline{S}$, 这里 $\overline{S}$ 是 $S$ 的闭包.

**提示:** 利用所谓“鼓包函数”. 即对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $U$, 以及 $x \in U$, 你可以找到 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 满足 $0 \leq f \leq 1$, $f(x) = 1$, 且 $\mathrm{Supp}(f) \subset U$.

**问题 (6.6):** 对于 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的理想 $I$,<u>请证明</u>: $I(V(I))$ 是包含 $I$ 的最小的闭理想 (即 $I$ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中的闭包)

**提示:** 你可以首先证明 $I$ 包含 $X - V(I)$ 中足够多的“鼓包函数”.

**问题 (6.7):**<u>请证明</u>: $I \mapsto V(I)$ 和 $S \mapsto I(S)$ 给出了 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集与 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中闭理想的 1-1 对应. 特别地, 对 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的闭理想 $I$, 则 $I$ 是极大的非平凡闭理想当且仅当 $V(I)$ 是单点集.

**问题 (6.8):** 利用上述结果,<u>请证明</u>: 对 $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 则 $f$ 可以被 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 中的函数逼近.

**说明:** 事实上, 对一般的局部紧拓扑空间 $X$, 本系列问题的结论依旧对 $C_0(X)$ 成立. 进一步地, 对交换 $C^*$ 代数 $\mathcal{A}$, 通过 Gelfand 表示, 则局部紧拓扑空间 $X$, 使得我们有等距同构 $\mathcal{A} \cong C_0(X)$. 因此, 本命题事实上说明, 对任意 $C^*$ 代数 $\mathcal{A}$ 的理想 $I$, 都有 $\overline{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}\text{是极大理想} \\ \mathfrak{m} \supset I}} \mathfrak{m}$ ——换而言之, 本系列问题给出了 Hilbert 零点定理的交换 $C^*$ 代数版本.