

湍流热对流边界层转换的实验研究

作者：黄海龙，顾姣燕，张玲，何晓舟

单位：哈尔滨工业大学 (深圳) 机电学院湍流-噪声-振动耦合与控制研究所, 深圳邮编 518005

邮箱：huanghailong@stu.hit.edu.cn

摘要： 本论文将介绍国际湍流研究领域关于热对流系统中边界层由层流态向湍流态转换的实验研究进展。最新的研究结果发现当普朗特数 $Pr = 1$ ，边界层的转换发生在 $Ra = 10^{14}$ 附近，符合“GL”理论模型关于 Kraichnan“终极状态”的预测。边界层转换之后，温度场的空间分布和统计性质遵守流体力学经典的湍流边界层“边壁法则”。研究湍流热对流边界层的转换将有助于理解和揭示在更大湍流尺度下（如地球物理和天体物理系统中）热对流传热规律和内部湍流流动性质。

关键词： 湍流；热对流；湍流边界层；边壁法则

1 国内外研究现状

研究固定边界附近流场由层流态向湍流态转换是湍流领域的经典问题之一 [1]，跟随流体力学 100 多年的发展，至今仍然是国际湍流研究领域的前沿热点课题，近十年的研究成果经常发表在 Nature、Science、Physical Review Letters 和流体力学顶级期刊上 [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]。由于在湍流热对流流场中同时存在速度和温度边界层，两者间的相互影响使得热对流边界层转换问题更加复杂。著名理论物理学家 Robert Kraichnan 的理论模型 [11] 指出当对流系统内部流场湍流度 (用 Ra 数来表征) 不断增加并超过临界值，边界层最终会在剪切力和浮力的共同作用下由层流向湍流态 (又被称为 Kraichnan“终极状态”) 转换。大尺度自然对流系统 (如大气对流、海洋对流、恒星对流层等流场系统)[12] 和大尺度工程对流系统 (如：核电站降温塔等) 理论上处于“终极状态”，而绝大多数实验数据和数值计算结果都远小于转换临界点 [13, 14]。由于流场的能量传输和流动混合性质在边界层转换前后都将发生本质的变化，所以研究转换何时发生以及处于“终极状态”中的湍流性质不仅是研究地球物理和天体物理湍流系统的重要基础课题，也与许多大型工业设计密切相关。

对于封闭系统，“终极状态”的转换点 Ra^* 依赖于流场宽高比和工作流体的 Pr 数。对于两者数值均在 1 附近的系统，GL 理论模型 [15, 16] 预测“终极状态”的转换点发生在 $Ra^* = 10^{14}$ 附近。因为绝大部分实验和数值模拟只能达到 $Ra = 10^{12}$ 或以下，所以对于 Kraichnan“终极状态”的直接验证非常困难。为了提高 Ra 数，Bérnard Castaing 在 Grenoble 的实验室使用低温氦气 (5K) 作为工作流体达到 $Ra = 10^{16}$ ，实验结果发现“终极状态”的转换点在 $Ra = 10^{11}$ 附近，比理论值低三个数量级 [17, 18]。Katepalli R. Sreenivasan 在 Oregon 的研究组重复了该实验，并将 Ra 数提高到 10^{17} ，实验结果没有发现转换发生 [19]。值得注意的是受限于实验条件，这两组实验中的 Pr 数都没有得到精确的控制：前者改变了 4 倍，而后者改变了 100 倍。如何在实验中达到高 Ra 数，同时保持 Pr 不变是验证湍流热对流“终极状态”的关键。

Eberhard Bodenschatz 和 Guenter Ahlers 在 Göttingen 的研究组使用室温 SF_6 气体作为工作流体, 通过将气体增压到 2 MPa 达到 $\text{Ra} = 4 \times 10^{15}$, 同时通过精确控制气体工作温度将 Pr 数控制在 0.79 – 0.86 的极小范围内, 排除了由流体 Pr 数变化而影响结论的可能。全套实验装置重 12 吨, 使用气体总重量 2000 公斤, 温度控制和测量精度 0.005K。实验结果发现 Kraichnan “终极状态” 的转换发生在 $2 \times 10^{13} < \text{Ra} < 5 \times 10^{14}$ [20, 21, 22], 和理论预测 [16] 十分吻合。

2 重要科学问题

2.1 改变 Pr 数对湍流边界层转换点 Ra^* 的影响

当对流场边界层雷诺数 $\text{Re}_s \equiv U\delta_u/\nu$ 不断增大并超过临界值, 层流边界层将向湍流边界层转换。其中 δ_u 是边界层厚度, 转换临界雷诺数 $\text{Re}_s^* = f(\text{Ra}^*, \text{Pr}^*)$ 是系统参数 Ra 和 Pr 的函数。理论预测 $\text{Re}_s^* \simeq 420$ [23], 所以当 Pr 发生改变, 转换点 Ra^* 也会相应的改变以维持 Re_s^* 不变。Grossmann 和 Lohse 的 GL 理论给出 $\text{Ra}^* \sim \text{Pr}^{3/2}$ [15, 16]。

实验上研究 Pr 数对转换点 Ra^* 的影响需要获得足够高的 Ra 数, 并且精确地控制 Pr 数。目前的实验主要通过两种方式来实现超高 Ra 数, 一种是用以接近汽-液临界点温度 (约为 5K) 的氦气作为工作流体, 另一种是用高压 SF_6 气体作为工作流体。采用低温氦气的原因是在接近汽-液临界温度时, 氦气的动量扩散和温度扩散能力变弱导致氦气的运动粘度 ν 和热扩散率 κ 很小。根据 Ra 数的定义式,

$$\text{Ra} = \frac{\beta g \Delta L^3}{\nu \kappa}, \quad (1)$$

其中 β 是等压热膨胀系数, g 是重力加速度, Δ 是 RBC 上下板温差, L 是上下板高度。从而在给定温差 Δ 条件下, ν 和 κ 越小, 达到的 Ra 数越大。如前所述, 两组使用低温氦气作为工作流体的实验得到的完全不同的结论: 转换发生在 $\text{Ra}^* \simeq 10^{11}$ [17, 18] 和没有发现转换发生 [19]。出现这一对矛盾结果可能是由两方面原因造成的: 其一, 接近汽-液临界点的低温氦气不满足 Boussinesq 近似使得转换提前发生; 其二, 低温氦气在接近汽-液临界点时 Pr 急剧增大, 使得转换点 Ra^* 的增速高于 Ra , 从而导致无法观察到转换现象的发生。

采用高压 SF_6 气体作为工作流体获得高 Ra 数是因为气体中

$$\text{Ra} = \frac{\beta g \Delta L^3 \rho^2 C_p}{\lambda \mu}, \quad (2)$$

其中 ρ 是气体密度, $\mu \equiv \rho\nu$ 是动力粘度, $\lambda \equiv \rho C_p \kappa$ 是导热系数, C_p 是定压比热容 [24]。在室温条件下工作气体远离汽化点, 此时 λ 和 μ 几乎不随压强 P 改变, 而气体密度近似正比与 P 。因此在给定温差 Δ 下, $\text{Ra} \sim \rho^2 \sim P^2 M^2$ (M 是气体分子量), 即 Ra 和 $(MP)^2$ 成正比。Göttingen 实验组 [21] 使用 $M=146 \text{ gmol}^{-1}$ 的 SF_6 气体当做工作流体, 并将其加压到 $P=2 \text{ MPa}$ 从而实现了极高的 Ra 数。通过精确控制 Pr 最后观察到了边界层的转换, 实验结果发现 $2 \times 10^{13} < \text{Ra}^* < 5 \times 10^{14}$, 与 GL 理论预测的转换点 Ra^* 相吻合。

受限于流体的物性参数, 符合 $\text{Pr} < 0.1$ 的单相流种类十分有限, 因此实验数据相对较少。最近 Jörg Schumacher 的研究组运用直接数值模拟对 $\text{Pr} = 0.021$ 的对流系统进行计算 [25]。数值模拟的结果得到在此 Pr 数条件下, 转换点 $\text{Ra}^* \simeq 10^{11}$ 。根据 GL 理论给出的关系 $\text{Ra}^* \sim \text{Pr}^{3/2}$ 将直接数值模拟的计算结果外延到 $\text{Pr} = 0.8$, 得到转换点 $\text{Ra}^* = 2 \times 10^{13}$, 与 Göttingen 研究组在 $\text{Pr} = 0.8$ 附近得到的实验结果非常吻合。相应地

将 Göttingen 实验组在转捩点 $Ra^* = 2 \times 10^{13}$ 测量的雷诺数 $Re^* \equiv UL/\nu = 3.2 \times 10^5$ 作为转捩雷诺数标准, 利用 GL 理论给出的 $Re(Ra, Pr)$ 关系我们可以计算出在 $Pr = 0.021$ 时达到同样的转捩雷诺数 $Re^* = 3.2 \times 10^5$, 需要的 $Ra^* = 9.7 \times 10^{10}$ [26], 与 DNS 结果一致。根据实验和数值计算的结果我们得到 $Ra^* \sim Pr^\alpha$, 指数 α 随 Ra 数增大而增大。当 $Ra \simeq 10^{13}$ 时 $\alpha = 1.43$ 。

2.2 边界层转捩前后热对流大尺度环流的动力学性质

由于边界层的不稳定性产生的羽流在热对流流场中形成与系统尺度相当的大尺度环流。大尺度环流是湍流热对流流动的一个重要标志, 也是内部流场热量流传输的快速通道。在大尺度环流面内, 热羽流总是沿着一侧上升, 冷羽流总是沿着另一侧下沉, 从而形成一个旋转的大尺度环流面。大尺度环流面具有两个特征速度: 旋转角速度 γ [27] 和进动角耗散速度 $\dot{\theta}$ [28]。根据这两个特征速度定义的无量纲雷诺数 $Re_U \simeq 2UR/\nu$ 和 $Re_{\dot{\theta}} \simeq 2\sqrt{D_{\theta}}/\nu$ 通常被用来描述大尺度环流的主要动力学性质。式中, $U = \gamma R$, θ 和 R 分别是大尺度环流的方向角和半径。

在边界层发生湍流态转捩前后, 大尺度环流的动力学性质也会发生相应的改变。最近的实验测量发现大尺度环流角向运动的动力学性质与 Ra 数的标度率在 $Ra = 2 \times 10^{13}$ 附近发生转捩 [29]。当 $Ra < Ra_1^* = 2 \times 10^{13}$ 时, 实验结果发现 $Re_{\dot{\theta}} \sim Ra^{0.28}$, 与热对流“经典状态”下的结果相一致 [28, 30]。当 $Ra > Ra_2^* = 8 \times 10^{13}$ 时, 实验结果发现新的标度率 $Re_{\dot{\theta}} \sim Ra^{0.4}$ 。在相同的热对流实验装置中实验还发现雷诺数 Re_U 有类似的转捩: 当 $Ra < Ra_1^* = 2 \times 10^{13}$ 时, $Re_U \sim Ra^{0.42}$; 当 $Ra > Ra_2^* = 8 \times 10^{13}$ 时, $Re_U \sim Ra^{0.5}$ [29]。在 $Ra_1^* < Ra < Ra_2^*$ 区间范围内, 两个雷诺数均不符合单一标度率, 表明系统正处于转捩过程中。对大尺度环流动力学性质的测量分析, 进一步证实热对流“终极状态”的存在。

2.3 边界层附近温度场的空间分布及其统计性质

湍流热对流边界层发生转捩之后, 热对流系统从“经典状态”转变为 Kraichnan“终极状态”。系统边界层附近温度场的空间分布及其统计性质也会发生相应的转变。“经典状态”下, 粘性边界层与热边界层共存, 粘性边界层保持层流状态, 但层流边界层内部存在一定涨落。定义无量纲时间平均温度为:

$$\Theta(z, r) = \frac{\langle T(z, r, t) \rangle - T_m}{\Delta T} \quad (3)$$

其中 r 为到中心线的距离, z 为离开边壁的距离, T_m 为平均温度, ΔT 为上下板温差。Göttingen 研究组 [31][32] 在 $Pr \approx 0.8$ 和 $Ra = 2 \times 10^{12}$ 下的实验结果如图1所示: 在垂直壁面方向上边界层可分为内区和外区, 内区又可细分为热底层、缓冲层和对数层。在热底层和缓冲层内, 平均温度 $\Theta(z)$ 与离开边壁的距离呈线性分布关系; 在对数层和外区, 平均温度 $\Theta(z)$ 与离开边壁的距离呈对数分布关系, 但在外区存在一定的偏差。实验发现, 靠近上板和下板的对数温度分布分别为 $\Theta = A(r) \ln(z/L) + B(r)$ 和 $\Theta = A'(r) \ln(1 - z/L) + B(r)$, 其中 A 和 A' 为对数项的幅值, B 为与 r 相关的系数。经典状态下, 上下板边界层温度分布关于中间平面对称且幅值 $-A$ 与 A' 的值相等, 对数层的厚度为 $0.1L$ (L 为粘性边界层厚度)。在平行壁面方向, 平均温度分布关系式中的对数项的幅值在中心位置处幅值近似为零且随着 r 的增大而增大, 在边壁处幅值最大。

当系统进入“终极状态”时, 边界层处于湍流状态, 此时边界层的平均温度 $\Theta(z)$ 与离开边壁的距离呈对数分布, 但相较于“经典状态”, “终极状态”下的对数层更宽。Göttingen 研究组在 $Pr \approx 0.8$ 和 $Ra = 9.9 \times 10^{14}$ 下的实验结果发现: 在垂直壁面方向, 内区和外区的界限不明显, 对数区几乎扩展到了中间平面。此外, 上下板

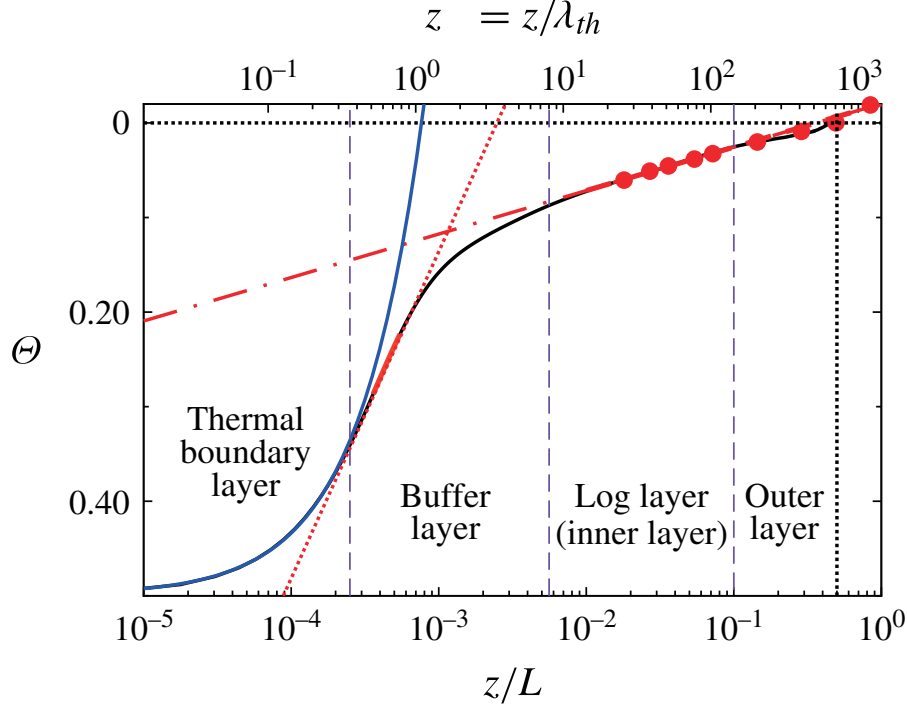


Figure 1: 经典状态下边界层处无量纲平均温度分布 [32]

边界层温度分布对称性减弱且 $-A/A' \simeq 0.95$ 。终极状态下平均温度的对数分布与剪切流动中著名的“边壁法则”（即湍流边界层附近的平均流线速度的对数分布率）极其相似，剪切流动中流线速度的对数分布来源于近壁面处的剪切不稳定性，剪切不稳定性导致了相关涡的形成，最终产生平均速度的对数分布关系。而在热边界层中主要是源于热边界层的不稳定性而形成的羽流，不同径向位置的羽流有不同的密度，从而产生了密度差进而形成了浮力，促使羽流上升或下降其平均温度对数分布不是由剪切流动产生的，而是来源于热边界层的不稳定性，这导致了羽流的形成，最终形成平均温度的对数分布。实验还发现羽流的上升和下降区域与大尺度环流的上升流以及下降流区域一致，这也说明了在“终极状态”下，不仅热边界层的平均温度的对数分布律与粘性边界层的平均速度的对数分布律相似，温度的涨落与速度的涨落也存在着一一对应的关系。

在“经典状态”和“终极状态”之间即中等 Ra 数下还存在一个“过渡状态”，在此状态下，边界层不是完全的湍流形态，但开始有明显的涨落。GL 理论 [15][33] 提出在中等 Ra 下，边界层的厚度 (L/H) 与 $Ra^{1/2}$ 呈正相关，且比例系数仅取决于 Pr 数。该理论的前提假设是边界层处于层流状态且平均温度的分布可以用 Prandtl-Blasius-Pohlhausen (PBP) 形式描述。理论和实验发现，在中等 Ra 数下，PBP 形式确定的温度和速度分布存在系统偏差，且随着 Ra 数的增大和 Pr 数的减小，偏差会逐渐加大。在“过渡状态”下时间平均温度分布也存在对数区，定义 $\xi = z/\delta$ ， δ 是热边界层的厚度。根据 Göttingen 研究组 $10^8 \leq Ra \leq 10^{12}$ 下的实验结果 [34] 发现，当 $\xi < 0.6$ ，温度分布符合 PBP 形式；当 $0.6 < \xi < 4$ 时，用 PBP 形式在拟合会存在一定误差；当 $\xi > 8$ 时平均温度与距离板的垂直距离呈对数分布。Shishkina 等人 [35] 的 DNS 的结果给出了两个不同 Pr 数大小下边界层的温度分布方程，对于 $Pr \gtrsim 1$ ，

$$\theta = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \log \frac{(1 + a\xi)^3}{1 + a\xi^3} + \frac{3}{2\pi} \arctan\left(\frac{4\pi}{9}\xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (4)$$

其中 $a = 2\pi/(3\sqrt{3}) \approx 1.2$

对于 $\text{Pr} \gg 1$,

$$\theta = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \log \frac{(1+a\xi)^3}{1+a\xi^3} + \frac{3}{2\pi} \arctan\left(\frac{8\pi}{27}\xi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\xi}{3(1+a(a\xi)^3)} + \frac{1}{4} \quad (5)$$

其中 $a = 4\pi/(9\sqrt{3}) \approx 0.8$ 。这是“过渡状态”下温度分布更为定量的结果。

3 发展趋势与合作需求

目前关于热对流“终极状态”的研究工作发展趋势主要有以下两个方向。其一是不断增加实验室所能达到的 Ra 数上限, 扩大热对流“终极状态”所在的参数空间, 在对流流场内部进行更多的测量, 研究在此状态下的流场性质。其二是在直接数值模拟计算研究领域达到并超越 Ra^* , 利用计算机可以计算出全流场的温度和速度数据, 研究对流边界层从层流到湍流转换的物理过程。从目前的实验技术手段来看, 用高压室温气体作为工作流体是达到高 Ra 数的最优方案。希望有相关工作背景的研究者有兴趣加入这一基础科学研究的工作。

References

- [1] O. Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels.*, Proc. R. Soc. Lond. **35**, 84 (1883).
- [2] M. Sano and K. Tamai, *A universal transition to turbulence in channel flow*, Nat. Phys. **12**, 249 (2016).
- [3] H.-Y. Shih, T.-L. Hsieh, and N. Goldenfeld, *Ecological collapse and the emergence of travelling waves at the onset of shear turbulence*, Nat. Phys. **12**, 245 (2016).
- [4] G. Lemoult, L. Shi, K. Avila, S. V. Jalikop, M. Avila, and B. Hof, *Directed percolation phase transition to sustained turbulence in Couette flow*, Nat. Phys. **12**, 254 (2016).
- [5] D. Barkley, *Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe.*, J. Fluid Mech. **803**, P1 (2016).
- [6] D. Barkley, B. Song, V. Mukund, G. Lemoult, M. Avila, and B. Hof, *The rise of fully turbulent flow.*, Nature **526**, 550 (2015).
- [7] M. Avila, F. Mellibovsky, N. Roland, and B. Hof, *Streamwise-localized solutions at the onset of turbulence in pipe flow.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 224502 (2013).
- [8] K. Avila, D. Moxey, A. de Lozar, M. Avila, D. Barkley, and B. Hof, *The Onset of Turbulence in Pipe Flow*, Science **333**, 192 (2011).
- [9] B. Hof, A. de Lozar, M. Avila, X. Tu, and T. M. Schneider, *Eliminating Turbulence in Spatially Intermittent Flows*, Science **327**, 1491 (2010).
- [10] B. Eckhardt, T. M. Schneider, B. Hof, and J. Westerweel, *Turbulence Transition in Pipe Flow*, Annu. Rev. Fluid Mech. **39**, 447–68 (2007).

- [11] R. H. Kraichnan, *Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number*, Phys. Fluids **5**, 1374 (1962).
- [12] E. A. Spiegel, *Convection in stars*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **9**, 323 (1971).
- [13] G. Ahlers, S. Grossmann, and D. Lohse, *Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection*, Rev. Mod. Phys. **81**, 503 (2009).
- [14] G. Ahlers, *Turbulent convection*, Physics **2**, 74 (2009).
- [15] S. Grossmann and D. Lohse, *Scaling in thermal convection: A unifying view*, J. Fluid. Mech. **407**, 27 (2000).
- [16] S. Grossmann and D. Lohse, *Thermal convection for large Prandtl number*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3316 (2001).
- [17] X. Chavanne, F. Chilla, B. Castaing, B. Hebral, B. Chabaud, and J. Chaussy, *Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3648 (1997).
- [18] X. Chavanne, F. Chilla, B. Chabaud, B. Castaing, and B. Hebral, *Turbulent Rayleigh-Bénard convection in gaseous and liquid He*, Phys. Fluids **13**, 1300 (2001).
- [19] J. J. Niemela, L. Skrbek, K. R. Sreenivasan, and R. Donnelly, *Turbulent convection at very high Rayleigh numbers*, Nature **404**, 837 (2000).
- [20] X. He, D. Funfschilling, H. Nobach, E. Bodenschatz, and G. Ahlers, *Transition to the Ultimate State of Turbulent Rayleigh-Bénard Convection*, Phys. Rev. Lett. **108**, 024502 (2012).
- [21] X. He, D. Funfschilling, E. Bodenschatz, and G. Ahlers, *Heat transport by turbulent Rayleigh-Bénard convection for $Pr \simeq 0.8$ and $4 \times 10^{11} \lesssim Ra \lesssim 2 \times 10^{14}$: Ultimate-state transition for aspect ratio $\Gamma = 1.00$* , New J. Phys. **14**, 063030 (2012).
- [22] G. Ahlers, X. He, D. Funfschilling, and E. Bodenschatz, *Heat transport by turbulent Rayleigh-Bénard convection for $Pr \simeq 0.8$ and $3 \times 10^{12} \lesssim Ra \lesssim 10^{15}$: Aspect ratio $\Gamma = 0.50$* , New J. Phys. **14**, 103012 (2012).
- [23] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics (3rd impression)* (Pergamon Press, Oxford, 1963).
- [24] G. Ahlers, D. Funfschilling, and E. Bodenschatz, *Transitions in heat transport by turbulent convection for $Pr = 0.8$ and $10^{11} \leq Ra \leq 10^{15}$* , New J. Phys. **11**, 123001 (2009).
- [25] J. Schumacher, V. Bandaru, A. Pandey, and J. Scheel, *Transitional boundary layers in low-Prandtl-number convection*, Phys. Rev. Fluids **1**, 084402 (2016).
- [26] G. Ahlers, E. Bodenschatz, and X. He, *Ultimate-state transition of turbulent Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. F **2**, (2017).
- [27] X. L. Qiu and P. Tong, *Large scale velocity structures in turbulent thermal convection*, Phys. Rev. E **64**, 036304 (2001).

- [28] E. Brown and G. Ahlers, *Rotations and cessations of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh-Bénard convection*, J. Fluid Mech. **568**, 351 (2006).
- [29] X. He, E. Bodenschatz, and G. Ahlers, *Azimuthal diffusion of the large-scale-circulation plane, and absence of significant non-Boussinesq effects, in turbulent convection near the ultimate-state transition.*, J. Fluid Mech. **791**, R3 (2016).
- [30] E. Brown and G. Ahlers, *Effect of the Earth’s Coriolis force on turbulent Rayleigh-Bénard convection in the laboratory*, Phys. Fluids **18**, 125108 (2006).
- [31] G. Ahlers, E. Bodenschatz, D. Funfschilling, S. Grossmann, X. He, D. Lohse, R. Stevens, and R. Verzicco, *Logarithmic temperature profiles in turbulent Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. Lett. **109**, 114501 (2012).
- [32] G. Ahlers, E. Bodenschatz, and X. He, *Logarithmic temperature profiles of turbulent Rayleigh-Bénard convection in the classical and ultimate state for a Prandtl number of 0.8*, J. Fluid Mech. **758**, 436 (2014).
- [33] R. J. A. M. Stevens, E. P. van der Poel, S. Grossmann, and D. Lohse, *The unifying theory of scaling in thermal convection: The updated prefactors*, J. Fluid Mech. **730**, 295 (2013).
- [34] Y. Wang, X. He, and P. Tong, *Boundary layer fluctuations and their effects on mean and variance temperature profiles in turbulent Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. Fluids **1**, (2016).
- [35] O. Shishkina, S. Horn, S. Wagner, and E. Ching, *Thermal Boundary Layer Equation for Turbulent Rayleigh-Bénard Convection*, Phys. Rev. Lett. **114**, 114302 (2015).