问题 (1): 本系列问题中, 我们研究环的整扩张.

问题 (1.1): 对 $R \subset S$, 其中 S 是交换环, R 是 S 的子环. 对 $s_1, \ldots, s_n \in S$, 我们记:

$$R[s_1, \ldots, s_n] = \{f(s_1, \ldots, s_n) : f(X_1, \ldots, X_n) \in R[X_1, \ldots, X_n]\},$$

我们称 $R[s_1, \ldots, s_n]$ 是 $s_1, \ldots, s_n$ 生成的 R-代数. 请证明: $R[s_1, \ldots, s_n]$ 是 S 的子环.

问题 (1.2): 对 $R \subset S$, 其中 S 是交换环, R 是 S 的子环. 对 $s \in S$, 若存在首一多项式 $f(X) \in R[X]$, 使得 $f(s) = 0$, 则我们称 s 是 R 上的整元. 请证明 下列条件等价:

(1) s 是 R 上的整元.

(2) $R[s]$ 是有限生成 R-模.

(3) 存在 S 的有限生成 R-子模 M, 使得 $sM \subset M$.

提示: 对于 (3) 推 (1) 的过程, 考虑使用 Caley-Hamilton 定理得到所需的首一多项式.

问题 (1.3): 对 $R \subset S$, 其中 S 是交换环, R 是 S 的子环. 请证明: S 中所有 R 上的整元构成 S 的子环, 我们称该子环为 R 在 S 中的整闭包. 特别地, 若 R 在 S 中的整闭包就是 S, 则我们称 S/R 是环的整扩张.

问题 (1.4): 请证明: 若 S/R 和 S'/S 是环的整扩张, 则 S'/R 是环的整扩张.

问题 (1.5): 对整环 R, 记 $K = \mathrm{Frac}(R)$, 若 R 在 K 中的整闭包就是 R 自身, 则称 R 是整闭的. 请证明 下列条件等价:

(1) R 是整闭的.

(2) 对 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$, 都有 $R_{\mathfrak{p}}$ 是整闭的.

(3) 对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$, 都有 $R_{\mathfrak{m}}$ 是整闭的.

提示: 对于 (3) 推出 (1), 考虑理想 $I = \left\{r \in R : r\frac{p}{q} \in R\right\}$, 此时 $\frac{p}{q} \in R$ 当且仅当 $1 \in I$.

问题 (1.6):请证明: 若 R 是唯一分解整环, 则 R 是整闭的. 特别地, 由 (1.5), 则 Dedekind 整环是整闭的.

问题 (2): 本系列问题中, 我们证明 Noether 正规化引理.

问题 (2.1): 对 $R \subset S$, 其中 S 是交换环,R 是 S 的子环. 对 $s_1, \ldots, s_n \in S$, 若自然映射 $R[X_1, \ldots, X_n] \to R[s_1, \ldots, s_n], f(X_1, \ldots, X_n) \mapsto f(s_1, \ldots, s_n)$ 是同构, 则我们称 $s_1, \ldots, s_n$ 在 R 上代数无关.请证明 下列条件等价:

(1) $s_1, \ldots, s_n$ 在 R 上代数无关.

(2) 对所有 $1 \leq k \leq n$, s_k 在 $R[s_1, \ldots, s_{k-1}]$ 上代数无关.

问题 (2.2): 对 $R \subset S$, 其中 S 是交换环,$R = K[X_1, \ldots, X_r]$ 是 S 的子环, K 是域. 对 $s \in S$, 请证明: 存在在 K 上代数无关的 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t \in R[s]$, 使得 $R[s]$ 是 $K[Y_1, \ldots, Y_t]$ 的整扩张.

提示: 当 s 在 R 上代数无关, 令 $Y_1 = X_1, \ldots, Y_r = X_r, Y_{r+1} = s$ 即可. 否则, 存在 $f(X) \in R[X] = K[X_1, \ldots, X_r, X]$, 使得 $f(s) = 0$. 请尝试对 $f(X) = f(X_1, \ldots, X_r, X)$ 进行换元, 将 $f(X)$ 变换为 (关于 X 的) 首一多项式.

问题 (2.3): 对交换环 R, 若域 K 是 R 的子环, 且存在有限多个 $r_1, \ldots, r_n \in R$, 使得 $R = K[r_1, \ldots, r_n]$,请证明: 存在 $x_1, \ldots, x_r \in R$, 使得 $x_1, \ldots, x_r$ 在 K 上代数无关, 且 R 是 $K[x_1, \ldots, x_r]$ 的整扩张.

问题 (3): 本系列问题中, 我们证明 Hilbert 零点定理.

问题 (3.1): 对域 K, 若 R 是 K 的子环, 且 K/R 是整扩张, 请证明: R 是域.

问题 (3.2): 对交换环 R, 若 R/K 是整扩张, 其中 K 是域, 请证明: R 是域.

问题 (3.3): 对交换环 R,若 K 是 R 的子环,且存在 $r_1, \ldots, r_n \in R$,使得 $R = K[r_1, \ldots, r_n]$, 则我们称 R 是一个有限生成 K-代数.请证明: 对域 K 及域 L, 若 $K \subset L$, 且 L 是有限生成 K-代数, 则 L/K 是整扩张.

提示: 利用问题 (2.3)(Noether 正规化引理), 将 L 化为 $K[X_1, \ldots, X_r]$ 的整扩张.

问题 (3.4): 对 $K \subset R \subset S$, 其中 K 是域, R, S 是交换环, 若 S 是有限生成 K-代数, 请证明: 若 $\mathfrak{m}$ 是 S 的极大理想, 则 $\mathfrak{m} \cap R$ 是 R 的极大理想.

问题 (3.5): 对多项式环 $R = K[X_1, \ldots, X_n]$, 当 K 是代数闭域, 请证明: 若 $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想, 则存在 $(k_1, \ldots, k_n) \in K^n$, 使得 $\mathfrak{m} = (X_1 - k_1, \ldots, X_n - k_n)$.

问题 (3.6): 当 K 是代数闭域, 对多项式 $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ 的理想 I, 我们记 $V(I) = \big\{(k_1, \ldots, k_n) \in K^n : f(k_1, \ldots, k_n)\text{对所有}f \in I\text{成立}\big\}$. 另一方面, 对 $S \subset K^n$, 我们记 $I(S) = \big\{f \in R : f(k_1, \ldots, k_n) = 0\text{对所有}(k_1, \ldots, k_n) \in S\text{成立}\big\}$.请证明: 对 R 的理想 I, 则:

$$I(V(I)) = \sqrt{I} = \big\{f \in R : \text{存在}n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\text{使得}f^n \in I\big\}.$$

提示: 若 $f \notin \sqrt{I}$, 考虑乘性子集 $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$, 则 $S^{-1}I$ 是 $S^{-1}R$ 的非平凡理想. 此时 $S^{-1}R$ 也是有限生成 K 代数, 利用 (3.4) 将 $S^{-1}R$ 的极大理想拉回为 R 的极大理想.

问题 (4): 本系列问题中, 我们证明 Hilbert 基定理.

问题 (4.1): 对交换环 R, 若 R 的理想都是有限生成的, 则我们称 R 是 Noetherian 的. 请证明 下列条件等价:

(1) R 是 Noetherian.

(2) 对 R 中的理想族 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$, 则存在 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 使得任取 $n \geq N$, 都有 $I_N = I_n$.

问题 (4.2): 对交换环 R 上的多项式环 $R[X]$, 若 I 是 $R[X]$ 的理想, 对 $d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 我们记 $I_d=\left\{r\in R: \text{存在}f\in I\text{使得}rX^d\text{是}f\text{的最高次项}\right\}$. 请证明: I_d 是 R 的理想, 且 $I_0\subset I_1\subset I_2\subset\cdots$

问题 (4.3): 对交换环 R 上的多项式环 $R[X]$. 请证明: 若 R 是 Noetherian 的, 则 $R[X]$ 也是 Noetherian 的.

问题 (4.4): 对 $R\subset S$, 若 S 是交换环, R 是子环, S 是有限生成 R-代数, 请证明: 若 R 是 Noetherian 的, 则 S 也是 Noetherian 的.

问题 (5): 本系列问题中, 我们研究交换环的维数.

问题 (5.1): 对交换环 R, 若 R 的素理想 $\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_l$ 满足 $\mathfrak{p}_0\subsetneqq\mathfrak{p}_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathfrak{p}_l$, 则我们称其为 R 的一个长度为 l 的素理想升链. 若存在一条长度最大的素理想升链, 则我们称 R 是有限维的, 并记 $\dim(R)=l$, 其中 l 是长度最大的素理想升链的长度 (若并不存在长度最大的素理想升链, 则我们记 $\dim(R)=\infty$).请证明: 当 K 是域, 则 $\dim(K[X_1,\ldots,X_n])\geq n$.

补充说明: 在问题 (3.6) 的意义下, 对代数闭域 K, 我们可以在 K^n 上定义 Zariski 拓扑. 对 $X=K^n$, $\mathcal{O}_X=K[X_1,\ldots,X_n]$, 我们令形如 $V(I)$ 的集合为 X 中的闭集, 其中 I 是 $\mathcal{O}_X$ 的理想, 则我们可以在 X 上可以唯一确定一个拓扑, 称作其 Zariski 拓扑. 对于 Zariski 拓扑下的闭集 $Y=V(I)$, 记 $\mathcal{O}_Y=\mathcal{O}_X/I(Y)$, 则 Y 上的子空间拓扑可以被 $\mathcal{O}_Y$ 的理想描述: 即 $S\subset Y$ 是 Y 的闭集当且仅当存在理想 $J\subset\mathcal{O}_Y$ 使得 $S=V(J)$. 对闭集 Y, 若对其任意闭子集 $F_1,F_2\subset Y$, 当 $Y=F_1\cup F_2$, 便有 $Y=F_1$ 或 $Y=F_2$, 则我们称 Y 是不可约的. 不难验证 Y 不可约当且仅当 $\mathcal{O}_Y$ 是整环, 即当且仅当 $I(Y)$ 是 $\mathcal{O}_X$ 的素理想. 因此 $\dim(\mathcal{O}_Y)$ 对应于被包含于 Y 的不可约闭集降链的长度, 这便是交换环维度背后的几何直观. 譬如说, 当 Y 是一条曲线, 则其不可约闭集的降链为 (不可约曲线) $\supsetneqq$ (点), 因此曲线的维度是 1. 而当 Y 是曲面, 则其不可约闭集的降链为 (不可约曲面) $\supsetneqq$ (不可约曲线) $\supsetneqq$ (点), 故曲面的维度是 2. 特别地, 下面的问题 (5.5) 说明 $\dim(K^n)=n$, 即 "n 维空间" 的维数确实是 n.

问题 (5.2): 对交换环 S, 若 R 是 S 的子环, 且 S/R 是整扩张. 则对 S 的素理想 $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2$, 满足 $\mathfrak{P}_1\subset\mathfrak{P}_2$, 请证明: 若 $\mathfrak{P}_1\cap R=\mathfrak{P}_2\cap R$, 则 $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}_2$.

问题 (5.3): 对交换环 S, 若 R 是 S 的子环, 且 S/R 是整扩张. 则对 R 的素理想 $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2$,请证明: 存在 S 的素理想 $\mathfrak{P}_1$, 使得 $\mathfrak{P}_1\cap R=\mathfrak{p}_1$. 进一步地, 请证明: 若 S 的素理想 $\mathfrak{P}_1$ 满足 $\mathfrak{P}_1\cap R=\mathfrak{p}_1$, 则存在 S 的素理想 $\mathfrak{P}_2\supset\mathfrak{P}_1$, 使得 $\mathfrak{P}_2\cap R=\mathfrak{p}_2$.

问题 (5.4): 对交换环 S, 若 R 是 S 的子环, 且 S/R 是整扩张.请证明: $\dim(S)=\dim(R)$.

问题 (5.5): 当 K 是域, 请证明: $\dim(K[X_1,\ldots,X_n])=n$.

提示: 同理于 Noether 正规化引理的证明, 若 I 是 $K[X_1,\ldots,X_n]$ 的非平凡理想, 则商环 $K[X_1,\ldots,X_n]/I$ 是 $K[Y_1,\ldots,Y_r]$ 的整扩张, 其中 $r<n$, 且 $Y_1,\ldots,Y_r$ 代数无关, 进而利用归纳法证明.

问题 (5.6): 当 K 是域, 请证明: 若交换环 R 是有限生成 K-代数, 则 $\dim(R)<\infty$.