# Lista de Exercícios 1

Universidade Federal de Goiás (UFG)
Lógica para Ciência da Computação
Esdras Lins Bispo Jr.

23 de Maio de 2013

1. Quais das frases a seguir são proposições?

   (a) A lua é feita de queijo verde. É uma proposição

   (b) Ele é um homem alto. É uma proposição

   (c) Dois é um número primo. É uma proposição

   (d) O jogo terminará logo? Não é uma proposição

   (e) As taxas do ano que vem serão maiores. É uma proposição

   (f) As taxas do ano que vem serão menores. É uma proposição

   (g) $x - 4 = 0$ É uma proposição

2. Simplifique as seguintes fórmulas, removendo os parênteses que não são obrigatórios:

   (a) $(p \vee q) \equiv p \vee q$

   (b) $((p \vee q) \vee (r \vee s)) \equiv p \vee q \vee (r \vee s)$

   (c) $(p \to (q \to (p \wedge q))) \equiv p \to q \to p \wedge q$

   (d) $\neg(p \vee (q \wedge r)) \equiv \neg(p \vee q \wedge r)$

   (e) $\neg(p \wedge (q \vee r)) \equiv \neg(p \wedge (q \vee r))$

   (f) $((p \wedge (p \to q)) \to q) \equiv (p \wedge (p \to q)) \to q$

3. Adicione os parênteses às seguintes fórmulas para que fiquem de acordo com as regras de formação de fórmulas:

(a) $\neg p \to q \equiv ((\neg p) \to q)$

(b) $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s \equiv (((p \wedge (\neg q)) \wedge r) \wedge (\neg s))$

(c) $p \to q \to r \to p \wedge q \wedge r \equiv (p \to (q \to (r \to ((p \wedge q) \wedge r))))$

(d) $p \wedge \neg q \vee r \wedge s \equiv ((p \wedge (\neg q)) \vee (r \wedge s))$

(e) $p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q \equiv ((p \wedge (\neg(p \to (\neg q)))) \vee (\neg q))$

4. Dar o conjunto de subfórmulas das fórmulas a seguir (notar que os parênteses implícitos sao fundamentais para decidir quais são as subfórmulas):

(a) $\neg p \to p$

$$\begin{aligned} \texttt{Subf}(\neg p \to p) \quad = \{ \quad & \neg p \to p, \\ & \neg p, \\ & p\} \end{aligned}$$

(b) $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$

$$\begin{aligned} \texttt{Subf}(p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \quad = \{ \quad & p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s, \\ & p \wedge \neg q \wedge r, \\ & \neg s, \\ & p \wedge \neg q, \\ & r, \\ & s, \\ & p, \\ & \neg q, \\ & q\} \end{aligned}$$

(c) $p \to q \to r \to p \wedge q \wedge r$

$$\begin{aligned} \texttt{Subf}(p \to q \to r \to p \wedge q \wedge r) \quad = \{ \quad & p \to q \to r \to p \wedge q \wedge r, \\ & p, \\ & q \to r \to p \wedge q \wedge r, \\ & q, \\ & r \to p \wedge q \wedge r, \\ & r, \\ & p \wedge q \wedge r, \\ & p \wedge q\} \end{aligned}$$

(d) $p \wedge \neg q \vee r \wedge s$

$$
\begin{array}{rll}
\texttt{Subf}(p \wedge \neg q \vee r \wedge s) & = \{ & p \wedge \neg q \vee r \wedge s, \\
 & & p \wedge \neg q, \\
 & & r \wedge s, \\
 & & p, \\
 & & \neg q, \\
 & & r, \\
 & & s, \\
 & & q\}
\end{array}
$$

(e) $p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q$

$$
\begin{array}{rll}
\texttt{Subf}(p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q) & = \{ & p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q, \\
 & & p \wedge \neg(p \to \neg q), \\
 & & \neg q, \\
 & & p, \\
 & & \neg(p \to \neg q), \\
 & & q, \\
 & & p \to \neg q\}
\end{array}
$$

5. Calcular a complexidade de cada fórmula do exercício anterior (notar que a posição exata dos parênteses *não influencia* a complexidade da fórmula).

   (a)

$$
\begin{array}{rcl}
|\neg p \to p| & = & |\neg p| + |p| + 1 \\
 & = & |p| + 1 + 1 + 1 \\
 & = & 1 + 3 \\
 & = & 4
\end{array}
$$

(b)

$$\begin{aligned}
|p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s| &= |p \wedge \neg q \wedge r| + |\neg s| + 1 \\
&= |p \wedge \neg q| + |r| + 1 + |s| + 1 + 1 \\
&= |p| + |\neg q| + 1 + 1 + 1 + 3 \\
&= 1 + |q| + 1 + 6 \\
&= 1 + 8 \\
&= 9
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
|p \to q \to r \to p \wedge q \wedge r| &= |p| + |q \to r \to p \wedge q \wedge r| + 1 \\
&= 1 + |q| + |r \to p \wedge q \wedge r| + 1 + 1 \\
&= 1 + |r| + |p \wedge q \wedge r| + 1 + 3 \\
&= 1 + |p \wedge q| + |r| + 5 \\
&= 1 + |p| + |q| + 1 + 1 + 6 \\
&= 1 + 1 + 9 \\
&= 11
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
|p \wedge \neg q \vee r \wedge s| &= |p \wedge \neg q| + |r \wedge s| + 1 \\
&= |p| + |\neg q| + 1 + |r| + |s| + 1 + 1 \\
&= 1 + |q| + 1 + 1 + 1 + 3 \\
&= 1 + 7 \\
&= 8
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
|p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q| &= |p \wedge \neg(p \to \neg q)| + |\neg q| + 1 \\
&= |p| + |\neg(p \to \neg q)| + 1 + |q| + 1 + 1 \\
&= 1 + |(p \to \neg q)| + 1 + 1 + 3 \\
&= |p| + |\neg q| + 1 + 6 \\
&= 1 + |q| + 1 + 7 \\
&= 1 + 9 \\
&= 10
\end{aligned}$$

6. Definir por indução sobre a estrutura de fórmulas a função $\acute{a}tomos(A)$, que retorna o conjunto de todos os átomos que ocorrem na fórmula $A$. Por exemplo, $\acute{a}tomos(p \land \neg(p \to \neg q) \lor \neg q) = \{p, q\}$.

   $\acute{a}tomos(A)$ é um conjunto definido como se segue:

   (a) **Caso básico:** $p$
   $\acute{a}tomos(p) = \{p\}$ para toda fórmula atômica $p \in \mathcal{P}$;

   (b) **Caso** $\neg A$
   $\acute{a}tomos(\neg A) = \acute{a}tomos(A)$;

   (c) **Caso** $|(A \circ B)|$
   $\acute{a}tomos(A \circ B) = \acute{a}tomos(A) \cup \acute{a}tomos(B)$, para $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$.