Using Freefem to follow branches of solutions of nonlinear elliptic problems and decide about symmetry regions.

Maria J. Esteban

CEREMADE

CNRS & Université Paris-Dauphine

EN COLLABORATION AVEC

J. DOLBEAULT

http://www.ceremade.dauphine.fr/∼esteban/

Soit $d \geq 3$. Pour tout $p \in [2, p(\theta,d) := \frac{2d}{d-2\theta}]$, il existe une constante positive $\mathsf{C}(\theta,p,a)$ telle que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^p}{|x|^{b\,p}}\,dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq \mathsf{C}(\theta,p,a)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2\,a}}\,dx\right)^{\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^2}{|x|^{2\,(a+1)}}\,dx\right)^{1-\theta}$$

Dans le cas radial, avec $\Lambda = (a-a_c)^2$, la meilleure constante radiale est $\mathsf{C}^*_{\mathrm{CKN}}(\theta,p,a)$ and (see [Del Pino, Dolbeault, Filippas, Tertikas]):

$$\mathsf{C}_{\mathrm{CKN}}(\theta,p,a) \geq \mathsf{C}^*_{\mathrm{CKN}}(\theta,p,a) = \mathsf{C}^*_{\mathrm{CKN}}(\theta,p)\,\Lambda^{\frac{p-2}{2p}-\theta}$$

$$\mathsf{C}^*_{\mathrm{CKN}}(\theta,p) = \left[\frac{2\,\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\right]^{2\,\frac{p-1}{p}}\left[\frac{(p-2)^2}{2+(2\,\theta-1)\,p}\right]^{\frac{p-2}{2\,p}}\left[\frac{2+(2\,\theta-1)\,p}{2\,p\,\theta}\right]^{\theta}\left[\frac{4}{p+2}\right]^{\frac{6-p}{2\,p}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2}{p-2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{2}{p-2}\right)}\right]^{\frac{p-2}{p}}$$

Transformation d'Emden-Fowler et le cylindre $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^{d-1}$

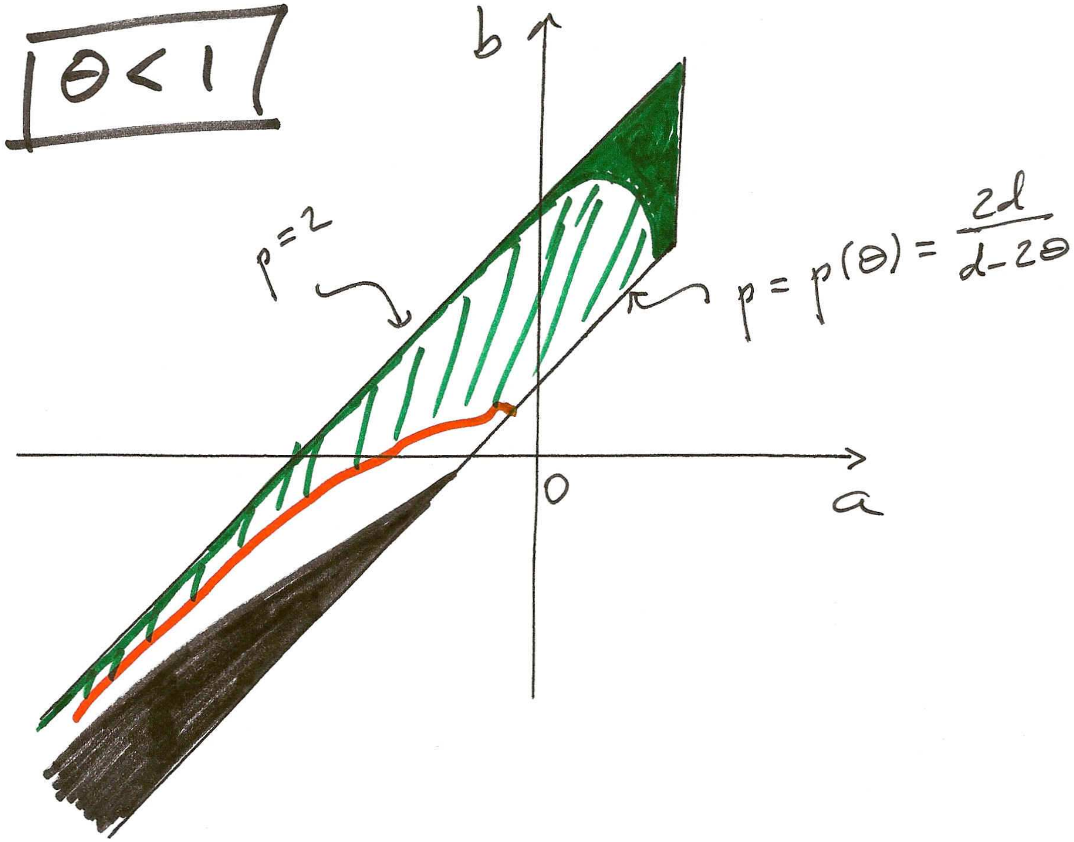
$$t = \log|x| \;, \quad \theta = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1} \;, \quad v(t,\theta) = |x|^{-a}\, u(x) \;, \quad \Lambda = \frac{1}{4}\,(d-2-2a)^2$$

• Les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg re-écrites dans le cylindre deviennent des inégalités d'interpolation du type Gagliardo-Nirenberg

$$\|w\|^2_{L^p(\mathcal{C})} \le C_{\Lambda,p,\theta} \; \left(\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})} + \Lambda\, \|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})} \right)^{\theta} \|v\|^{2\,(1-\theta)}_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})}$$

$$\frac{1}{C_{\Lambda,p,\theta}} = \inf \; \frac{\left(\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})} + \Lambda\, \|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})} \right)^{\theta} \|v\|^{2\,(1-\theta)}_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})}}{\|v\|^{2/p}_{L^p(\mathcal{C})}}$$

Symétrie et rupture de symétrie pour $\theta \in (0, 1)$

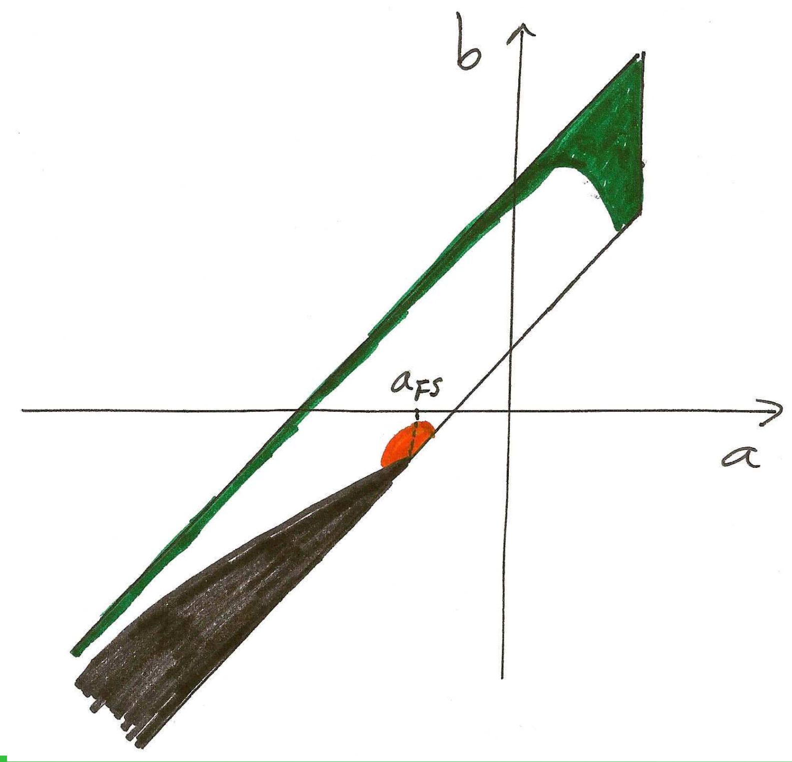


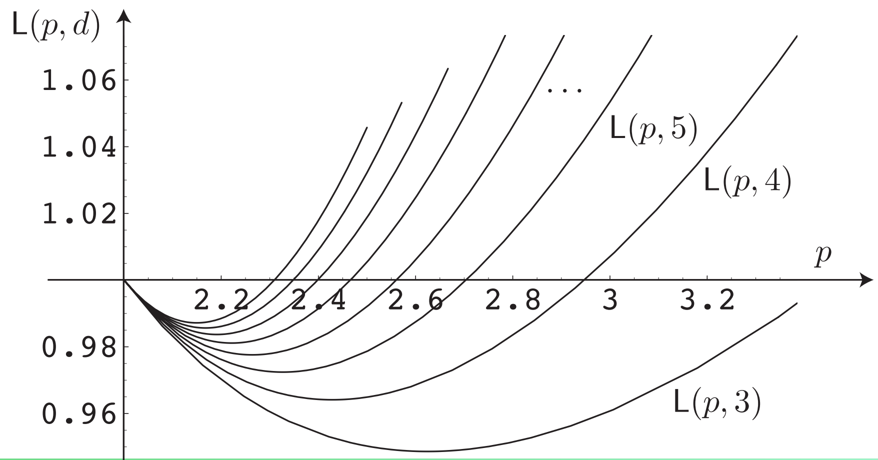
Soit $\mathrm{g}(x) := (2\,\pi)^{-d/4}\,\exp(-|x|^2/4)$. Choisissons $\Lambda = \Lambda_{FS}(p(\theta,d),d)$

Il y a rupture de symétrie si

$$\mathsf{L}(p,d) := \frac{\mathcal{E}_{GN}[g]}{\frac{1}{\mathsf{C}^*_{\mathrm{CKN}}(\vartheta(p,d),p,\Lambda)}} < 1$$

Nous avons le résultat suivant :





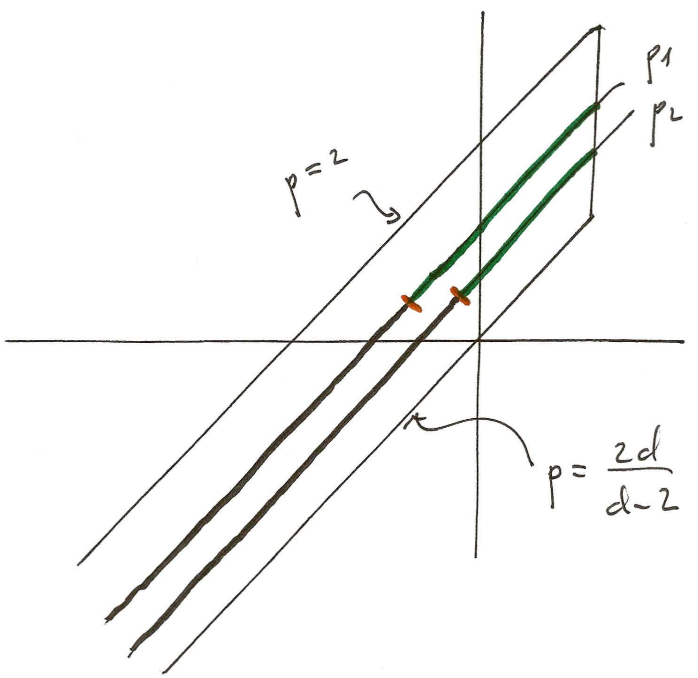
Branches pour les équations d'Euler-Lagrange

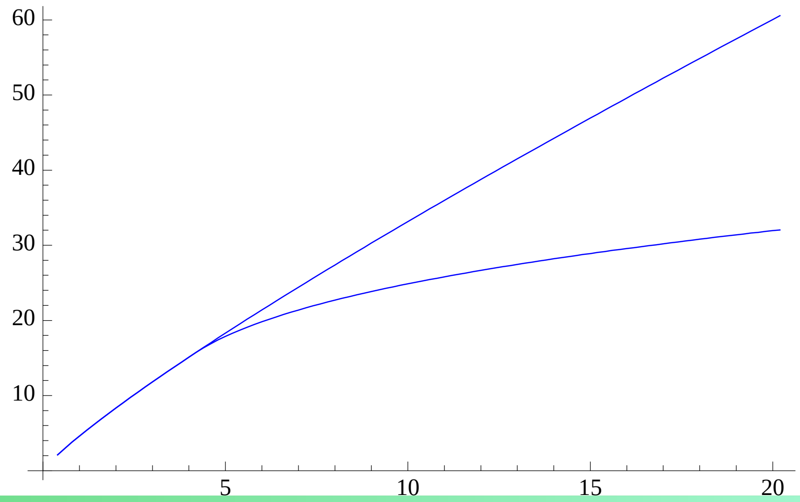
$$-\Delta v + \left(\frac{1-\theta}{\theta}\, t[v] + \Lambda \right) v = \kappa\, v^{p-2}\, v\ .$$

avec $t[v] := \dfrac{\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})}}{\|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})}}$.

$$-\Delta v + \mu\, v = \kappa\, v^{p-2}\, v\ .$$

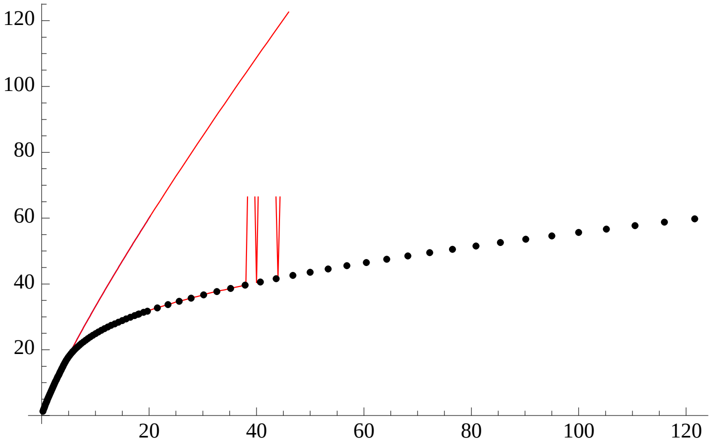
avec $\mu = \frac{1-\theta}{\theta}\, t[v] + \Lambda$.

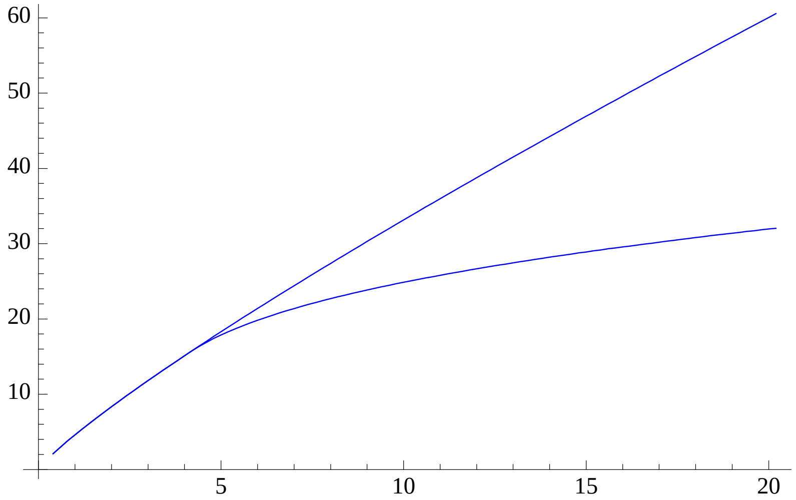




Calculs pour $\theta = 1$ - I

$$-\Delta v + \mu\, v = \kappa\, v^{p-2}\, v \qquad \text{ou} \qquad -\,\Delta v + \mu\, v = \tilde{\kappa}\, \frac{v^{p-2}}{\|v\|_{L^p(\mathcal{C})}^{(p-2)/p}}\, v\,.$$





ETAPE 1 : descente par gradient conjugué $\quad u^* \longrightarrow u\,.$

ETAPE 2 : avancement sur la branche $\quad \tilde{\kappa} \to \kappa' \quad -\,\Delta v + \mu'\, v = \kappa'\, \frac{v^{p-2}}{\|v\|_{L^p(\mathcal{C})}^{(p-2)/p}}\, v\,.$

ETAPE 3 : resolution à κ' fixé $\quad -\,\Delta v_{k+1} + \mu_{k+1}\, v_{k+1} = \kappa'\, \frac{v_k^{p-2}}{\|v_k\|_{L^p(\mathcal{C})}^{(p-2)/p}}\, v_{k+1}\,.$

Calculs pour $\theta = 1$ - II

ETAPE 3 : resolution à κ' fixé $$-\Delta v_{k+1} + \mu_{k+1}\, v_{k+1} = \kappa' \, \frac{v_k^{p-2}}{\|v_k\|_{L^p(\mathcal{C})}^{(p-2)/p}} \, v_{k+1} \, .$$

ETAPE 3' : resolution à κ' fixé $$-\Delta v_{k+1} - \kappa' \, \frac{v_k^{p-2}}{\|v_k\|_{L^p(\mathcal{C})}^{(p-2)/p}} \, v_{k+1} = -\mu_{k+1}\, v_{k+1} \, .$$

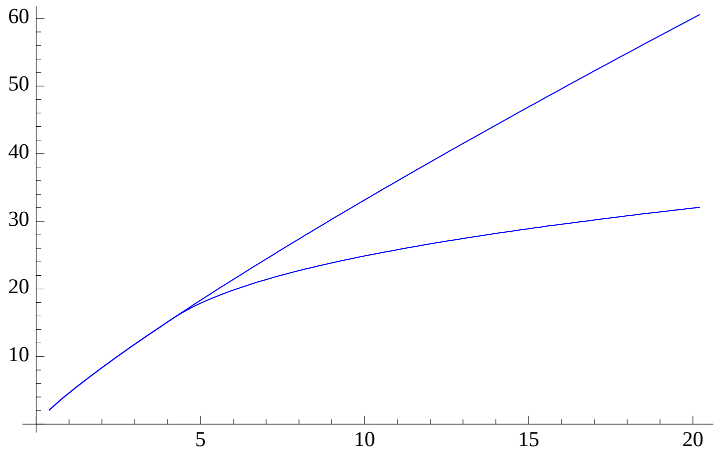
et $-\mu_{k+1}$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta - \kappa' \, \frac{v_k^{p-2}}{\|v_k\|_{L^p(\mathcal{C})}^{(p-2)/p}}$.

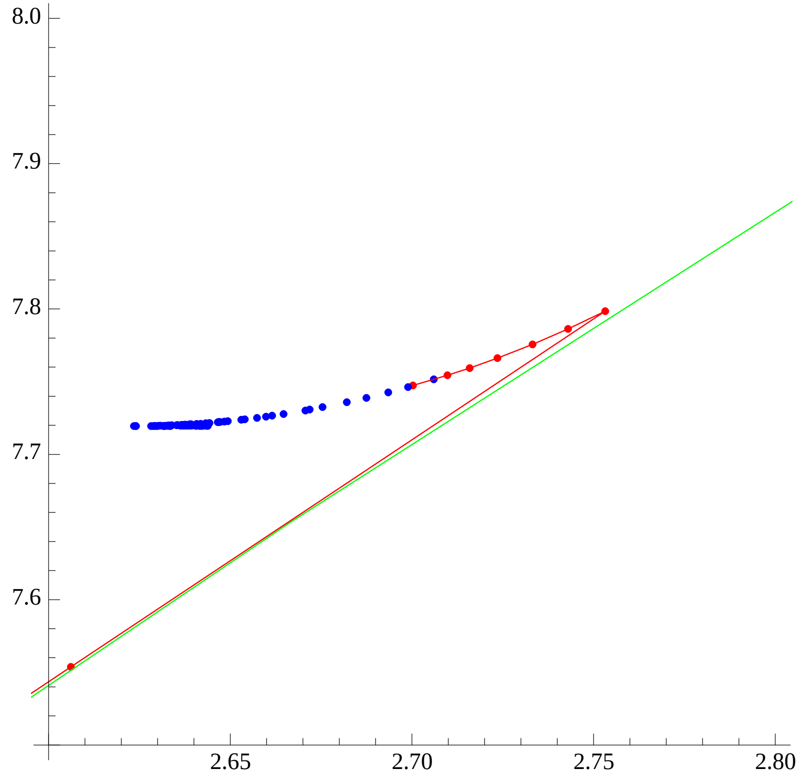
REMARQUE : nous avons montré que la suite $-\mu_{k+1}$ est décroissante et bornée inférieurement.

Donc, CONVERGENCE !

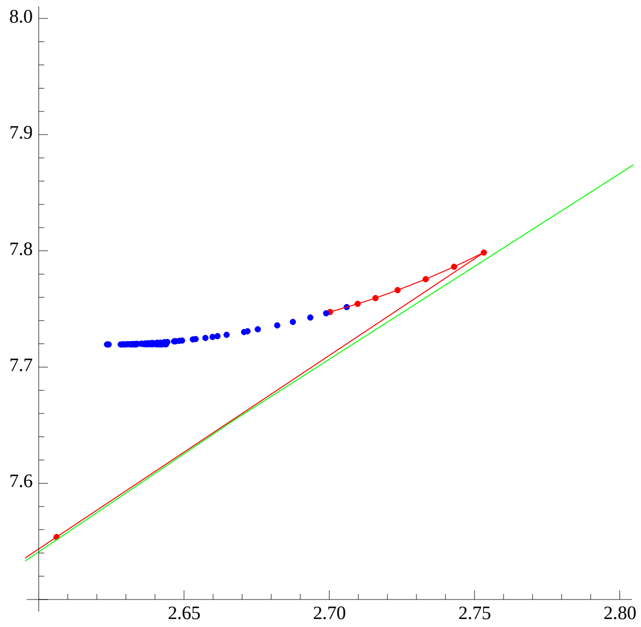
$$-\Delta v + \mu\, v = \kappa\, v^{p-2}\, v \qquad \longrightarrow \qquad -\Delta v + \left(\frac{1-\theta}{\theta}\, t[v] + \Lambda\right) v = \kappa\, v^{p-2}\, v\ .$$

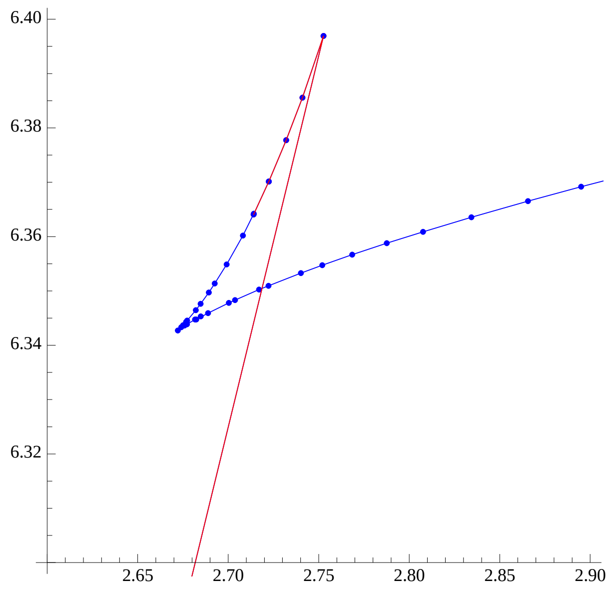
avec $\mu = \frac{1-\theta}{\theta}\, t[v] + \Lambda\ ,\quad t[v] := \frac{\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})}}{\|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{C})}}$.

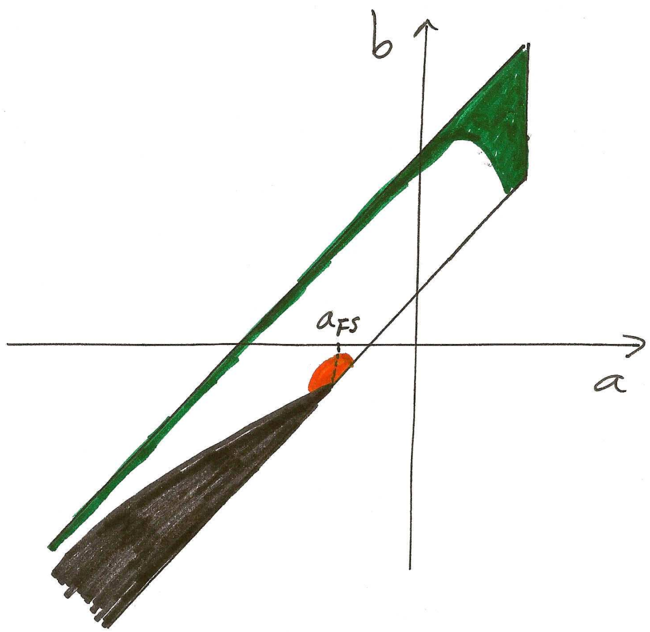




Calculs pour $\theta \neq 1$ - SUITE - avec MATHEMATICA







Un grand merci à Frédéric Hecht pour son aide et sa patience !