Lista de Exercícios 2

Universidade Federal de Goiás (UFG)
Lógica para Ciência da Computação
Esdras Lins Bispo Jr.

8 de Maio de 2014

1. Considerar duas valorações $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ tais que $\mathcal{V}_1$ valora todos os átomos em 1 e $\mathcal{V}_2$ valora todos os átomos em 0. Computar como $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ valoram as fórmulas a seguir:

   (a) $\neg p \to q$
   $\mathcal{V}_1(p, q) = (1, 1) \therefore \mathcal{V}_1(\neg p \to q) = \neg 1 \to 1 = 1$
   $\mathcal{V}_2(p, q) = (0, 0) \therefore \mathcal{V}_2(\neg p \to q) = \neg 0 \to 0 = 0$

   (b) $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$
   $\mathcal{V}_1(p, q, r, s) = (1, 1, 1, 1) \therefore \mathcal{V}_1(p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) = 1 \wedge \neg 1 \wedge 1 \wedge \neg 1 = 0$
   $\mathcal{V}_2(p, q, r, s) = (0, 0, 0, 0) \therefore \mathcal{V}_2(p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) = 0 \wedge \neg 0 \wedge 0 \wedge \neg 0 = 0$

   (c) $p \to q \to r \to (p \wedge q \wedge r)$
   $\mathcal{V}_1(p, q, r) = (1, 1, 1) \therefore$
   $\mathcal{V}_1(p \to q \to r \to (p \wedge q \wedge r)) = 1 \to 1 \to 1 \to (1 \wedge 1 \wedge 1) = 1$
   $\mathcal{V}_2(p, q, r) = (0, 0, 0) \therefore$
   $\mathcal{V}_2(p \to q \to r \to (p \wedge q \wedge r)) = 0 \to 0 \to 0 \to (0 \wedge 0 \wedge 0) = 1.$

   (d) $(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$
   $\mathcal{V}_1(p, q, r, s) = (1, 1, 1, 1) \therefore$
   $\mathcal{V}_1((p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)) = (1 \wedge \neg 1) \vee (1 \wedge 1) = 1$
   $\mathcal{V}_2(p, q, r, s) = (0, 0, 0, 0) \therefore$
   $\mathcal{V}_2((p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)) = (0 \wedge \neg 0) \vee (0 \wedge 0) = 0.$

   (e) $p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q$
   $\mathcal{V}_1(p, q) = (1, 1) \therefore$
   $\mathcal{V}_1(p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q) = 1 \wedge \neg(1 \to \neg 1) \vee \neg 1 = 1$
   $\mathcal{V}_2(p, q) = (0, 0) \therefore$
   $\mathcal{V}_2(p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q) = 0 \wedge \neg(0 \to \neg 0) \vee \neg 0 = 1.$

(f) $p \vee \neg p$

$\mathcal{V}_1(p) = 1 \therefore \mathcal{V}_1(p \vee \neg p) = 1 \vee \neg 1 = 1$
$\mathcal{V}_2(p) = 0 \therefore \mathcal{V}_2(p \vee \neg p) = 0 \vee \neg 0 = 1.$

(g) $p \wedge \neg p$

$\mathcal{V}_1(p) = 1 \therefore \mathcal{V}_1(p \wedge \neg p) = 1 \wedge \neg 1 = 0$
$\mathcal{V}_2(p) = 0 \therefore \mathcal{V}_2(p \wedge \neg p) = 0 \wedge \neg 0 = 0.$

(h) $((p \to q) \to p) \to p$

R - $\mathcal{V}_1(p,q) = (1,1) \therefore$
$\mathcal{V}_1(((p \to q) \to p) \to p) = ((1 \to 1) \to 1) \to 1 = 1$
$\mathcal{V}_2(p,q) = (0,0) \therefore$
$\mathcal{V}_2(((p \to q) \to p) \to p) = ((0 \to 0) \to 0) \to 0 = 1.$

2. Dar uma valoração para os átomos das fórmulas (b) e (c), no exercício anterior, de forma que a valoração da fórmula seja 1.

   R - (b) $\mathcal{V}(p,q,r,s) = (1,0,1,0)$ e
   (c) $\mathcal{V}(p,q,r) = (1,1,1)$
   (como (c) é uma fórmula válida, qualquer valoração $\mathcal{V}(p,q,r)$ será 1.

3. Classificar as fórmulas a seguir de acordo com sua satisfazibilidade, validade, falsicabilidade ou insatisfazibiidade:

   (a) $(p \to q) \to (q \to p)$
   (b) $(p \wedge \neg p) \to q$
   (c) $p \to q \to p \wedge q$
   (d) $p \to \neg\neg p$
   (e) $\neg(p \vee q \to p)$
   (f) $\neg(p \to p \vee q)$
   (g) $((p \to q) \wedge (r \to q)) \to (p \vee r \to q)$

4. Encontrar uma valoração que satisfaça as seguintes fórmulas:

   (a) $p \to \neg p$
   R - $\mathcal{V}(p) = 0.$

   (b) $q \to p \wedge \neg p$
   R - $\mathcal{V}(p,q) = (0,0)$ ou $\mathcal{V}(p,q) = (1,0).$

   (c) $(p \to q) \to p$
   R - $\mathcal{V}(p,q) = (1,0)$ ou $\mathcal{V}(p,q) = (1,1).$

(d) $\neg(p \vee q \to q)$

R - $\mathcal{V}(p,q) = (1,0)$.

(e) $(p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$

R - $\mathcal{V}(p,q) = (0,0)$ ou $\mathcal{V}(p,q) = (1,1)$.

(f) $(p \to q) \wedge (q \to p)$

R - $\mathcal{V}(p,q) = (0,0)$ ou $\mathcal{V}(p,q) = (1,1)$.

5. O *fragmento implicativo* é o conjunto de fórmulas que são construídas apenas usando o conectivo $\to$. Determinadas fórmulas desse fragmento receberam nomes especiais, conforme indicado a seguir. Verificar a validade de cada uma dessas fórmulas.

I $p \to p$

R - Fórmula válida:

p	$p \to p$
0	1
1	1

B $(p \to q) \to (r \to p) \to (r \to p)$

R - Fórmula válida:

			I	II	III	
p	q	r	$p \to q$	$r \to p$	$II \to II$	$I \to III$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

C $(p \to q \to r) \to (q \to p \to r)$

R - Fórmula válida:

			I	II	III	IV	
p	q	r	$q \to r$	$p \to r$	$p \to I$	$q \to II$	$III \to IV$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

W $(p \to p \to q) \to (p \to q)$

R - Fórmula válida:

		I	II	
p	q	$p \to q$	$p \to I$	$II \to I$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

S $(p \to q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r)$

R - Fórmula válida:

			I	II	III	IV	V	
p	q	r	$q \to r$	$p \to q$	$p \to r$	$p \to I$	$II \to III$	$IV \to V$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

K $p \to q \to p$

R - Fórmula válida:

		I	
p	q	$q \to p$	$p \to I$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Peirce $((p \to q) \to p) \to p$

R - Fórmula válida:

		I	II	
p	q	$p \to q$	$I \to p$	$II \to p$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

6. Dada uma fórmula A com N átomos, calcular o número máximo de posições (ou seja, células ocupadas por 0 ou 1) em uma Tabela da Verdade para A, em função de $|A|$ e N.

7. Um *chip* de memória de um computador tem 2^4 elementos com dois estados (ligado/desligado). Qual o número total de configurações ligado/desligado possíveis?

   R - Como 2^4 elementos são 16 elementos, temos 16 elementos com dois estados do tipo ligado/desligado. Elementos deste tipo funcionam semelhantemente a átomos proposicionais. Logo, o número total de configurações ligado/desligado possíveis será igual ao número de possíveis valorações admitidas pelo conjunto destes átomos, i.e, $2^N = 2^{16} = 65.536$.

8. A tabela da verdade (ou tabela-verdade) para $p \vee q$ mostra que o valor de $p \vee q$ é verdade se (i) p for verdade, (ii) se q for verdade ou (iii) se ambas forem verdades. Essa utilização da palavra "ou" em que o resultado é verdade se ambas as componentes são verdadeiras é chamado de *ou inclusivo*. Um outro uso da palavra "ou" na língua portuguesa é o *ou exclusivo*, algumas vezes denotado por XOU ou XOR (em inglês), em que o resultado é falso se ambas as componentes forem verdadeiras. Esse ou exclusivo está subentendido na frase: "Na bifurcação, devemos seguir ou para o norte ou para o sul". Esse ou exclusivo é simbolizado por $p \oplus q$.

(a) Construa a tabela-verdade para o ou exclusivo.

(b) Mostre que $p \oplus q \equiv \neg((p \to q) \wedge (q \to p))$.