问题 (1): 本系列问题中, 我们将考虑 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 在上半平面上的作用, 以及一些相关的问题.

问题 (1.1): 我们记 $\mathcal{H}=\{x+iy\in\mathbb{C}:x\in\mathbb{R},y>0\}$, 称作是复平面的上半平面. 对 $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, 和 $z\in\mathcal{H}$, 我们定义 $gz=\frac{az+b}{cz+d}$. 记 $G=\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, 请证明:$G\times\mathcal{H}\to\mathcal{H},(g,z)\mapsto gz$ 给出了 G 在 $\mathcal{H}$ 上的一个群作用.

问题 (1.2):请证明: G 在 $\mathcal{H}$ 上的作用是可迁的. 即固定 $z_0\in\mathcal{H}$, 任取 $z\in\mathcal{H}$, 存在 $g\in G$ 使得 $gz=z_0$. 进一步地, 请证明: $\mathrm{Stab}_G(i)=\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, 其中:

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\-\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}:\theta\in\mathbb{R}\right\}.$$

问题 (1.3): 记 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, 请证明: 对函数 $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$, 以及 $k\in\mathbb{Z}_{\geq0}$, 下列条件等价:

(1) 任取 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma$, 都有 $f(\gamma z)=(cz+d)^kf(z)$ 对所有 $z\in\mathcal{H}$ 成立.

(2) 任取 $z\in\mathcal{H}$, 都有 $f(z+1)=f(z)$ 且 $f(-\frac{1}{z})=z^kf(z)$.

补充说明: 对全纯函数 $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$, 若 f 满足上述的 (1), 则称 f 是一个权为 k 的模形式. 因此, 本题实际上是说明, 模形式可以被 $f(z+1)=f(z)$ 和 $f(-\frac{1}{z})=z^kf(z)$ 这两个相对简单的条件所刻画.

问题 (1.4): 我们记:$A=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}:a\in\mathbb{R}_{>0}\right\},N=\mathrm{U}_2(\mathbb{R}),K=\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, 请证明: 映射 $A\times N\times K\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),(a,n,k)\mapsto ank$ 是双射. 我们称这个分解为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的 Iwasawa 分解.

问题 (2): 本系列问题是为不熟悉线性代数的人准备的, 在本系列问题中我们将研究 $\mathrm{M}_n(K)$ 在线性空间 $V=K^n$ 上的作用.

问题 (2.1): 对 $V=K^n$, 我们记 $e_1=(1,0,\ldots,0),e_2=(0,1,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,0,\ldots,1)$, 因而 V 中任意元素都可以唯一写成 $v=\sum\limits_{i=1}^{n}k_ie_i$ 的形式. 对于 $A\in\mathrm{M}_n(K)$, $A=(a_{ij})$, 我们定义 $\pi(A)(\sum\limits_{i=1}^{n}k_ie_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}e_j)$,请证明 如下事实成立:

(1) π 给出了 $\mathrm{M}_n(K)$ 在 V 上的一个群作用.

(2) 对 $A\in\mathrm{M}_n(K)$,$\pi(A)$ 在 V 上的作用是线性的. 即任取 $v_1,v_2\in V$ 以及 $k_1,k_2\in K$, 都有 $\pi(A)(k_1v_1+k_2v_2)=k_1\pi(A)v_1+k_2\pi(A)v_2$.

(3) $\pi(AB)v=\pi(A)(\pi(B)v)$ 对所有 $A,B\in\mathrm{M}_n(K),v\in V$ 成立.

(4) $\pi|_{\mathrm{GL}_n(K)}$ 给出了 $\mathrm{GL}_n(K)$ 在 V 上的一个群作用.

问题 (2.2): 对映射 $f: V \to V$, 若 $f(k_1v_2 + k_2v_2) = k_1f(v_1) + k_2f(v_2)$ 对所有 $v_1, v_2 \in V, k_1, k_2 \in K$ 成立, 则称 f 是一个线性映射,请证明 如下事实成立:

(1) 若 $f: V \to V$ 是线性映射, 则存在唯一 $A \in \mathrm{M}_n(K)$, 使得 $f = \pi(A)$.

(2) 若 $f: V \to V$ 是可逆的线性映射, 则存在唯一 $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, 使得 $f = \pi(A)$, 且此时 $f^{-1} = \pi(A^{-1})$.

问题 (3): 本系列问题中, 作为有限生成阿贝尔群结构定理的一个例子, 我们将研究 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 的结构.

问题 (3.1):请证明: 存在同构 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

问题 (3.2):请证明: 当 m, n 互素, 则存在同构 $(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

提示: 利用初等数论中的中国剩余定理.

问题 (3.3):请证明: 当 $n = 1$, 则 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ 平凡. 当 $n = 2$, 则 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 当 $n > 2$, 请通过如下的步骤, 证明 $5 \mod 2^n$ 在 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ 中的阶恰为 2^{n-2}:

(1) 请证明: 对任意的奇数 x, $x^{2^{n-2}} \equiv 1 \mod 2^n$.

(2) 请证明: 2^{n+2} 恰好整除 $5^{2^n} - 1$.

(3) 请证明: $5 \mod 2^n$ 在 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ 中的阶恰为 2^{n-2}.

问题 (3.4): 请通过以下的步骤证明, 有 $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$:

(1) 请证明: $|(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times| = 2^{n-1}$.

(2) 请证明: 不存在 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $5^m \equiv -1 \mod 2^n$.

(3) 请证明: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times, (x \mod 2, y \mod 2^{n-2}) \mapsto (-1)^x 5^y \mod 2^n$ 给出了群的同构.

问题 (3.5): 请将$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 分解为若干循环群的直积.

提示: 在本问题中, 你可以直接使用如下事实: 若 p 是奇素数, 则对 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 模 p^n 的原根存在, 即 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ 是循环群.

问题 (4): 本系列问题中, 我们将研究有限阿贝尔群的对偶群.

问题 (4.1): 对有限阿贝尔群 G, 我们记 $\widehat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, \mathbb{S}^1)$, 其中 $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 请证明: 在 $\widehat{G}$ 上, 对 $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, 由 $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ 定义的乘法使得 $\widehat{G}$ 成为阿贝尔群.

问题 (4.2): 对有限阿贝尔群 G, H, 请证明: 存在同构 $\widehat{G} \times \widehat{H} \cong \widehat{G \times H}$.

问题 (4.3): 请证明: 存在同构 $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

问题 (4.4): 利用有限阿贝尔群的结构定理, 请证明: 若 G 是有限阿贝尔群, 则 $G \cong \widehat{G}$.

问题 (4.5): 对有限阿贝尔群 G, 若 H 是 G 的子群, 我们定义:

$$H^{\perp} = \left\{ \chi \in \widehat{G} : \chi|_H = 1 \right\},$$

请证明 如下事实成立:

(1) $\widehat{G}/H^{\perp} \to \widehat{H}, \chi \mapsto \chi|_H$ 是群同构.

(2) $\widehat{G/H} \to H^{\perp}, \chi \mapsto \chi \circ \pi$ 是群同构, 其中 π 是自然投影 $\pi : G \to G/H$.

问题 (4.6): 对有限阿贝尔群 G, 请证明: 映射 $G \to \widehat{\widehat{G}}, g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$ 给出了群同构, 且这个同构是自然的, 即若 $f : G \to G'$ 是阿贝尔群的同态, 则有如下交换图成立:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \widehat{\widehat{G}} \arrow[d, "\widehat{\widehat{f}}"] \\ G' \arrow[r] & \widehat{\widehat{G'}} \end{tikzcd}$$

其中 $\widehat{\widehat{f}}(\theta)(\chi) = \theta(\chi \circ f)$.

问题 (4.7): 对有限阿贝尔群 G, $\chi \in \widehat{G}$, 请证明:

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \chi = 1 \\ 0 & \chi \neq 1 \end{cases}$$

问题 (4.8): 对有限阿贝尔群 G, 以及函数 $f : G \to \mathbb{C}$, 我们定义 f 的 Fourier 变换 $\mathcal{F}f : \widehat{G} \to \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi(g)}.$$

请证明: 在 (4.6) 的自然同构的意义下, 有如下 Fourier 反演公式成立:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}f(x^{-1}) = f(x).$$

问题 (4.9): 对有限阿贝尔群 G, G 的子群 H, 以及函数 $f : G \to \mathbb{C}$, 请证明: 有如下 Possion 求和公式成立:

$$\frac{1}{\sqrt{|H|}} \sum_{h \in H} f(gh) = \frac{1}{\sqrt{|H^{\perp}|}} \sum_{\chi \in H^{\perp}} \mathcal{F}f(\chi)\chi(g).$$

问题 (5): 本系列问题中, 我们将研究 $\mathrm{SL}_2(K)$ 的结构. 为避免不必要的麻烦, 我们设 K 是有无穷多元素的域.

问题 (5.1): 请证明: $\mathrm{SL}_2(K)$ 可以被形如:$n(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $n'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ 的元素生成.

提示: 本问题改编自 2023 年丘赛代数试题, 下面的矩阵恒等式是我在丘赛之后手搓出来的, 具体构造思路我现在已经想不起来了, 各位同学有需要的话可以参考:

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{a-1}{at} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{a-1}{a^2t} \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ at & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{t} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ t & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{t} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

问题 (5.2): 请证明 如下的事实成立:

(1) 任取 $t \in K$, 存在 $x, y \in K$, 使得 $n(t) = xyx^{-1}y^{-1}$.

(2) 任取 $t \in K$, 存在 $x, y \in K$, 使得 $n`(t) = xyx^{-1}y^{-1}$.

提示: 考虑 $n(t), n'(t)$ 和对角矩阵的交换化子 (称 $xyx^{-1}y^{-1}$ 是 x, y 的交换化子).
问题 (5.3): 对群 G, 我们记 $[G, G]$ 是由所有形如 $gg'g^{-1}g'^{-1}$ 的元素生成的子群. 请证明: $[\mathrm{GL}_2(K), \mathrm{GL}_2(K)] = \mathrm{SL}_2(K)$, 且 $[\mathrm{SL}_2(K), \mathrm{SL}_2(K)] = \mathrm{SL}_2(K)$.
问题 (5.4): 请证明: 若 $\chi : \mathrm{GL}_2(K) \to K^\times$ 是同态, 则存在同态 $\psi : K^\times \to K^\times$, 使得 $\chi = \psi \circ \det$.
问题 (5.5): 请证明: $H = \{\pm I_2\}$ 是 $\mathrm{SL}_2(K)$ 的正规子群, 因此 $\mathrm{SL}_2(K)$ 不是单群.
问题 (5.6): 如果你熟悉线性代数的话, 请证明:(5, 1) 至 (5.4) 可以推广至 $\mathrm{SL}_n(K)$.
提示: 记 E_{ij} 是只有 (i, j)-元为 1, 其余项全为 0 的矩阵, 考虑 $n_{ij}(t) = I_n + tE_{ij} (i \neq j)$, 请证明 $\mathrm{SL}_n(K)$ 可以被形如 $n_{ij}(t)$ 的元生成, 这是 (5.1) 的推广.