PX4 的 ECL EKF 公式推导及代码解析

CUHK 赵祯俊

August 29, 2019

Contents

1 引言

PX4 采用 ECL(Estimation and Control Library，估计与控制库）通过 EKF 来进行多传感器信息融合，ECL 的官网为 $https://dev.px4.io/zh/tutorials/tuning\_the\_ecl\_ekf.html$。

2 状态向量

PX4 的状态向量如下所示：

$$x^{24\times 1} = \begin{bmatrix} q & v & p & \Delta\theta_b & \Delta v_b & m_{NED} & m_b & v_{wind} \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

其中，q 表示 NED 系（北东地 North、East、Down 的世界坐标系）到 Body 系（IMU 的机体坐标系）的旋转向量的四元数，v 表示在 NED 系的机体速度，p 表示在 NED 系的机体位置，m_{NED} 为 earth 在 NED 系下的磁场向量，简称地磁，v_{wind} 为在北东 (NE) 方向上的风速。

另外，$\Delta\theta_b$ 为角度增量的偏移误差，单位为 rad，注意并非角速度 ω 的偏移误差，两者的关系为：

$$\Delta\theta_b = \omega_b \Delta t \tag{2}$$

Δv_b 为速度增量的偏移误差，单位为 m/s，注意并非加速度计 a 的偏移误差，两者的关系为:

$$\Delta v_b = a_b \Delta t \tag{3}$$

m_b 为磁力计的偏移误差, 称为罗差，即飞机上磁力计和磁北极的一个差角，磁力计的读数修正了罗差之后所得到的才是磁航向。

值得说明的是，$q = q_{B\leftarrow N}$ 是表示旋转向量的四元数，即表示将同一个系中的一个向量或者点，旋转到另一个地方。若我们希望得到从 B 系到 N 系的旋转矩阵，则可使用下面公式，详细可参考附录??。

$$R_{N\leftarrow B}\left({}_{vec}q\right) = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_0q_3+2q_1q_2 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_2q_3-2q_0q_1 \\ 2q_1q_3-2q_0q_2 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

3 可用的传感器

1. IMU：包含 Body 系下的陀螺仪角度增量和加速度计速度增量；
2. GPS：包含 NED 系下的速度和位置；
3. 气压计：提供 NED 系下的高度；
4. 磁力计：提供 NED 系下的偏航角。

4 IMU 传播

4.1 状态向量的传播

下面来分析每来一个 IMU 数据 $\Delta\theta_m$ 和 Δv_m，状态向量是如何从第 k 时刻传播到第 k+1 时刻的。对于三个 bias、earth 的磁场向量和风速是不随 IMU 变化的，因此我们只需讨论旋转、速度和位置。

4.1.1 四元数状态的传播

下面我们详细讨论在 PX4 中旋转四元数随着陀螺仪数据的传播过程。飞行器在旋转过程中存在的陀螺仪圆锥运动和地球自转运动，将会对陀螺仪的测量数据产生误差，可以采用梯度近似积分法去除这些误差，在 PX4 中忽略了陀螺仪圆锥运动，考虑了地球自转运动的影响，所以真实角增量计算公式如下所示：

$$\Delta\theta = \Delta\theta_m - \Delta\theta_b - \Delta\theta_{earth} - \Delta\theta_n \tag{5}$$

其中，$\Delta\theta$ 为真实的角增量，$\Delta\theta_m$ 为陀螺仪测量得到的角增量，$\Delta\theta_b$ 为角增量的偏移误差，$\Delta\theta_n$ 为角增量的噪声，即 $\Delta\theta_n = n_\omega \cdot \Delta t$，$n_\omega$ 为陀螺仪的角速度噪声，Δt 为 IMU 测量数据的帧间间隔。

将修正之后的角度增量转化为四元数增量 Δq_k，再使用下列公式，即可得到从 k 时刻到 k+1 时刻旋转向量的四元数传播，详细推导可参考附录 6.1。

$$q_{k+1} = q_k \otimes \Delta q_k \tag{6}$$

4.1.2 速度状态的传播

速度增量解算时含有旋转效应和划桨效应误差，需要对旋转效应和划桨效应进行补偿，一般采用的方法是梯度近似积分法。在低精度的小型无人机系统中也可以忽略这些影响。在 PX4 中忽略以上误差得到真实速度增量计算公式如下所示：

$$\Delta v = \Delta v_m - \Delta v_b - \Delta v_n \tag{7}$$

其中，Δv 为真实的速度增量，$\Delta v_m - \Delta v_n$ 为加速度计测量得到的速度增量，Δv_b 为速度增量的偏移误差，Δv_n 为速度增量的噪声，Δt 为 IMU 测量数据的帧间间隔。

那么，可以得到从 k 时刻到 k+1 时刻的速度传播，详细推导可参考附录 6.2。

$$v_{k+1} = v_k + R_{N\leftarrow B} \cdot \Delta v + g_N \cdot \Delta t \tag{8}$$

其中，$R_{N\leftarrow B}$ 为机体坐标系到 NED 坐标系的旋转矩阵，$g_N = [0,\ 0,\ g]^T$ 为 NED 坐标系下的重力加速度。

4.1.3 位置状态的传播

位置增量计算的过程中同样存在旋转效应和划桨效应误差，也需要通过梯度近似积分法进行处理。在 PX4 中同样忽略以上误差，得到从 k 时刻到 k+1 时刻的位置传播，详细推导可参考附录 6.3。

$$p_{k+1} = p_k + \frac{1}{2} \cdot (v_k + v_{k+1}) \cdot \Delta t \tag{9}$$

4.1.4 其他状态的传播

如前所述，三个 bias、earth 的磁场向量和风速是不随 IMU 变化的。

$$\Delta\theta_b^{k+1} = \Delta\theta_b^k \tag{10}$$
$$\Delta v_b^{k+1} = \Delta v_b^k \tag{11}$$
$$m_N^{k+1} = m_N^k \tag{12}$$
$$m_B^{k+1} = m_B^k \tag{13}$$
$$v_{wind}^{k+1} = v_{wind}^k \tag{14}$$

4.2 协方差的传播

下面我们来讨论状态向量的不确定度传播，即协方差传播，首先我们需要写出状态向量的转移矩阵，如下形式，为了简洁，我们省略了部分上下标：

$$x_{k+1} = F \cdot x_k + G \cdot n_k \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} q \\ v \\ p \\ \Delta\theta_b \\ \Delta v_b \\ m_{NED} \\ m_B \\ v_{wind} \end{bmatrix}_{k+1} = F \cdot \begin{bmatrix} q \\ v \\ p \\ \Delta\theta_b \\ \Delta v_b \\ m_{NED} \\ m_B \\ v_{wind} \end{bmatrix}_k + G \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_n \\ \Delta v_n \end{bmatrix}_k \tag{16}$$

根据前面推导的第 k+1 时刻的状态向量公式 (6)、(8)、(9) 和 (10)-(14)，分别对第 k 时刻的状态 x_k 求 Jacobian 可得 F 和 G，详细推导可参考附录 6.4：

$$F^{24\times 24} = \begin{bmatrix} F_{q_k}^{q_{k+1}} & 0_{4\times 3} & 0_{4\times 3} & F_{\Delta\theta_b^k}^{q_{k+1}} & 0_{4\times 3} & 0_{4\times 3} & 0_{4\times 3} & 0_{4\times 2} \\ F_{q_k}^{v_{k+1}} & I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & F_{\Delta v_b^k}^{v_{k+1}} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 2} \\ 0_{3\times 4} & F_{v_k}^{p_{k+1}} & I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 2} \\ 0_{3\times 4} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 2} \\ 0_{3\times 4} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 2} \\ 0_{3\times 4} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 2} \\ 0_{3\times 4} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} & 0_{3\times 2} \\ 0_{2\times 4} & 0_{2\times 3} & 0_{2\times 3} & 0_{2\times 3} & 0_{2\times 3} & 0_{2\times 3} & 0_{2\times 3} & I_{2\times 2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$G^{24\times 6} = \begin{bmatrix} G_{\Delta\theta_n^k}^{q_{k+1}} & 0_{4\times 3} \\ 0_{3\times 3} & G_{\Delta v_n^k}^{v_{k+1}} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ 0_{2\times 3} & 0_{2\times 3} \end{bmatrix} \tag{18}$$

根据公式 (15) 和 (18)，可以得到状态误差矩阵：

$$Q = G \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_{nx}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\theta_{ny}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\theta_{nz}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta v_{nx}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta v_{ny}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta v_{nz}^2 \end{bmatrix} \cdot G^T \tag{19}$$

所以根据公式 (17) 和 (19)，状态向量的协方差传播公式为：

$$P_{k+1|k} = F \cdot P_{k|k} \cdot F^T + Q + N_{process} \tag{20}$$

其中，$N_{process}$ 为除 IMU 噪声以外的滤波器状态过程噪声，这些噪声可以直接进入到推导的协方差预测方程中。该过程噪声决定了 IMU 偏差误差的估计率。

$$N_{process}^{24\times24} = \begin{bmatrix} 0_{4\times4} & 0_{4\times3} & 0_{4\times3} & 0_{4\times3} & 0_{4\times3} & 0_{4\times3} & 0_{4\times3} & 0_{4\times2} \\ 0_{3\times4} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times4} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times4} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \sigma^2_{\Delta\theta_b} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times4} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \sigma^2_{\Delta v_b} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times4} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \sigma^2_{m_N} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times4} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \sigma^2_{m_B} & 0_{3\times2} \\ 0_{2\times4} & 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & 0_{2\times2} \end{bmatrix}$$

其中，$\sigma^2_{\Delta\theta_b}$，$\sigma^2_{\Delta v_b}$，$\sigma^2_{m_N}$，$\sigma^2_{m_B}$ 分别为陀螺仪偏差的过程噪声协方差，加速度计偏差的过程噪声协方差，地球磁场的过程噪声协方差，磁力计偏差的过程噪声协方差。

5 更新

5.1 GPS

GPS 更新分为两部分，分别是 NED 方向速度和 NE 方向位置的更新。

GPS 的观测方程为：

$$z_{GPS} = H_{GPS} \cdot x + R_{GPS} \tag{21}$$

其中，

$$z_{GPS}^{5\times1} = [v_N,\ v_E,\ v_D,\ p_N,\ p_E]^T$$

GPS 的观测相对于状态向量 x 的观测状态转移矩阵，即对应的观测矩阵 Jacobian 为：

$$H_{GPS}^{5\times24} = \frac{\partial z_{GPS}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0_{3\times4} & I_{3\times3} & 0_{3\times2} & 0 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{2\times4} & 0_{2\times3} & I_{2\times2} & 0 & 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & 0_{2\times2} \end{bmatrix}$$

R_{GPS} 为当前时刻 GPS 观测的不确定度，即 GPS 的协方差。

得到 GPS 的观测和 Jacobian 后，结合公式 (20)，可以直接套用 EKF 的更新公式：

$$S = H_{GPS} \cdot P_{k+1|k} \cdot H_{GPS}^T + R_{GPS} \tag{22}$$

$$K = P_{k+1|k} \cdot H_{GPS}^T \cdot S^{-1} \tag{23}$$

$$x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K \cdot (z_{GPS} - H_{GPS} \cdot x_{k+1|k}) \tag{24}$$

$$P_{k+1|k+1} = [I - K \cdot H_{GPS}] \cdot P_{k+1|k} \tag{25}$$

其中，z_{GPS} 为 GPS 速度和位置的观测值，$H_{GPS} \cdot x_{k+1|k}$ 为速度和位置的预测值。

5.2 气压计

气压计更新是进行高度的更新。

气压计的观测方程为：

$$z_{Baro} = H_{Baro} \cdot x + R_{Baro} \tag{26}$$

其中，

$$z_{Baro}^{1\times1} = h$$

气压计的观测相对于状态向量 x 的观测状态转移矩阵，即对应的观测矩阵 Jacobian 为：

$$H_{Baro}^{1\times24} = \frac{\partial z_{Baro}}{\partial x} = [0_{1\times4},\ 0_{1\times3},\ 0_{1\times2},\ 1,\ 0_{1\times3},\ 0_{1\times3},\ 0_{1\times3},\ 0_{1\times3},\ 0_{1\times2}]$$

R_{Baro} 为当前时刻气压计观测的不确定度，即气压计的协方差。

得到气压计的观测和 Jacobian 后，结合公式 (20)，可以直接套用 EKF 的更新公式（注意：气压计的高度和 D 方向位置状态的符号相反）：

$$S = H_{Baro} \cdot P_{k+1|k} \cdot H_{Baro}^T + R_{Baro} \tag{27}$$

$$K = P_{k+1|k} \cdot H_{Baro}^T \cdot S^{-1} \tag{28}$$

$$x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K \cdot (-z_{Baro} - H_{Baro} \cdot x_{k+1|k}) \tag{29}$$

$$P_{k+1|k+1} = [I - K \cdot H_{Baro}] \cdot P_{k+1|k} \tag{30}$$

其中，z_{Baro} 为气压计高度的观测值，$H_{Baro} \cdot x_{k+1|k}$ 为高度的预测值。

5.3 磁力计

磁力计更新分为两种情况，第一种方法是用三轴磁力计的数据作为三维观测，第二种方法是直接将磁力计的数据转换为磁偏角作为一维观测。

5.3.1 三轴磁场的更新

三轴磁场的更新根据是否有磁偏角的约束分为两个阶段。

1. 无磁偏角约束的三轴磁场的融合

如果不考虑磁偏角，也就是理论上假设地球的地理南北极与地磁南北极重合。

磁力计的计算公式为：

$$m = R_{B\leftarrow N} \cdot m_{NED} + m_b \tag{31}$$

所以，磁力计的观测方程为：

$$z_{Mag} = H_{Mag} \cdot x + R_{Mag} \tag{32}$$

其中，将三轴磁力计的数据作为三维观测，即：

$$z_{Mag}^{3\times1} = m$$

磁力计的观测相对于状态向量 x 的观测状态转移矩阵，即对应的观测矩阵 Jacobian 为（详细推导可参考附录 6.5.1）：

$$H_{Mag}^{3\times24} = \frac{\partial z_{Mag}}{\partial x} = [H_q^m,\ 0_{3\times3},\ 0_{3\times3},\ 0_{3\times3},\ 0_{3\times3},\ H_{m_{NED}}^m,\ H_{m_b}^m,\ 0_{3\times2}]$$

R_{Mag} 为当前时刻磁力计磁场观测值的不确定度，即磁力计磁场的协方差。

得到磁力计的观测和 Jacobian 后，结合公式 (20)，可以直接套用 EKF 的更新公式：

$$S = H_{Mag} \cdot P_{k+1|k} \cdot H_{Mag}^T + R_{Mag} \tag{33}$$

$$K = P_{k+1|k} \cdot H_{Mag}^T \cdot S^{-1} \tag{34}$$

$$x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K \cdot (z_{Mag} - m_{pred}) \tag{35}$$

$$P_{k+1|k+1} = [I - K \cdot H_{Mag}] \cdot P_{k+1|k} \tag{36}$$

其中，z_{Mag} 为磁力计磁场的观测值，$m_{pred} = R_{k+1|k}^{B\leftarrow N} \cdot m_{k+1|k}^{NED} + m_{k+1|k}^{b}$ 为磁场的预测值。

2. 磁偏角约束的融合

事实上，地球的地理南北极与地磁南北极并不重合，也就是真北和磁北是有一定夹角的，这个夹角称为磁偏角。因此如果增加了磁偏角的约束，则需要在融合完三轴磁力计测量值的基础上进行此部分的融合。这部分融合是在没有绝对位置或速度测量的情况下用于保持正确的航向，例如使用光流。

磁偏角的计算公式为：

$$\psi_{declination} = \arctan\left(\frac{m_E}{m_N}\right) \tag{37}$$

所以，磁偏角的观测方程为：

$$z_{\psi_{declination}} = H_{\psi_{declination}} \cdot x + R_{\psi_{declination}} \tag{38}$$

其中，

$$z_{\psi_{declination}}^{1\times 1} = \psi_{declination} = \arctan\left(\frac{m_E}{m_N}\right)$$

磁偏角的观测相对于状态向量 x 的观测状态转移矩阵，即对应的观测矩阵 Jacobian 为（详细推导可参考附录 6.5.1）：

$$H_{\psi_{declination}}^{1\times 24} = \frac{\partial z_{\psi_{declination}}}{\partial x} = [0_{1\times 4},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 3},\ H_{m_{NED}}^{\psi_{declination}},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 2}]$$

$R_{\psi_{declination}}$ 为当前时刻磁偏角的不确定度，即磁偏角的协方差。

得到磁偏角的观测和 Jacobian 后，结合公式 (20)，可以直接套用 EKF 的更新公式：

$$S = H_{\psi_{declination}} \cdot P_{k+1|k} \cdot H_{\psi_{declination}}^T + R_{\psi_{declination}} \tag{39}$$

$$K = P_{k+1|k} \cdot H_{\psi_{declination}}^T \cdot S^{-1} \tag{40}$$

$$x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K \cdot (z_{\psi_{declination}} - \psi_{pred}^{declination}) \tag{41}$$

$$P_{k+1|k+1} = [I - K \cdot H_{\psi_{declination}}] \cdot P_{k+1|k} \tag{42}$$

其中，$z_{\psi_{declination}}$ 为当地磁偏角的值，$\psi_{pred}^{declination} = \arctan\left(\frac{m_{k+1|k}^E}{m_{k+1|k}^N}\right)$ 为磁偏角的预测值。

5.3.2 真航向的更新

首先需要将磁力计的数据转换到 NED 坐标系下，等价于转换为了真航向，即：

$$m_{NED} = R_{N\leftarrow B} \cdot m \tag{43}$$

其中，$m = [m_X,\ m_Y,\ m_Z]$ 为磁力计的测量值。

磁偏角的计算公式为：

$$\psi = \arctan\left(\frac{m_E}{m_N}\right) \tag{44}$$

所以，磁偏角的观测方程为：

$$z_{\psi} = H_{\psi} \cdot x + R_{\psi} \tag{45}$$

其中，根据公式 (43)，将磁力计在 NED 坐标系下的输出转换为磁偏角作为一维观测，即，

$$z_{\psi}^{1\times 1} = \psi = \arctan\left(\frac{m_E}{m_N}\right)$$

磁偏角的观测相对于状态向量 x 的观测状态转移矩阵，即对应的观测矩阵 Jacobian 为（详细推导可参考附录 6.5.1）：

$$H_{\psi}^{1\times 24} = \frac{\partial z_{\psi}}{\partial x} = [H_q^{\psi},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 3},\ 0_{1\times 2}]$$

R_{ψ} 为当前时刻真航向观测值的不确定度，即真航向的协方差。

得到磁偏角的观测和 Jacobian 后，结合公式 (20)，可以直接套用 EKF 的更新公式：

$$S = H_{\psi} \cdot P_{k+1|k} \cdot H_{\psi}^T + R_{\psi} \tag{46}$$

$$K = P_{k+1|k} \cdot H_{\psi}^T \cdot S^{-1} \tag{47}$$

$$x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K \cdot (z_{\psi} - \psi_{pred}) \tag{48}$$

$$P_{k+1|k+1} = [I - K \cdot H_{\psi}] \cdot P_{k+1|k} \tag{49}$$

其中，z_{ψ} 为当地磁偏角的值，这里 $z_{\psi} = z_{\psi_{declination}}$，$\psi_{pred} = \arctan\left[\frac{\left(R_{k+1|k}^{N\leftarrow B}\cdot m\right)_E}{\left(R_{k+1|k}^{N\leftarrow B}\cdot m\right)_N}\right]$ 为磁偏角的预测值，$m = [m_X,\ m_Y,\ m_Z]$ 为磁力计的测量值。

5.4 光流

光流传感器的更新主要是进行速度的更新。

视线角速率是自主导航中一个非常重要的参数，它在光流中的计算公式为：

$$\omega = \left[\omega_x,\ \omega_y\right]^T = \left[\frac{v_y}{range},\ -\frac{v_x}{range}\right]^T \tag{50}$$

其中，$v_B = R_{B\leftarrow N} \cdot v = \left[v_x,\ v_y,\ v_z\right]^T$ 为机体速度，range 为沿光流传感器视场中心测量的透镜到地面的范围，是一个定值。

所以，光流的观测方程为：

$$z_{flow} = H_{flow} \cdot x + R_{flow} \tag{51}$$

其中，

$$z_{flow}^{2\times 1} = \omega \tag{52}$$

光流的观测相对于状态向量 x 的观测状态转移矩阵，即对应的观测矩阵 Jacobian 为（详细推导可参考附录??）：

$$H_{flow}^{2\times 24} = \frac{\partial z_{flow}}{\partial x} = [H_q^{\omega},\ H_v^{\omega},\ 0_{2\times 3},\ 0_{2\times 3},\ 0_{2\times 3},\ 0_{2\times 3},\ 0_{2\times 3},\ 0_{2\times 2}]$$

R_{flow} 为当前时刻光流传感器观测的不确定度，即视线角速率的协方差。得到光流的观测和 Jacobian 后，结合公式

(20)，可以直接套用 EKF 的更新公式：

$$S = H_{flow} \cdot P_{k+1|k} \cdot H_{flow}^T + R_{flow} \tag{53}$$
$$K = P_{k+1|k} \cdot H_{flow}^T \cdot S^{-1} \tag{54}$$
$$x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K \cdot (z_{flow} - \omega_{pred}) \tag{55}$$
$$P_{k+1|k+1} = [I - K \cdot H_{flow}] \cdot P_{k+1|k} \tag{56}$$

其中，z_{flow} 为光流测量值计算得到的视线角速率，$\omega_{pred} = \left[\frac{\left(R_{k+1|k}^{B\leftarrow N} \cdot v_{k+1|k}\right)_y}{range},\ -\frac{\left(R_{k+1|k}^{B\leftarrow N} \cdot v_{k+1|k}\right)_x}{range} \right]^T$ 为机体坐标系下速度的预测值。

5.5 ZED 相机

ZED 相机视觉里程计的更新主要是进行速度的更新。

机体速度的计算公式为：

$$v_B = R_{B\leftarrow N} \cdot v \tag{57}$$

其中，$v_B = [v_x,\ v_y,\ v_z]$ 为机体坐标系下的相对速度，$v = [v_n,\ v_e,\ v_d]$ 为 NED 坐标系下的机体速度。

所以，ZED 相机的观测方程为：

$$z_{ZED} = H_{ZED} \cdot x + R_{ZED} \tag{58}$$

其中，将 ZED 相机的位置测量值转换为速度值，将其作为观测量，即：

$$z_{ZED}^{3\times 1} = \frac{p_{ZED}}{\Delta t_{ZED}} = v_B \tag{59}$$

ZED 相机的观测相对于状态向量 x 的观测状态转移矩阵，即对应的观测矩阵 Jacobian 为（详细推导可参考附录 6.5.3）：

$$H_{ZED}^{3\times 24} = \frac{\partial z_{ZED}}{\partial x} = [H_q^{v_B},\ H_v^{v_B},\ 0_{3\times 3},\ 0_{3\times 3},\ 0_{3\times 3},\ 0_{3\times 3},\ 0_{3\times 3},\ 0_{3\times 2}]$$

R_{ZED} 为当前时刻 ZED 相机观测的不确定度，即相对速度的协方差。

得到 ZED 相机的观测和 Jacobian 后，结合公式 (20)，可以直接套用 EKF 的更新公式：

$$S = H_{ZED} \cdot P_{k+1|k} \cdot H_{ZED}^T + R_{ZED} \tag{60}$$
$$K = P_{k+1|k} \cdot H_{ZED}^T \cdot S^{-1} \tag{61}$$
$$x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + K \cdot (z_{ZED} - v_{pred}) \tag{62}$$
$$P_{k+1|k+1} = [I - K \cdot H_{ZED}] \cdot P_{k+1|k} \tag{63}$$

其中，z_{ZED} 为 ZED 相机位置测量值计算得到的速度值，$v_{pred} = R_{k+1|k}^{B\leftarrow N} \cdot v_{k+1|k}$ 为机体坐标系下速度的预测值。

6 附录

6.1 PX4 中四元数的传播方程

陀螺的输出一般情况下是采样时间间隔内的角增量，为了避免噪声的微分放大，一般直接用角增量来确定四元数，而不是将角增量转化为角速度。设 k 时刻的机体坐标系为 B_k，NED 坐标系为 N_k；k+1 时刻的机体坐标系为

B_{k+1}，NED 坐标系为 N_{k+1}。记 B_k 到 B_{k+1} 的旋转四元数为 Δq_k，N_k 到 N_{k+1} 的旋转四元数为 Δp_k，N_k 到 B_k 的旋转四元数为 q_k，N_{k+1} 到 B_{k+1} 的旋转四元数为 q_{k+1}，称 q_k 和 q_{k+1} 分别为 k 时刻和 k+1 时刻旋转向量的四元数。那么姿态四元数递推关系为:

$$q_{k+1} = \Delta p_k^* \otimes q_k \otimes \Delta q_k \tag{64}$$

其中 Δp_k^* 表示 Δp_k 的共轭四元数。

由于姿态更新的周期一般很短，那么 NED 坐标系的变化非常缓慢，即 $\Delta p_k \approx 1$，所以 $q_{k+1} = q_k \otimes \Delta q_k$，将 Δq_k 称为 k 时刻到 k+1 时刻的姿态变化四元数，记 Φ 为对应的等效旋转矢量。对于高输出频率的 MEMS 惯性传感器，可以用常数拟合该段时间内的角速度，即采用单子样旋转矢量姿态算法求解等效旋转向量，则有:

$$\Phi = \Delta\theta = \left[\Delta\theta_x,\ \Delta\theta_y,\ \Delta\theta_z\right]^T = \left[\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z\right] \cdot \Delta t \tag{65}$$

其中，$\Delta\theta$ 为 k 时刻到 k+1 时刻的角增量，ω_x，ω_y，ω_z 分别为该时间段内陀螺仪测量得到的三轴角速度。记 $\|\Delta\theta\|$ 为等效旋转向量的模长，即 $\|\Delta\theta\| = \sqrt{\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2}$，则该旋转向量对应的四元数为:

$$\begin{aligned}\Delta q_k &= \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Delta\theta}{\|\Delta\theta\|}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \\ &= \left[\cos\tfrac{\Delta\theta}{2},\ \tfrac{\Delta\theta_x}{\|\Delta\theta\|}\sin\tfrac{\Delta\theta_x}{2},\ \tfrac{\Delta\theta_y}{\|\Delta\theta\|}\sin\tfrac{\Delta\theta_y}{2},\ \tfrac{\Delta\theta_z}{\|\Delta\theta\|}\sin\tfrac{\Delta\theta_z}{2}\right]^T\end{aligned} \tag{66}$$

k 时刻到 k+1 时刻的时间段内角增量 $\Delta\theta$ 很小，可以得到如下近似:

$$\Delta q_k \approx \left[1,\ \tfrac{\Delta\theta_x}{2},\ \tfrac{\Delta\theta_y}{2},\ \tfrac{\Delta\theta_z}{2}\right]^T \tag{67}$$

那么由四元数的乘法性质可以得到:

$$q_{k+1} = q_k \otimes \Delta q_k = M(\Delta q_k) \cdot q_k \tag{68}$$

其中，

$$\begin{aligned}M(\Delta q_k) &= \begin{bmatrix} \Delta q_0 & -\Delta q_1 & -\Delta q_2 & -\Delta q_3 \\ \Delta q_1 & \Delta q_0 & \Delta q_3 & -\Delta q_2 \\ \Delta q_2 & -\Delta q_3 & \Delta q_0 & \Delta q_1 \\ \Delta q_3 & \Delta q_2 & -\Delta q_1 & \Delta q_0 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta\theta_x}{2} & -\frac{\Delta\theta_y}{2} & -\frac{\Delta\theta_z}{2} \\ \frac{\Delta\theta_x}{2} & 1 & \frac{\Delta\theta_z}{2} & -\frac{\Delta\theta_y}{2} \\ \frac{\Delta\theta_y}{2} & -\frac{\Delta\theta_z}{2} & 1 & \frac{\Delta\theta_x}{2} \\ \frac{\Delta\theta_z}{2} & \frac{\Delta\theta_y}{2} & -\frac{\Delta\theta_x}{2} & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

但是，实际测量过程中陀螺仪存在零偏现象，因此将陀螺仪零偏作为状态变量的一部分，记 $\Delta\theta_b = \left[\Delta\theta_{bx},\ \Delta\theta_{by},\ \Delta\theta_{bz}\right]^T$ 为陀螺仪在 k 时刻到 k+1 时刻的时间段内测得的角增量的偏差，$\Delta\theta_m = \left[\Delta\theta_{mx},\ \Delta\theta_{my},\ \Delta\theta_{mz}\right]^T$ 为测得的角增量，$\Delta\theta_n = \left[\Delta\theta_{nx},\ \Delta\theta_{ny},\ \Delta\theta_{nz}\right]^T$ 为陀螺仪角增量的噪声，则真实的角增量为:

$$\Delta\theta = \Delta\theta_m - \Delta\theta_b - \Delta\theta_n \tag{69}$$

$$\begin{aligned}&= \left[\Delta\theta_x,\ \Delta\theta_y,\ \Delta\theta_z\right]^T \\ &= \left[\Delta\theta_{mx} - \Delta\theta_{bx} - \Delta\theta_{nx},\ \Delta\theta_{my} - \Delta\theta_{by} - \Delta\theta_{ny},\ \Delta\theta_{mz} - \Delta\theta_{bz} - \Delta\theta_{nz}\right]^T\end{aligned} \tag{70}$$

所以，结合公式 (70)，公式 (68) 为：

$$q_{k+1} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta\theta_{mx}-\Delta\theta_{bx}-\Delta\theta_{nx}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{my}-\Delta\theta_{by}-\Delta\theta_{ny}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{mz}-\Delta\theta_{bz}-\Delta\theta_{nz}}{2} \\ \frac{\Delta\theta_{mx}-\Delta\theta_{bx}-\Delta\theta_{nx}}{2} & 1 & \frac{\Delta\theta_{mz}-\Delta\theta_{bz}-\Delta\theta_{nz}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{my}-\Delta\theta_{by}-\Delta\theta_{ny}}{2} \\ \frac{\Delta\theta_{my}-\Delta\theta_{by}-\Delta\theta_{ny}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{mz}-\Delta\theta_{bz}-\Delta\theta_{nz}}{2} & 1 & \frac{\Delta\theta_{mx}-\Delta\theta_{bx}-\Delta\theta_{nx}}{2} \\ \frac{\Delta\theta_{mz}-\Delta\theta_{bz}-\Delta\theta_{nz}}{2} & \frac{\Delta\theta_{my}-\Delta\theta_{by}-\Delta\theta_{ny}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{mx}-\Delta\theta_{bx}-\Delta\theta_{nx}}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot q_k \tag{71}$$

6.2 PX4 中速度的传播方程

在 NED 坐标系中，速度方程为：

$$\dot{v_N} = R_{N\leftarrow B} \cdot a_m + g_N - \omega_{ie} \times (\omega_{ie} \times p_N) - (2\omega_{ie} + \omega_{en}) \times v_N \tag{72}$$

其中，$v_N = [v_N,\ v_E,\ v_D]$ 为机体相对于地球的速度在 NED 坐标系下的表示，$R_{B\leftarrow N}$ 为从机体坐标系到 NED 坐标系的旋转矩阵，a_m 为加速度计测量得到的加速度，$g_N = [0,\ 0,\ g]$ 为 NED 坐标系下的重力加速度，ω_{ie} 为 NED 坐标系下地球的自转角速度，假设地球的自转角速度为 Ω，则有：$\omega_{ie} = [\Omega\cos L,\ 0,\ -\Omega\sin L]^T$，L 为飞行器所处的纬度，$p_N$ 为地球中心到飞行器当前所处位置的位置矢量，ω_{en} 为机体相对于地球的圆锥运动在 NED 坐标系下的表示，其值可以由下式求得：

$$\omega_{en} = \left[\frac{v_E}{R_0+h},\ -\frac{v_N}{R_0+h},\ -\frac{v_E\tan L}{R_0+h}\right] \tag{73}$$

其中，R_0 为地球的半径，h 为飞行器所处的高度。

由于地球自转角速度约为 $7.2921\times10^{-5}rad/s$，地球的半径约为 6378km，对于小型无人机的应用场合，机体运动速度较小，因此 ω_{ie} 和 ω_{en} 的数值都很小，相对于传感器本身的噪声可以忽略不计。

将速度方程进行离散化可以得到：

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k + R_{N\leftarrow B} \cdot a_m \cdot \Delta t + g_N \cdot \Delta t \\ &= v_k + R_{N\leftarrow B} \cdot \Delta v + g_N \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{74}$$

其中，$\Delta v = [\Delta v_x,\ \Delta v_y,\ \Delta v_z]$ 为飞行器在 k 时刻到 k+1 时刻的速度增量。

与陀螺仪类似，加速度计也存在零偏现象，且零偏随着时间推移和工作环境变化等因素的影响会缓慢偏移，记 $\Delta v_b = [\Delta v_{bx},\ \Delta v_{by},\ \Delta v_{bz}]^T$ 为加速度计在 k 时刻到 k+1 时刻的时间段内测得的速度增量的偏差，$\Delta v_m = [\Delta v_{mx},\ \Delta v_{my},\ \Delta v_{mz}]^T$ 为测得的速度增量，$\Delta v_n = [\Delta v_{nx},\ \Delta v_{ny},\ \Delta v_{nz}]^T$ 为加速度计速度增量的噪声，则真实的速度增量为：

$$\begin{aligned} \Delta v &= \Delta v_m - \Delta v_b - \Delta v_n \\ &= [\Delta v_x,\ \Delta v_y,\ \Delta v_z]^T \\ &= [\Delta v_{mx} - \Delta v_{bx} - \Delta v_{nx},\ \Delta v_{my} - \Delta v_{by} - \Delta v_{ny},\ \Delta v_{mz} - \Delta v_{bz} - \Delta v_{nz}]^T \end{aligned} \tag{75}$$

6.3 PX4 中位置的传播方程

对于小型无人机所搭载的低成本组合导航系统，一般使用相对位置进行导航，并忽略旋转效应和划桨效应误差的影响，可以得到位置传播方程：

$$p_{k+1} = p_k + v_k \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot [R_{N\leftarrow B} \cdot (a_m - a_b) + g_N] \cdot \Delta t^2 \tag{76}$$

再结合公式 (3)，(74) 和 (75)

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k + \frac{1}{2} \cdot v_k \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot (v_k + R_{N\leftarrow B} \cdot \Delta v + g_N \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \\
&= p_k + \frac{1}{2} \cdot (v_k + v_{k+1}) \cdot \Delta t
\end{aligned} \tag{77}
$$

6.4 协方差传播中的 F 和 G 计算

6.4.1 F 的计算

1. $F_{q_k}^{q_{k+1}}$
根据公式 (71)，可以得到关于四元数的状态转移矩阵，即第 k+1 帧的旋转相对于第 k 帧的 Jacobian 为：

$$
\begin{aligned}
F_{q_k}^{q_{k+1}} &= \frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_k} \\
&= \begin{bmatrix} \Delta q_0 & -\Delta q_1 & -\Delta q_2 & -\Delta q_3 \\ \Delta q_1 & \Delta q_0 & \Delta q_3 & -\Delta q_2 \\ \Delta q_2 & -\Delta q_3 & \Delta q_0 & \Delta q_1 \\ \Delta q_3 & \Delta q_2 & -\Delta q_1 & \Delta q_0 \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta\theta_{mx}-\Delta\theta_{bx}-\Delta\theta_{nx}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{my}-\Delta\theta_{by}-\Delta\theta_{ny}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{mz}-\Delta\theta_{bz}-\Delta\theta_{nz}}{2} \\ \frac{\Delta\theta_{mx}-\Delta\theta_{bx}-\Delta\theta_{nx}}{2} & 1 & \frac{\Delta\theta_{mz}-\Delta\theta_{bz}-\Delta\theta_{nz}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{my}-\Delta\theta_{by}-\Delta\theta_{ny}}{2} \\ \frac{\Delta\theta_{my}-\Delta\theta_{by}-\Delta\theta_{ny}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{mz}-\Delta\theta_{bz}-\Delta\theta_{nz}}{2} & 1 & \frac{\Delta\theta_{mx}-\Delta\theta_{bx}-\Delta\theta_{nx}}{2} \\ \frac{\Delta\theta_{mz}-\Delta\theta_{bz}-\Delta\theta_{nz}}{2} & \frac{\Delta\theta_{my}-\Delta\theta_{by}-\Delta\theta_{ny}}{2} & -\frac{\Delta\theta_{mx}-\Delta\theta_{bx}-\Delta\theta_{nx}}{2} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{78}
$$

2. $F_{\Delta\theta_b^k}^{q_{k+1}}$
根据公式 (71)，可以得到四元数关于角增量偏差的状态转移矩阵，即第 k+1 帧的旋转相对于陀螺仪第 k 帧角增量偏差的 Jacobian 为：

$$
F_{\Delta\theta_b^k}^{q_{k+1}} = \frac{\partial q_{k+1}}{\partial \Delta\theta_b^k} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \\ -\frac{q_0}{2} & \frac{q_3}{2} & -\frac{q_2}{2} \\ -\frac{q_3}{2} & -\frac{q_0}{2} & \frac{q_1}{2} \\ \frac{q_2}{2} & -\frac{q_1}{2} & -\frac{q_0}{2} \end{bmatrix} \tag{79}
$$

3. $F_{q_k}^{v_{k+1}}$
根据公式 (4) 和 (74)，可以得到速度关于四元数的状态转移矩阵，即第 k+1 帧的速度相对于第 k 帧的旋转的 Jacobian 为：

$$
\begin{aligned}
F_{q_k}^{v_{k+1}} &= \frac{\partial v_{k+1}}{\partial q_k} \\
&= \frac{\partial \left[v_k + R_{N\leftarrow B} \cdot \Delta v + g_N \cdot \Delta t\right]}{\partial q_k} \\
&= \frac{\partial (R_{N\leftarrow B} \cdot \Delta v)}{\partial q_k}
\end{aligned} \tag{80}
$$

其中，分子部分可写成：

$$
\begin{aligned}
R_{N\leftarrow B}\cdot\Delta v &= \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_0q_3+2q_1q_2 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_2q_3-2q_0q_1 \\ 2q_1q_3-2q_0q_2 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)\Delta v_x + \left(2q_1q_2-2q_0q_3\right)\Delta v_y + \left(2q_0q_2+2q_1q_3\right)\Delta v_z \\ \left(2q_0q_3+2q_1q_2\right)\Delta v_x + \left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)\Delta v_y + \left(2q_2q_3-2q_0q_1\right)\Delta v_z \\ \left(2q_1q_3-2q_0q_2\right)\Delta v_x + \left(2q_0q_1+2q_2q_3\right)\Delta v_y + \left(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\right)\Delta v_z \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

结合公式 (75) 和上式，公式 (80) 为：

$$
\begin{aligned}
F_{q_k}^{v_{k+1}} &= 2\begin{bmatrix} q_0\Delta v_x - q_3\Delta v_y + q_2\Delta v_z & q_1\Delta v_x + q_2\Delta v_y + q_3\Delta v_z & -q_2\Delta v_x + q_1\Delta v_y + q_0\Delta v_z & -q_3\Delta v_x - q_0\Delta v_y + q_1\Delta v_z \\ q_3\Delta v_x + q_0\Delta v_y - q_1\Delta v_z & q_2\Delta v_x - q_1\Delta v_y - q_0\Delta v_z & q_1\Delta v_x + q_2\Delta v_y + q_3\Delta v_z & q_0\Delta v_x - q_3\Delta v_y + q_2\Delta v_z \\ -q_2\Delta v_x + q_1\Delta v_y + q_0\Delta v_z & q_3\Delta v_x + q_0\Delta v_y - q_1\Delta v_z & -q_0\Delta v_x + q_3\Delta v_y - q_2\Delta v_z & q_1\Delta v_x + q_2\Delta v_y + q_3\Delta v_z \end{bmatrix} \\
&= 2\left[\Phi_1\cdot(\Delta v_m-\Delta v_b),\ \Phi_2\cdot(\Delta v_m-\Delta v_b),\ \Phi_3\cdot(\Delta v_m-\Delta v_b)\right]^T
\end{aligned} \tag{81}
$$

其中，

$$
\Phi_1 = \begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \\ -q_3 & -q_0 & q_1 \end{bmatrix},\ \Phi_2 = \begin{bmatrix} q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \end{bmatrix},\ \Phi_3 = \begin{bmatrix} -q_2 & q_1 & q_0 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}
$$

4. $F_{\Delta v_b^k}^{v_{k+1}}$

根据公式 (4)、(74) 和 (75)，可以得到速度关于速度增量偏差的状态转移矩阵，即第 k+1 帧的速度相对于加速度计第 k 帧速度增量偏差的 Jacobian 为：

$$
\begin{aligned}
F_{\Delta v_b^k}^{v_{k+1}} = \frac{\partial v_{k+1}}{\partial \Delta v_b^k} &= \frac{\partial\left[v_k + R_{N\leftarrow B}\cdot\Delta v + g_N\cdot\Delta t\right]}{\partial \Delta v_b} \\
&= \frac{\partial\left[v_k + R_{N\leftarrow B}\cdot(\Delta v_m-\Delta v_b) + g_N\cdot\Delta t\right]}{\partial \Delta v_b} \\
&= -R_{N\leftarrow B}
\end{aligned} \tag{82}
$$

5. $F_{v_k}^{p_{k+1}}$

根据公式 (76)，可以得到位置关于速度的状态转移矩阵，即第 k+1 帧的位置相对于第 k 帧的速度的 Jacobian 为：

$$
F_{v_k}^{p_{k+1}} = \frac{\partial\left(p_k + v_k\cdot\Delta t\right)}{\partial v_k} = I_{3\times3}\cdot\Delta t \tag{83}
$$

6.4.2 G 的计算

1. $G_{\Delta\theta_n^k}^{q_{k+1}}$

根据公式 (71)，可以得到四元数关于角增量噪声的状态转移矩阵，即第 k+1 帧的旋转相对于陀螺仪第 k 帧角增量噪声的协方差矩阵为：

$$
G_{\Delta\theta_n^k}^{q_{k+1}} = \frac{\partial q_{k+1}}{\partial \Delta\theta_n^k} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{2} & \frac{q_2}{2} & \frac{q_3}{2} \\ -\frac{q_0}{2} & \frac{q_3}{2} & -\frac{q_2}{2} \\ -\frac{q_3}{2} & -\frac{q_0}{2} & \frac{q_1}{2} \\ \frac{q_2}{2} & -\frac{q_1}{2} & -\frac{q_0}{2} \end{bmatrix} \tag{84}
$$

2. $G_{\Delta v_n^k}^{v_{k+1}}$

根据公式 (4)、(74) 和 (75)，可以得到速度关于速度增量噪声的状态转移矩阵，即第 k+1 帧的速度相对于加速度计第 k 帧速度增量噪声的协方差矩阵为：

$$
\begin{aligned}
G_{\Delta v_n^k}^{v_{k+1}} = \frac{\partial v_{k+1}}{\partial \Delta v_n^k} &= \frac{\partial \left[v_k + R_{N\leftarrow B} \cdot \Delta v + g_N \cdot \Delta t\right]}{\partial \Delta v_n} \\
&= \frac{\partial \left[v_k + R_{N\leftarrow B} \cdot (\Delta v_m - \Delta v_b - \Delta v_n) + g_N \cdot \Delta t\right]}{\partial \Delta v_n} \\
&= -R_{N\leftarrow B}
\end{aligned}
\tag{85}
$$

6.5 更新过程的 Jacobian 推导

这里我们来详细推导各种传感器的观测相对于状态向量的观测状态转移矩阵，即观测矩阵 Jacobian。

6.5.1 磁力计更新的观测矩阵 Jacobian

1. H_q^m

根据公式 (31)，可以得到磁力计的观测相对于四元数的观测状态转移矩阵，即磁场测量值相对于旋转的 Jacobian 为：

$$
\begin{aligned}
H_q^m &= \frac{\partial m}{\partial q} \\
&= \frac{\partial \left(R_{B\leftarrow N} \cdot m_{NED} + m_b\right)}{\partial q} \\
&= \frac{\partial (R_{N\leftarrow B}^T \cdot m_{NED})}{\partial q}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

其中，分子部分可写成：

$$
\begin{aligned}
R_{N\leftarrow B}^T \cdot m_{NED} &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_0q_3 + 2q_1q_2 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ 2q_0q_2 + 2q_1q_3 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_N \\ m_E \\ m_D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\right) m_N + \left(2q_0q_3 + 2q_1q_2\right) m_E + \left(2q_1q_3 - 2q_0q_2\right) m_D \\ \left(2q_1q_2 - 2q_0q_3\right) m_N + \left(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2\right) m_E + \left(2q_0q_1 + 2q_2q_3\right) m_D \\ \left(2q_0q_2 + 2q_1q_3\right) m_N + \left(2q_2q_3 - 2q_0q_1\right) m_E + \left(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2\right) m_D \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此公式 (86) 为：

$$
H_q^m = 2 \begin{bmatrix} q_0m_N + q_3m_E - q_2m_D & q_1m_N + q_2m_E + q_3m_D & -q_2m_N + q_1m_E - q_0m_D & -q_3m_N + q_0m_E + q_1m_D \\ -q_3m_N + q_0m_E + q_1m_D & q_2m_N - q_1m_E + q_0m_D & q_1m_N + q_2m_E + q_3m_D & -q_0m_N - q_3m_E + q_2m_D \\ q_2m_N - q_1m_E + q_0m_D & q_3m_N - q_0m_E - q_1m_D & q_0m_N + q_3m_E - q_2m_D & q_1m_N + q_2m_E + q_3m_D \end{bmatrix}
\tag{87}
$$

2. $H_{m_{NED}}^m$

根据公式 (31)，可以得到磁力计的观测相对于地球磁场向量的观测状态转移矩阵，即磁场测量值相对于地球磁

场的 Jacobian 为：

$$\begin{aligned}
H_{m_{NED}}^{m} &= \frac{\partial m}{\partial m_{NED}} \\
&= \frac{\partial \left(R_{B\leftarrow N} \cdot m_{NED} + m_b\right)}{\partial m_{NED}} \\
&= R_{B\leftarrow N} = R_{N\leftarrow B}^{T} \\
&= \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_0q_3+2q_1q_2 & 2q_1q_3-2q_0q_2 \\ 2q_1q_2-2q_0q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_0q_1+2q_2q_3 \\ 2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_2q_3-2q_0q_1 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{88}$$

3. $H_{m_b}^{m}$

根据公式 (31)，可以得到磁力计的观测相对于机体磁场偏差的观测状态转移矩阵，即磁场测量值相对于磁场偏差的 Jacobian 为：

$$\begin{aligned}
H_{m_B}^{m} &= \frac{\partial m}{\partial m_b} \\
&= \frac{\partial \left(R_{B\leftarrow N} \cdot m_{NED} + m_b\right)}{\partial m_b} \\
&= I_{3\times 3}
\end{aligned} \tag{89}$$

3. $H_{m_{NED}}^{\psi_{declination}}$

根据公式 (37)，可以得到磁偏角的观测相对于地球磁场向量的观测状态转移矩阵，即磁偏角测量值相对于地球磁场的 Jacobian 为：

$$\begin{aligned}
H_{m_{NED}}^{\psi_{declination}} &= \frac{\partial \psi_{declination}}{\partial m_{NED}} = \frac{\partial \left[\arctan\left(\frac{m_E}{m_N}\right)\right]}{\partial m_{NED}} = \left[\frac{\partial \psi_{declination}}{\partial m_N},\ \frac{\partial \psi_{declination}}{\partial m_E},\ 0\right] \\
&= \left[\frac{-m_E}{m_N^2+m_E^2},\ \frac{m_N}{m_N^2+m_E^2},\ 0\right]
\end{aligned} \tag{90}$$

4. H_q^{ψ}

根据公式 (4)，可以将公式 (43) 展开为：

$$\begin{aligned}
m_{NED} = \begin{bmatrix} m_N \\ m_E \\ m_D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2-2q_0q_3 & 2q_0q_2+2q_1q_3 \\ 2q_0q_3+2q_1q_2 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_2q_3-2q_0q_1 \\ 2q_1q_3-2q_0q_2 & 2q_0q_1+2q_2q_3 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_X \\ m_Y \\ m_Z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right) m_X + \left(2q_1q_2-2q_0q_3\right) m_Y + \left(2q_0q_2+2q_1q_3\right) m_Z \\ \left(2q_0q_3+2q_1q_2\right) m_X + \left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right) m_Y + \left(2q_2q_3-2q_0q_1\right) m_Z \\ \left(2q_1q_3-2q_0q_2\right) m_X + \left(2q_0q_1+2q_2q_3\right) m_Y + \left(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\right) m_Z \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{91}$$

那么，磁偏角的观测相对于四元数的观测状态转移矩阵，等价于真航向测量值相对于旋转的 Jacobian 为：

$$
\begin{aligned}
H_q^{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial q} &= \frac{\partial\left[\arctan\left(\frac{m_E}{m_N}\right)\right]}{\partial q} = \frac{\frac{\partial m_E}{\partial q}\cdot m_N - \frac{\partial m_N}{\partial q}\cdot m_E}{m_N^2+m_E^2} \\
&= 2\begin{bmatrix}
\frac{\frac{q_3m_X+q_0m_Y-q_1m_Z}{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z}-\frac{(q_0m_X-q_3m_Y+q_2m_Z)\left[(2q_0q_3+2q_1q_2)m_X+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)m_Y+(2q_2q_3-2q_0q_1)m_Z\right]}{\left[\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z\right]^2}}{1+\left[\frac{(2q_0q_3+2q_1q_2)m_X+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)m_Y+(2q_2q_3-2q_0q_1)m_Z}{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z}\right]^2} \\
\frac{\frac{q_2m_X-q_1m_Y-q_0m_Z}{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z}-\frac{(q_1m_X+q_2m_Y+q_3m_Z)\left[(2q_0q_3+2q_1q_2)m_X+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)m_Y+(2q_2q_3-2q_0q_1)m_Z\right]}{\left[\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z\right]^2}}{1+\left[\frac{(2q_0q_3+2q_1q_2)m_X+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)m_Y+(2q_2q_3-2q_0q_1)m_Z}{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z}\right]^2} \\
\frac{\frac{q_1m_X+q_2m_Y+q_3m_Z}{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z}-\frac{(-q_2m_X+q_1m_Y+q_0m_Z)\left[(2q_0q_3+2q_1q_2)m_X+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)m_Y+(2q_2q_3-2q_0q_1)m_Z\right]}{\left[\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z\right]^2}}{1+\left[\frac{(2q_0q_3+2q_1q_2)m_X+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)m_Y+(2q_2q_3-2q_0q_1)m_Z}{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z}\right]^2} \\
\frac{\frac{q_0m_X-q_3m_Y+q_2m_Z}{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z}-\frac{(-q_3m_X-q_0m_Y+q_1m_Z)\left[(2q_0q_3+2q_1q_2)m_X+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)m_Y+(2q_2q_3-2q_0q_1)m_Z\right]}{\left[\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z\right]^2}}{1+\left[\frac{(2q_0q_3+2q_1q_2)m_X+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)m_Y+(2q_2q_3-2q_0q_1)m_Z}{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)m_X+(2q_1q_2-2q_0q_3)m_Y+(2q_0q_2+2q_1q_3)m_Z}\right]^2}
\end{bmatrix}^T
\end{aligned}
\tag{92}
$$

6.5.2 光流更新的观测矩阵 Jacobian

1. H_q^{ω}

根据公式 (4)，可以将 v_B 展开为：

$$
\begin{aligned}
v_B = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} &= R_{B\leftarrow N}\cdot v = R_{N\leftarrow B}^T\cdot v \\
&= \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_0q_3+2q_1q_2 & 2q_1q_3-2q_0q_2 \\ 2q_1q_2-2q_0q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_0q_1+2q_2q_3 \\ 2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_2q_3-2q_0q_1 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_n \\ v_e \\ v_d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)v_n+(2q_0q_3+2q_1q_2)\,v_e+(2q_1q_3-2q_0q_2)\,v_d \\ (2q_1q_2-2q_0q_3)\,v_n+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)v_e+(2q_0q_1+2q_2q_3)\,v_d \\ (2q_0q_2+2q_1q_3)\,v_n+(2q_2q_3-2q_0q_1)\,v_e+\left(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\right)v_d \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{93}
$$

所以，根据公式 (93) 得到的 v_x 和 v_y，将公式 (5.4) 展开为：

$$
\begin{aligned}
\omega &= \left[\frac{v_y}{range}, -\frac{v_x}{range}\right]^T \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(2q_1q_2-2q_0q_3)v_n+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)v_e+(2q_0q_1+2q_2q_3)v_d}{range} \\ -\frac{\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)v_n+(2q_0q_3+2q_1q_2)v_e+(2q_1q_3-2q_0q_2)v_d}{range} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{94}
$$

根据上式，可以得到光流的观测相对于四元数的观测转移矩阵，即视线角速率测量值相对于旋转的 Jacobian

为：

$$H_q^{\omega}=2\begin{bmatrix}\frac{-q_3v_n+q_0v_e+q_1v_d}{range} & \frac{q_2v_n-q_1v_e+q_0v_d}{range} & \frac{q_1v_n+q_2v_e+q_3v_d}{range} & \frac{-q_0v_n-q_3v_e+q_2v_d}{range}\\ -\frac{q_0v_n+q_3v_e-q_2v_d}{range} & -\frac{q_1v_n+q_2v_e+q_3v_d}{range} & -\frac{-q_2v_n+q_1v_e-q_0v_d}{range} & -\frac{-q_3v_n+q_0v_e+q_1v_d}{range}\end{bmatrix} \tag{95}$$

2. H_v^{ω}

根据公式 (94)，可以得到光流的观测相对于 NED 坐标系下机体速度的观测转移矩阵，即视线角速率测量值相对于 NED 系下机体速度的 Jacobian 为：

$$\begin{aligned}H_v^{\omega}&=\frac{\partial v_B}{\partial v}\\ &=\frac{\partial\left(R_{B\leftarrow N}\cdot v\right)}{\partial v}\\ &=R_{B\leftarrow N}=R_{N\leftarrow B}^T\\ &=\begin{bmatrix}\frac{2q_1q_2-2q_0q_3}{range} & \frac{q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2}{range} & \frac{2q_0q_1+2q_2q_3}{range}\\ -\frac{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}{range} & -\frac{2q_0q_3+2q_1q_2}{range} & -\frac{2q_1q_3-2q_0q_2}{range}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{96}$$

6.5.3 ZED 相机更新的观测矩阵 Jacobian

1. $H_q^{v_B}$

根据公式 (57)，可以得到 ZED 相机的观测相对于四元数的观测状态转移矩阵，即机体速度测量值相对于旋转的 Jacobian 为：

$$\begin{aligned}H_q^{v_B}&=\frac{\partial v_B}{\partial q}\\ &=\frac{\partial\left(R_{B\leftarrow N}\cdot v\right)}{\partial q}\\ &=\frac{\partial(R_{N\leftarrow B}^T\cdot v)}{\partial q}\end{aligned} \tag{97}$$

其中，分子部分可写成：

$$\begin{aligned}R_{N\leftarrow B}^T\cdot v&=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_0q_3+2q_1q_2 & 2q_1q_3-2q_0q_2\\ 2q_1q_2-2q_0q_3 & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2q_0q_1+2q_2q_3\\ 2q_0q_2+2q_1q_3 & 2q_2q_3-2q_0q_1 & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_n\\ v_e\\ v_d\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\left(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2\right)v_n+\left(2q_0q_3+2q_1q_2\right)v_e+\left(2q_1q_3-2q_0q_2\right)v_d\\ \left(2q_1q_2-2q_0q_3\right)v_n+\left(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2\right)v_e+\left(2q_0q_1+2q_2q_3\right)v_d\\ \left(2q_0q_2+2q_1q_3\right)v_n+\left(2q_2q_3-2q_0q_1\right)v_e+\left(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\right)v_d\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此公式 (97) 为：

$$H_q^{v_B}=2\begin{bmatrix}q_0v_n+q_3v_e-q_2v_d & q_1v_n+q_2v_e+q_3v_d & -q_2v_n+q_1v_e-q_0v_d & -q_3v_n+q_0v_e+q_1v_d\\ -q_3v_n+q_0v_e+q_1v_d & q_2v_n-q_1v_e+q_0v_d & q_1v_n+q_2v_e+q_3v_d & -q_0v_n-q_3v_e+q_2v_d\\ q_2v_n-q_1v_e+q_0v_d & q_3v_n-q_0v_e-q_1v_d & q_0v_n+q_3v_e-q_2v_d & q_1v_n+q_2v_e+q_3v_d\end{bmatrix} \tag{98}$$

2. $H_v^{v_B}$

根据公式 (57)，可以得到 ZED 相机的观测相对于 NED 坐标系下机体速度的观测状态转移矩阵，即机体速度

测量值相对于 NED 系下机体速度的 Jacobian 为：

$$
\begin{aligned}
H_v^{v_B} &= \frac{\partial v_B}{\partial v} \\
&= \frac{\partial \left(R_{B\leftarrow N} \cdot v\right)}{\partial v} \\
&= R_{B\leftarrow N} = R_{N\leftarrow B}^T \\
&= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_0q_3 + 2q_1q_2 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ 2q_0q_2 + 2q_1q_3 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{99}
$$