练习 (1): 对域 K 及 $f(X) \in K[X]$,请证明: 对 $k \in K$, 则一次多项式 $X - k$ 整除 $f(X)$ 当且仅当 $f(k) = 0$.

练习 (2): 对域 K 及 $f(X,Y) \in K[X,Y]$,请证明: 二次多项式 $Y - X^2$ 整除 $f(X,Y)$ 当且仅当 $f(X, X^2) = 0$.(**提示**: 用 $Y - X^2$ 对 $f(X)$ 进行带余除法)

练习 (3): 对域 K 及 $f(X,Y) \in K[X,Y]$, 请证明: $f(X,Y)$ 被三次多项式 $Y^2 - X^3$ 整除当且仅当 $f(t^2, t^3) = 0$.(**提示**: 将 $f(X,Y)$ 分解为 $f(X,Y) = Yf_1(X, Y^2) + f_2(X, Y^2)$, 则 $f(t^2, t^3) = 0$ 当且仅当 $f_1(t^2, t^6) = 0$ 且 $f_2(t^2, t^6) = 0$.)

练习 (4): 对域 K, 请证明: $Y^2 - X^3$ 是 $K[X,Y]$ 中的不可约多项式, 且 $K[X,Y]/(Y^2 - X^3) \cong K[t^2, t^3] \subset K[t]$, 这里 $K[t]$ 也是 K 上的多项式环.

练习 (5): 对域 K, 若 $\mathrm{Char}(K) \neq 3$, 请证明: $X^3 + Y^3 + Z^3 \in K[X,Y,Z]$ 是不可约多项式.(**提示:** 记 $R = K[Y,Z]$, 将 $X^3 + Y^3 + Z^3$ 视作 R 上的多项式, 只需证明不存在 $f(Y,Z) \in R$, 满足 $f(Y,Z)^3 + Y^3 + Z^3 = 0$.)

练习 (6): 在复数域 $\mathbb{C}$ 上,请将 三次多项式 $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$ 分解为不可约多项式的乘积.(**提示:** 注意到 $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix}$, 因此利用行列式的性质, 即将第二行和第三行加到第一行上, 可以分解出一次因式 $X + Y + Z$, 同理 $X + \omega Y + \omega^2 Z$ 和 $X + \omega^2 Y + \omega Z$ 也是其因式, 这里 $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ 是 3 次单位根.)

练习 (7): 记 $K = \mathbb{F}_2$ 是二元有限域,请求出 $K[X]$ 中所有次数不超过 4 的不可约多项式.