问题 (1): 本系列问题中, 我们讲研究环的局部化.

问题 (1.1): 对交换环 R, 若 S 是 R 的子集, 满足 $1 \in S$, 且当 $x, y \in S$, 则 $xy \in S$, 则我们称 S 是 R 的一个乘性子集. 当 S 是 R 的乘性子集, 在 $S \times R$ 上, 我们定义关系:$(s, r) \sim (s', r')$ 当且仅当存在 $s'' \in S$, 使得 $s''(s'r - sr') = 0$. 请证明: 上述关系构成一个等价关系.

证明. 略. □

问题 (1.2): 在 (1.1) 的条件下, 我们记 $S \times R$ 在上述等价关系下全体等价类的集合为 $S^{-1}R = S \times R / \sim$. 对于 $(s, r) \in S \times R$, 我们记其所在的等价类为 $\frac{r}{s} \in S^{-1}R$. 在 $S^{-1}R$ 上, 我们定义加法 $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'}$ 和乘法 $\frac{r}{s}\frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}$. 请证明: 上述加法和乘法是良定的, 且在上述加法和乘法下, $S^{-1}R$ 构成一个含幺交换环. 进一步地,请证明: 映射 $R \to S^{-1}R, r \mapsto \frac{r}{1}$ 是环同态, 且当 S 中没有零因子, 则该映射是环的嵌入, 此时我们总通过上述映射将 R 看作是 $S^{-1}R$ 的子环.

证明. 略. □

问题 (1.3): 在 (1.1) 的条件下, 请证明: $S^{-1}R = \{0\}$ 当且仅当 $0 \in S$.

证明. $S^{-1}R = 0$ 当且仅当 $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$, 其中 $1, 0$ 分别是 R 的幺元和零元. 进而当且仅当存在 $s \in S$, 使得 $s(1 - 0) = 0$, 当且仅当 $s = 0 \in S$. □

问题 (1.4): 在 (1.1) 的条件下, 请证明 下列事实成立:

(1) 若 I 是 R 的理想, 则 $S^{-1}I = \left\{\frac{a}{s} : a \in R, s \in S\right\}$ 是 $S^{-1}R$ 的理想.

(2) 若 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想,$S^{-1}\mathfrak{p}$ 是 $S^{-1}R$ 的素理想当且仅当且 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.

(3) 若 $\mathfrak{P}$ 是 $S^{-1}R$ 的素理想, 则存在唯一 R 的素理想 $\mathfrak{p}$ 使得 $\mathfrak{P} = S^{-1}\mathfrak{p}$.(**提示**: 取 $\mathfrak{p} = \left\{r \in R : \frac{r}{1} \in \mathfrak{P}\right\}$)

(4) $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$ 给出了 R 中所有满足 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ 的素理想与 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 中所有素理想的 1-1 对应.

证明. (1) 是容易验证的.

对于 (2), 我们首先证明 $S^{-1}\mathfrak{p} \neq S^{-1}R$ 当且仅当 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. 当 $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, 取 $s \in \mathfrak{p} \cap S$, 则 $\frac{s}{s} = \frac{1}{1} \in S^{-1}\mathfrak{p}$, 故 $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}R$. 接着, 我们证明, 当 $\mathfrak{p} \cap S^{-1}\mathfrak{p}$, 则 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 是素理想. 对于 $\frac{x}{s}\frac{x'}{s'} \in S^{-1}\mathfrak{p}$, 则存在 $s'' \in S$, 使得 $s''xx' \in \mathfrak{p}$. 由 $s'' \notin \mathfrak{p}$, 故 $xx' \in \mathfrak{p}$, 进而 x 或 $x' \in \mathfrak{p}$, 进而 $\frac{x}{s}$ 或 $\frac{x'}{s'} \in S^{-1}\mathfrak{p}$.

对于 (3), 我们记 $\mathfrak{p} = \left\{a \in R : \frac{a}{1} \in \mathfrak{P}\right\}$. 此时容易验证 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想, 且 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. 若存在素理想 $\mathfrak{p}'$ 使得 $S^{-1}\mathfrak{p}' = \mathfrak{P}$, 则对 $a \in \mathfrak{p}$, 则 $\frac{a}{1} \in \mathfrak{P}$, 进而存在 $s \in S$ 使得 $sa \in \mathfrak{p}'$. 由 (2) 我们知道 $s \notin \mathfrak{p}'$, 故 $a \in \mathfrak{p}'$, 进而 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, 另一个方向的包含是同理的, 故 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, 进而唯一.

(4) 由 (2) 和 (3) 直接得到. □

问题 (1.5): 对整环 R, 记 $S = R - \{0\}$, 请证明: S 是 R 的乘性子集, 且 $S^{-1}R$ 是域. 在这种情况下, 我们总是记这里的 $S^{-1}R = \mathrm{Frac}(R)$, 称作 R 的分式域. 特别地, 请证明: $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$.

补充说明: 对整环 R 及乘性子集, 当 $0 \notin S$, 则同理问题 (1.2), 我们总是可以将 $S^{-1}R$ 看作是 $\mathrm{Frac}(R)$ 的子环 (特别地, 我们将 R 看作是 $\mathrm{Frac}(R)$ 的子环, 正如我们将 $\mathbb{Z}$ 看作是 $\mathbb{Q}$ 的子环)——在下文中我们将不会再区分 $S^{-1}R$ 与其嵌入 $\mathrm{Frac}(R)$ 后的像.

证明. 略. □

问题 (1.6): 对交换环 R, 及 R 的素理想 $\mathfrak{p}$, 记 $S = R - \mathfrak{p}$, 请证明: S 是 R 的乘性子集, 且 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 是 $S^{-1}R$ 的唯一极大理想.

证明. 对乘性子集的验证是容易的, 而 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 是 $S^{-1}R$ 的唯一极大理想由 (1.4) 得到. □

补充说明: 我们称具有唯一极大理想的环为局部环, 因而问题 (1.6) 说明了环的局部化这一说法中"局部化"的含义. 特别地, 我们记 (1.6) 中的 $S^{-1}R$ 为 $R_{\mathfrak{p}}$. 对 R 的理想, 我们用 $I_{\mathfrak{p}}$ 或 $IR_{\mathfrak{p}}$ 表示 $S^{-1}I$. 对于交换环而论, 它们的许多性质都是局部性质——具体来说, 对于性质 P, 若 P 对 R 成立当且仅当对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$, 都有 P 对 $R_{\mathfrak{p}}$ 成立, 则称 P 是一个局部性质. 因此, 为了研究局部性质, 我们只需研究环的局部化即可. 以下是局部性质的一个例子:

问题 (1.7): 对交换环 R, 我们记 $\mathrm{nil}(R) = \{r \in R : 存在 n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} 使得 r^n = 0\}$, 称 $\mathrm{nil}(R)$ 中的元素为 R 中的幂零元. 若 $\mathrm{nil}(R) = 0$, 则我们称 R 是既约的. 请证明 下列事实:

(1) $\mathrm{nil}(R)$ 是 R 的理想.(我们称之为 R 的幂零理想)

(2) 对 R 的素理想 $\mathfrak{p}$, 有 $\mathrm{nil}(R_{\mathfrak{p}}) = (\mathrm{nil}(R))_{\mathfrak{p}}$.

(3) 对 $x \in R$, 若对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$, 都有 $\frac{x}{1}$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 中等于 0, 则 $x = 0$.(**提示:** 记 $\mathrm{Ann}(x) = \{r \in R : rx = 0\}$, 则 $\mathrm{Ann}(x)$ 是 R 的理想, 且 $x = 0$ 当且仅当 $1 \in \mathrm{Ann}(x)$, 若 $x \neq 0$, 请考虑包含 $\mathrm{Ann}(x)$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$)

(4) 对 R 的理想 I, 则 $I = 0$ 当且仅当 $I_{\mathfrak{p}} = 0$ 对 R 的所有素理想成立, 当且仅当 $I_{\mathfrak{m}} = 0$ 对 R 的所有极大理想成立.

(5) R 是既约的当且仅当对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$, 都有 $R_{\mathfrak{p}}$ 是既约的, 当且仅当对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$, 都有 $R_{\mathfrak{m}}$ 是既约的.

证明. 对于 (1), 若 $a^n = 0, b^m = 0$, 则 $(a+b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k}$, 其中要么 $k \geq n$, 要么 $n + m - k \geq m$, 则 $(a+b)^{n+m} = 0$. 对于理想的其它性质的验证是平凡的.

对于 (2), 注意到 $\frac{a}{s} \in \mathrm{nil}(R_{\mathfrak{p}})$ 当且仅当存在 $s' \in R - \mathfrak{p}$, 使得 $s'a^n = 0$. 此时 $(s'a)^n = 0$, 故 $s'a \in \mathrm{nil}(R)$, 故 $\frac{a}{s} = \frac{s'a}{s's} \in \mathrm{nil}(R)_{\mathfrak{p}}$. 反之, 显然 $\mathrm{nil}(R)_{\mathfrak{p}} \subset \mathrm{nil}(R_{\mathfrak{p}})$.

对于 (3), 如提示所言, 我们考虑 $\mathrm{Ann}(x)$, 容易验证 $\mathrm{Ann}(x)$ 是 R 的理想. 当 $x \neq 0$, 则存在极大理想 $\mathfrak{m} \supset \mathrm{Ann}(x)$. 此时, 若 $\frac{x}{1}$ 在 $R_\mathfrak{m}$ 中等于 0, 则存在 $s \in R - \mathfrak{m}$, 使得 $sx = 0$, 进而 $s \in \mathrm{Ann}(x)$ 与 $\mathfrak{m} \supset \mathrm{Ann}(x)$ 矛盾.

(4) 由 (3) 立刻得到, 而 (5) 由 (4) 和 (2) 得到. □

问题 (1.8): 对交换环 R 及有限生成的理想 $I \subset J$, 我们记 $\mathrm{Ann}(J/I) = \{r \in R : rJ \subset I\}$, 请证明 下列事实成立:

(1) $\mathrm{Ann}(J/I)$ 是 R 的理想.

(2) 对素理想 $\mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}(J/I)$ 当且仅当 $I_\mathfrak{p} \neq J_\mathfrak{p}$.(**提示:** 若 $I_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p}$, 你可以先证明, 任取 $b \in J$, 存在 $s \in R - \mathfrak{p}$, 使得 $sb \in I$)

(3) $I = J$ 当且仅当 $I_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p}$ 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 成立, 当且仅当 $I_\mathfrak{m} = J_\mathfrak{m}$ 对所有极大理想成立.

(4) 进一步地, (3) 对于不满足包含关系的有限生成理想 $I \not\subset J$ 也成立. 即对任意的有限生成理想 I, J, 依旧有 $I = J$ 当且仅当 $I_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p}$ 对所有素理想 $\mathfrak{p}$ 成立, 当且仅当 $I_\mathfrak{m} = J_\mathfrak{m}$ 对所有极大理想成立.

证明. (1) 是容易验证的. 对于 (2), 当 $I_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p}$, 则任取 $b \in J$, 有 $\frac{b}{1} \in I_\mathfrak{p}$, 进而存在 $s \in R - \mathfrak{p}$, 使得 $sb \in I$. 记 $b_1, \ldots, b_r$ 是 J 的理想生成元, 且 $s_i b_i \in I$, 记 $s = s_1 s_2 \ldots s_r$, 则 $sJ \subset I$, 进而 $s \in \mathrm{Ann}(J/I)$ 且 $s \notin \mathfrak{p}$. 因此, 若 $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}(J/I)$, 则 $I_\mathfrak{p} \neq J_\mathfrak{p}$. 反之, 若 $I_\mathfrak{p} \neq J_\mathfrak{p}$, 则存在 $b \in J$, 使得任取 $s \in S - \mathfrak{p}$, 都有 $sb \notin I$, 进而任取 $s \in S - \mathfrak{p}$, 都有 $s \notin \mathrm{Ann}(J/I)$, 故 $\mathrm{Ann}(J/I) \subset \mathfrak{p}$.

对于 (3), 注意到 $I = J$ 当且仅当 $1 \in \mathrm{Ann}(J/I)$, 故而由 (2) 得到. 对于 (4), 注意到 $I \subset I + J$, 则由 (3), 有 $I = I + J$ 当且仅当 $I_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p} + J_\mathfrak{p}$ 对所有素理想成立, 进而由 (3) 得到. □

问题 (2): 在本系列问题中, 我们将研究域的赋值.

问题 (2.1): 对域 K 及函数 $v : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, 若 v 满足条件:

(1) $v(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

(2) $v(xy) = v(x)v(y)$.(特别地, $v(1) = 1$)

(3) $v(x + y) \leq v(x) + v(y)$.

则我们称 v 构成 K 上的一个赋值. 特别地, 若 $v(x+y) \leq \max(v(x), v(y))$ 对所有 $x, y \in K$ 成立, 则我们称 v 是一个非阿基米德赋值. 否则, 我们称 v 是一个阿基米德赋值. 请证明 下列事实成立:

(1) 在 $\mathbb{Q}$ 上, 我们定义 $v_\infty(x) = |x|$, 这里 $|x|$ 是 x 的绝对值, 则 v_∞ 是 $\mathbb{Q}$ 的阿基米德赋值.

(2) 对素数 p 及 $r \in \mathbb{Q}^\times$, 存在唯一 $n_p(r) \in \mathbb{Z}$, 使得 $r = p^{n_p(r)}\frac{s}{t}$, 其中 s, t 与 p 互素. 此时, $v_p(x) = p^{-n_p(x)}$, $v_p(0) = 0$ 构成 $\mathbb{Q}$ 上的非阿基米德赋值. 我们称这个赋值为 $\mathbb{Q}$ 上的 p-进赋值.

证明. (1) 是显然的, 我们只验证 (2). 显然 v_p 满足 (1). 对于 (2), 记 $r = p^{n_p(r)}\frac{s}{t}$, $r' = p^{n_p(r')}\frac{s'}{t'}$, 则 $rr' = p^{n_p(r)+n_p(r')}\frac{ss'}{tt'}$, 注意到 ss', tt' 与 p 互素, 故 $n_p(rr') = n_p(r) + n_p(r')$, 故 $v_p(rr') = v_p(r)v_p(r')$. 对于 (3), 只需证明 $v_p(x+y) \leq \max(v_p(x), v_p(y))$. 注意到 $r + r' = \frac{p^{n_p(r)}st' + p^{n_p(r')}s't}{tt'}$, 其中 tt' 与 p 互素, 而至少有 $p^{\min(n_p(r), n_p(r'))}$ 整除 $p^{n_p(r)}st' + p^{n_p(r')}s't$, 故 $n_p(r+r') \geq \min(n_p(r), n_p(r'))$, 进而 $v_p(r+r') \leq \max(v_p(r), v_p(r'))$. □

问题 (2.2): 对域 K, 若 v 是域 K 上的非阿基米德赋值, 我们定义 $\mathcal{O}_v = \{x \in K : v(x) \leq 1\}$, $\mathfrak{m}_v = \{x \in K : v(x) < 1\}$.请证明 下列事实成立:

(1) $\mathcal{O}_v$ 是 K 的子环, 而 $\mathfrak{m}_v$ 是 $\mathcal{O}_v$ 的唯一极大理想.

(2) 任取 $x \in K$, 要么 $x \in \mathcal{O}_v$, 要么 $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$. 特别地, $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_v)$.

(3) 若 v_p 是 $\mathbb{Q}$ 上的 p 进赋值, 则 v_p 的赋值环是 $\mathbb{Z}$ 对素理想 $p\mathbb{Z}$ 的局部化.

证明. 对于 (1), 显然 $\mathcal{O}_v$ 是子环. 若 I 是 $\mathcal{O}_v$ 的非平凡理想, 若 $I \not\subset \mathfrak{m}_v$, 则存在 $x \in I$, 使得 $v(x) = 1$. 然而此时 $v(x^{-1}) = v(x)^{-1} = 1$, 故 $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$, 进而 $1 = x^{-1}x \in I$, 与 I 非平凡矛盾, 故 $\mathfrak{m}_v$ 是 $\mathcal{O}_v$ 的唯一极大理想.(2) 是显然的.

对于 (3), 注意到当 s, t 互素, 则 $\frac{s}{t} \in \mathcal{O}_{v_p}$ 当且仅当 t 不被 p 整除, 故而得证. □

问题 (2.3): 对域 K, 及 K 上的赋值 v_1, v_2, 若存在 $c \in \mathbb{R}_{>0}$, 使得 $v_1(x) = v_2(x)^c$ 对所有 $x \in K$ 成立, 则我们称 v_1 和 v_2 等价. 对 K 上的赋值 v_1, v_2, 请证明 以下条件等价:

(1) v_1, v_2 等价.

(2) 对 $x \in K$, 则 $v_1(x) \leq 1$ 当且仅当 $v_2(x) \leq 1$.

提示: 为证明 (2) 可以推出 (1), 只需证明 $f(x) = \frac{\log v_1(x)}{\log v_2(x)}$ 是常数即可. 若 $f(x) < f(x')$, 取有理数 $r = \frac{m}{n}$, 使得 $\frac{\log v_1(x)}{\log v_1(x')} < \frac{m}{n} < \frac{\log v_2(x)}{\log v_2(x')}$, 考虑 $x^n x'^{-m}$ 的赋值.

证明. 显然 (1) 可以推出 (2). 反之, 我们依照提示的步骤, 此时 $v_1(x^n) < v_1(x'^m)$ 而 $v_2(x^n) > v_2(x'^m)$, 故 $v_1(x^n x'^{-m}) < 1$ 而 $v_2(x^n x'^{-m}) > 1$, 与 (2) 矛盾. □

问题 (2.4): 对域 K 及 K 上的非阿基米德赋值 v_1, v_2, 请证明 下列条件等价:

(1) v_1, v_2 等价.

(2) $\mathcal{O}_{v_1} \subset \mathcal{O}_{v_2}$, 且 $\mathfrak{m}_{v_1} \subset \mathfrak{m}_{v_2}$.

提示: 你可以尝试利用 (2.2) 的 (2) 证明, 若 $\mathcal{O}_{v_1} \subset \mathcal{O}_{v_2}$, 则 $\mathcal{O}_{v_1} = \mathcal{O}_{v_2}$.

证明. 显然 (1) 可以推出 (2). 反之, 当 (2) 成立, 若 $\mathcal{O}_{v_1} \neq \mathcal{O}_{v_2}$. 取 $x \in \mathcal{O}_{v_2} - \mathcal{O}_{v_1}$. 由 (2.2) 的 (2), 则 $x^{-1} \in \mathcal{O}_{v_1}$. 进一步地, 由 $x \notin \mathcal{O}_{v_1}$, 则 $x^{-1} \in \mathfrak{m}_{v_1} \subset \mathfrak{m}_{v_2}$. 然而这意味 $v_2(x) \leq 1$ 且 $v_2(x^{-1}) < 1$, 这两者矛盾, 故而得证. □

问题 (2.5): 对 $\mathbb{Q}$ 上的非阿基米德赋值 v, 若 v 是非平凡的, 即存在 $x \in \mathbb{Q}^\times$, 使得 $v(x) \neq 1$, 请证明 下列事实成立:

(1) $\mathfrak{m}_v \cap \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的非零素理想.

(2) 若 $\mathfrak{m}_v \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, 则 $\mathbb{Z}$ 对素理想 $p\mathbb{Z}$ 的局部化 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 被包含于 $\mathcal{O}_v$, 且 $p\mathbb{Z}_{(p)} \subset \mathfrak{m}_v$.

(3) 若 $\mathfrak{m}_v \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, 则 v 等价于 $\mathbb{Q}$ 的 p-进赋值.

证明. 对于 (1), 由 v 非平凡, 且 $\mathbb{Q} = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z})$, 则存在 $x \in \mathbb{Z}$, 使得 $v(x) \neq 1$. 注意到 $v(1) \leq 1$. 由非阿基米德性, 则 $v(1+1) \leq \max(v(1), v(1)) = 1$, 进而 $v(n) \leq 1$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立, 故而存在 $x \in \mathbb{Z}$ 使得 $v(x) < 1$, 即 $\mathfrak{m}_v \cap \mathbb{Z}$ 非零. 而容易验证 $\mathfrak{m}_v \cap \mathbb{Z}$ 是素理想. 而 (2) 是容易验证的. 而 (3) 由 (2) 和 (2.4) 得到. □

补充说明: 可以证明, 若 v 是 $\mathbb{Q}$ 上的阿基米德赋值, 则 v 等价于 v_∞. 但是其证明不够"代数", 因此此处并不留作习题. 感兴趣的同学可以搜索"Ostrowski 定理"以了解相关事实.

问题 (2.6): 对域 K 上的非阿基米德赋值 v, 若 $v(K^\times)$ 是 $\mathbb{R}_{>0}$ 的循环子群, 则我们称 v 是 K 上的一个离散赋值. 对 $x \in K$, 若 $0 < v(x) < 1$ 且 $v(x)$ 是 $v(K^\times)$ 的生成元, 则我们称 x 是一个素元. 请证明:

(1) $\mathbb{Q}$ 上的 p-进赋值 v_p 是离散赋值, 而 p 是 v_p 的素元.

(2) 若 v 是域 K 上的离散赋值, 则 $\mathcal{O}_v$ 是 (相差单位的意义下) 只有一个不可约元的唯一分解整环, 其中 $\mathcal{O}_v$ 的不可约元恰是 v 的素元.

(3) 若 v 是域 K 上的离散赋值, 若 I 是 $\mathcal{O}_v$ 的非零理想, 则 $I = \pi_v^n \mathcal{O}_v$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, π_v 是 v 的素元.

(4) 若 R 是只有一个不可约元的唯一分解整环, 则在 $K = \mathrm{Frac}(R)$ 上存在离散赋值 v, 使得 $R = \mathcal{O}_v$.(我们称这样的环为离散赋值环)

(5) 对域 K 上的形式幂级数环 K, 则 $K[[X]]$ 是离散赋值环.

证明. (1) 是显然的. 对于 (2), 注意到 $x \in \mathcal{O}_v$ 可逆当且仅当 $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$, 当且仅当 $v(x) = 1$, 因此 $\mathcal{O}_v$ 中的单位恰好是 $\mathcal{O}_v - \mathfrak{m}_v$(记为 U_v). 此时, 由素元的定义, 若对素元 $\mathfrak{p}_v$ 有 $\mathfrak{p}_v = xy$, 则 $v(\mathfrak{p}_v) = v(x)v(y)$, 其中 $v(x), v(y) \leq 1$. 然而, 由于 $v(\mathfrak{p}_v)$ 是 $v(K^\times)$ 的生成元, 则只能有 $v(x) = 1$ 或 $v(y) = 1$, 进而 x 或 y 是单位, 进而 π_v 是不可约元. 另一方面, 任取 $x \in \mathcal{O}_v$,

则存在 $n \geq 0$, 使得 $v(x) = v(\pi_v)^n$, 进而 $u = x\pi_v^{-n}$ 是 $\mathcal{O}_v$ 中单位, 故 $x = u\pi_v^n$, 因此 x 是不可约元当且仅当 $n = 1$, 即 $v(x) = v(\pi_v)$, 即 x 是 v 的素元, 且此时 x 与 π_v 只相差一个单位, 进而 π_v 是 $\mathcal{O}_v$ 种唯一的不可约元, 而上述论述也说明了 $\mathcal{O}_v$ 是唯一分解整环.

对于 (3), 由上述对 (2) 的证明可知, 任取 $x \in I$, 存在 $n \geq 0$, 使得 $x \in \pi_v^n\mathcal{O}_v$. 记 n 是使得形如 $u\pi_v^n$ 的元素属于 I 的最小正整数, 其中 u 是单位. 此时, 任取 $y \in I$, 记 $y = u'\pi_v^m$, 则 $m \geq n$, 进而 $y \in \pi_v^n\mathcal{O}_v$, 故 $I \subset \pi_v^n\mathcal{O}_v$. 而另一方面, $\pi_v^n = u^{-1}(u\pi_v^n) \in I$, 故 $I = \pi_v^n\mathcal{O}_v$.

对于 (4), 我们记 R 的不可约元为 π, 则任取 $r = \frac{s}{t} \in K$, 由唯一分解性, 存在唯一 $n_\pi(r) \in \mathbb{Z}$, 使得 $r = \pi^{n_\pi(r)}\frac{s'}{t'}$, 其中 s', t' 都是 R 的单位. 任取 $0 < c < 1$, 考虑 $v_\pi(r) = c^{n_\pi(r)}$, 则同理 (2.1) 的 (2), 我们知道 v_π 是离散赋值. 不难验证此时 $R = \mathcal{O}_{v_\pi}$.

对于 (5), 由第 5 次习题课的问题 (3.4), 不难看出 X 是 $K[[X]]$ 的唯一不可约元, 而 $K[[X]]$ 是唯一分解整环. □

问题 (2.7): 对整环 R, 若对 R 的所有非零素理想 $\mathfrak{p}$, 都有 $R_\mathfrak{p}$ 是离散赋值环, 且 R 的理想都是有限生成的, 则我们称 R 是一个 Dedekind 整环. 请证明 下列事实成立:

(1) $\mathbb{Z}$ 是 Dedekind 整环.

(2) 若 R 是 Dedekind 整环, 则 R 中的非零素理想都是极大理想.

(3) 对交换环 R, 若 R 的所有理想都是有限生成的, 则对任意性质 P, 存在 R 的理想 I, 使得 I 在满足 P 的理想中极大.(**提示:** 否则, 可以找到一列满足性质 P 的 $I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \cdots$, 此时 $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 是有限生成理想, 故 n 足够大时一定有 $I_{n+1} = I_n$)

(4) 对交换环 R 的理想 I, J, 记 IJ 是由 ab, 其中 $a \in I, b \in J$ 生成的理想, 则对 R 的乘性子集, 有 $S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I)(S^{-1}J)$.

(5) 对 Dedekind 整环 R 的非零理想 I, 则存在素理想 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$(这里的 $\mathfrak{p}_i$ 可重复), 使得 $I \supset \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n$, 这里理想的乘积是 (4) 中定义的乘积.(**提示:** 利用 (3), 若存在不满足 (5) 的理想, 则可以找到一个极大的这样的理想 I, 此时 I 不是素理想, 因此存在 $xy \in I$, 使得 $x, y \notin I$, 此时 $I+(x)$ 和 $I+(y)$ 都满足 (5), 而 $(I+(x))(I+(y)) \subset I$)

(6) 对 Dedekind 整环 R 的非零理想 I, 若 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想, 取 $\pi_\mathfrak{p}$ 是 $R_\mathfrak{p}$ 对应的离散赋值的素元, 记 $I_\mathfrak{p} = \pi_\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}(I)}R_\mathfrak{p}$, 则只有有限多个 $\mathfrak{p}$ 使得 $n_\mathfrak{p}(I) > 0$.

(7) 对 Dedekind 整环 R 的非零理想 I, 则 I 可以分解为非零素理想的乘积:$I = \prod\limits_{\mathfrak{p}\text{是非零素理想}} \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}(I)}$.(**提示:** 利用问题 (1.8))

证明. (1) 由 (2.2) 的 (3) 以及 (2.6) 得到. 对于 (2), 注意到离散赋值环中除了 $\pi\mathcal{O}$ 没有其它非零素理想 (因为 $\pi \notin \pi^n\mathcal{O}$). 因此, 对非零素理想 $\mathfrak{p}$, 若素理想 $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, 由 (1.4),$\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ 是 $R_\mathfrak{p}$ 的素理想, 则要么 $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$, 要么 $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} = 0$, 因而 $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ 或 $\mathfrak{q} = 0$.

对于 (3) 和 (5), 提示中的说明已经足够详尽. 而 (4) 直接验证即可. 对于 (6), 注意到 $n_{\mathfrak{p}}(I) > 0$ 意味着 $I \subset \mathfrak{p}$. 由 (5), 则存在素理想 $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}$. 若 $\mathfrak{p}$ 不是 $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$ 其中的一个, 取 $x_i \in \mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}$, 则 $\prod_{i=1}^{n} x_i \in I \subset \mathfrak{p}$, 进而某个 $x_i \in \mathfrak{p}$, 矛盾, 因而只有 $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$ 可以使得 $n_{\mathfrak{p}_i}(I) > 0$.

对于 (7), 则由 (4), (6) 和问题 (1.8) 得到. $\square$

补充说明: 事实上, 所有理想都是有限生成的条件可以由关于所有极大理想的局部化都是离散赋值环推出——这是因为可逆的分式理想都是有限生成的, 而分式理想可逆当且仅当它作为模是可逆模, 当且仅当它是局部秩 1 自由模. 而离散赋值环的分式理想都是可逆的, 且局部环上可逆模都是 1 维自由模, 故得证.