

盲审编号：201512X07007

学校代码	10406
分 类 号	TP391.72
密 级	
学 号	130070104006

题目 欧氏空间 $R^3$ 及单位球面 $S^3$ 中  
一类含参样条曲线的研究

作者 赵桔烔

学科、专业 应用数学

指 导 教 师 杨军

申请学位日期 2016. 06

分类号：TP391.72

学校代码：10406  
学 号：130070104006

南昌航空大学  
硕 士 学 位 论 文  
(学位研究生)

欧氏空间 $R^3$ 及单位球面 $S^3$ 中  
一类含参样条曲线的研究

硕士研究生： 赵桔焱  
导 师： 杨 军  
申请学位级别： 硕 士  
学科、专业： 应用数学  
所在单位： 数学与信息科学学院  
答辩日期： 2016 年 6 月  
授予学位单位： 南昌航空大学

# **Research on spline curves with parameters in the Euclidean space $R^3$ and the unit sphere $S^3$**

A Dissertation

Submitted for the Degree of Master

On Applied Mathematics

**By Zhao Jie Han**

Under the Supervision of

**Yang Jun**

(College of Mathematics and Information Sciences)

Nanchang Hangkong University, Nanchang, China

June, 2016

## 摘 要

参数曲线曲面的几何造型方法一直是计算机辅助几何设计 (CAGD) 的重要研究问题之一, 在该领域有广阔的发展空间。基于参数曲线曲面的设计方法在航空航天产品开发、三维动画制作、影视特效处理等方面得到了越来越广泛的应用。

为提高造型方法的灵活性, 要求在不改变控制顶点的情况下对曲线进行修改。一类代表性的方法是采用非均匀有理 B 样条(NURBS), 通过修改其中的权因子改变曲线形状。但是 NURBS 存在计算复杂、权因子的修改与形状改变之间的关系不够明确等问题。另一类代表性的方法是在基函数中引入形状参数, 通过改变形状参数调整曲线形状, 这类方法具有操作灵活、计算简单、形状改变可预测等优点, 因而成为当前 CAGD 研究领域的热点之一。本文首先利用一类广义 Bernstein 基函数研究了广义 Bézier 曲线间的  $G^1$  及  $G^2$  光滑拼接问题, 然后构造出欧氏空间  $R^3$  中带形状参数的 Gamma 样条曲线、带形状参数的 Beta 样条曲线。其次, 考虑到在实际应用中, 有可能会对曲线附加一些特殊约束。例如在球状物体数控加工中, 要求刀具轨迹位于球面上; 在计算机动画设计中, 要求对关键帧朝向进行光滑插值; 在机器人路径规划中, 要求机器人运动平稳等。由于带有约束条件, 这一类问题用普通的  $R^3$  中 Bézier 曲线或样条曲线处理较为复杂。因此利用四元数方法构造了单位球面  $S^3$  上的含形状参数的样条曲线。得到的含参曲线不仅具有原曲线的诸多优良性质, 而且具有更加灵活的形状可调性。最后, 通过数值实验讨论了不同形状参数的取值对曲线形状的影响, 验证了算法的可行性与有效性。

**关键词:** 形状参数, Gamma 样条, Beta 样条, 四元数, Bézier 曲线, 曲线设计, 插值

## Abstract

Geometric modeling with parametric curves and surfaces is one of the important research problems in computer-aided geometric design (CAGD). In this field there is a wide range of development space. Design method based on the parametric curves and surfaces has been widely used in aerospace product development, 3D animation, video effects processing and so on.

In order to improve the flexibility of modeling methods, requirements in case of no changing the control points to modify the curve should be met. A representative method is to use the Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS), by modifying the weight factors to change the shape of the curve. But there are some problems in the NURBS method such as the calculation is complicated, the relationship is not very clear between changing the weight factors and modifying the shape. Another approach is to introduce shape parameters into the basis functions and the shape of a curve is adjusted by changing the shape parameters. This method has the advantages of flexible operations, small calculated amount, predictable change in shape etc, and thus become one of the hot research field in CAGD. Firstly, the  $G^1$  and  $G^2$  smooth connection problems are studied by using a class of generalized Bernstein basis function in this paper. Then a Gamma spline with parameters and a Beta spline with shape parameters in the Euclidean space  $R^3$  are constructed respectively. Secondly, taking into account the practical application, there may be some special additional constraints in constructing curves. For example, in spherical objects CNC machining, the toolpath is located in a sphere; In computer animation, it is required to be smooth interpolation of three-dimensional object orientation keyframes; In Robot path planning, robot requires smooth movement, etc. Because with the constraints, handling these problems are more complex with the conventional Bézier curve or spline curve in  $R^3$ . Therefore, quaternion method is introduced to construct spherical spline with shape parameters on the unit sphere  $S^3$ . The resulting curve with parameters not only has many excellent properties of the original curve but also has a more flexible adjustability. Finally, the impact of different values of shape parameters is discussed and the feasibility and effectiveness of the algorithm are verified by numerical experiments.

**Key words:** Shape parameter, Gamma-spline, Beta-spline, Quaternion, Bézier curve, Curve Design, Interpolation

南昌航空大学

## 目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 录.....	IV
第一章 绪论.....	1
1.1 三次 $\lambda\mu-B$ 基的定义及性质.....	1
1.2 几种含有参数的基函数.....	2
1.2.1 两组含参数的五次多项式基函数.....	2
1.2.2 带多个形状参数的调配函数.....	3
1.2.3 带形状参数的三次调配函数.....	4
1.2.4 带局部形状参数的调配函数.....	5
1.3 四元数预备知识.....	6
1.3.1 四元数的历史及意义.....	6
1.3.2 四元数基础知识介绍.....	7
1.4 论文研究的主要内容.....	8
1.5 本章小结.....	8
第二章 欧氏空间 $R^3$ 中构造含参样条曲线.....	9
2.1 多参数 Gamma 样条曲线的构造.....	9
2.1.1 引言.....	9
2.1.2 多参数 Gamma 样条曲线构造方法.....	9
2.1.3 计算实例与分析.....	14
2.1.4 小结.....	15
2.2 多参数 Beta 样条曲线的构造.....	16
2.2.1 双参数贝齐尔曲线的 $G^2$ Beta 约束.....	16
2.2.2 多参数 $G^2$ 三次 Beta 样条曲线.....	19
2.2.3 小结.....	20
2.3 本章小结.....	20
第三章 单位球面 $S^3$ 中含参样条曲线插值.....	21
3.1 含参球面 Bézier 曲线构造.....	22
3.1.1 广义 Bernstein 基函数.....	22
3.1.2 含参球面 Bézier 曲线.....	22
3.2 球面 Bézier 样条曲线插值.....	25
3.2.1 曲线光滑拼接.....	25
3.2.2 样条曲线插值.....	26
3.3 数值计算实例.....	26
3.4 双参数三次 Bézier 曲线构造四元数曲线.....	28

3.4.1 双参数 Bézier 四元数曲线..... 28

3.4.2 双参数 Bézier 四元数曲线的高阶导数表达式..... 29

3.5 本章小结.....29

第四章 总结与展望..... 30

4.1 主要研究成果.....30

4.1 展 望.....30

参考文献..... 31

攻读硕士学位期间发表的论文..... 34

致 谢..... 35

南昌航空大学



## 第一章 绪论

在几何造型中，基函数的选择具有决定性的作用，然而对于一组给定的控制点，Bézier 曲线曲面的形状是唯一确定的<sup>[1]</sup>。有理 Bézier 方法或非均匀有理 B 样条 (NURBS) 方法的权因子可以用于调控曲线曲面的形状，但权因子的选取及求导、积分运算较为复杂<sup>[1]</sup>。

Bézier 曲线具有良好的几何性质：例如当控制多边形是凸多边形时，Bézier 曲线也是凸的；控制生成的曲线位于凸包内，曲线形状和控制多边形形状近似等<sup>[2]</sup>。这些性质使得 Bézier 曲线特别适用于交互式设计，因此在计算机辅助设计/制造 (CAD/CAM) 中得到了广泛应用。此外，Bézier 曲线可利用德卡斯特里奥 (DeCasteljau) 算法进行高效计算，进而一些实用的几何造型算法采用了将曲线转化为分段 Bézier 曲线进行处理<sup>[3][4][5]</sup>。因此通过修改基函数提高曲线曲面的形状调控能力成为近年来 CAGD 领域的一个研究热点。

虽然 Bézier 曲线具有诸多优点，但由于采用了 Bernstein 基函数，因此不具有局部调控性<sup>[6][7][8][9]</sup>，改变曲线的一个控制顶点，整条曲线都将发生变化，而一旦控制顶点确定，形状将完全确定。例如在实际应用中，有可能会对曲线附加一些特殊约束：在球状物体数控加工中，要求刀具轨迹位于球面上；在计算机动画设计中，要求对关键帧朝向进行光滑插值<sup>[10]</sup>；在机器人路径规划中，要求机器人运动平稳<sup>[11]</sup>等。由于带有约束条件，这一类问题用普通的 Bézier 曲线或样条曲线曲面处理较为复杂。

为了更加灵活地调控形状，引入形状参数对现有问题进行研究。如吴晓勤等<sup>[12]</sup>在欧氏空间  $R^3$  中定义了带形状参数的两类多项式曲线，研究讨论了它们的性质，它是四次 Bézier 曲线的一种扩展。本文在现有方法的基础上，基于文献<sup>[13][14]</sup>中定义的一种双参数的基函数，分别构造了各类样条曲线和球面曲线，构造后的曲线具有良好的形状调控功能以及计算简便等特点，使该类样条曲线曲面的形状调控更加灵活方便。

### 1.1 三次 $\lambda\mu-B$ 基的定义及性质

定义<sup>[14]</sup>：对  $t \in [0, 1]$ ;  $\lambda, \mu \in [-3, 1]$ ，称如下关于  $t$  的多项式

$$\begin{cases} b(0,3,t) = (1-\lambda t)(1-t)^3 \\ b(1,3,t) = (3+\lambda-\lambda t)(1-t)^2 t \\ b(2,3,t) = (3+\mu t)(1-t)t^2 \\ b(3,3,t) = (1-\mu+\mu t)t^3 \end{cases},$$

为带双参数  $\lambda, \mu$  的基函数，简称为三次  $\lambda\mu-B$  基。该基函数可以看成是广义 Bernstein 基函数<sup>[6]</sup>的特例。

三次  $\lambda\mu-B$  基函数的一些基本性质：

(1) 非负性：

$$b_{j,3} \geq 0, j = 0, 1, 2, 3.$$

(2) 规范性：

$$\sum_{j=0}^3 b_{j,3}(t) = 1.$$

(3) 端点性质：

$$b_{j,3}(0) = \begin{cases} 1, j=0 \\ 0, \text{其他} \end{cases},$$

$$b_{j,3}(1) = \begin{cases} 1, j=3 \\ 0, \text{其他} \end{cases}.$$

(4) 单调性：固定  $t$ ， $b_{0,3}(t)$  关于  $\lambda$  单调减少， $b_{3,3}(t)$  关于  $\mu$  单调减少； $b_{1,3}(t)$  关于  $\lambda$  单调增加， $b_{2,3}(t)$  关于  $\mu$  单调增加。

(5) 拟对称性：当  $\lambda = \mu$  时有

$$b_{j,3}(t) = b_{3-j,3}(1-t), j = 0, 1, 2, 3,$$

特殊地，当  $\lambda = \mu = 0$  时， $b_{j,3}(t) = B_{j,3}(t)$ ， $j = 0, 1, 2, 3$ 。即 Bernstein 基是  $\lambda\mu-B$  基的特例。

## 1.2 几种含有参数的基函数

### 1.2.1 两组含参数的五次多项式基函数

吴晓勤等在文献<sup>[12]</sup>中分别定义了两类含参基函数：

1、对  $t \in [0, 1]$ ， $\lambda \in R$ ，定义关于  $t$  的多项式：

$$\begin{cases} b_{0,4}(t) = (1-\lambda t)(1-t)^4 \\ b_{1,4}(t) = (4+\lambda-2\lambda t)(1-t)^3 t \\ b_{2,4}(t) = (6+\lambda)(1-t)^2 t^2 \\ b_{3,4}(t) = (4-\lambda+2\lambda t)(1-t)t^3 \\ b_{4,4}(t) = (1-\lambda+\lambda t)t^4 \end{cases}.$$

2、对  $t \in [0, 1]$ ， $\lambda \in R$ ，定义关于  $t$  的多项式：

$$\begin{cases} u_{0,4}(t) = (1-\lambda t)(1-t)^4 \\ u_{1,4}(t) = (4+\lambda)(1-t)^3 t \\ u_{2,4}(t) = (6-\lambda)(1-t)^2 t^2, \\ u_{3,4}(t) = (4+\lambda)(1-t)t^3 \\ u_{4,4}(t) = (1-\lambda+\lambda t)t^4 \end{cases}$$

其中  $-4 \leq \lambda \leq 1$ 。

以上两类基函数均具有以下性质，设  $B=b, u$ ：

(1) 非负性、权性：

$$\sum_{i=0}^4 B_{i,4}(t) \equiv 1 \text{ 且 } B_{i,4}(t) \geq 0, i=0,1,2,3,4.$$

(2) 对称性即：

$$B_{0,4}(1-t) = B_{4,4}(t), B_{1,4}(1-t) = B_{3,4}(t), B_{2,4}(t) = B_{2,4}(1-t).$$

(3) 单峰性：即每个基函数在  $[0,1]$  上有一个局部最大值。

以上两类基函数均含有形状参数  $\lambda$ ，对于同样的 5 个控制顶点，参数  $\lambda$  可以适度地调整曲线的形状，但是缺点是只含有一个形状参数，虽具有可调性，但不利于形状的局部调控。

### 1.2.2 带多个形状参数的调配函数

邬弘毅等在文献<sup>[15]</sup>中引入多个带形状参数的调配函数，这类曲线曲面的调配函数具有显式表示，改变形状参数的取值不仅能整体还能局部地调控曲线和曲面的形状<sup>[16]</sup>。

文献<sup>[15]</sup>定义了两种调配函数：

1、当  $n$  为偶数时，即  $n=2m$  时，设

$$\begin{cases} b_i(t) = B_{i,2m}(t) \left[ 1 + \frac{\lambda_i(1-t)}{2m+1-i} - \frac{\lambda_{i+1}t}{i+1} \right] \\ b_{2m-i}(t) = B_{n-i,2m}(t) \left[ 1 + \frac{\mu_i t}{2m+1-i} - \frac{\mu_{i+1}(1-t)}{i+1} \right], \\ b_m(t) = B_{m,2m}(t) \left[ 1 + \frac{\lambda_m(1-t)}{m+1} - \frac{\mu_m t}{m+1} \right] \\ i=0,1,\dots,m-1; 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

为保证端点插值及  $b_i(t)$  的非负性，形状参数  $\lambda_i, \mu_i$  应满足

$$\begin{cases} \lambda_0 = \mu_0 = 0 \\ -(2m+1-i) \leq \lambda_i, \mu_i \leq i. \\ i=1,2,\dots,m \end{cases}$$

2、当  $n$  为奇数时，即  $n=2m+1$  时，设

$$\begin{cases} b_i(t) = B_{i,2m+1}(t) \left[ 1 + \frac{\lambda_i(1-t)}{2m+2-i} - \frac{\lambda_{i+1}t}{i+1} \right] \\ b_{2m+1-i}(t) = B_{2m+1-i,2m+1}(t) \left[ 1 + \frac{\mu_i t}{2m+2-i} - \frac{\mu_{i+1}(1-t)}{i+1} \right] \\ i = 0, 1, \dots, m+1 \end{cases}$$

形状参数  $\lambda_i, \mu_i$  应满足:

$$\begin{cases} \lambda_0 = \mu_0 = 0 \\ \lambda_{m+1} = -\mu_{m+1} \\ -(2m+2-i) \leq \lambda_i, \mu_i \leq i \\ i = 1, 2, \dots, m+1 \end{cases}$$

该调配函数具有以下性质:

(1) 规范性:

$$\sum_{i=0}^n b_i(t) = 1.$$

(2) 局部可调: 若  $\lambda_i$  或  $\mu_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  由小变大, 则曲线段靠向控制点  $\mathbf{p}_i$  或  $\mathbf{p}_{n-i}$ , 因  $\mathbf{p}_i$  对应的调配函数  $b_i(t) = B_{i,2m+1}(t) \left[ 1 + \frac{\lambda_i(1-t)}{2m+2-i} - \frac{\lambda_{i+1}t}{i+1} \right]$  随之变大。

(3) 非负性:

$$b_i(t) \geq 0, i = 0, 1, \dots, n.$$

该文献<sup>[16]</sup>中定义的形状参数, 它既能整体又能局部地调控曲线和曲面的形状, 但是该形状参数形式较为复杂, 不利于计算和运用。

### 1.2.3 带形状参数的三次调配函数

刘长明等在文献<sup>[17]</sup>中给出三次和四次多项式调配函数, 并推广得到高次调配函数。

定义 1. 对  $u \in [0, 1], \lambda_i \in R$ , 称关于  $u$  的多项式

$$\begin{cases} b_0^3(u) = \frac{1}{2}(1 - \lambda_i u)(1 - u)^2 \\ b_1^3(u) = \frac{1}{2}[1 + (2 + \lambda_i)u(1 - u)], \\ b_2^3(u) = \frac{1}{2}[1 - \lambda_i(1 - u)]u^2 \end{cases}$$

为带参数  $\lambda_i$  的三次调配函数。

定义 2. 对  $u \in [0, 1], \lambda_i \in R$ , 称关于  $u$  的多项式

$$\begin{cases} b_0^4(u) = \frac{1}{2}(1-\lambda_i u)(1-u)^3 \\ b_1^4(u) = \frac{1}{2}\left[1 + (3+\lambda_i - 2\lambda_i u^2)u(1-u)\right], \\ b_2^4(u) = \frac{1}{2}(1-\lambda_i + \lambda_i u)u^3 \end{cases}$$

为带参数  $\lambda_i$  的三次调配函数。

特殊地, 当  $\lambda_i = 0$  时, 三次调配函数退化成为二次 B 样条基函数。四次调配函数变成  $\lambda_i = 1$  时的三次调配函数。

对两个调配函数有以下结论:

$$(1) \sum_{i=0}^2 b_i^k(u) = 1, (k=3, 4).$$

$$(2) \text{ 当 } -2 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ 时, 对 } u \in [0, 1] \text{ 有 } b_i^k(u) \geq 0, (i=0, 1, 2; k=3, 4).$$

文献<sup>[17]</sup>所构造的两个调配函数不仅达到了形状可调的目的, 而且四次调配函数所构造的曲线就可以达到  $G^2$  连续。但构造的调配函数只满足局部调控的特点。

#### 1.2.4 带局部形状参数的调配函数

徐岗等在文献<sup>[18]</sup>中给出了两类带局部形状参数的调配函数, 使得形状参数具有局部修改功能。

**定义 1.** 对  $t \in [0, 1]$ , 称关于  $t$  的多项式

$$\begin{cases} b_0^3(t) = \frac{1}{6}(1-\lambda_i)(1-t)^2 \\ b_1^3(t) = \frac{1}{6}\left[4 - (7-\lambda_i)t^2 + (4-\lambda_i)t^3\right] \\ b_2^3(t) = \frac{1}{6}\left[1 + (2+\lambda_i)t + (5-2\lambda_i)t^2 - (4-\lambda_i)t^3\right] \\ b_3^3(t) = \frac{1}{6}\left[1 - \lambda_i(1-t)\right]t^2 \end{cases},$$

为带参数  $\lambda_i$  的三次调配函数。

**定义 2.** 对  $t \in [0, 1]$ , 称关于  $t$  的多项式

$$\begin{cases} b_0^4(t) = \frac{1}{6}(1-\lambda_i t)(1-t)^3 \\ b_1^4(t) = \frac{1}{6}\left[4 - 6t^2 + (3+\lambda_i)t^3 - \lambda_i t^4\right] \\ b_2^4(t) = \frac{1}{6}\left[1 + (3+\lambda_i)t + 3(1-\lambda_i)t^2 - 3(1-\lambda_i)t^3 - \lambda_i t^4\right] \\ b_3^4(t) = \frac{1}{6}\left[1 - \lambda_i(1-t)\right]t^3 \end{cases},$$

为带参数  $\lambda_i$  的四次调配函数。

对调配函数  $b_i^k(t)$ ,  $k=3,4, i=0,1,2,3$ , 有下列结论:

$$(1) \sum_{i=0}^3 b_i^k(t) = 1.$$

$$(2) b_i^k(t) = b_{3-i}^k(1-t).$$

$$(3) \text{当 } -2 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ 时, 对 } t \in [0,1] \text{ 有 } b_i^k(t) \geq 0.$$

文献<sup>[18]</sup>所给出的调配函数可在保持曲线连续性不变的同时改变形状参数的取值达到对曲线进行局部调整的目的。但同样不足在于只能对局部进行调控。

第二章在文献<sup>[14]</sup>的基础上分别构造了多参数 Gamma 和 Beta 样条曲线, 使得两曲线具有形状修改功能, 能更好地用于实际应用中。

## 1.3 四元数预备知识

### 1.3.1 四元数的历史及意义

四元数在数学发展史上发挥着重要的作用, 被数学史家们称之为“代数学的革命”<sup>[19]</sup>。卡尔丹 (G.Cardano, 1501-1576) 在十六世纪求解三次方程的过程中引入了复数, 英国数学家 William Hamilton 对复数产生了浓厚的兴趣, 并一直想把复平面推广到复体, 但是一直没有成功。直到 1843 年 10 月, 他才成功把复数的形式从一个实部, 一个虚部的形式推广成为一个实部三个虚部的形式, 为这种形式的复数命名为四元数, 因而四元数的产生是建立在复数的基础之上的。

复数用来表示平面上的向量, 但是对于空间中的向量, 以前我们采用旋转矩阵的方式进行处理, 但是这种运算量过于大而且计算方式繁琐, 不便于运用于更广泛的实际问题中。对于处理一个物体所受的力不在同一个平面上的问题, 数学家们想到了需要构造和复数类似的三维复数的形式<sup>[19]</sup>, 哈密顿 (W.R.Hamilton 1805-1865) 在思考近二十年后得出: 如果要用新发现的数表示空间向量, 那么必须放弃其中两条: 一是新数不能象三维复数含有三个分量, 而是必须含有四个分量  $(1, i, j, k)$ 。二是必须舍弃乘法交换律。最终得到了四元数。

但在很长一段时间里, 四元数并没有受到很大的重视, 直到计算机图形学和机器人领域的研究工作的迅速发展, 四元数才得到了越来越多的广泛应用。四元数的发明彻底克服了人们几千年来对于“数”所必须遵循的不变的定律, 从而使人们重视代数基础问题<sup>[19]</sup>。而四元数的发现展示了全新的研究领域, 从而引起了人们对代数问题的重视, 而且第一次使得代数也可以像几何一样有自己的一套体系, 使代数学没有几何学严密的观念消失了。总言之, 是四元数的发现才显出现代代数学的内容的丰富性。

### 1.3.2 四元数基础知识介绍

**复数：**  $a+ib$ ， $a$  为复数实部， $b$  为复数虚部， $i^2 = -1$ 。

**四元数定义：** 记实数域  $R$  上的四维向量空间的标准正交基为  $\mathbf{e}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ，令

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \{a\mathbf{e} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}.$$

在  $\mathbf{H}(\mathbf{R})$  上定义乘法运算 “ $*$ ”，满足：

$$\begin{aligned} & (a\mathbf{e} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) * (a'\mathbf{e} + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}) \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd')\mathbf{e} + (ab' + ba' + cd' - dc')\mathbf{i} \\ &+ (ac' + ca' + db' - bd')\mathbf{j} + (ad' + da' + bc' - cb')\mathbf{k}. \end{aligned}$$

则  $\mathbf{H}(\mathbf{R})$  构成实数域  $\mathbf{R}$  上的环，称为四元数环，简记为  $\mathbf{H}$  [20][21]。  $\mathbf{H}$  中的元  $q = a\mathbf{e} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  称为四元数，简记为  $q = (a, b, c, d)$ 。

在实际应用中，通常将  $q = (a, b, c, d)$  记为  $q = [a, \mathbf{v}]$ ，其中  $a$  称为标量部分， $\mathbf{v} = (b, c, d)$  称为矢量部分。对于四元数  $q_1 = [a_1, \mathbf{v}_1], q_2 = [a_2, \mathbf{v}_2]$ ，利用矢量内积和外积运算法则容易验证：

$$q_1 * q_2 = [a_1 a_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + a_1 \mathbf{v}_2 + a_2 \mathbf{v}_1],$$

进一步可验证四元数乘法满足结合律，但注意到在  $q_1 * q_2$  的矢量部分含有外积  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ ，因此四元数乘法不具有交换性，即  $q_1 * q_2 \neq q_2 * q_1$ 。

**四元数基底乘法：** 其中  $\mathbf{e}$  作为乘法的单位元， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  相乘按  $\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{i}$  的顺序，相邻两个单位元按箭头顺序相乘等于第三个单位元，与箭头相反方向相乘等于第三个单位元的负元。

由以上四元数的乘法，不难验证 [38] 四元数的乘法满足结合律和对加法的分配律，即：

$$\begin{aligned} & (q_1 * q_2) * q_3 = q_1 * (q_2 * q_3), \\ & q * (q_1 + q_2) = q * q_1 + q * q_2, \\ & (q_1 + q_2) * q = q_1 * q + q_2 * q. \end{aligned}$$

**四元数的内积：**

$$q_1 \cdot q_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2.$$

**四元数的范数：**

$$\|q\| = \sqrt{S^2 + \mathbf{V}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

**四元数的逆：**

$$q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2} [S, -\mathbf{V}] = q^* / \|q\|^2.$$

**四元数的共轭：**

$$q^* = [S, -\mathbf{V}] = (a, -b, -c, -d).$$



由于以上定义的一些四元数的性质，不难看出四元数还有以下这些性质：

(1) 四元数乘积保范

$$\|q_1 * q_2\| = \|q_1\| * \|q_2\|.$$

(2) 四元数逆的运算

$$(q_1 * q_2)^{-1} = q_2^{-1} * q_1^{-1}.$$

(3) 四元数共轭的运算

$$(q_1 * q_2)^* = q_2^* * q_1^*, (q_1 + q_2)^* = q_1^* + q_2^*.$$

(4) 单位四元数绕单位轴  $\mathbf{n}$  旋转  $\theta$  角，可表示为

$$q = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \right].$$

(5) 单位四元数的几种表示方法

单位四元数  $q = [\cos \theta, \mathbf{n} \sin \theta]$ ，还可表示为：

$$q = \exp(\mathbf{n}\theta), q'' = (\cos u\theta, \mathbf{n} \sin u\theta).$$

单位四元数取对数之后标量部分为 0

$$\ln(q) = (0, \mathbf{n}\theta).$$

## 1.4 论文研究的主要内容

第一章绪论部分，主要介绍了本文所涉及到的理论基础知识，列举了几类含有参数的基函数，并简单分析了几类基函数。此外，还表述了本文的主要研究内容。

第二章介绍了在欧氏空间  $R^3$  中利用  $\lambda\mu-B$  基函数分别构造 Gamma 和 Beta 样条曲线的具体方法，并给出了计算实例分析，讨论形状参数对形状调控的影响。

第三章将一类  $R^3$  中的形状可调 Bézier 曲线推广到单位球面  $S^3$  上，利用四元数的相关理论给出了曲线间  $G^1$  光滑拼接的条件，并将其应用于构造形状可调的样条曲线。并举实例说明。

第四章对全文进行总结，并提出需要进一步研究的问题。

## 1.5 本章小结

本章介绍了三次  $\lambda\mu-B$  基的定义及其基本性质，关于四元数的基本知识。此外，还列举了几种含有参数的基函数。这些工作为后续章节的理论研究和算法实现提供了理论基础。



## 第二章 欧氏空间 $R^3$ 中构造含参样条曲线

### 2.1 多参数 Gamma 样条曲线的构造

#### 2.1.1 引言

为了使曲线能够更加灵活地表示几何形状,对基函数进行改进的工作被引入到 Bézier 曲线相关算法中。文献<sup>[14][22]</sup>提出了带形状参数的 Bézier 曲线,分析了参数对曲线形状的调节作用,给出了曲线的形状修改算法。文献<sup>[23]</sup>对三次 Bernstein 基函数进行扩展,给出了含有双参数的一组四次多项式基函数。文献<sup>[24]</sup>给出了构造 Bézier 基函数形状参数的积分方法。文献<sup>[25]</sup>讨论了曲线的形状可调性,给出了曲线间的拼接条件以及在曲线曲面造型中的应用实例。文献<sup>[26]</sup>给出了一类具有  $n+1$  个控制点及一个附加参数的可调 Bézier 曲线。

所有以上的工作都有一个共同的特点,就是提出了含有形状参数的基函数,这使得曲线具有更多的形状调控余地。

另外一类使得曲线具有灵活形状调控能力的方法是不改变基函数,而是通过求泛函的极值得到含参形式的样条曲线。例如加权 Nu 样条<sup>[27]</sup>,即为如下形式泛函的极值:

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f''(t)]^2 dt + \sum_{i=1}^n v_i [f'(t_i)]^2.$$

但是当基函数引入参数以后,曲线段间的光滑拼接将更加复杂,本节将在文献<sup>[14]</sup>的基础上,讨论一类含参 Bézier 曲线间的拼接问题,从而给出一种构造含参 Gamma 样条曲线的方法,使 Gamma 样条曲线具有更灵活的形状可控性。

#### 2.1.2 多参数 Gamma 样条曲线构造方法

伯姆利用仿射概念直接从一个控制多边形构造出  $G^2$  三次样条曲线,称之为  $\gamma$  (或 Gamma) 样条曲线<sup>[28]</sup>。Gamma 样条曲线可以通过修改形状参数  $\gamma_i$  来进行图形的修改。下述工作即在 Gamma 样条曲线中引入参数,由于 Gamma 样条曲线可以看成是分段 Bézier 曲线的光滑拼接,因此下述两段含参 Bézier 曲线的光滑拼接计算方法。

**首先证明 $C^1$ 连续:** 把前面两段含参曲线段 $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{Q}(t)$ 转化为全局参数化, 即两段曲线段对应参数分割 $\Delta u$ :

整条(两段)曲线记为 $\tilde{\mathbf{p}}(u)$

$$\text{记 } \Delta_0 = \tilde{\mathbf{p}}(u) = \begin{cases} \mathbf{p}\left(\frac{u-u_0}{\Delta_0}\right), u \in [u_0, u_1] \\ \mathbf{Q}\left(\frac{u-u_1}{\Delta_1}\right), u \in [u_1, u_2] \end{cases},$$

对整条曲线段求导得:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}'(u_1^-) &= \mathbf{p}'\left(\frac{u-u_0}{\Delta_0}\right) \cdot \frac{1}{\Delta_0} \Big|_{u=u_0} = \mathbf{p}'(1) \frac{1}{\Delta_0} \\ \tilde{\mathbf{p}}'(u_1^+) &= \mathbf{Q}'\left(\frac{u-u_1}{\Delta_1}\right) \cdot \frac{1}{\Delta_1} \Big|_{u=u_1} = \mathbf{Q}'(0) \frac{1}{\Delta_1}, \end{aligned}$$

而

$$\mathbf{Q}'(0) = (3 + \lambda_2)(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0), \mathbf{p}'(1) = (3 + \mu_1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2).$$

$C^1$ 连续条件为

$$\Delta \mathbf{b}_{ni-1} = \Delta \mathbf{b}_{ni},$$

或

$$\Delta \mathbf{b}_{ni+1} = \Delta \mathbf{b}_{ni} + (\mathbf{b}_{ni} - \mathbf{b}_{ni-1}),$$

即

$$\tilde{\mathbf{p}}'(u_1^-) = \tilde{\mathbf{p}}'(u_1^+) \Leftrightarrow (3 + \mu_1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \frac{1}{\Delta_0} = (3 + \lambda_2)(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) \frac{1}{\Delta_1},$$

此即整体参数化下的 $C^1$ 条件即

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{(3 + \mu_1)|(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)|}{(3 + \lambda_2)|(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)|} = \frac{(3 + \mu_1)|\Delta \mathbf{p}_2|}{(3 + \lambda_2)|\Delta \mathbf{Q}_0|}.$$

只需选取参数分割满足上式即可 $C^1$ 连续即具有几何意义。

局部参数化下计算为

$$\begin{cases} \mathbf{k}(0) = \frac{|(3 + \lambda_2)(\Delta \mathbf{b}_1 - \Delta \mathbf{b}_0) \times 6[(\Delta \mathbf{b}_2 - \Delta \mathbf{b}_1) - (1 + \lambda_2)(\Delta \mathbf{b}_1 - \Delta \mathbf{b}_0)]|}{|(3 + \lambda_2)(\Delta \mathbf{b}_1 - \Delta \mathbf{b}_0)|^3} = \frac{6}{(3 + \lambda_2)^2} \frac{|\Delta \mathbf{b}_1 \times \Delta \mathbf{b}_0|}{|\Delta \mathbf{b}_0|^3} \\ \mathbf{k}(1) = \frac{|(3 + \mu_1)(\Delta \mathbf{b}_3 - \Delta \mathbf{b}_2) \times 6[(1 + \mu_1)(\Delta \mathbf{b}_3 - \Delta \mathbf{b}_2) - (\Delta \mathbf{b}_2 - \Delta \mathbf{b}_1)]|}{|(3 + \mu_1)(\Delta \mathbf{b}_3 - \Delta \mathbf{b}_2)|^3} = \frac{6}{(3 + \mu_1)^2} \frac{|\Delta \mathbf{b}_2 \times \Delta \mathbf{b}_1|}{|\Delta \mathbf{b}_2|^3} \end{cases},$$

其中 $a_1 = |\Delta \mathbf{b}_2|$ ,  $a_2 = |\Delta \mathbf{b}_0|$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1(0) = \frac{6}{(3+\lambda_2)^2} \frac{h_2}{a_2^2} = \frac{6}{(3+\lambda_2)^2} \frac{1}{g_2} \\ \mathbf{k}_0(1) = \frac{6}{(3+\mu_1)^2} \frac{h_1}{a_1^2} = \frac{6}{(3+\mu_1)^2} \frac{1}{g_1}, \end{cases}$$

因为 $h_1$ 和 $h_2$ 分别为 $b_0$ 和 $b_3$ 到连接点 $b_2$ 处的公切线的距离, 则有:

$$a_1^2 = h_1 g_1, \quad a_2^2 = h_2 g_2$$

即可将上式改写为

$$\begin{cases} \mathbf{k}_0(1) = \frac{6}{(3+\mu_1)^2} \cdot \frac{1}{g_1} \\ \mathbf{k}_1(0) = \frac{6}{(3+\lambda_2)^2} \cdot \frac{1}{g_2}, \end{cases}$$

对原曲线进行差分:

$$\Delta \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n.$$

因为曲率是曲面的几何不变量, 与具体参数化无关, 故有:

$$\mathbf{k} = \frac{|\dot{\mathbf{p}}(u) \times \ddot{\mathbf{p}}(u)|}{|\dot{\mathbf{p}}(u)|^3} \Big|_{u=u_1} \Rightarrow \mathbf{k}(u_1^-) = \frac{\left| \dot{\mathbf{p}}(1) \cdot \frac{1}{\Delta_0} \times \frac{1}{\Delta_0^2} \ddot{\mathbf{p}}(1) \right|}{\left| \dot{\mathbf{p}}(1) \frac{1}{\Delta_0} \right|^3} = \frac{|\dot{\mathbf{p}}(1) \times \ddot{\mathbf{p}}(1)|}{|\dot{\mathbf{p}}(1)|^3},$$

$$\mathbf{k}(u_1^+) = \frac{\left| \dot{\mathbf{Q}}(0) \cdot \frac{1}{\Delta_1} \times \frac{1}{\Delta_1^2} \ddot{\mathbf{Q}}(0) \right|}{\left| \dot{\mathbf{Q}}(0) \frac{1}{\Delta_1} \right|^3} = \frac{|\dot{\mathbf{Q}}(0) \times \ddot{\mathbf{Q}}(0)|}{|\dot{\mathbf{Q}}(0)|^3}.$$

$G^2$  连续条件: 在连接点处曲率相等, 且曲率矢相同。即

$$\mathbf{k}_0(1) = \mathbf{k}_1(0).$$

所以以下三个等式分别相等:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{1}{(3+\mu_1)^2} \frac{|\Delta \mathbf{P}_2 \times \Delta \mathbf{P}_1|}{|\Delta \mathbf{P}_2|^3} = \frac{1}{(3+\lambda_2)^2} \frac{|\Delta \mathbf{Q}_0 \times \Delta \mathbf{Q}_1|}{|\Delta \mathbf{Q}_0|^3}. \\ 2. \quad & \frac{1}{(3+\mu_1)^2} \frac{h_1}{a_1^2} = \frac{1}{(3+\lambda_2)^2} \frac{h_2}{a_2^2} \Leftrightarrow \frac{h_1}{(3+\mu_1)^2 a_1^2} = \frac{h_2}{(3+\lambda_2)^2 a_2^2}. \\ 3. \quad & \frac{1}{(3+\mu_1)^2} \frac{1}{g_1} = \frac{1}{(3+\lambda_2)^2} \frac{1}{g_2} \Leftrightarrow (3+\mu_1)^2 g_1 = (3+\lambda_2)^2 g_2. \end{aligned}$$

可见 $A, A'$ 不重合, 当 $\lambda_2 \neq \mu_1$ 时, 曲率矢方向相同要求 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ 五点共面, 且 $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_2$ 在 $\overline{\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{Q}_1}$ 同侧

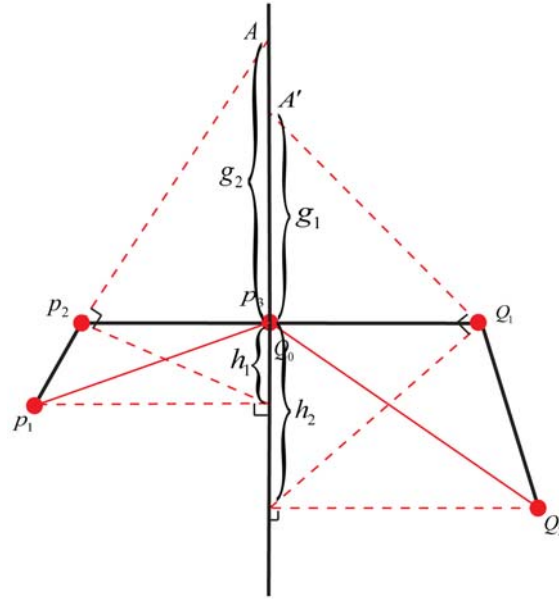


图 2-1

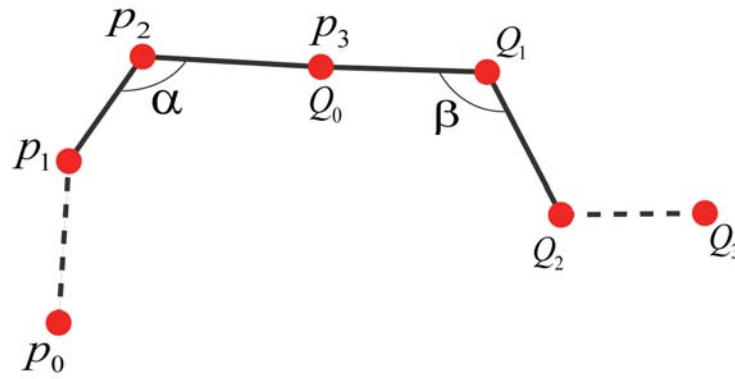


图 2-2

现由 $C^1$ 条件 $\Rightarrow G^2$ 条件

$C^1$ 条件:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(3+\lambda_2)\Delta_0}{(3+\mu_1)\Delta_1}. \quad (2-1)$$

由(2-1)式可得:

$$\frac{1}{(3+\mu_1)^2} \frac{|\Delta \mathbf{P}_2 \times \Delta \mathbf{P}_1|}{|\Delta \mathbf{P}_2|^3} = \frac{1}{(3+\lambda_2)^2} \frac{|\Delta \mathbf{Q}_0 \times \Delta \mathbf{Q}_1|}{|\Delta \mathbf{Q}_0|^3} \Rightarrow \frac{|\Delta \mathbf{P}_2 \times \Delta \mathbf{P}_1|}{|\Delta \mathbf{P}_2|^2} = \frac{(3+\mu_1)^2}{(3+\lambda_2)^2} \frac{|\Delta \mathbf{P}_2|}{|\Delta \mathbf{Q}_0|} \frac{|\Delta \mathbf{Q}_0 \times \Delta \mathbf{Q}_1|}{|\Delta \mathbf{Q}_0|^2},$$

因为  $\Delta \mathbf{P}_2 = a_1, \Delta \mathbf{Q}_0 = a_2$ , 再由 $C^1$ 条件可得:

$$\frac{|\Delta \mathbf{P}_2 \times \Delta \mathbf{P}_1|}{a_1^2} = \frac{(3+\mu_1)\Delta_0}{(3+\lambda_2)\Delta_1} \frac{|\Delta \mathbf{Q}_0 \times \Delta \mathbf{Q}_1|}{a_2^2} \Rightarrow \frac{|\Delta \mathbf{P}_2 \times \Delta \mathbf{P}_1|}{\Delta_0^3 (3+\lambda_2)} = \frac{|\Delta \mathbf{Q}_0 \times \Delta \mathbf{Q}_1|}{\Delta_1^3 (3+\mu_1)}, \quad (2-2)$$

即

$$\frac{S_{\Delta P_1 P_2 P_3}}{\Delta_0^3 (3 + \lambda_2)} = \frac{S_{\Delta Q_0 Q_1 Q_2}}{\Delta_1^3 (3 + \mu_1)} \quad (2-3)$$

$C^1$  条件已保证  $P_2, P_3, Q_1$  三点共线, 故  $\Delta P_2$  与  $Q_1 - P_2$  共线, 由 (2-2) 式有:

$$\frac{|\Delta P_2 \times \Delta P_1|}{\Delta_0^3 (3 + \lambda_2)} = \frac{|\Delta Q_0 \times \Delta Q_1|}{\Delta_1^3 (3 + \mu_1)} \Rightarrow \frac{a_1 |\Delta P_1|}{\Delta_0^3 (3 + \lambda_2)} \sin \alpha = \frac{a_2 |\Delta Q_1|}{\Delta_1^3 (3 + \mu_1)} \sin \beta$$

再将 (2-1) 式代入上式:

$$\frac{a_1 |\Delta P_1|}{\Delta_0^3 (3 + \lambda_2)} \sin \alpha = \frac{a_2 |\Delta Q_1|}{\Delta_1^3 (3 + \mu_1)} \sin \beta \Rightarrow \frac{\Delta_1^2}{\Delta_0^2} |\Delta P_1| \sin \alpha |Q_1 - P_2| = |\Delta Q_1| \sin \beta |Q_1 - P_2|,$$

即

$$\frac{\Delta P_1 \times (Q_1 - P_2)}{\Delta_0^2} = \frac{\Delta Q_1 \times (Q_1 - P_2)}{\Delta_1^2} \quad (2-4)$$

即

$$\frac{S_{\Delta P_1 P_2 Q_1}}{\Delta_0^2} = \frac{S_{\Delta P_2 Q_1 Q_2}}{\Delta_1^2}.$$

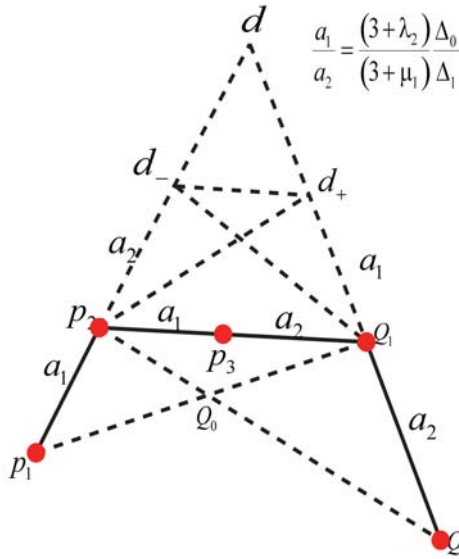


图 2-3

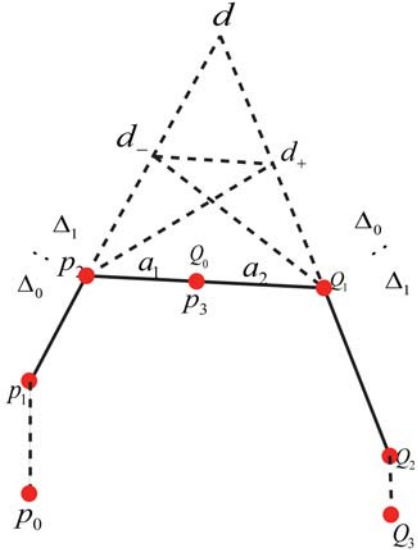


图 2-4

如上图 2-3 所示 (2-4) 式要成立, 只需在  $P_1P_2$  延长线与  $Q_2Q_1$  延长线上, 取  $d_-, d_+$  使  $d_-d_+ \parallel P_2Q_1$ ,

且

$$\frac{P_1P_2}{P_2d_-} = \frac{S_{\Delta P_1 P_2 Q_1}}{S_{\Delta P_2 d_- Q_1}} = \frac{S_{\Delta P_1 P_2 Q_1}}{S_{\Delta P_2 d_+ Q_1}} \stackrel{\text{由(2-4)式}}{=} \frac{S_{\Delta P_2 Q_1 Q_2} \Delta_0^2}{S_{\Delta P_2 d_+ Q_1} \Delta_1^2} = \frac{Q_1Q_2}{d_+Q_1} \frac{\Delta_0^2}{\Delta_1^2}.$$

令

$$\frac{P_1P_2}{P_2d_-} = \frac{Q_1Q_2}{d_+Q_1} \frac{\Delta_0^2}{\Delta_1^2} = \frac{m}{n}, \frac{Q_1Q_2}{d_+Q_1} = \frac{n}{m},$$

则

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{m} \frac{\Delta_0^2}{\Delta_1^2} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}.$$

记

$$r_i = \frac{S_{\Delta P_2 d Q_1}}{S_{\Delta P_2 d_+ Q_1}} = \frac{S_{\Delta P_2 d Q_1}}{S_{\Delta P_2 d_+ Q_1}} \Rightarrow \frac{P_2 d}{P_2 d_-} = r_i, \frac{P_1 P_2}{P_2 d_-} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1},$$

则

$$\frac{P_1 P_2}{P_2 d} = \frac{\frac{\Delta_0}{\Delta_1} P_2 d_-}{r_i P_2 d_-} = \frac{\Delta_0}{r_i \Delta_1}.$$

故得出含  $\lambda, \mu$  参数的 Gamma 样条:

给定参数分割  $\Delta_u$ , 控制多边形的控制顶点  $d_0, d_1, d_2 \dots$ , 形状参数  $r_1, r_2 \dots$ . 则原始的 Gamma 样条为图 2-5:

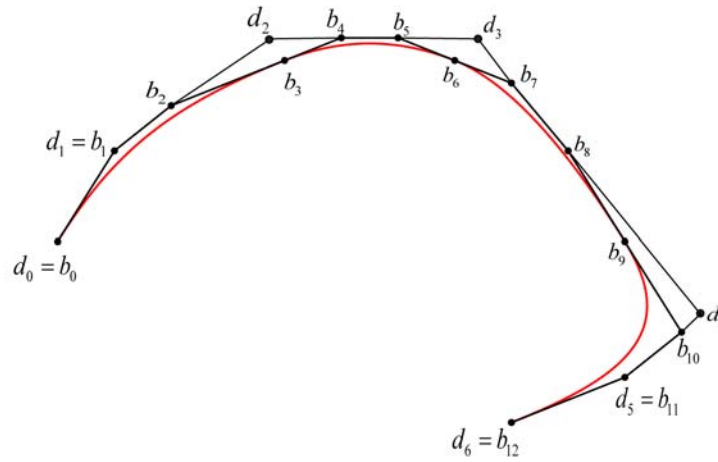


图 2-5

在第二条边插入点  $b_2$  使  $\frac{d_1 b_2}{b_2 d_2} = \frac{\Delta_0}{r_1 \Delta_1}$ ,

在第三条边插入点  $b_4, b_5$  使  $\frac{d_2 b_4}{b_4 b_5} = \frac{r_1 \Delta_0}{\Delta_1}, \frac{b_4 b_5}{b_5 d_3} = \frac{\Delta_1}{r_2 \Delta_2}$ ,

再在  $b_2 b_4$  间按  $\Delta_0 : \Delta_1$  插入  $b_3$  则  $b_0, b_1, b_2, b_3$  构成第一段 Bézier 曲线的控制顶点。

当取  $\lambda, \mu$ -Bézier 基时, 区别在于在  $b_2 b_4$  间按  $a_1 : a_2$  插入  $b_3$ ,  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{(3 + \lambda_2) \Delta_0}{(3 + \mu_1) \Delta_1}$  引入了更多的控制参数  $\lambda_2, \mu_1$ 。

### 2.1.3 计算实例与分析

参数  $\lambda, \mu$  的几何意义:

由三次  $\lambda\mu$ -B 基的性质 6 可知, 当  $\lambda$  或  $\mu$  增大时, 曲线逐渐靠近内控制点  $p_1$  或  $p_2$ , 当  $\lambda$  或  $\mu$  减小时, 曲线逐渐远离内控制点  $p_1$  或  $p_2$ 。

**例 1:** 如下图 2-6 图 2-7 所示分别当  $\mu=0$ ,  $\lambda=0,1,3$  或  $\lambda=0$ ,  $\mu=0,1,3$  时, 曲线和内控制点  $\mathbf{p}_1$  或  $\mathbf{p}_2$  的位置变化。

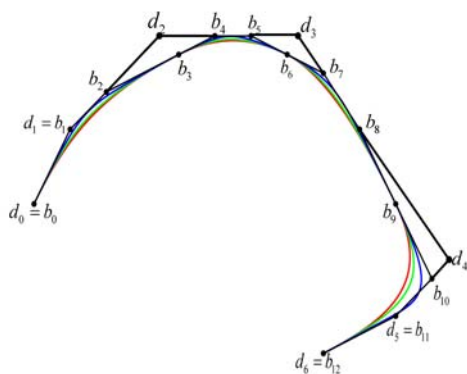


图 2-6, 参数  $\lambda=0,1,3$  时的图像

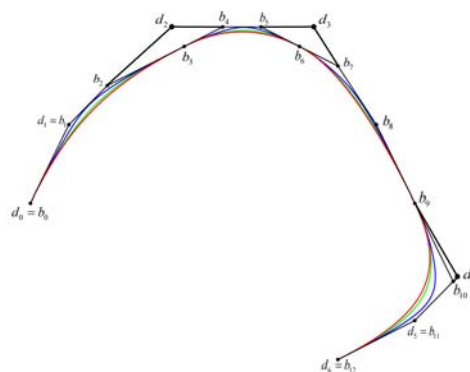


图 2-7, 参数  $\mu=0,1,3$  时的图像

**例 2:** 如下图 2-8 图 2-9 所示分别是上述条件不变的情况下, 空间曲线和内控制点的位置变化。

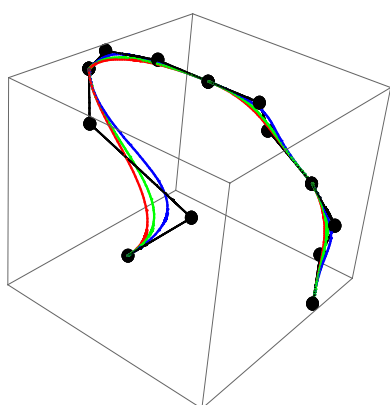


图 2-8, 参数  $\lambda=0,1,3$  时的图像

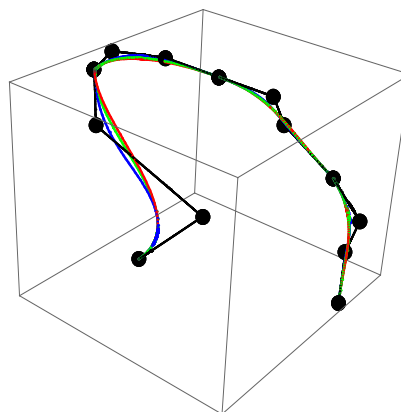


图 2-9, 参数  $\mu=0,1,3$  时的图像

## 2.1.4 小结

本节利用一类含参 Bézier 曲线基函数的光滑拼接, 实现了在 Gamma 样条曲线中引入参数, 使得 Gamma 样条曲线具有更加灵活的造型能力。计算实例表明了方法的可行性。接下来, 我们将进一步考虑利用代数约束条件构造  $G^2$  光滑的含参 Bézier 样条曲线。

## 2.2 多参数 Beta 样条曲线的构造

本节用一类 $R^3$ 中的形状可调 Bézier 曲线构造 Beta 样条曲线, 除控制点外还提供了额外的形状参数, 可以对曲线的形状实现进一步的控制调控。使得调整形状的同时保证与相邻段的连续性。

### 2.2.1 双参数贝齐尔曲线的 $G^2$ Beta 约束

定义<sup>[29]</sup>, 组合贝齐尔曲线 $G^2$ 连续必须满足 Beta 约束条件关系式中的 1-3 个方程, 即满足:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1(0) = \mathbf{S}_0(1) \\ \dot{\mathbf{S}}_1(0) = \beta_1 \dot{\mathbf{S}}_0(1), \beta_1 > 0 \\ \ddot{\mathbf{S}}_1(0) = \beta_2 \dot{\mathbf{S}}_0(1) + \beta_1^2 \ddot{\mathbf{S}}_0(1) \end{cases}$$

Beta 约束条件的第一个条件显然成立, 即 $\mathbf{S}_1(0) = \mathbf{S}_0(1) = \mathbf{P}_3$ , 两个参数三次 Bézier 曲线的首尾相接, 只要满足后两个式子,  $G^2$  条件即得证。下面对含双参数的贝齐尔曲线建立对应的 Beta 约束方程并求解, 得出满足要求的组合 Bézier 曲线, 即控制顶点如图 2-10 所示的贝齐尔曲线:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i b_i^3(t). \quad (2-5)$$

由于 Beta 约束条件的三个方程中含有端点的一阶和二阶导数值, 故求出上式 (2-5) 在端点处的值分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(0) &= (3 + \lambda)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \\ \mathbf{P}'(1) &= (3 + \mu)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2), \\ \mathbf{P}''(0) &= 6[(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) - (1 + \lambda)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)], \\ \mathbf{P}''(1) &= 6[(1 + \mu)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) - (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)]. \end{aligned} \quad (2-6)$$

将 (2-6) 式前两个式子代入 Beta 约束条件的第二个式子有:

$$(3 + \lambda_2)(\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3) = \beta_1(3 + \mu_1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2).$$

化简上式为:

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3 + \beta_1 \frac{3 + \mu_1}{3 + \lambda_2} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2). \quad (2-7)$$

重复上述过程将 (2-7) 代入约束条件的第三个方程有:

$$6[(\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_4) - (1 + \lambda_2)(\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3)] = \beta_2(3 + \mu_1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + \beta_1^2 6[(1 + \mu_1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) - (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)].$$

化简

$$\mathbf{P}_5 = \frac{\beta_2(3 + \mu_1)}{6} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + \beta_2^2 [(1 + \mu_1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) - (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)] + (1 + \lambda_2)(\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3) + \mathbf{P}_4. \quad (2-8)$$



又将 (2-7) 代入 (2-8) 中有:

$$\mathbf{P}_5 = \frac{\beta_2(3+\mu_1)}{6}(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + \beta_2^2[(1+\mu_1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) - (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)] + (1+\lambda_2)\beta_1 \frac{3+\mu_1}{3+\lambda_2}(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + \mathbf{P}_3 + \beta_1 \frac{3+\mu_1}{3+\lambda_2}(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2).$$

上述过程所求出的  $\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5$  点即如图 2-10 所示

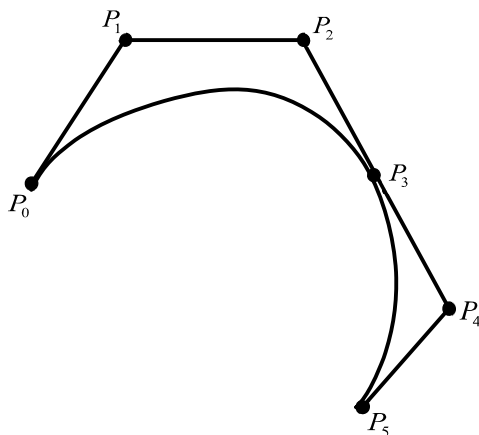


图 2-10

但是上述过程求得的  $\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5$  只是代数意义上的点, 而当要求多段曲线拼接情况的点时, 计算过于繁琐, 不便于计算, 即为上述计算过程进行改进, 以使其具有明确的几何解释。

如下图所示:

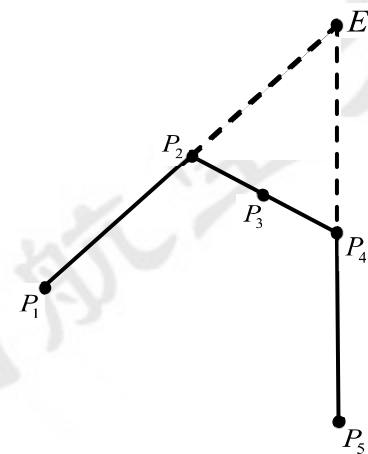


图 2-11

分别延长  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$  和  $\mathbf{P}_5\mathbf{P}_4$  相交于点  $\mathbf{E}$ 。

由解析几何知识可知:

由  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5$  四点确定的直线的交点表达式为:

$$\mathbf{E} = \mathbf{P}_1 + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)t_0. \quad (2-9)$$

其中

$$t_0 = \frac{[(\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5)] \cdot [(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5)]}{|(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5)|^2}.$$

以下求出 $t_0$ ，由(2-10)可知 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5$ 五点共面，故以 $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$ 为基底将 $\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ 进行分解。

设

$$\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_1 = a(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + b(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2),$$

比较两边的系数可得：

$$a = \beta_1^2 - 1, b = \beta_1^2(1 + \mu_1) + \beta_1(2 + \lambda_2) \frac{3 + \mu_1}{3 + \lambda_2} + \frac{3 + \mu_1}{6} \beta_2 + 1,$$

同理可分别设

$$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = c(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + d(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2), \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5 = e(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + f(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2).$$

分别求出各系数分别为：

$$c = -1, d = 0, e = -\beta_1^2, f = -\beta_1^2(1 + \mu_1) - \beta_1(1 + \lambda_2) \frac{3 + \mu_1}{3 + \lambda_2} - \frac{\beta_2}{6}(3 + \mu_1).$$

故 $t_0 = \frac{af - be}{cf - de}$ ，将(2-9)改写为：

$$\mathbf{E} = \mathbf{P}_2 + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)(t_0 - 1),$$

记 $t_0 - 1 = \beta_1^2 \tilde{\gamma}$ ，则：

$$\tilde{\gamma} = \frac{6[3 + \lambda_2 + \beta_1(3 + \mu_1)]}{6\beta_1^2(3 + \lambda_2)(1 + \mu_1) + 6\beta_1(1 + \lambda_2)(3 + \mu_1) + \beta_2(3 + \lambda_2)(3 + \mu_1)}.$$

整理可得：

$$\tilde{\gamma} = \frac{\frac{6}{3 + \lambda_2} \left[ \frac{3 + \lambda_2}{3 + \mu_1} + \beta_1 \right]}{\beta_2 + \beta_1 \frac{6(1 + \mu_1)}{3 + \mu_1} \left[ \frac{(1 + \lambda_2)(3 + \mu_1)}{(3 + \lambda_2)(1 + \mu_1)} + \beta_1 \right]}.$$

验证可知

$$\mathbf{E} - \mathbf{P}_4 = \tilde{\gamma}(\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5).$$

故得如下图 2-12 的几何解释：

$$\mathbf{P}_{n-2} \mathbf{P}_{n-1} : \mathbf{P}_{n-1} \mathbf{E} = 1 : \beta_1^2 \tilde{\gamma},$$

$$\mathbf{P}_{n-1} \mathbf{P}_n : \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n+1} = 1 : \beta_1 \frac{3 + \mu_1}{3 + \lambda_2},$$

$$\mathbf{P}_{n+2} \mathbf{P}_{n+1} : \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{E} = 1 : \tilde{\gamma}.$$

继而可求得 $G^2$ 连续的含参 Beta 样条的算法。

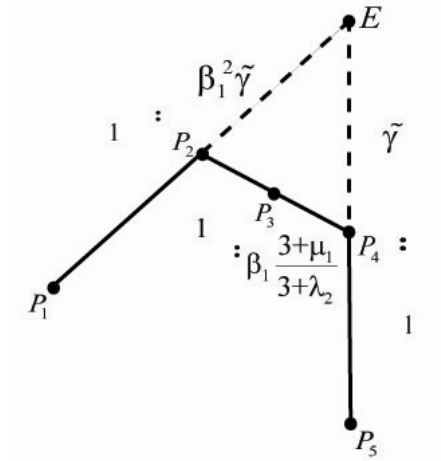


图 2-12

### 2.2.2 多参数 $G^2$ 三次 Beta 样条曲线

给定控制顶点 $\mathbf{d}_i (i=0,1,\dots,l+2)$ 和两组形状参数 $\beta_{1,i} > 0, \beta_{2,i} (i=0,1,\dots,l+1)$ , 一条 $G^2$ 组合三次贝齐尔曲线的第 $i$ 段的贝齐尔点 $\mathbf{P}_{3i+j} (j=0,1,2,3)$ 由控制多边形顶点 $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_{i+1}, \mathbf{E}_{i+2}, \mathbf{E}_{i+3}$ 及形状参数 $\beta_{1,j}, \beta_{2,j} (j=i,i+1,i+2)$ 按如下步骤决定:

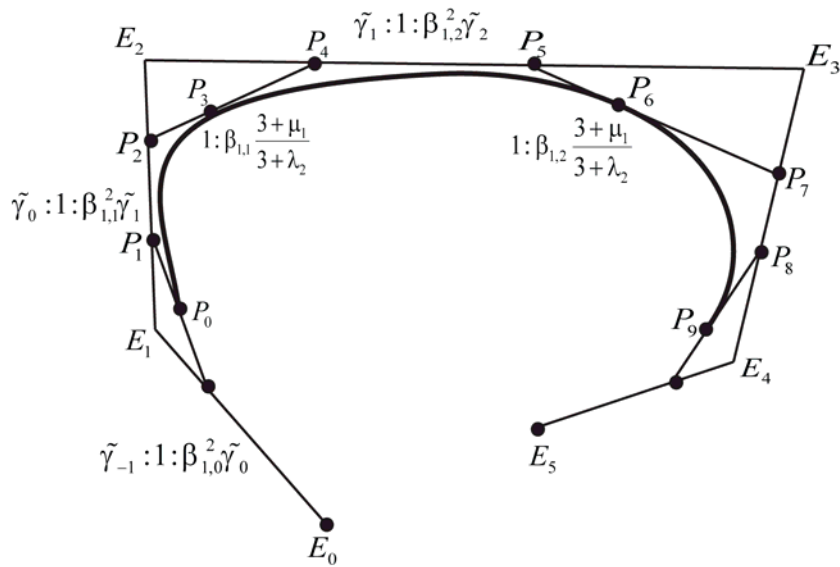


图 2-13

(1) 计算 $\tilde{\gamma}_i$ :

$$\tilde{\gamma}_i = \frac{\frac{6}{3+\lambda_2} \left[ \frac{3+\lambda_2}{3+\mu_1} + \beta_{1,i} \right]}{\beta_{2,i} + \beta_{1,i} \frac{6(1+\mu_1)}{3+\mu_1} \left[ \frac{(1+\lambda_2)(3+\mu_1)}{(3+\lambda_2)(1+\mu_1)} + \beta_{1,i} \right]}.$$

(2) 计算内贝齐尔点:

$$\mathbf{P}_{3i+1} = \frac{(1 + \beta_{1,i+1}^2 \tilde{\gamma}_{i+1}) \mathbf{E}_{i+1} + \tilde{\gamma}_i \mathbf{E}_{i+2}}{1 + \tilde{\gamma}_i + \beta_{1,i+1}^2 \tilde{\gamma}_{i+1}},$$

$$\mathbf{P}_{3i+2} = \frac{\beta_{1,i+1}^2 \tilde{\gamma}_{i+1} \mathbf{E}_{i+1} + (1 + \tilde{\gamma}_i) \mathbf{E}_{i+2}}{1 + \tilde{\gamma}_i + \beta_{1,i+1}^2 \tilde{\gamma}_{i+1}}.$$

(3) 计算连接点:

$$\mathbf{P}_{3i} = \frac{\mathbf{P}_{3i+1} + \beta_{1,i} \frac{3 + \mu_1}{3 + \lambda_2} \mathbf{P}_{3i-1}}{1 + \beta_{1,i} \frac{3 + \mu_1}{3 + \lambda_2}}.$$

### 2.2.3 小结

本节提出了一种构造多参数 Beta 样条曲线的具体算法。首先根据组合三次贝齐尔样条曲线间  $G^2$  连续的条件, 计算出额外的两个形状参数的表达式, 构造了另一个点  $\mathbf{E}$  使得通过代数方法构造的多参数的 Beta 样条曲线具有几何意义, 给出了具体的控制多边形的比例算法。

## 2.3 本章小结

本章通过利用含有形状参数的基函数构造样条曲线, 实现了分别在 Gamma 样条曲线和 Beta 样条曲线中引入参数, 并讨论了参数取值对形状的影响。其中的参数具有对控制多边形两内顶点的推拉作用。故增加了原曲线的形状调控能力。

### 第三章 单位球面 $S^3$ 中含参样条曲线插值

本章将一类 $R^3$ 中的形状可调 Bézier 曲线推广到单位球面 $S^3$ 上, 利用四元数的相关理论给出了曲线间 $G^1$ 光滑拼接的条件, 并将其应用于构造形状可调的样条曲线。数值实验结果显示了改变参数对曲线形状的具体影响。计算结果表明提出的方法是有效的。

四元数由英国数学家 Hamilton 于 1843 年提出, 可看成是复数的一种推广<sup>[30]</sup>。用四元数可表示矢量旋转且没有冗余信息, 计算较用旋转矩阵更为高效, 因而在飞行器控制、动画设计、数控加工等领域得到了越来越多的应用。将四元数用于构造四元数曲线的工作最初由 Shoemake 提出<sup>[31]</sup>, 将构造 Bézier 曲线的反复线性插值的过程 (Decasteljau 算法) 转变为球面线性插值便可构造出球面 Bézier 曲线。1991 年, Schlag 进一步给出了球面 B 样条曲线的构造算法<sup>[32]</sup>。1993 年, Wang 将有理 Bézier 曲线生成双圆弧的方法推广到球面, 给出了一种生成 $G^1$ 光滑的四元数曲线的算法<sup>[33]</sup>。为提高生成曲线的光滑性, 1996 年, Kim 给出了一种构造具有高阶连续性的四元数样条曲线的方法<sup>[34]</sup>。上述几种方法构成了目前构造四元数曲线的基本方法, 以之为基础, 可以将 Bézier 或 B 样条曲线的一些相关算法推广到四元数空间。

例如文献<sup>[23]</sup>给出了构造 Bézier 基函数形状参数的积分方法。文献<sup>[35]</sup>讨论了曲线的形状可调性, 给出了曲线间的拼接条件以及在曲线曲面造型中的应用实例。文献<sup>[26]</sup>给出了一类具有一个附加参数的可调 Bézier 曲线。文献<sup>[13]</sup>给出了具有多个形状参数的 Bernstein 基函数, 并讨论了相应的 Bézier 曲线的性质。

鉴于四元数曲线在工业生产、动漫设计等领域得到越来越广泛的应用, 将形状调控算法推广到四元数空间具有重要的实用价值。但由于四元数乘法具有不可交换性, 因此一些相关算法并不能直接简单推广, 特别是在考虑曲线间的光滑拼接问题时会更为复杂, 目前相关研究尚不多见。2004 年, Nielson 将 $\nu$ 样条推广到四元数空间, 通过修改张力参数和节点矢量调控曲线的形状, 使得样条曲线具有更灵活的形状调控能力<sup>[36]</sup>。最近, Yan, Xu 等人将一类广义 B 样条曲线推广到四元数空间<sup>[37]</sup>, 该类样条曲线具有单调递增, 连续可微的核函数, 通过修改核函数可使生成的曲线改变形状。本章将在文献<sup>[13]</sup>的基础上, 给出一种构造一类含三个参数的球面 Bézier 曲线的算法, 使得生成曲线具有形状调控能力。

### 3.1 含参球面 Bézier 曲线构造

#### 3.1.1 广义 Bernstein 基函数

在文献<sup>[13]</sup>中, 作者提出了一种 $n$ 次广义 Bernstein 基函数, 其中含有 $n$ 个参数可用于调控曲线形状。该基函数表达式如下:

$$\begin{cases} B_0^n(t) = (1-t)^n (1-\lambda_1 t) \\ B_i^n(t) = t^i (1-t)^{n-i} (C_n^i + \lambda_i - \lambda_i t - \lambda_{i+1} t), i = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1 \\ B_{\left[\frac{n}{2}\right]}^n(t) = t^{\left[\frac{n}{2}\right]} (1-t)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \left( C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} + \lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]} - \lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]} t - \lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} t \right) \\ B_i^n(t) = t^i (1-t)^{n-i} (C_n^i - \lambda_i + \lambda_i t + \lambda_{i+1} t), i = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \dots, n-1 \\ B_n^n(t) = t^n (1-\lambda_n + \lambda_n t) \end{cases}, \quad (3-1)$$

其中形状参数的取值范围为: 当 $1 \leq i \leq [n/2]$ 时,  $\lambda_i \in [-C_n^i, C_n^{i-1}]$ , 当 $[n/2]+1 \leq i \leq n$  时,  $\lambda_i \in [-C_n^{i-1}, C_n^i]$ 。符号 $[x]$ 表示取不小于 $x$ 的最小整数。当所有形状参数取值为0时, 广义 Bernstein 基函数退化为普通 Bernstein 基函数。

可以证明广义 Bernstein 基函数具有非负性、对称性、单位分解等性质<sup>[13]</sup>。利用(3-1)式构造的广义 Bézier 曲线为:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad (3-2)$$

由于具有多个形状参数, 因此曲线具有较强的形状调控能力。接下来将考虑将其推广到球面 Bézier 曲线。

#### 3.1.2 含参球面 Bézier 曲线

将 $R^3$ 中的 Bézier 曲线推广到球面的一种重要方法是利用单位四元数将线性插值转化为球面线性插值<sup>[32]</sup>。

给定 $R^3$ 中的两点 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ , 连接两点间的最短线段为直线:

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2, t \in [0, 1].$$

对于四维空间 $R^4$ 中单位球面 $S^3$ 上两点 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ , 由微分几何知识可知, 连接两点间的最短线段为球面上的测地线, 即由 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ 确定的大圆劣弧, 生成该弧的方法称为球面线性插值 (Spherical linear quaternion interpolation):

$$Slerp(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, t) = \mathbf{Q}(t) = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \mathbf{Q}_1 + \frac{\sin t \theta}{\sin \theta} \mathbf{Q}_2, \quad (3-3)$$

其中 $t \in [0,1]$ ， $\theta$ 为 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ 间的夹角。

式(3-3)采用几何方式描述球面线性插值，易于理解，但不便于代数计算。利用四元数乘法可将(3-3)式改写为如下形式：

$$Slerp(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, t) = \mathbf{Q}_1 * (\mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{Q}_2)^t = (\mathbf{Q}_1 * \mathbf{Q}_2)^{1-t} * \mathbf{Q}_2, \quad (3-4)$$

注意(3-4)式中的括号一般不能打开，因为四元数乘法不满足交换律。

为将由(3-2)式生成的曲线推广到单位球面，需要将(3-2)式改写为反复线性插值的形式。注意到(3-2)式的基函数中含有参数，因此不能直接采用 Decasteljau 算法求值。仔细观察可以发现(3-2)式本质上是 $n+1$ 次曲线，因此可以通过修改 Descateljau 算法中某些层的权值来求值。

因为在实际算法中常用低次 Bézier 曲线来进行造型，所以首先取 $n=3$ 的情况进行讨论。

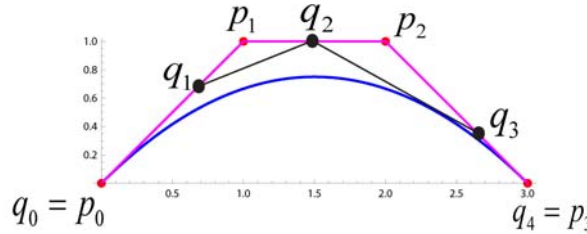


图 3-1

此时(3-1)式可简化为：

$$\begin{cases} B_0^3(t) = (1-t)^3(1-\lambda_1 t) \\ B_1^3(t) = t(1-t)^2(3+\lambda_1-\lambda_1 t-\lambda_2 t) \\ B_2^3(t) = t^2(1-t)(3+\lambda_2-\lambda_2 t+\lambda_3 t) \\ B_3^3(t) = t^3(1-\lambda_3+\lambda_3 t) \end{cases}, \quad (3-5)$$

将(3-5)代入(3-2)并利用 $n+1$ 次 Bernstein 基函数进行变形，计算并整理可得：

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i B_i^3(t) = \mathbf{Q}_0 t^4 + 4\mathbf{Q}_1 t(1-t)^3 + 6\mathbf{Q}_2 t^2(1-t)^2 + 4\mathbf{Q}_3 t^3(1-t) + \mathbf{Q}_4 (1-t)^4,$$

即

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}_0 \sum_{i=0}^3 b_{i,3}(t) + \Delta \mathbf{p}_1 \sum_{i=1}^3 b_{i,3}(t) + \Delta \mathbf{p}_2 \sum_{i=2}^3 b_{i,3}(t) + \Delta \mathbf{p}_3 b(3,3,t),$$

其中

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_1 = \frac{1-\lambda_1}{4} \mathbf{P}_0 + \frac{3+\lambda_1}{4} \mathbf{P}_1,$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{3-\lambda_2}{6} \mathbf{P}_1 + \frac{3+\lambda_2}{6} \mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_3 = \frac{3+\lambda_3}{4} \mathbf{P}_2 + \frac{1-\lambda_3}{4} \mathbf{P}_3, \mathbf{Q}_4 = \mathbf{P}_3.$$

因此,可以得到如下构造含参三次球面 Bézier 曲线的算法:

**算法 1:** 含参可调三次球面 Bézier 曲线求值( $n=3$ )

**输入:**

曲线初始单位四元数控制顶点  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  形状参数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ; 待求值参数  $t$ .

**输出:**

1. 用球面线性插值计算初始点:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0^0 &= \mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_1^0 = \text{Slerp}\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \frac{3+\lambda_1}{4}\right), \\ \mathbf{Q}_2^0 &= \text{Slerp}\left(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \frac{3+\lambda_2}{6}\right), \mathbf{Q}_3^0 = \text{Slerp}\left(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \frac{1-\lambda_3}{4}\right); \end{aligned}$$

2. 用球面线性插值计算中间点:

$$\mathbf{Q}_j^{i+1} = \text{Slerp}\left(\mathbf{Q}_j^i, \mathbf{Q}_{j+1}^i, t\right), i=0, \dots, n-1, j=0, \dots, n-i.$$

3. 返回: 球面 Bézier 曲线上的点  $\mathbf{Q}_0^{n+1}$ ;

$$\mathbf{Q}_0^{n+1} = \text{Slerp}\left(\mathbf{Q}_0^n, \mathbf{Q}_1^n, t\right),$$

对于  $n \neq 3$  的情况, 处理方法类似, 因此不作详细讨论。

上述算法得到的球面 Bézier 曲线记为  $\mathbf{q}(t)$ , 由于四元数不满足交换律, 因此其具体形式可用嵌套形式写出, 记  $\mathbf{Q}_{k,i}(t)$  为由控制顶点  $\mathbf{Q}_i^0, \mathbf{Q}_{i+1}^0, \dots, \mathbf{Q}_{i+k}^0$ ,  $k \geq 1, i \geq 0, i+k \leq n+1$ , 控制生成的球面 Bézier 曲线, 则:

$$\mathbf{Q}_{k,i}(t) = \mathbf{Q}_{k-1,i}(t) * \left( \mathbf{Q}_{k-1,i}(t)^{-1} * \mathbf{Q}_{k-1,i+1}(t) \right)^t,$$

于是有

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}_{n+1,0}(t) = \mathbf{Q}_{n,0}(t) * \left( \mathbf{Q}_{n,0}(t)^{-1} * \mathbf{Q}_{n,1}(t) \right)^t, \quad (3-6)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{1,0}(t) &= \mathbf{P}_0 * \left( \mathbf{P}_0^{-1} * \mathbf{P}_1 \right)^{\frac{3+\lambda_1}{4}t}, \\ \mathbf{Q}_{1,1}(t) &= \mathbf{P}_0 * \left( \mathbf{P}_0^{-1} * \mathbf{P}_1 \right)^{\frac{3+\lambda_1}{4}t} * \left[ \left( \mathbf{P}_0^{-1} * \mathbf{P}_1 \right)^{\frac{1-\lambda_1}{4}t} * \left( \mathbf{P}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{\frac{3+\lambda_2}{6}t} \right]^t, \\ \mathbf{Q}_{1,2}(t) &= \mathbf{P}_1 * \left( \mathbf{P}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{\frac{3+\lambda_2}{6}t} * \left[ \left( \mathbf{P}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{\frac{3-2\lambda_2}{6}t} * \left( \mathbf{P}_2^{-1} * \mathbf{P}_3 \right)^{\frac{1-\lambda_3}{4}t} \right]^t, \\ \mathbf{Q}_{1,3}(t) &= \mathbf{P}_2 * \left( \mathbf{P}_2^{-1} * \mathbf{P}_3 \right)^{\frac{1-\lambda_3+3t+\lambda_3t}{4}}. \end{aligned}$$

由 (3-6) 式可知:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{Q}_{1,0}(0) = \mathbf{P}_0; \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{Q}_{1,3}(1) = \mathbf{P}_3,$$



即曲线 $\mathbf{q}(t)$ 插值首末控制顶点。由四元数模长运算法则可知 $\|\mathbf{q}(t)\| \equiv 1$ ，即曲线位于单位球面上。

曲线端点处的切矢在曲线光滑拼接中起着重要作用，但由于四元数乘法不满足交换律，因此由反复球面线性插值得到的曲线形式较为复杂，不便于求导。1996年，Kim等人利用指数映射和对数映射给出了一种计算单位四元数曲线一阶导矢的一般方法<sup>[38]</sup>。利用该方法，可求得含参球面 Bézier 曲线在首末端点处的切矢

$$\mathbf{q}'(0) = (n+1) \frac{d}{dt} \text{Slerp}(\mathbf{Q}_0^0, \mathbf{Q}_1^0, 0) = 4 \text{Slerp}(\mathbf{Q}_0^0, \mathbf{Q}_1^0, 0) * \ln\left((\mathbf{Q}_0^0)^{-1} * \mathbf{Q}_1^0\right). \quad (3-7)$$

将算法 1 中的各初始点代入 (3-7) 式可得：

$$\mathbf{q}'(0) = 4\mathbf{P}_0 * \ln\left(\mathbf{P}_0^{-1} * \mathbf{P}_0 * (\mathbf{P}_0^{-1} * \mathbf{P}_1)^{\frac{3+\lambda_1}{4}}\right) = (3+\lambda_1)\mathbf{P}_0 * \ln(\mathbf{P}_0^{-1} * \mathbf{P}_1). \quad (3-8)$$

类似地，可得在末端点处的曲线切矢为：

$$\mathbf{q}'(1) = (3+\lambda_3)\mathbf{P}_3 * \ln(\mathbf{P}_2^{-1} * \mathbf{P}_3). \quad (3-9)$$

## 3.2 球面 Bézier 样条曲线插值

### 3.2.1 曲线光滑拼接

在本节中将考虑将含参球面 Bézier 曲线用于球面数据插值。即给定单位球面上  $m+1$  个数据点： $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  构造节点矢量 $\{\mathbf{t}_i\}_{i=1}^m$ 及样条曲线 $\mathbf{q}(t)$ ，使得 $\mathbf{q}(\mathbf{t}_i) = \mathbf{q}_i$ 。这需要将球面 Bézier 曲线进行光滑拼接，有如下定理。

**定理 1：** 设两段含参三次球面 Bézier 曲线 $\mathbf{P}(t)$ 及 $\mathbf{Q}(t)$ 的控制顶点分别为 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ 及 $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ 。要将两段曲线进行 $G^1$ 光滑拼接，需满足如下条件：

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_1 * (\mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{P}_2)^{\frac{\mu(3+\lambda_3)}{(3+\lambda_3)\mu+3+\lambda_1}}.$$

**证明：** 曲线段间满足 $G^1$ 连续，首先需满足 $G^0$ 连续条件，即

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_0. \quad (3-10)$$

其次，需要在公共点处满足切矢连续性条件：

$$\mathbf{Q}'(0) = \mu \mathbf{P}'(1).$$

利用等式 (3-8)、(3-9) 可得，

$$(3+\lambda_1)\mathbf{Q}_0 * \ln(\mathbf{Q}_0^{-1} * \mathbf{Q}_1) = \mu(3+\lambda_3)\mathbf{P}_3 * \ln(\mathbf{P}_2^{-1} * \mathbf{P}_3). \quad (3-11)$$

联立 (3-10)、(3-11) 两式可得

$$(\mathbf{P}_3^{-1} * \mathbf{Q}_1) = (\mathbf{P}_2^{-1} * \mathbf{P}_3)^{\frac{\mu(3+\lambda_3)}{(3+\lambda_1)}}. \quad (3-12)$$

进行如下四元数运算：

$$\begin{aligned}
 & \left( \mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{\frac{-(3+\lambda_3)\mu}{(3+\lambda_3)\mu+3+\lambda_1}} * \mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{Q}_1 \\
 &= \left( \mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{\frac{-(3+\lambda_3)\mu}{(3+\lambda_3)\mu+3+\lambda_1}} = \left[ \left( \mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{\frac{-(3+\lambda_3)}{(3+\lambda_3)\mu+3+\lambda_1}} \right]^{\frac{(3+\lambda_3)\mu}{3+\lambda_1}} \\
 &= \left[ \left( \mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{-1+\frac{(3+\lambda_3)\mu}{(3+\lambda_3)\mu+3+\lambda_1}} \right]^{\frac{(3+\lambda_3)\mu}{3+\lambda_1}} = \left[ \mathbf{P}_2^{-1} * \mathbf{Q}_1 * \left( \mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{\frac{(3+\lambda_3)\mu}{(3+\lambda_3)\mu+3+\lambda_1}} \right]^{\frac{(3+\lambda_3)\mu}{3+\lambda_1}}.
 \end{aligned} \tag{3-13}$$

将 (3-13) 式与 (3-12) 式进行比较，即可得到

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_1 * \left( \mathbf{Q}_1^{-1} * \mathbf{P}_2 \right)^{\frac{\mu(3+\lambda_3)}{(3+\lambda_3)\mu+3+\lambda_1}},$$

定理得证。

定理 1 的几何意义为， $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 (= \mathbf{Q}_0), \mathbf{Q}_1$  三点位于球面上同一条大圆弧上。

### 3.2.2 样条曲线插值

根据定理 1 可知，只要相邻三个控制顶点位于同一大圆弧上，则曲线是  $G^1$  光滑的，对于给定单位球面上  $m+1$  个数据点： $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  可构造  $m$  段光滑拼接的曲线段。

首先选定每段曲线段的三个参数  $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i$ ， $1 \leq i \leq m$ ，利用累加弦长法构造节点向量，然后构造内 Bézier 点，为使算法简单，取  $\mu = \frac{\lambda_1+3}{\lambda_3+3}$ ，这样可直接采用 Catmull-Rom 型样条构造算法<sup>[39]</sup>进行处理。

给定相邻三个数据点  $\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \dots, \mathbf{q}_{i+1}$ ，计算与  $\mathbf{q}_i$  相邻的前后两个内 Bézier 点  $\omega_i, \mathbf{v}_i$ ：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_i &= \left( 2(\mathbf{q}_{i-1} \cdot \mathbf{q}_i) * \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{q}_{i+1} \right) / \left\| 2(\mathbf{q}_{i-1} \cdot \mathbf{q}_i) * \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1} + \mathbf{q}_{i+1} \right\|, \\
 \omega_i &= 2(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{q}_i) * \mathbf{q}_i - \mathbf{v}_i.
 \end{aligned}$$

为使曲线完整插值所有数据点，可补充两个辅助数据点  $\mathbf{q}_{-1}, \mathbf{q}_{m+1}$ （例如端节点重复选取）。这样通过分段 Bézier 曲线拼接形式构造的样条便具有  $G^1$  光滑性。当所有形状参数全部取为 0 时，文献<sup>[31]</sup>中的样条曲线便成为含参样条曲线的特例。

### 3.3 数值计算实例

由于球面 Bézier 曲线位于  $S^3$  上，因此一般无法直观地在  $R^3$  中表示，需要向  $R^3$  中投影。这里取控制顶点的第四维分量为 0。

**实例 1:** 四个控制顶点  $P_0 = \frac{(12, 3, 1, 0)}{\sqrt{154}}$ ,  $P_1 = \frac{1}{6}(4, 2, 4, 0)$ ,  $P_2 = \frac{(-1, 1, 1, 0)}{\sqrt{3}}$ ,  $P_3 = \frac{(-2, 5, 1, 0)}{\sqrt{30}}$ , 绘制含参球面曲线。三个参数的取值范围为

$$\lambda_1 \in [-3, 1], \lambda_2 \in [-3, 3], \lambda_3 \in [-3, 1],$$

**A, B, C, D** 四条曲线对应的参数分别为: **A** $(-2.8, -2.6, -2.6)$ , **B** $(-1, 2, 1.6)$ , **C** $(0, 0, 0)$ , **D** $(0.96, 0, 1.2)$ 。如图 1(a)所示。

**实例 2:** 四个控制顶点  $(-0.333, 0.667, 0.667, 0)$ ,  $(-0.836, 0.443, 0.325, 0)$ ,  $(-0.542, -0.302, 0.785, 0)$ ,  $(-0.302, 0.905, 0.302, 0)$ , 控制多边形产生自交。**A, B, C, D** 四条曲线对应的参数分别为: **A** $(-2.9, -2.9, -2.9)$ , **B** $(1, -2, 1)$ , **C** $(0, 0, 0)$ , **D** $(1.8, 0.9, 1.2)$ 。如图 1(b)所示。

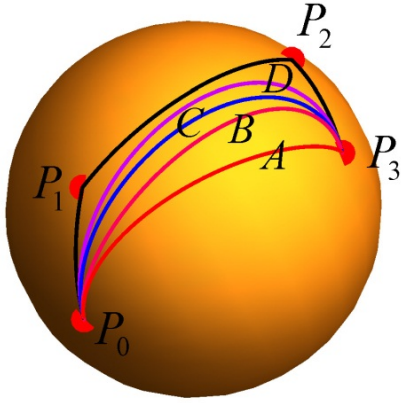


图 1(a). 含参球面 Bézier 曲线(无自交)

**A, B, C, D** 四条曲线对应的参数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  如下:

$(-2.8, -2.6, -2.6); (-1.2, -1.6); (0, 0, 0); (0.96, 0, 1.2)$

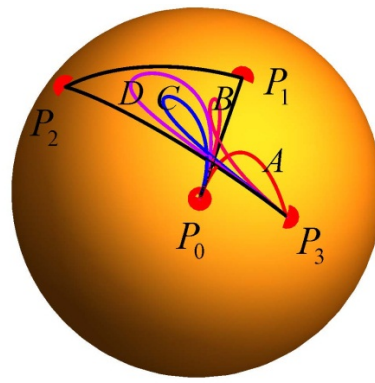


图 1(b). 含参球面 Bézier 曲线(自交)

**A, B, C, D** 四条曲线对应的参数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  如下:

$(-2.9, -2.9, -2.9); (1, -2, -1); (0, 0, 0); (1.8, 0.9, 1.2)$

**实例 3:** 给定单位球面上 6 个数据点:  $P_0 = (0.953, 0.095, 0.286, 0)$ ,  $P_1 = (0.632, 0.632, 0.447, 0)$ ,  $P_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ ,  $P_3 = (-0.635, 0.629, 0.449, 0)$ ,  $P_4 = (-0.880, 0.176, -0.440, 0)$ ,  $P_5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ , 构造插值于数据点的形状可调球面样条曲线。如图 2 所示。所得到的曲线整体上  $G^1$  光滑。

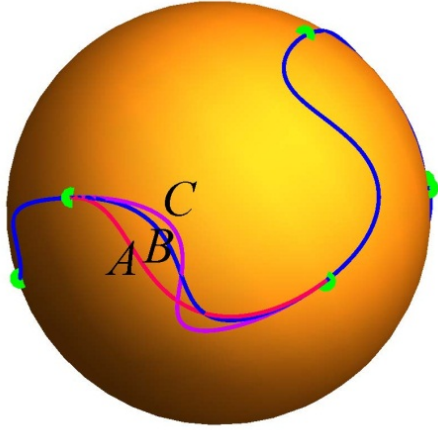


图 2(a). 含参球面样条曲线插值

修改每一段曲线的形状参数，可以改变曲线形状。

A,B,C 三段曲线采用不同的参数，均插值数据点。

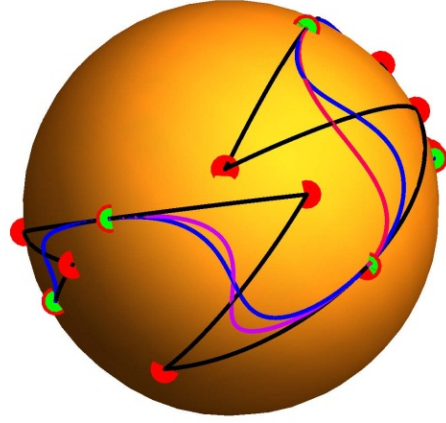


图 2(b). 形状可调样条曲线及控制网格

采用同一控制网格，修改参数可改变曲线

形状

### 3.4 双参数三次 Bézier 曲线构造四元数曲线

本节给出另一种构造四元数曲线的方法，并基于文献<sup>[40]</sup>的方法得到了该类四元数曲线的高阶导数形式。

#### 3.4.1 双参数 Bézier 四元数曲线

一条双参数 *Bezier* 四元数曲线的表达式为：

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i b_{i,3}(t) \quad t \in [0,1],$$

其中  $\mathbf{p}_i$  为这条 *Bezier* 曲线的控制顶点或贝齐尔点。

把此表达式转化为累积基的形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{p}_0 b(0,3,t) + \mathbf{p}_1 b(1,3,t) + \mathbf{p}_2 b(2,3,t) + \mathbf{p}_3 b(3,3,t) \\ &= \mathbf{p}_0 b(0,3,t) + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) b(1,3,t) + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0) b(2,3,t) + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) b(3,3,t) + \mathbf{p}_0 b(1,3,t) \\ &\quad + \mathbf{p}_0 b(2,3,t) + \mathbf{p}_0 b(3,3,t) \\ &= \mathbf{p}_0 \sum_{i=0}^3 b_{i,3}(t) + \Delta \mathbf{p}_1 b(1,3,t) + (\Delta \mathbf{p}_2 + \Delta \mathbf{p}_1) b(2,3,t) + (\Delta \mathbf{p}_3 + \Delta \mathbf{p}_2 + \Delta \mathbf{p}_1) b(3,3,t) \\ &= \mathbf{p}_0 \sum_{i=0}^3 b_{i,3}(t) + \Delta \mathbf{p}_1 \sum_{i=1}^3 b_{i,3}(t) + \Delta \mathbf{p}_2 \sum_{i=2}^3 b_{i,3}(t) + \Delta \mathbf{p}_3 b(3,3,t) \end{aligned}$$

由于三次 $\lambda\mu-B$ 基具有规范性即 $\sum_{i=0}^3 b_{i,3}(t) \equiv 1$ ，所以可以改写为控制顶点为 $\{\mathbf{q}_i\}$ 的三次 Bézier 四元数曲线为：

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}_0 \prod_{i=1}^3 \exp(\boldsymbol{\omega}_i \sum_{n=1}^3 b_{i,n}(t)),$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_i$ 为角速度且 $\boldsymbol{\omega}_i = \ln(q_{i-1}^{-1} q_i)$ 。我们称以上表达式为双参数 Bézier 四元数曲线。

### 3.4.2 双参数 Bézier 四元数曲线的高阶导数表达式

由求导的链式法则<sup>[40]</sup>，可以得到上式的一阶导数形式，因此高阶导数也可以由类似的方式求出

$$\mathbf{q}'(t) = q_0 \left[ \boldsymbol{\omega}_1 \left( \sum_{i=1}^3 b_{i,3}(t) \right)' + \boldsymbol{\omega}_2 \left( \sum_{i=2}^3 b_{i,3}(t) \right)' + \boldsymbol{\omega}_3 (b_{3,3}(t))' \right].$$

其中 $t$ 分别取值 0 和 1 时，可求出此类含参四元数曲线的端点的切矢分别为：

$$\mathbf{q}'(0) = (3 + \lambda) q_0 \ln(q_0^{-1} q_1); \mathbf{q}'(1) = (3 + \mu) q_3 \ln(q_2^{-1} q_3),$$

$\mathbf{q}'(t)$ 为该含参四元数曲线的一阶导数公式，同理以类似的方式，通过求导的链式法则可得到该含参四元数曲线的高阶导数表达式：

$$\mathbf{q}''(t) = q_0 \left[ \boldsymbol{\omega}_1 \left( \sum_{i=1}^3 b_{i,3}(t) \right)'' + \boldsymbol{\omega}_2 \left( \sum_{i=2}^3 b_{i,3}(t) \right)'' + \boldsymbol{\omega}_3 (b_{3,3}(t))'' \right],$$

$$\mathbf{q}^{(n)}(t) = q_0 \left[ \boldsymbol{\omega}_1 \left( \sum_{i=1}^3 b_{i,3}(t) \right)^{(n)} + \boldsymbol{\omega}_2 \left( \sum_{i=2}^3 b_{i,3}(t) \right)^{(n)} + \boldsymbol{\omega}_3 (b_{3,3}(t))^{(n)} \right],$$

该类四元数曲线由于具有高阶导数，所以可用于物体朝向光滑插值，但由于控制顶点位于二维球面 $S^2$ 上，所得到的四元数曲线位于三维球面上，因此其几何应用会受到一定限制。

## 3.5 本章小结

本章将 $R^3$ 中一类含参 Bézier 曲线推广到单位四元数空间，用于构造球面插值样条曲线。得到的曲线含有多个形状调控参数，具有较强的形状调控能力。在控制多边形不变的情况下，可以通过修改参数调整曲线形状。从数值实验结果可以观察到参数对曲线形状的影响：当参数减小时曲线远离控制多边形，当参数增大时曲线靠近控制多边形。

## 第四章 总结与展望

### 4.1 主要研究成果

基于曲线曲面的几何造型方法在计算机图形学应用中的重要性，本文对欧氏空间  $R^3$  及单位球面  $S^3$  上一类含参样条曲线进行了较为系统的研究，主要研究内容及成果如下。

研究了几种具有形状可调性的曲线的构造方法及拼接问题。利用含两个参数的三次  $\lambda\mu$ -B 函数，考虑曲线间的  $G^1$ ， $G^2$  光滑拼接条件，构造出含多个形状参数的 Gamma 样条曲线 Beta 样条曲线，该类曲线具有灵活的形状调控能力，具有较强实用价值。利用单位四元数重点研究了在单位球面  $S^3$  中构造  $G^1$  连续的三次含参四元数样条曲线，可直接用于几何设计，该类曲线具有在球面上灵活调控曲线形状的能力。另外给出了一种具有高阶导数的含参四元数 Bézier 曲线，可用于物体朝向插值。

### 4.1 展 望

对含参样条曲线，本文只研究了关于三次基函数的情况，对于高次基函数的方面没有涉及。此外在参数取值对于形状改变的影响方面，本文并没有给出理论上的证明。实例说明该四元数曲线在形状修改方面有很好的效果，具体分析将在后续工作中进一步研究。此外可进一步考虑含参 Gamma 样条曲线的离散造型算法，例如细分算法并将其推广到曲面。



## 参考文献

- [1] 刘植, 陈晓彦, 张莉, 等. Bézier 曲线曲面的同次扩展[J]. 中国科技论文, 2011, 06(10):721-725
- [2] 周晓平, 柳朝阳. 一类三角多项式曲线的形状性质[C]. 中国几何设计与计算大会. 2007.14-23.2-4
- [3] 陈宇拓, 韦冰, 邱自华, 等. 基于分段 Bézier 曲线的手绘雕刻图案矢量化[J]. 计算机工程, 2008, 34(9):208-210
- [4] Choi Y K, Banerjee A, Lee J W. Tool path generation for free form surfaces using Bézier curves/surfaces[J]. Computers & industrial engineering, 2007, 52(4): 486-501
- [5] Han X. A class of general quartic spline curves with shape parameters[J]. Computer Aided Geometric Design, 2011, 28(3): 151-163
- [6] 赵菲. Bézier 曲线的拓展及拼接[D]. 西北师范大学, 2014.3-7
- [7] 刘植, 陈晓彦, 谢进, 等. 一类形状可调的拟 Bézier 曲线[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(11):2362-2368
- [8] 刘冬梅. 多形状参数的非均匀 B 样条曲线[D]. 浙江大学, 2011
- [9] 陈晓彦, 刘植, 张莉. 带形状参数的四次 Bézier 曲线曲面[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(9):172-175
- [10] 罗建强. 动画技术在 VRML 模型中的应用研究[D]. 上海交通大学, 2004
- [11] 贺红林, 赵淳生. 超声电机驱动的 3 自由度机器人的设计与实现[J]. 南昌航空大学学报:自然科学版, 2008, 22(1):72-78
- [12] 吴晓勤, 韩旭里, 罗善明. 四次 Bézier 曲线的两种不同扩展[J]. 图学学报, 2006, 27(5):59-64
- [13] Han X A, Ma Y C, Huang X L. A novel generalization of Bézier curve and surface[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 180-193
- [14] 杭后俊, 余静, 李汪根. 三次 Bézier 曲线的一种双参数扩展及应用[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46:178-180. DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2010.31.049
- [15] 郭弘毅, 夏成林. 带多个形状参数的 Bézier 曲线与曲面的扩展[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(12):2607-2612
- [16] 左华. CAGD 中某些多形状参数曲线的研究[D]. 合肥工业大学, 2007.20-23
- [17] 刘长明, 檀结庆. 二次均匀 B 样条曲线的扩展[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版, 2004, 27(5):459-462
- [18] 徐岗, 汪国昭. 带局部形状参数的三次均匀 B 样条曲线的扩展[J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(6):1032-1037
- [19] 焦俊萍. 四元数的发现及其意义[D]. 山西师范大学, 2012
- [20] 周玉兴. 关于四元数代数与分析若干问题研究[D]. 广西民族大学, 2008.12-20
- [21] 戴建宇. 四元数矩阵若干问题的研究[D]. 长沙理工大学, 2013

- [22] Han X. A class of general quartic spline curves with shape parameters[J]. Computer Aided Geometric Design, 2011, 28(3): 151-163
- [23] Wang W T, Wang G Z. Bézier curves with shape parameter[J]. Journal of Zhejiang University Science A, 2005, 6(6):497-501
- [24] 陈素根, 汪志华. 一类带形状参数 Bézier 曲线的形状修改[J]. 安庆师范学院学报: 自然科学版, 2010, 16(4):26-30. DOI:10.3969/j.issn.1007-4260.2010.04.008
- [25] 杨林英. Bézier 曲线的拼接及扩展[D]. 西北师范大学, 2013
- [26] 齐从谦, 邬弘毅. 一类可调控 Bézier 曲线及其逼近性[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 1996, (6):15-19
- [27] Sarfraz M. Weighted Nu splines with local support basis functions[J]. Computers & Graphics, 2004, 28(4): 539-549
- [28] 左传桂. 一种多形状参数四阶均匀 B 样条的研究[D]. 浙江大学, 2006.24-33
- [29] 昌侃. 关于组合曲线  $G^2$  连续的 Beta 约束的研究[D]. 合肥工业大学, 2009.10-12
- [30] Vince J. Quaternions for computer graphics[M]. Springer Science & Business Media, 2011
- [31] Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves[C].ACM SIGGRAPH computer graphics. ACM, 1985, 19(3): 245-254
- [32] Schlag J. Using geometric constructions to interpolate orientation with quaternions[J]. Graphics Gems II, 1991: 377-380
- [33] Wang W, Joe B. Orientation interpolation in quaternion space using spherical biarcs[C]//Graphics Interface. CANADIAN INFORMATION PROCESSING SOCIETY, 1993: 24-24
- [34] Kim M J, Kim M S, Shin S Y. A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives[C].Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM, 1995: 369-376
- [35] 杨林英. Bézier 曲线的拼接及扩展[D]. 西北师范大学, 2013
- [36] Nielson G M. v-quaternion splines for the smooth interpolation of orientations[J]. IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics, 2004 (2): 224-229
- [37] Xing Y, Xu R, Tan J, et al. A class of generalized B-spline quaternion curves[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271: 288-300
- [38] Kim M J, Kim M S, Shin S Y. A compact differential formula for the first derivative of a unit quaternion curve[J]. Journal of Visualization and Computer Animation, 1996, 7(1): 43-57
- [39] Twigg C. Catmull-rom splines[J]. Computer, 2003, 41(6): 4-6
- [40] 张念娟. 几何设计中带多参数 Bézier 曲线曲面及其相关算法研究[D]. 西安理工大学, 2011.159-231
- [41] 朱秀梅. 几类参数曲线的研究[D]. 合肥工业大学, 2008.29-36
- [42] 严兰兰, 韩旭里. 对可调控 Bézier 曲线的改进 [J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(9):1368-1376
- [43] Pottmann H, Farin G. Developable rational Be'zier and B-spline surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(12):513-531
- [44] Speleers H, Dierckx P, Vandewalle S. Weight control for modelling with NURPS surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24(3):179-186



- [45] 张文明. 曲线、曲面形状修改方法的研究[D]. 合肥工业大学, 2008
- [46] 金小刚, 彭群生. 四元数及其在计算机动画中的应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1994(3):174-180
- [47] 杨文颖, 宋来忠, 彭刚. 形状可调的 G2 连续三次 B(e)zier 插值曲线[J]. 机械设计与研究, 2009, 25(1):10-14
- [48] 韩西安, 黄希利, 马逸尘. 广义三次 Bézier 曲线及其应用[J]. 小型微型计算机系统, 2010, 31(8):1595-1597
- [49] 张贵仓, 杨林英, 胡志涛,等. 三次 Bézier 曲线与二次均匀 B 样条曲线的光滑拼接[J]. 西北师范大学学报:自然科学版, 2012, 48(5):28-31
- [50] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004

## 攻读硕士学位期间发表的论文

- 1、杨军,赵桔焱.一类形状可调球面样条曲线插值[J].南昌航空大学学报自然科学版,2016,(已录用).

南昌航空大学

## 致 谢

时光荏苒，我的硕士生涯已经接近尾声。这几年的时光即漫长又短暂，其中充满了酸甜苦辣，更有收获和成长。几年来，感谢陪我一起度过美好时光的每位尊敬的老师和亲爱的同学，正是你们的帮助，我才能克服重重困难，正是你们的指导，我才能解除疑惑，直到学业的完成。

在本文即将完成之际，首先要感谢我的导师杨军老师三年来对我的无微不至的关怀和悉心指导，不厌其烦的帮助我进行论文的修正和改进。从课题的选择到论文的实际写作，直至论文的最终完成，我取得的每一点成绩都凝聚着恩师的汗水和心血。恩师严肃的科学态度，严谨的治学精神，精益求精的工作作风，深深地感染和激励着我，在此谨向杨老师致以衷心的感谢和崇高的敬意。感谢数学与信息科学学院的老师们三年来给予我的指导和帮助。感谢南昌航空大学硕士 13 级 14 班的全体同学陪我一起走过这段人生难忘的历程。

最后，我要向百忙之中参与审阅和评议本论文的各位老师表示由衷的感谢！我会更加勤奋学习、认真研究，努力做得更好，我想这也是我能给你们的最好的回报吧。把最好的祝福献给你们，愿健康、快乐。

## 南昌航空大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的硕士学位论文，是我个人在导师指导下，在南昌航空大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中作了明确地说明并表示了谢意。本声明的法律结果将完全由本人承担。

签名： 赵桔玲 日期： 2016.6.12

## 南昌航空大学硕士学位论文使用授权书

本论文的研究成果归南昌航空大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解南昌航空大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门送交论文的复印件和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权南昌航空大学，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。同时授权中国科学技术信息研究所将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

签名： 赵桔玲 导师签名： 李军 日期： 2016.6.12