

Définitions
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux
Variante convexe

Une librairie pour la conception de schémas aux différences finies adaptatifs et monotones

Equation de Pucci. Courbes élastiques convexes.

Jean-Marie Mirebeau

ENS Paris-Saclay, CNRS, University Paris-Saclay

December 10, 2021

Séminaire du Laboratoire Jacques Louis Lions
Collaboration : F. Bonnans, G. Bonnet, Da Chen, L. Cohen

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikonale

Schémas causaux

Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikonale associée

Schémas causaux

Variante convexe

¶ F. Bonnans, G. Bonnet, M, Monotone and second order consistent scheme for the two dimensional Pucci equation.
Proceedings of ENUMATH 2019.

¶ G. Bonnet, M, Monotone discretization of the Monge-Ampère equation of optimal transport, Preprint 2021.

Equation de Pucci

$$\lambda_{\min}(\nabla^2 u(x)) + \alpha \lambda_{\max}(\nabla^2 u(x)) = f$$

sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ borné, avec b.c. de Dirichlet $u = g$ sur $\partial\Omega$.

- ▶ On suppose $\alpha > 0$. Sans réduire la généralité $\alpha \leq 1$.
- ▶ Envelope convexe : $\alpha \rightarrow 0$, $f = 0$. Laplacien : $\alpha = 1$.

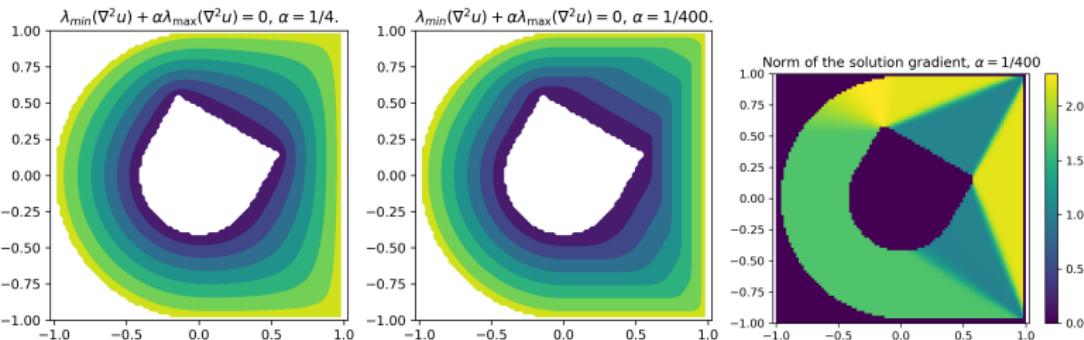


Figure: Solution de Pucci (i) $\alpha = 1/4$, (ii) $\alpha = 1/400$, (iii) $\|\nabla u\|$.

- ▶ Modèle jouet d'opérateur totalement non-linéaire.
Des techniques proches s'appliquent à Monge-Ampère.
- ▶ Objectif : schéma monotone, d'ordre deux, efficace, simple.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux
Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale associée

Schémas causaux

Variante convexe

Schéma Discret Dégénéré Elliptique (DDE)

$$Fu(x) = \tilde{F}(x, u(x), (u(x) - u(y))_{y \in X \setminus \{x\}}),$$

où X est fini et fixé, $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, et où :

- ▶ $Fu(x)$ est croissante en $u(x)$.
- ▶ $Fu(x)$ est croissante en $u(x) - u(y)$, $y \in X \setminus \{x\}$.

Le principe de comparaison discret, découlant de DDE, permet d'établir stabilité (e.g. principe du maximum) et convergence vers la solution de l'EDP (sous hypothèses).  Oberman, 2006

Exemples de schémas DDE,

$$X = \Omega \cap h\mathbb{Z}^d, h > 0.$$

- ▶ Différence finie upwind $\frac{u(x) - u(x - he)}{h}$, avec $e \in \mathbb{Z}^d$.
- ▶ Différence finie d'ordre deux, avec $e \in \mathbb{Z}^d$

$$-\Delta_h^e u(x), \quad \text{où } \Delta_h^e u(x) := \frac{u(x - he) - 2u(x) + u(x + he)}{h^2}.$$

- ▶ Combinaison linéaire positive, maximum, minimum, ou fonction croissante de plusieurs schémas DDE.

Stratégies de discréttisation DDE à deux échelles

- ▶ Schémas semi-Lagrangiens.  Barles, Souganidis, 1991

$$\partial_e^2 u(x) \approx \frac{I_h u(x - \varepsilon e) - 2u(x) + I_h u(x + \varepsilon e)}{\varepsilon^2}, \text{ avec } e \in \mathbb{S}^d,$$

où (échelle d'interpolation) $\sqrt{h} \approx \varepsilon$ (échelle des diff finies).

- ▶ Approximation des valeurs propres.  Oberman, 2006

$$\lambda_{\max}(\nabla^2 u(x)) \approx \max_{0 < \|e\| \leq R} \frac{u(x + he) - 2u(x) + u(x - he)}{h^2 \|e\|^2},$$

$$\lambda_{\min}(\nabla^2 u(x)) \approx \min_{0 < \|e\| \leq R} \frac{u(x + he) - 2u(x) + u(x - he)}{h^2 \|e\|^2},$$

où $e \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, et $R \approx h^{-\frac{1}{2}}$ paramètre de relaxation.

- + Résultats de convergence assez généraux.
- Mauvais taux de convergence, théorique et pratique.
Erreur de consistante: $\mathcal{O}(\varepsilon^2 + h^2/\varepsilon^2)$ et $\mathcal{O}(h^2 R^2 + 1/R^2)$.

Différences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux
Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale associée

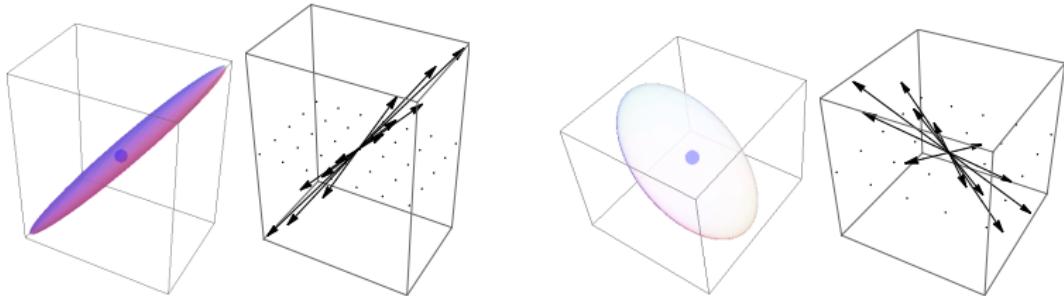
Schémas causaux

Variante convexe

Voronoi (1908) étudie les problèmes d'optimisation duaux:

- Décomposition entière de poids maximal de $D \in S_d^{++}$

$$\max_{\rho \geq 0} \sum_{e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \rho(e) \quad \text{sous contrainte} \quad \sum_{e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \rho(e) ee^\top = D$$



- Empilement périodique d'ellipsoïdes, "dense pour D "

$$\min_M \text{Tr}(DM) \quad \text{sous contrainte } \langle e, Me \rangle \geq 1, \forall e \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}.$$

Résolution liée à la classification des *formes parfaites*, correspondant aux empilements périodiques rigides de sphères.

Selling 1874 ($d=3$), Korkine, Zolotareff 1877 ($d=4,5$), Barnes 1954 ($d=6$), Stacey 1976 ($d=7$), Schurman 2007 ($d=8$).

Propriétés de la première réduction de Voronoi

- ▶ Existence d'un ensemble compact de solutions. Notons

$$D = \sum_{1 \leq i \leq I} \rho_i e_i e_i^\top, \quad \text{où } \rho_i > 0, e_i \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq i \leq I.$$

Sans restreindre la généralité, $I \leq d(d+1)/2$

- ▶ Support borné $\|e_i\| \leq C \sqrt{\|D\| \|D^{-1}\|}$, $1 \leq i \leq I$.
Th: Découle de la finitude des classes de formes parfaites.
- ▶ Unicité en dimension $d \leq 3$.
Prop: Choix canonique en dimension 4.
- ▶ Régularité Lipschitz de $D \mapsto \rho(e; D)$, si $d \leq 4$.
Affine par morceaux. Mais certaines applications EDP demandent mieux, d'où le développement de variantes.
- ▶ Offsets génératrices de \mathbb{Z}^d , si $d \leq 4$:
 $\exists 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq N, |\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_d})| = 1$.
Pas d'artefact en échiquier.

Pucci comme extremum d'opérateurs linéaires

$$\lambda_{\min}(M) + \alpha \lambda_{\max}(M) = \min_{e \in \mathbb{S}^d} \langle e, M e \rangle + \alpha \max_{e \in \mathbb{S}^d} \langle e, M e \rangle$$

où $D_\alpha(\theta) = R_\theta^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} R_\theta$, avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

- ▶ Fixer α , décomposer, avec $\rho_i^\theta \geq 0$, $e_i^\theta \in \mathbb{Z}^2$

$$D_\alpha(\theta) = \sum_{1 \leq i \leq I} \rho_i^\theta e_i^\theta (e_i^\theta)^\top$$

- ▶ Choisir un paramètre de discréétisation angulaire $K \geq 1$

$$\lambda_{\min}(\nabla^2 u(x)) + \alpha \lambda_{\max}(\nabla^2 u(x)) \approx \min_{\substack{1 \leq k \leq K \\ \theta := k\pi/K}} \sum_{1 \leq i \leq I} \rho_i^\theta \Delta_h^{e_i^\theta} u(x)$$

- + Taille stencil $\mathcal{O}(\alpha^{-\frac{1}{2}})$. Erreur de consistance $\mathcal{O}(h^2 + K^{-2})$.
- Coût d'évaluation potentiellement important si $K \gg 1$.

Travaux liés : Bonnans 2004, Krylov 2005, M 2013

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux
Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale associée

Schémas causaux

Variante convexe

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

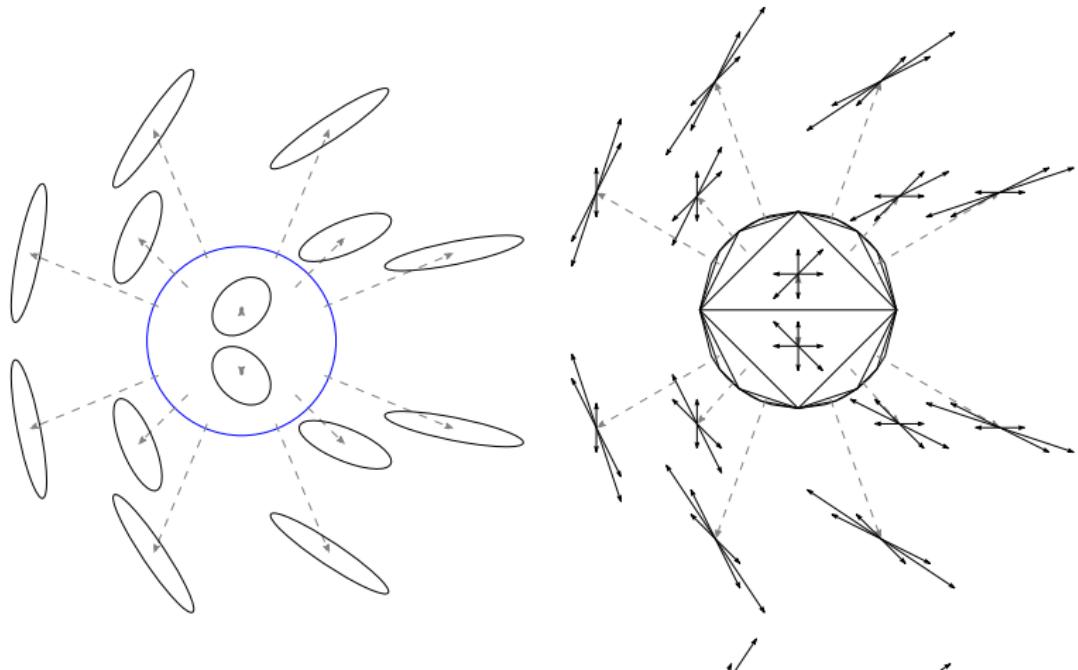
Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

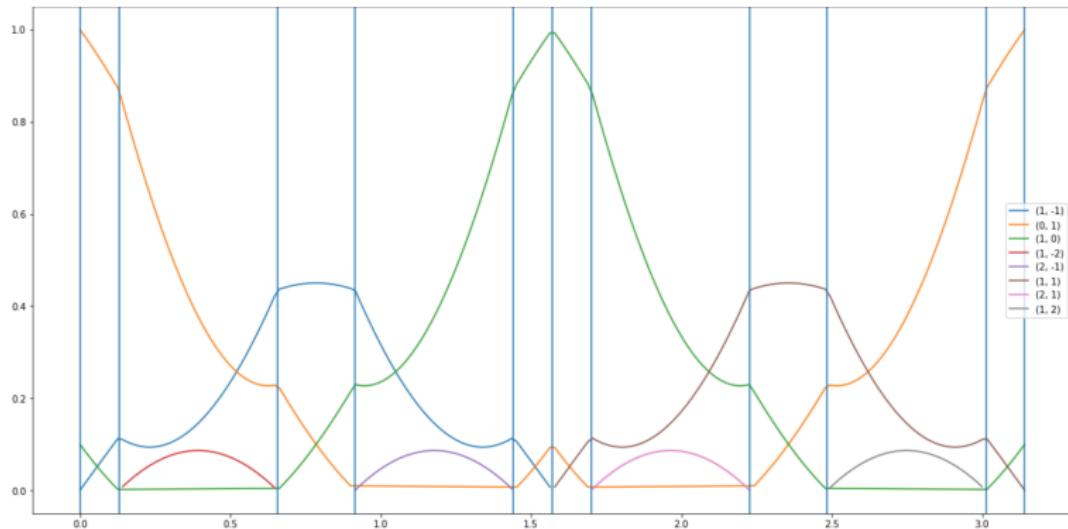
Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux
Variante convexe

- ▶ Boule unité définie par $D = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$, $a^2 + b^2 < 1$.
- ▶ Support $\pm e_i$, $1 \leq i \leq I$, de la décomposition optimale, fixe sur chaque triangle avec coefs linéaires. Selling (1874)
- ▶ $R_\theta \begin{pmatrix} 1 & \\ & \alpha \end{pmatrix} R_\theta^\top$, $\theta \in [0, \pi[$, forme un cercle de rayon $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.



Structure de la décomposition de $D_\alpha(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$



- ▶ Pour $\alpha \in]0, 1[$ fixé, partition $0 = \theta_0 < \dots < \theta_n = \pi$.
- ▶ Offsets $e_i(\theta) \in \mathbb{Z}^2$, $1 \leq i \leq 3$, constants sur $[\theta_k, \theta_{k+1}]$.
- ▶ Coefficients $\rho_i(\theta) \geq 0$, de forme simple sur $[\theta_k, \theta_{k+1}]$.
 $\rho_i(\theta) = a_i^k + b_i^k \cos 2\theta + c_i^k \sin 2\theta$, où $\theta_k \leq \theta \leq \theta_{k+1}$.

Schéma proposé, erreur $\mathcal{O}(h^2)$

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(\nabla^2 u(x)) + \alpha \lambda_{\max}(\nabla^2 u(x)) \\ &= \min_{0 \leq \theta \leq \pi} \text{Tr}(D_\alpha(\theta) \nabla^2 u(x)) \\ &\approx \min_{0 \leq \theta \leq \pi} \sum_{1 \leq i \leq 3} \rho_i(\theta) \Delta_h^{e_i(\theta)} u(x) \\ &= \min_{0 \leq k < n} F_k(\Delta_h^{e_i(\theta_k)} u(x), 1 \leq i \leq 3) \end{aligned}$$

où F_k est une optimisation sous forme close sur $[\theta_k, \theta_{k+1}]$.

- + DDE, consistant à l'ordre deux.
- + Coût d'évaluation et stencil dépendant seulement de α .
- Structure adaptative et non-linéaire rendant complexe l'évaluation de la Jacobienne, pour la méthode de Newton.

La différentiation automatique d'une composée

$$f_1 \circ \cdots \circ f_N, \quad \text{où } f_k : \mathbb{R}^{I_k} \rightarrow \mathbb{R}^{I_{k-1}}$$

en $x_N \in \mathbb{R}^{I_N}$, s'apparente au produit des matrices Jacobiennes
 $A_k = Df_k(x_k)$, où $x_k = f_{k+1}(x_{k+1})$,

$$A_1 \cdots A_N \quad \text{de tailles } I_0 \times I_1, \cdots, I_{N-1} \times I_N.$$

Variante appropriée de différentiation automatique

- ▶ Forward si $I_N = \mathcal{O}(1)$. Coût $(I_0 I_1 + \cdots + I_{N-2} I_{N-1}) I_N$.
- ▶ Reverse si $I_0 = \mathcal{O}(1)$. Coût $I_0 (I_1 I_2 + \cdots + I_{N-1} I_N)$.
- ▶ Creuse si facteurs peu nombreux et creux.

Pour une mise en oeuvre transparente et efficace, on peut ici:

- ▶ Soit composer différentiation forward (pour la partie non-linéaire) et creuse (pour la partie différences finies).
- ▶ Soit utiliser le théorème de l'enveloppe

$$\nabla f(x) = \nabla_x F(x, \theta_{\text{opt}}(x)), \quad \text{si } f(x) := \min_{\theta \in \Theta} F(x, \theta).$$

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

Définitions finies adaptatives monotones

Jean-Marie Mirebeau

Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoï

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford
Equation eikonale

Schémas causaux

Variante convexe

```
def SchemeSampling(u,diffs,rhs,bc):
    # Decomposition of the positive definite matrices defining the pb
    p,e = Selling.Decomposition(diffs)

    # Numerical scheme
    residue = rhs - (p*bc.Diff2(u,e)).sum(0).min(0)

    # Boundary conditions
    return np.where(bc.interior, residue, u-bc.grid_values)
```

```
def SchemeConsistent(u,alpha,rhs,bc):
    value,thetaopt = MinimizeTrace(u,alpha,bc) # 1D closed form minimization
    residue = rhs-value
    return np.where(bc.interior, residue, u-bc.grid_values)
```

```
def MinimizeTrace_Opt(u,alpha,bc,thetaopt=None):
    if thetaopt is None: return MinimizeTrace(u,alpha,bc)

    # The oracle contains the optimal angles
    diffss=Diff(alpha,thetaopt.squeeze(axis=0))
    p,e = Selling.Decomposition(diffss)
    value = (p*bc.Diff2(u,e)).sum(0)
    return value,thetaopt
```

```
def SchemeConsistent_Opt(u,alpha,beta,bc):
    value,thetaopt = ad.apply(MinimizeTrace_Opt,u,alpha,bc,envelope=True)
    residue = beta - value
    return np.where(bc.interior,residue,u-bc.grid_values)
```

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux
Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale associée

Schémas causaux

Variante convexe

Equation de Monge-Ampère et optique

Le transport optimal de $(X, f dx)$ vers $(Y, g dy)$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ convexes, f, g densités, est réalisé sous des hypothèses adéquates par $T = \nabla u$ où $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait $\forall x$ (Brenier, 91)

$$\det(\nabla^2 u(x)) = f(x)/g(\nabla u(x)), \quad \nabla u(x) \in Y, \quad u \text{ convexe.}$$

- Reformulation de l'EDP et de la contrainte de convexité

$$0 = \max_{\substack{\text{Tr}(D)=1 \\ D \succeq 0}} (\det D)^{\frac{1}{d}} F(x, \nabla u(x)) - \text{Tr}(D \nabla^2 u(x)).$$

Même stratégie de discrétisation que pour Pucci. Difficultés :

- Ensemble de matrices D d'anisotropie non-bornée.
- Invariance par addition d'une constante.
- Conditions au bord non standard.

Travail s'appuyant sur: Feng, Jensen 2017, Benamou, Duval, 2018, Froese 2019.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

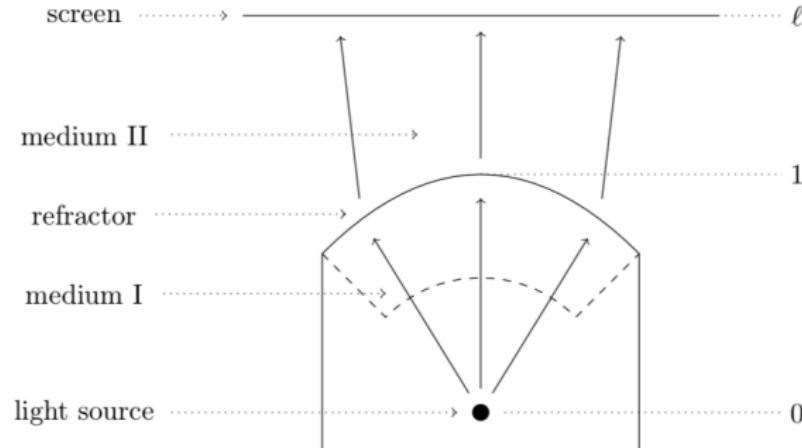


Figure: Problème du réfracteur en champ lointain.

La conception d'un réfracteur projetant une image donnée sur un écran lointain se ramène à résoudre

$$\det(\nabla^2 u(x) - A(x, \nabla u(x))) = B(x, \nabla u(x)),$$

$x \in \Omega$, avec conditions au bord $\nabla u(x) \in P(x)$, $x \in \partial\Omega$.

Guillaume Bonnet, M, *Monotone discretization of the Monge-Ampère equation of optimal transport*, submitted, 2021

Définitions
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Équation eikona

Schémas causaux

Variante convexe



Figure: G: image à reproduire. D: rendu appelseed®.

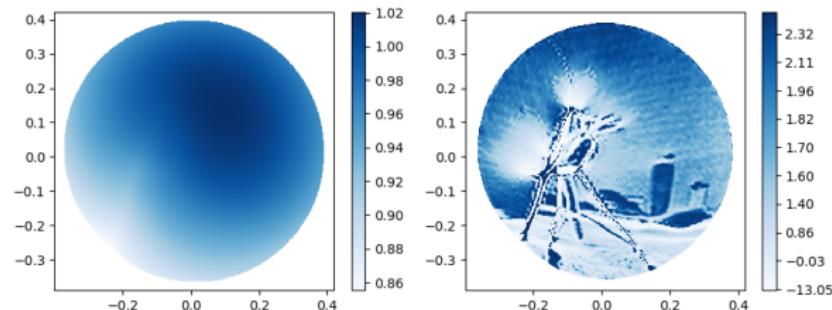


Figure: G: image du réfracteur. D: courbure du réfracteur

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikonale associée

Schémas causaux

Variante convexe

📄 M. *Fast-marching methods for curvature penalized shortest paths*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2018

📄 Da Chen, L. Cohen, M, X.-C. Tai. *An Elastica Geodesic Approach With Convexity Shape Prior*. Proceedings of the International Conference on Computer Vision (ICCV), 2021.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale associée

Schémas causaux

Variante convexe

► Les courbes élastiques d'Euler extremisent ($\kappa = \text{courbure}$)

$$\int_0^L \kappa(s)^2 ds.$$

Données : longueur L , positions et tangentes aux extrémités.

- Position de repos d'une tige élastique.
- Mumford propose leur utilisation en traitement de l'image.

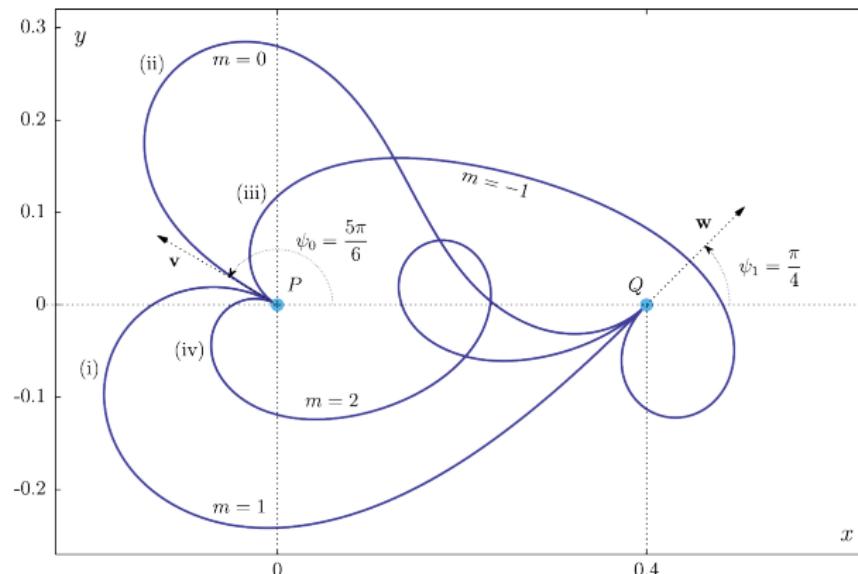


Figure: Elasticas extrémiales, mêmes données aux bord. ©Arroyo et al

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikionale

Schémas causaux

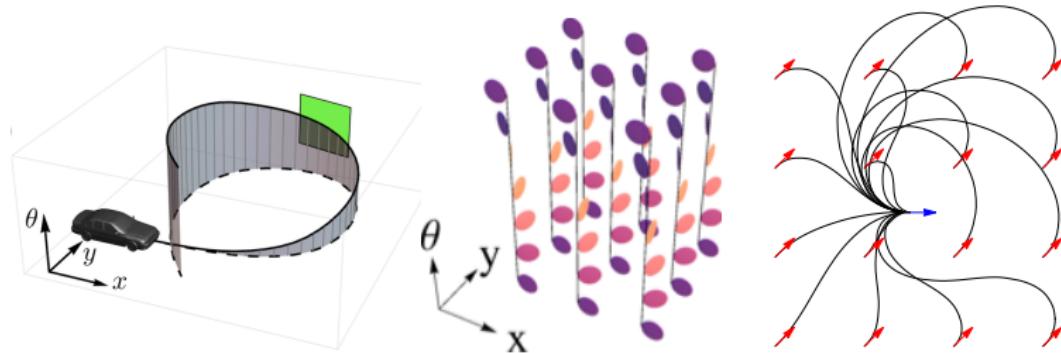
Variante convexe

- Modèle choisi : “élasticas” minimisant globalement

$$\int_0^L c(x(s), x'(s)) (1 + \xi^2 \kappa(s)^2) \, ds, \quad \text{longueur } L \text{ libre.}$$

Données: positions et tangentes aux extrémités, pénalisation ξ de la courbure, fonction coût $c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow]0, \infty[$.

- Calcul numérique via propagation de front, accéléré GPU.



Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikona

Schémas causaux

Variante convexe

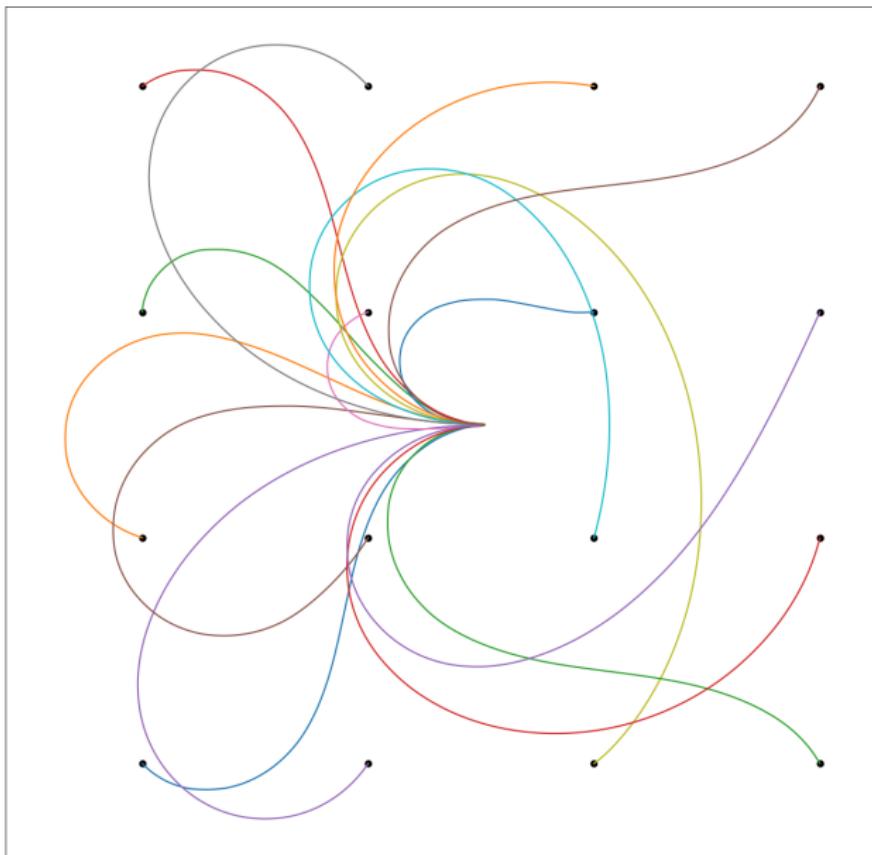


Figure: Courbes élasticas optimales, pour des positions et tangentes données aux extrémités, longueur libre. Coût $c(x, \theta) \equiv 1$.

Définitions
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Équation eikona

Schémas causaux

Variante convexe

- ▶ Pour des applications en segmentation d'image, on construit le coût $c(x, \theta)$ de manière à guider les chemins.

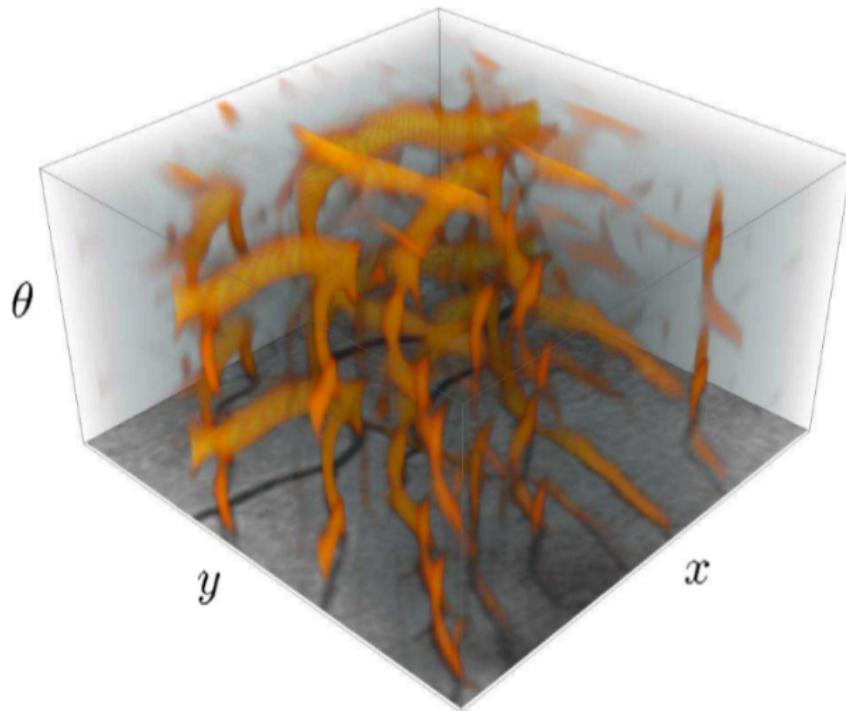


Figure: Fond rétinien, coût. Avec Duits et al.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikona

Schémas causaux

Variante convexe

- ▶ Pour des applications en segmentation d'image, on construit le coût $c(x, \theta)$ de manière à guider les chemins.

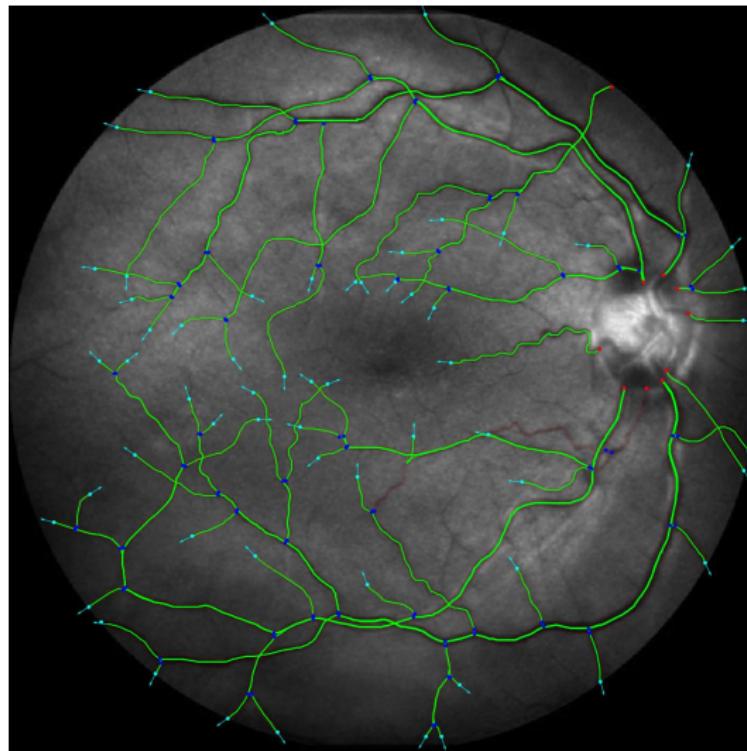


Figure: Fond rétinien, chemins de Reeds-Shepp. Avec Duits et al.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikonaile

Schémas causaux

Variante convexe

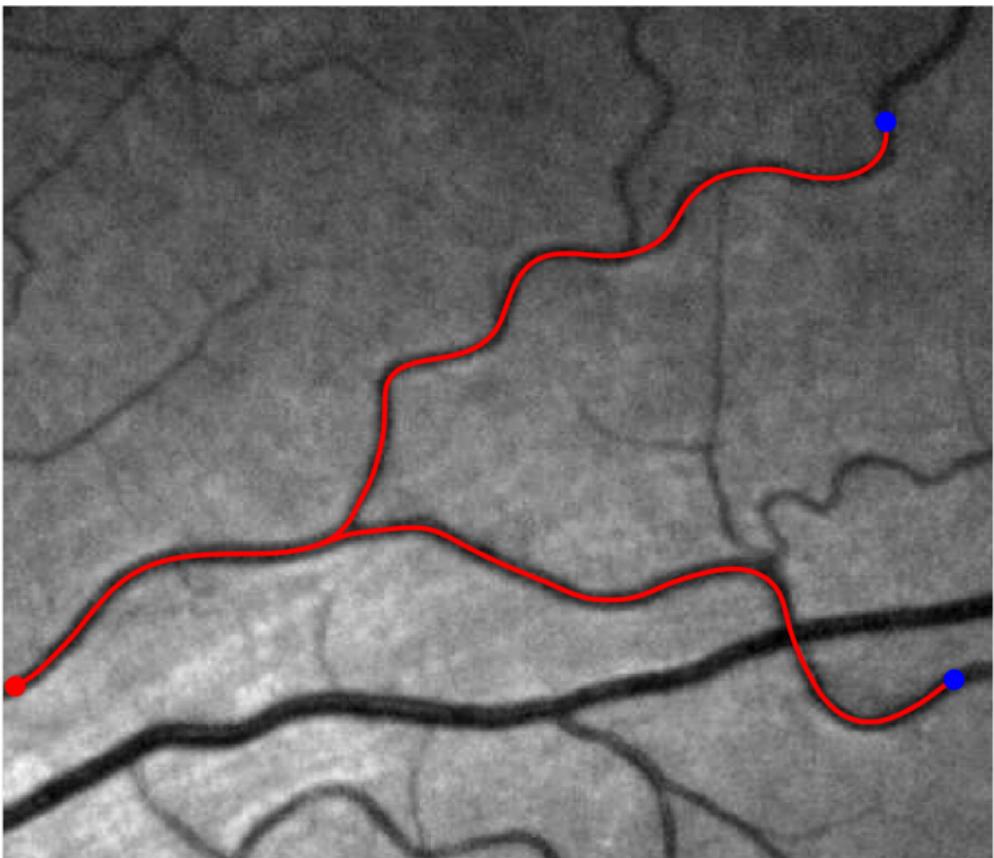


Figure: Extraction d'arbres d'irrigation rétiniens à l'aide d'élasticas, coût $c(x, \theta)$ construit en fonction de l'image. Avec Da Chen et al

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikionale

Schémas causaux
Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale associée

Schémas causaux

Variante convexe

Relèvement angulaire et métrique elastica

- ▶ L'énergie elastica se reformule

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \theta(\cdot)) := \int_0^L c(x(s), \theta(s)) \mathcal{F}_{\theta(s)}(\dot{x}(s), \xi \dot{\theta}(s)) ds$$

où la métrique sous-Finslerienne \mathcal{F} est définie par

$$\mathcal{F}_\theta(\dot{x}, \dot{\theta}) = \|\dot{x}\| + \frac{\dot{\theta}^2}{\|\dot{x}\|} \quad \text{si } \dot{x} \propto n_\theta := (\cos \theta, \sin \theta),$$

et $\mathcal{F}(\dot{x}, \dot{\theta}) = \infty$ sinon. (Convention $\mathcal{F}(0, 0) = 0$.)

- + Invariance de \mathcal{L} par re-paramétrisation temporelle.
- + Energie faisant intervenir des dérivées d'ordre 1 seulement.
- Anisotropie dégénérée de \mathcal{F} , dimension augmentée.
- ▶ Quasi-distance (asymétrique, possiblement infinie) associée

$$\mathcal{D}(x, y) := \inf\{\mathcal{L}(\gamma); \gamma \in \Gamma, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

où $x, y \in \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ domaine borné, $\Gamma = \text{Lip}([0, 1], \overline{\Omega})$

Carte de distances et équation eikonale

La fonction distance au bord, définie pour $\mathbf{y} \in \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ par

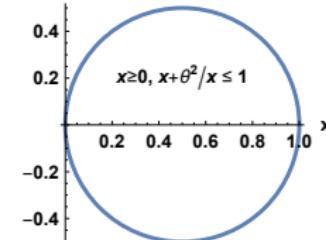
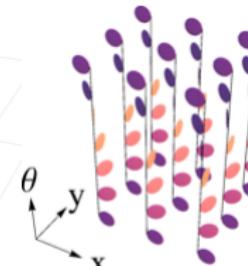
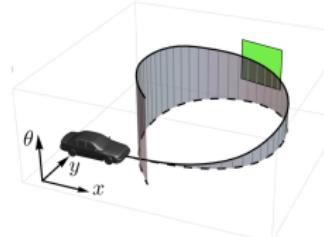
$$u(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

est solution de viscosité de l'équation HJB d'ordre 1

$$\mathcal{F}_\theta^*(\nabla_x u, \partial_\theta u / \xi) = c(x, \theta),$$

avec la métrique duale ($\dot{x} = x n_\theta$)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta^*(\hat{x}, \hat{\theta}) &:= \sup\{\langle \hat{x}, \dot{x} \rangle + \hat{\theta} \dot{\theta}; \mathcal{F}_\theta(\dot{x}, \dot{\theta}) \leq 1\} \\ &= \sup\{\langle \hat{x}, n_\theta \rangle x + \hat{\theta} \dot{\theta}; x \geq 0, x + \dot{\theta}^2/x \leq 1\} \\ &= \sup\{\langle \hat{x}, n_\theta \rangle x + \hat{\theta} \dot{\theta}; (x - 1/2)^2 + \dot{\theta}^2 \leq 1/4\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle \hat{x}, n_\theta \rangle + \sqrt{\langle \hat{x}, n_\theta \rangle^2 + \hat{\theta}^2} \right). \end{aligned}$$



Différences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale associée

Schémas causaux

Variante convexe

Schéma aux différences finies *causal*

Un schéma aux différences finies prend la forme

$$Fu(x) := \tilde{F}(x, u(x), (u(x) - u(y))_{y \in X \setminus \{x\}}),$$

pour tout $x \in X$, où X est un ensemble fini et $u : X \rightarrow \mathbb{E}$.

Causalité

Si \tilde{F} ne dépend que de la partie positive de sa troisième variable:

$$Fu(x) = \tilde{F}(x, u(x), (\max\{0, u(x) - u(y)\})_{y \in X \setminus \{x\}}).$$

- ▶ “ $u(x)$ ne dépend de $u(y)$ que si $u(x) > u(y)$.”
- ▶ Permet de résoudre $Fu = 1$ en une passe sur le domaine, en utilisant la méthode du Fast-Marching (\sim Dijkstra).
Sous des hypothèses adéquates, dont ellipticité dégénérée
- ▶ Egalement bénéfique pour les solveurs itératifs, e.g. GPU
- ▶ Schéma DDE causal, isotrope, Rouy 92, Sethian 96

$$\|\nabla u(x)\|^2 \approx \sum_{1 \leq i \leq d} \max\left\{0, \frac{u(x) - u(x - he_i)}{h}, \frac{u(x) - u(x + he_i)}{h}\right\}^2$$

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\theta^*(\hat{x}, \hat{\theta}) &= \frac{1}{2} \left(\langle \hat{x}, n_\theta \rangle + \sqrt{\langle \hat{x}, n_\theta \rangle^2 + \hat{\theta}^2} \right) \\ &= 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \max\{0, \langle \hat{x}, n_\theta \rangle \cos \varphi + \hat{\theta} \sin \varphi\}^2 \cos \varphi d\varphi \\ &= 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \max\{0, \langle \hat{x}, n_\theta^\varphi \rangle\}^2 \cos \varphi d\varphi \\ &\approx \sum_{0 \leq k \leq K} \lambda_k \max\{0, \langle \hat{x}, n_\theta^{\varphi_k} \rangle\}^2 \\ &\approx \sum_{0 \leq k \leq K} \lambda_k \sum_{1 \leq i \leq I} \rho_i^{\varphi_k} \max\{0, \langle \hat{x}, e_i^{\varphi_k} \rangle\}^2\end{aligned}$$

- ▶ Identité trigonométrique, $\forall \psi \in \mathbb{R}$
 $(\cos \psi + 1)^2 = 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \max\{0, \cos(\psi - \varphi)\}^2 \cos \varphi d\varphi.$
- ▶ $\hat{x} = (\hat{x}, \hat{\theta})$, coordonnées polaires $n_\theta^\varphi = (n_\theta \cos \varphi, \sin \varphi)$.
- ▶ Quadrature de Clenshaw-Curtis, erreur $\mathcal{O}(1/K^2)$.
- ▶ Selling avec $\rho_i^\varphi \geq 0$, $e_i^\varphi \in \mathbb{Z}^3$, $\langle e_i^\varphi, n_\theta^\varphi \rangle \geq 0$, erreur $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$$\sum_{1 \leq i \leq I} \rho_i^\varphi e_i^\varphi (e_i^\varphi)^\top = n_\theta^\varphi n_\theta^{\varphi^\top} + \varepsilon^2 \text{Id}$$

La librairie AGD résout $\mathcal{F}_x^*(\nabla u(x)) = c(x)$ où

$$\mathcal{F}_x^*(\hat{x})^2 = \max_{1 \leq k \leq K} \left(\sum_{1 \leq i \leq I} \lambda_{ik} \langle \hat{x}, e_{ik} \rangle^2 + \sum_{1 \leq j \leq J} \mu_{jk} \max\{0, \langle \hat{x}, f_{jk} \rangle\}^2 \right),$$

Discrétisation causale et DDE par différences finies

$$\langle \nabla u(x), e \rangle^2 \approx h^{-2} \max\{0, u(x) - u(x - he), u(x) - u(x + he)\}^2,$$

$$\max\{0, \langle \nabla u(x), e \rangle\}^2 \approx h^{-2} \max\{0, u(x) - u(x - he)\}^2.$$

```
const Int nmax = 1, nsym = 0; // Number of maxima, and of symmetric offsets
const Int ndim = 3, decompdim = ndim*(ndim+1)/2; // Domain dimension, nterms in decom
const Int nfwd = nFejer*decompdim; // Number of forward offsets, usually nFejer=5,7,9

void elastical(const Scalar xi, const Int x[ndim],
Scalar weights[nfwd], OffsetT offsets[nfwd][ndim]){

    for(Int l=0; l<nFejer; ++l){
        const Scalar theta = x[2]*dtheta; // Orientation associated to current point
        const Scalar phi = pi*(l+0.5)/nFejer - pi/2.; // Fejer quadrature angles
        const Scalar v[ndim]={cos(phi)*cos(theta),cos(phi)*sin(theta),sin(phi)/xi};

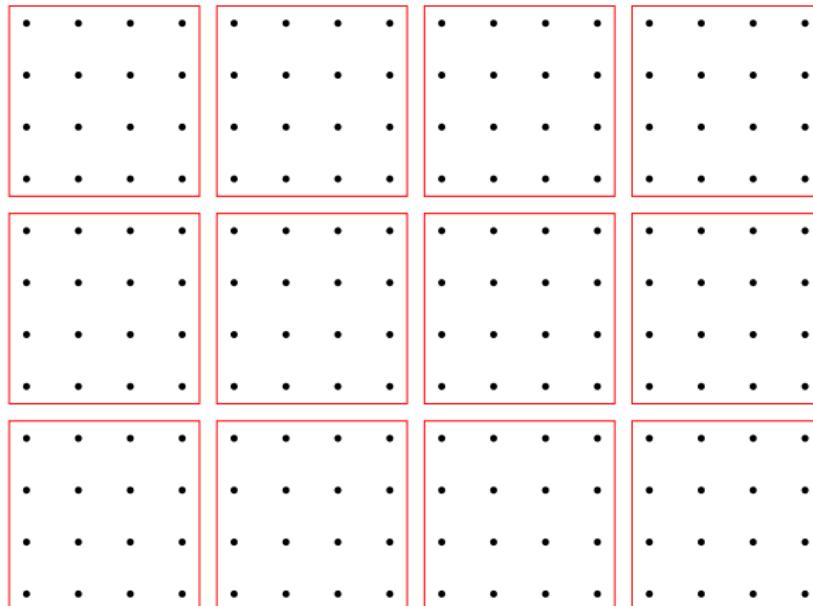
        // Selling's decomposition of v v^T + eps^2 Id
        decomp_v(v, &weights[l*decompdim], &offsets[l*decompdim]);

        // Introduce the Fejer quadrature weights
        for(Int i=0; i<decompdim; ++i) weights[l*decompdim+i] *= wFejer_s[l];
    }
}
```

Itération massivement parallèle par blocs

- ▶ Grouper les points par 8×8 ou $4 \times 4 \times 4$ (typiquement).

Travaux liés : variantes GPU de l'AGSI, FIM, Sweeping, etc



Itération massivement parallèle par blocs

- ▶ Grouper les points par 8×8 ou $4 \times 4 \times 4$ (typiquement).
Garder une liste des blocs actifs.
- ▶ Mettre à jour chaque bloc en parallèle,

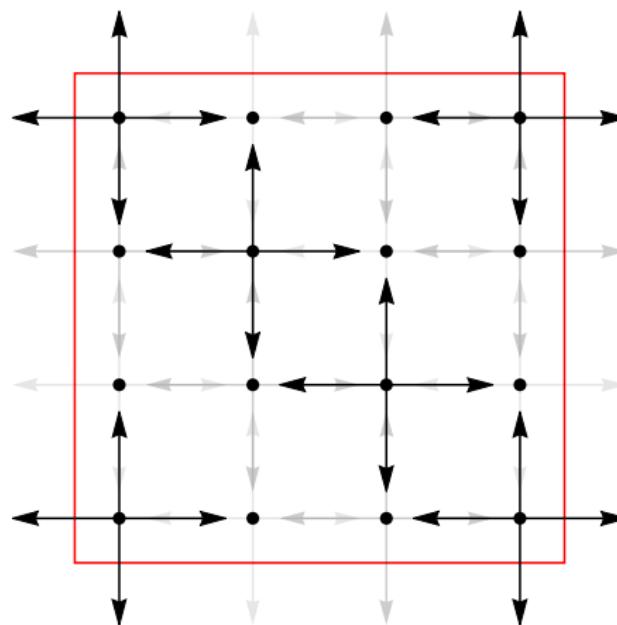
Travaux liés : variantes GPU de l'AGSI, FIM, Sweeping, etc

<table border="1"><tr><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td></tr><tr><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td></tr><tr><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td></tr><tr><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td></tr></table>	.11	.12	.13	.14	.10	.11	.12	.13	.9	.10	.11	.12	.8	.9	.10	.11	<table border="1"><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table>	∞	<table border="1"><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table>	∞	<table border="1"><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table>	∞																																													
.11	.12	.13	.14																																																																
.10	.11	.12	.13																																																																
.9	.10	.11	.12																																																																
.8	.9	.10	.11																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
<table border="1"><tr><td>.7</td><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td></tr><tr><td>.6</td><td>.7</td><td>.8</td><td>.9</td></tr><tr><td>.5</td><td>.6</td><td>.7</td><td>.8</td></tr><tr><td>.4</td><td>.5</td><td>.6</td><td>.7</td></tr></table>	.7	.8	.9	.10	.6	.7	.8	.9	.5	.6	.7	.8	.4	.5	.6	.7	<table border="1"><tr><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td></tr><tr><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td></tr><tr><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td></tr><tr><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td></tr></table>	.11	.12	.13	.14	.10	.11	.12	.13	.9	.10	.11	.12	.8	.9	.10	.11	<table border="1"><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table>	∞	<table border="1"><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table>	∞																														
.7	.8	.9	.10																																																																
.6	.7	.8	.9																																																																
.5	.6	.7	.8																																																																
.4	.5	.6	.7																																																																
.11	.12	.13	.14																																																																
.10	.11	.12	.13																																																																
.9	.10	.11	.12																																																																
.8	.9	.10	.11																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
<table border="1"><tr><td>.3</td><td>.4</td><td>.5</td><td>.6</td></tr><tr><td>.2</td><td>.3</td><td>.4</td><td>.5</td></tr><tr><td>.1</td><td>.2</td><td>.3</td><td>.4</td></tr><tr><td>.0</td><td>.1</td><td>.2</td><td>.3</td></tr></table>	.3	.4	.5	.6	.2	.3	.4	.5	.1	.2	.3	.4	.0	.1	.2	.3	<table border="1"><tr><td>.7</td><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td></tr><tr><td>.6</td><td>.7</td><td>.8</td><td>.9</td></tr><tr><td>.5</td><td>.6</td><td>.7</td><td>.8</td></tr><tr><td>.4</td><td>.5</td><td>.6</td><td>.7</td></tr></table>	.7	.8	.9	.10	.6	.7	.8	.9	.5	.6	.7	.8	.4	.5	.6	.7	<table border="1"><tr><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td></tr><tr><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td></tr><tr><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td></tr><tr><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td></tr></table>	.11	.12	.13	.14	.10	.11	.12	.13	.9	.10	.11	.12	.8	.9	.10	.11	<table border="1"><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr><tr><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table>	∞															
.3	.4	.5	.6																																																																
.2	.3	.4	.5																																																																
.1	.2	.3	.4																																																																
.0	.1	.2	.3																																																																
.7	.8	.9	.10																																																																
.6	.7	.8	.9																																																																
.5	.6	.7	.8																																																																
.4	.5	.6	.7																																																																
.11	.12	.13	.14																																																																
.10	.11	.12	.13																																																																
.9	.10	.11	.12																																																																
.8	.9	.10	.11																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																
∞	∞	∞	∞																																																																

Itération massivement parallèle par blocs

- ▶ Grouper les points par 8×8 ou $4 \times 4 \times 4$ (typiquement).
Garder une liste des blocs actifs.
- ▶ Mettre à jour chaque bloc en parallèle,

Travaux liés : variantes GPU de l'AGSI, FIM, Sweeping, etc



Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikona

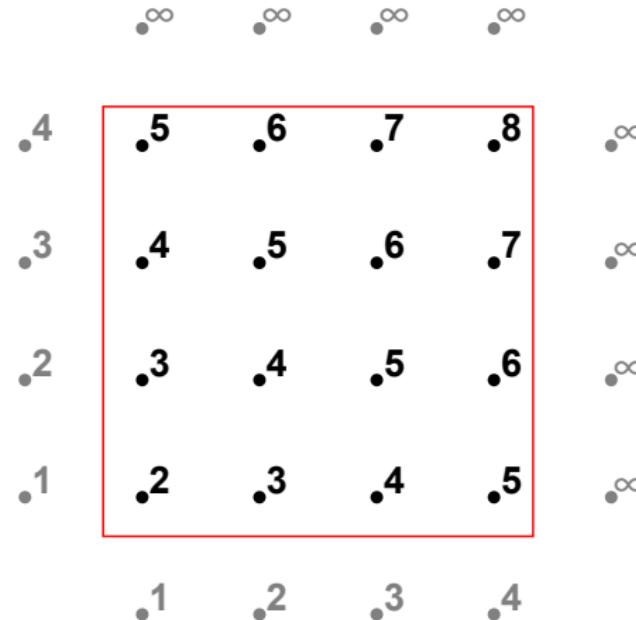
Schémas causaux

Variante convexe

Itération massivement parallèle par blocs

- ▶ Grouper les points par 8×8 ou $4 \times 4 \times 4$ (typiquement).
Garder une liste des blocs actifs.
- ▶ Mettre à jour chaque bloc en parallèle, plusieurs fois.

Travaux liés : variantes GPU de l'AGSI, FIM, Sweeping, etc



Differences finies adaptatives monotones

Jean-Marie Mirebeau

Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikonaile

Schémas causaux

Variante convexe

Itération massivement parallèle par blocs

- ▶ Grouper les points par 8×8 ou $4 \times 4 \times 4$ (typiquement).
Garder une liste des blocs actifs.
- ▶ Mettre à jour chaque bloc en parallèle, plusieurs fois.
- ▶ Mettre à jour la liste des blocs actifs et avancer le front.

Travaux liés : variantes GPU de l'AGSI, FIM, Sweeping, etc

<table border="1"><tr><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td></tr><tr><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td></tr><tr><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td></tr><tr><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td></tr></table>	.11	.12	.13	.14	.10	.11	.12	.13	.9	.10	.11	.12	.8	.9	.10	.11	<table border="1"><tr><td>.15</td><td>.16</td><td>.17</td><td>.18</td></tr><tr><td>.14</td><td>.15</td><td>.16</td><td>.17</td></tr><tr><td>.13</td><td>.14</td><td>.15</td><td>.16</td></tr><tr><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td><td>.15</td></tr></table>	.15	.16	.17	.18	.14	.15	.16	.17	.13	.14	.15	.16	.12	.13	.14	.15	<table border="1"><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr></table>	. ∞	<table border="1"><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr></table>	. ∞																														
.11	.12	.13	.14																																																																
.10	.11	.12	.13																																																																
.9	.10	.11	.12																																																																
.8	.9	.10	.11																																																																
.15	.16	.17	.18																																																																
.14	.15	.16	.17																																																																
.13	.14	.15	.16																																																																
.12	.13	.14	.15																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
<table border="1"><tr><td>.7</td><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td></tr><tr><td>.6</td><td>.7</td><td>.8</td><td>.9</td></tr><tr><td>.5</td><td>.6</td><td>.7</td><td>.8</td></tr><tr><td>.4</td><td>.5</td><td>.6</td><td>.7</td></tr></table>	.7	.8	.9	.10	.6	.7	.8	.9	.5	.6	.7	.8	.4	.5	.6	.7	<table border="1"><tr><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td></tr><tr><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td></tr><tr><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td></tr><tr><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td></tr></table>	.11	.12	.13	.14	.10	.11	.12	.13	.9	.10	.11	.12	.8	.9	.10	.11	<table border="1"><tr><td>.15</td><td>.16</td><td>.17</td><td>.18</td></tr><tr><td>.14</td><td>.15</td><td>.16</td><td>.17</td></tr><tr><td>.13</td><td>.14</td><td>.15</td><td>.16</td></tr><tr><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td><td>.15</td></tr></table>	.15	.16	.17	.18	.14	.15	.16	.17	.13	.14	.15	.16	.12	.13	.14	.15	<table border="1"><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr><tr><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td><td>.∞</td></tr></table>	. ∞															
.7	.8	.9	.10																																																																
.6	.7	.8	.9																																																																
.5	.6	.7	.8																																																																
.4	.5	.6	.7																																																																
.11	.12	.13	.14																																																																
.10	.11	.12	.13																																																																
.9	.10	.11	.12																																																																
.8	.9	.10	.11																																																																
.15	.16	.17	.18																																																																
.14	.15	.16	.17																																																																
.13	.14	.15	.16																																																																
.12	.13	.14	.15																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
. ∞	. ∞	. ∞	. ∞																																																																
<table border="1"><tr><td>.3</td><td>.4</td><td>.5</td><td>.6</td></tr><tr><td>.2</td><td>.3</td><td>.4</td><td>.5</td></tr><tr><td>.1</td><td>.2</td><td>.3</td><td>.4</td></tr><tr><td>.0</td><td>.1</td><td>.2</td><td>.3</td></tr></table>	.3	.4	.5	.6	.2	.3	.4	.5	.1	.2	.3	.4	.0	.1	.2	.3	<table border="1"><tr><td>.7</td><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td></tr><tr><td>.6</td><td>.7</td><td>.8</td><td>.9</td></tr><tr><td>.5</td><td>.6</td><td>.7</td><td>.8</td></tr><tr><td>.4</td><td>.5</td><td>.6</td><td>.7</td></tr></table>	.7	.8	.9	.10	.6	.7	.8	.9	.5	.6	.7	.8	.4	.5	.6	.7	<table border="1"><tr><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td></tr><tr><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td><td>.13</td></tr><tr><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td><td>.12</td></tr><tr><td>.8</td><td>.9</td><td>.10</td><td>.11</td></tr></table>	.11	.12	.13	.14	.10	.11	.12	.13	.9	.10	.11	.12	.8	.9	.10	.11	<table border="1"><tr><td>.15</td><td>.16</td><td>.17</td><td>.18</td></tr><tr><td>.14</td><td>.15</td><td>.16</td><td>.17</td></tr><tr><td>.13</td><td>.14</td><td>.15</td><td>.16</td></tr><tr><td>.12</td><td>.13</td><td>.14</td><td>.15</td></tr></table>	.15	.16	.17	.18	.14	.15	.16	.17	.13	.14	.15	.16	.12	.13	.14	.15
.3	.4	.5	.6																																																																
.2	.3	.4	.5																																																																
.1	.2	.3	.4																																																																
.0	.1	.2	.3																																																																
.7	.8	.9	.10																																																																
.6	.7	.8	.9																																																																
.5	.6	.7	.8																																																																
.4	.5	.6	.7																																																																
.11	.12	.13	.14																																																																
.10	.11	.12	.13																																																																
.9	.10	.11	.12																																																																
.8	.9	.10	.11																																																																
.15	.16	.17	.18																																																																
.14	.15	.16	.17																																																																
.13	.14	.15	.16																																																																
.12	.13	.14	.15																																																																

Différences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux
Variante convexe

Equation de Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale associée

Schémas causaux

Variante convexe

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoï

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux

Variante convexe

```
const Int nmax = 1, nsym = 0; // Number of maxima, and of symmetric offsets
const Int ndim = 3, decompdim = ndim*(ndim+1)/2; // Domain dimension, nterms in decompo
const Int nfwd = nFejer*decompdim; // Number of forward offsets, usually nFejer=5,7,9

void elastica_cvx(const Scalar xi, const Int x[ndim],
                  Scalar weights[nfwd], OffsetT offsets[nfwd][ndim]){

    for(Int l=0; l<nFejer; ++l){
        const Scalar theta = x[2]*dtheta; // Orientation associated to current point
        const Scalar phi = pi*(l+0.5)/nFejer - pi/2.; // Fejer quadrature angle
        const Scalar v[ndim]={cos(phi)*cos(theta),cos(phi)*sin(theta),sin(phi)/xi};

        // Selling's decomposition of v v^T + eps^2 Id
        decomp_v(v, &weights[l*decompdim], &offsets[l*decompdim]);

        // Model.variant.where.the.vehicle.always.turns.left
        const Scalar s = wFejer_s[l] * (2*l>nFejer-1 ? 1. : 2*l==nFejer-1 ? 0.5 : 0.);

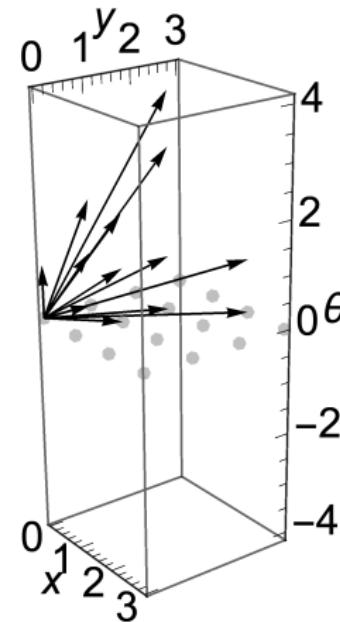
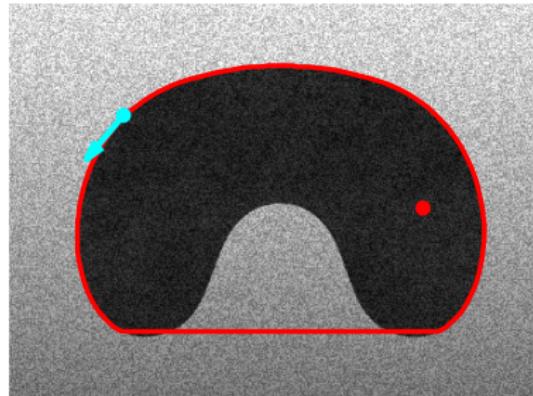
        // Introduce the Fejer quadrature weights
        for(Int i=0; i<decompdim; ++i) weights[l*decompdim+i] *= s;
    }
}
```

- ▶ La propagation de front correspond à la résolution de l'EDP

$$\frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{0, \langle \nabla_x u, n_\theta \rangle \cos \varphi + \sin \varphi \partial_\theta u / \xi\}^2 \cos \varphi d\varphi = c(x, \theta)^2$$

avec $u(x_0, \theta_0) = 0$ et conditions de frottement sur $\partial\Omega$.

- ▶ Différences finies adaptatives.
- ▶ Elimination des offsets “ θ décroissant”.
- ▶ Introduction d'un mur “ $\theta \neq \theta_0$ ”.



On a pour tout $\psi \in [-\pi, \pi]$

$$4\lambda(\psi) := 3 \int_0^{\pi/2} \max\{0, \cos(\varphi - \psi)\}^2 \cos \varphi d\varphi$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \psi \in [-\pi, -\pi/2], \\ 2 \cos \psi + 2 \cos \psi \sin \psi & \text{si } \psi \in [-\pi/2, 0], \\ 1 + \cos^2 \psi + 2 \cos \psi \sin \psi & \text{si } \psi \in [0, \pi/2], \\ (1 + \cos \psi)^2 & \text{si } \psi \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

► La métrique duale des elásticas convexes s'écrit

$$\mathfrak{F}_\theta^*(\hat{x}, \hat{\theta})^2 = r^2 \lambda(\psi), \quad \text{quand } (\langle \hat{x}, n_\theta \rangle, \hat{\theta}) = r(\cos \psi, \sin \psi),$$

La métrique \mathfrak{F} s'obtient par dualité de Legendre-Fenchel

$$\frac{1}{2}\mathfrak{F}_\theta(\dot{\mathbf{x}})^2 = \sup_{\hat{\mathbf{x}}} \left\{ \langle \hat{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle - \frac{1}{2}\mathfrak{F}_\theta^*(\hat{\mathbf{x}})^2 \right\}.$$

Pucci
Schémas
monotones
Décomposition
de Voronoi
Paramètres de
Selling
Monge-Ampère
Courbes
élastiques
convexes
Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale
Schémas causaux
Variante convexe

Pour $\theta \in \mathbb{S}^1$, $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, et en posant $\dot{s} := \|\dot{\mathbf{x}}\|$

$$\mathfrak{F}_\theta(\dot{x}, \dot{\theta})^2 = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \dot{\theta} < 0 \text{ ou } \dot{x} \neq n_\theta \|\dot{\mathbf{x}}\|, \\ \frac{8}{27\theta}(9\dot{s}\dot{\theta}^2 + \dot{s}^3 + (\dot{s}^2 - 3\dot{\theta}^2)^{\frac{3}{2}}) & \text{si } 0 < \dot{\theta} \leq \dot{s}/2, \\ 4(\dot{s}^2 - 2\dot{s}\dot{\theta} + 2\dot{\theta}^2) & \text{si } 0 \leq \dot{s}/2 \leq \dot{\theta} \leq \dot{s}, \\ (\dot{s} + \dot{\theta}^2/\dot{s})^2, & \text{si } 0 \leq \dot{s} \leq \dot{\theta}. \end{cases}$$

► Pénalisation de courbure $C(\kappa) = \mathfrak{F}_\theta(n_\theta, \kappa)$

$$C(\kappa) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \kappa \leq 0 \\ \sqrt{\frac{8}{27\kappa}(9\kappa^2 + 1 + (1 - 3\kappa^2)^{\frac{3}{2}})} & \text{si } 0 < \kappa \leq 1/2 \\ 2\sqrt{1 - 2\kappa + 2\kappa^2} & \text{si } 1/2 \leq \kappa \leq 1, \\ 1 + \kappa^2, & \text{si } 1 \leq \kappa. \end{cases}$$

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

► Modèle des elastics convexes : minimiser globalement

$$\int_0^L c(x(s), x'(s)) C(\xi \kappa(s)) ds, \quad \text{longueur } L \text{ libre.}$$

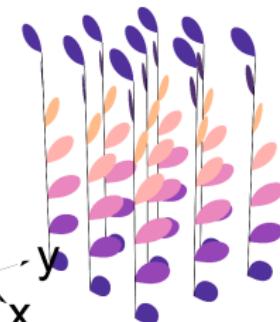
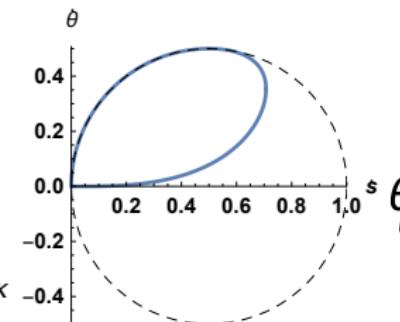
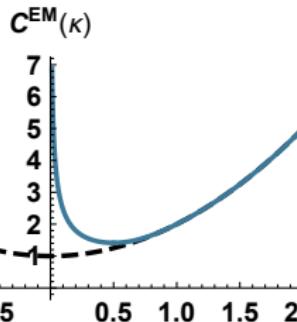


Figure: Elastica usuelle (tirets) et variante convexe (bleu).

Gauche : fonction de pénalisation de courbure.

Centre : vitesse horizontale et angulaire admissible.

Droite : vitesses admissibles selon la position et de l'orientation.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikona

Schémas causaux

Variante convexe



Figure: Image (i) originale, (ii) annotée, (iii) courbe elastica convexe.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikona

Schémas causaux

Variante convexe

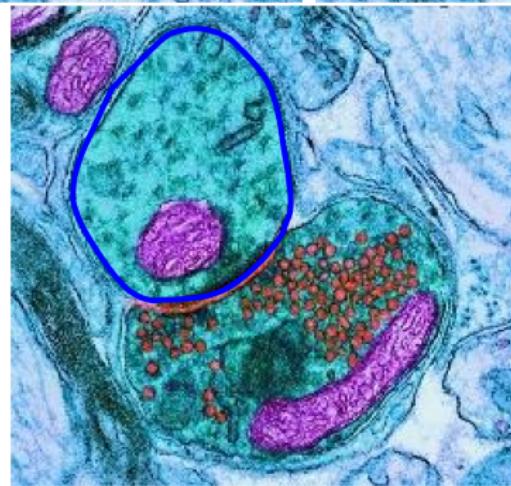
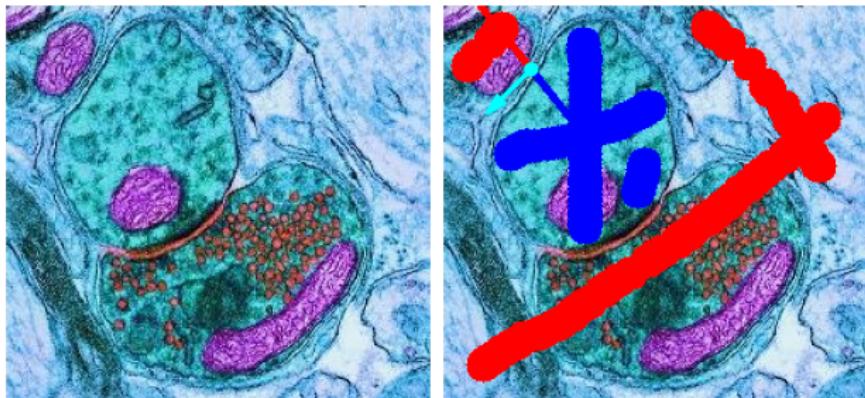


Figure: Image (i) originale, (ii) annotée, (iii) courbe elastica convexe.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford

Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

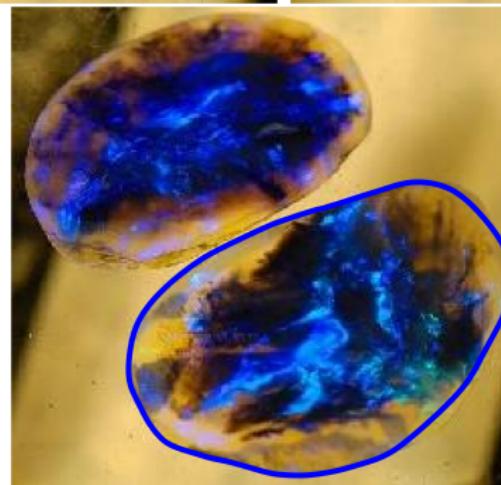
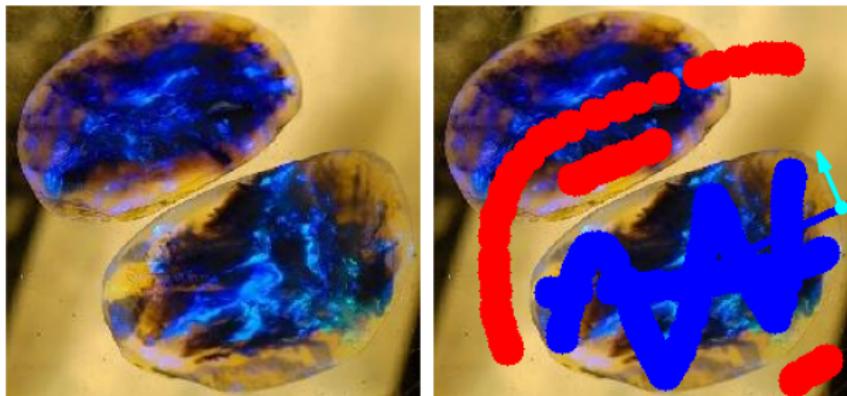


Figure: Image (i) originale, (ii) annotée, (iii) courbe elastica convexe.

Differences
finies
adaptatives
monotones

Jean-Marie
Mirebeau

Pucci

Schémas
monotones

Décomposition
de Voronoi

Paramètres de
Selling

Monge-Ampère

Courbes
élastiques
convexes

Elasticas de
Euler-Mumford
Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe



Figure: Image (i) originale, (ii) annotée, (iii) courbe elastica convexe.

Différences finies adaptatives monotones

Jean-Marie Mirebeau

Pucci

Schémas monotones

Décomposition de Voronoi

Paramètres de Selling

Monge-Ampère

Courbes élastiques convexes

Elasticas de Euler-Mumford

Equation eikionale

Schémas causaux

Variante convexe

Conclusion et perspectives

- ▶ Les schémas aux différences finies DDE et/ou causaux bénéficient de garanties théoriques et d'algorithmes de résolution numérique efficaces.
- ▶ La décomposition de Voronoi/Selling permet de contrôler voire de borner (si anisotropie bornée) la taille des stencils.
- ▶ Outils adaptés de différentiation automatique et d'accélération GPU.

Merci pour votre attention

Codes, notebooks illustratifs, essai en ligne via Google Colab®:
github.com/Mirebeau/AdaptiveGridDiscretizations