

一类 C^2 连续的单位四元数插值样条曲线

邢 燕, 樊 文, 檀结庆*, 许任政

(合肥工业大学数学学院 合肥 230009)
(jiejingtang@hfut.edu.cn)

摘 要: 为了能够快速生成光滑的单位四元数插值样条曲线, 实时控制三维物体关键帧动画, 提出一种基于四次多项式的单位四元数插值样条曲线, 并证明了它的插值性和 C^2 连续性. 首先选择适当的四次多项式调配函数, 使其生成的样条曲线能够插值给定的型值点列并达到 C^2 连续; 然后通过累和形式的基函数作指数、代表关键帧方向单位四元数为底的指数函数的连乘形式把欧氏空间中的样条曲线推广到单位四元数空间 S^3 中. 文中构造的曲线能够自动通过给定的关键帧朝向序列, 避免经典的 B 样条单位四元数曲线从型值点反求控制顶点过程中求解非线性方程组带来的时间开销, 提高了计算效率. 实验结果表明, 该方案可以有效地应用于三维关键帧动画.

关键词: 单位四元数; 插值样条; 型值点; S^3 空间
中图法分类号: TP391.72

A C^2 -Continuous Unit Quaternion Interpolatory Spline Curve

Xing Yan, Fan Wen, Tan Jieqing*, and Xu Renzheng

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

Abstract: In order to be able to quickly generate smooth unit quaternion interpolatory spline curves and real-time control 3D object keyframe animations, this paper presents a quartic-polynomial-based unit quaternion interpolatory spline curve, and proves its interpolatory property and C^2 continuity. First, proper quartic polynomial blending functions are chosen to generate a C^2 -continuous spline curve in Euclidean space which can interpolate a given sequence of data points. Then, via the product of several exponential functions where the exponents are the cumulative forms of the blending functions, and the bases are constant unit quaternions representing the given keyframe orientations, the spline curve in Euclidean space is extended to one in unit quaternion space S^3 . The proposed curve can automatically pass through a given sequence of keyframe orientations accurately, and avoid the iterative process in solving the quaternionic nonlinear system of equations when obtaining the spline control points from given data points, as used in classic B-spline unit quaternion interpolatory curves, and improve the computational efficiency. Experimental results demonstrated the effectiveness of the proposed scheme in the application of 3D keyframe animations.

Key words: unit quaternion; interpolatory spline; data point; S^3

收稿日期: 2015-12-12; 修回日期: 2016-05-05. 基金项目: 国家自然科学基金(61472466, 11601115). 邢 燕(1977—), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为 CAGD&CG、图像处理; 樊 文(1984—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAGD; 檀结庆(1962—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 论文通讯作者, 主要研究方向为非线性数值逼近理论与方法、科学计算可视化、CAGD&CG、图像处理等; 许任政(1991—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为 CAGD.

刚体运动曲线设计是计算机动画设计中的一个重要问题^[1]. 四元数特别是单位四元数适用于对三维物体和虚拟摄像头的旋转控制^[2]. 单位四元数在表示矢量和物体的朝向时不仅可以避免欧拉角表示法的奇异性, 即所谓的“gimbal lock”现象, 而且在旋转计算时比用三维旋转矩阵更加简洁有效^[3-4]. 由于单位四元数在旋转表示和计算上的简洁性及高效性, 它在计算机动画和机器人轨迹规划领域获得了极大的关注^[5-8], 单位四元数曲线的设计已成为这些领域中的热点^[9-12].

三维空间中刚体运动可由 2 条曲线确定: 一条是表示刚体中心位置的位置曲线, 一条是表示不同时刻刚体朝向的朝向曲线^[13]. 既然单位四元数可以表示三维空间中的旋转, 那么单位四元数曲线就可以表示朝向曲线. Shoemake^[2]早在 1985 年提出一种单位四元数 Bézier 样条构造方案. 在非欧几里得空间 $SO(3)$ 或 S^3 中, 样条曲线一些常见的性质发生了变化, 如由球面线性插值(spherical linear interpolation, Slerp)递归构造的单位四元数 3 次 Bézier 曲线求 2 阶导非常困难. Schlag^[14]用 Slerp 递归构造的单位四元数 3 次 B 样条曲线不能保证 C^2 连续性. Kim 等^[15]提出一种单位四元数 B 样条插值曲线的构造方法, 并设计了迭代算法求解四元数非线性方程组, 以获得四元数 B 样条曲线的控制顶点, 但初始型值点序需要满足一定的约束条件才能保证算法收敛. Nielson^[16]提出单位四元数 ν 样条插值曲线, 其构造方法同样需要迭代算法求解非线性方程组, 以获得四元数插值样条的控制顶点, 但增加张力参数获得了曲线形状局部修改的能力. 虞铭财等^[17]提出了一种插值朝向与角速度的 k 阶连续的单位四元数曲线的构造方法, 指出对于相同的初始朝向序列, 若给定不同的角速度序列, 得到的单位四元数曲线是不同的. Ge 等^[18]给出了在 S^3 空间精确求解单位四元数控制顶点的方法, 但是其未指出保证这一方法正确的限制条件. 本文提出一种 C^2 连续的单位四元数插值样条曲线的构造方案, 这一方案能够自动地精确插值任意给定的朝向序列, 无需求解四元数非线性方程组, 提高了运算效率.

1 四元数的运算和性质

首先简单回顾一下四元数的定义和运算. 类似复数的定义, $q = w + xi + yj + zk$ 为一个四元数,

其中 $w, x, y, z \in \mathbb{R}$, i, j, k 是 3 个虚数单位, 满足 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. 四元数也可以表示为向量形式 (w, x, y, z) 或一组有序对 (s, v) , 其中 $s = w$ 是标量, $v = (x, y, z)$ 是三维向量.

给定 2 个四元数

$$q_n = w_n + x_n i + y_n j + z_n k, \quad n = 0, 1;$$

四元数的加减法定义为

$$q_0 \pm q_1 = (w_0 \pm w_1) + (x_0 \pm x_1)i + (y_0 \pm y_1)j + (z_0 \pm z_1)k.$$

四元数的乘法定义为

$$\begin{aligned} q_0 q_1 = & (w_0 w_1 - x_0 x_1 - y_0 y_1 - z_0 z_1) + \\ & (w_0 x_1 + x_0 w_1 + y_0 z_1 - z_0 y_1)i + \\ & (w_0 y_1 + y_0 w_1 + z_0 x_1 - x_0 z_1)j + \\ & (w_0 z_1 + z_0 w_1 + x_0 y_1 - y_0 x_1)k. \end{aligned}$$

注意: 四元数的乘法不满足交换律.

2 个四元数的点积为

$$q_0 \cdot q_1 = w_0 w_1 + x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1.$$

四元数 $q = w + xi + yj + zk$ 的共轭定义为 $\bar{q} = w - xi - yj - zk$; 并且 $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$.

四元数 q 的范数为

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

若 $\|q\| = 1$, 则称 q 是单位四元数; 单位四元数的全体构成了 S^3 空间.

$$\text{四元数 } q \text{ 的逆为 } q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

若 $q = w + xi + yj + zk$ 是一个单位四元数, 则 q 可表示为 $q = \cos \theta + n \sin \theta$; 其中, $\theta = \arccos w \in [0, \pi]$, $n = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

单位四元数可记作指数形式 $q = \exp(\theta n)$; 其中, n 是一个三维单位向量, 即 $n \in S^2$; $\theta \in [0, \pi]$. 单位四元数 $q = \cos \theta + n \sin \theta$ 的自然对数为 $\ln(q) = \theta n$.

单位四元数 q 为底的实指数函数

$$q^t = \exp(t \cdot \ln(q)) = \cos(t\theta) + n \sin(t\theta),$$

对 t 的一阶导数为

$$\frac{d}{dt} q^t = q^t \ln(q).$$

一般地,

$$\frac{d}{dt} q^{f(t)} = q^{f(t)} \ln(q) f'(t).$$

向量 v 围绕转轴 n 按右手定则旋转 2θ 角得到的向量计算公式为

$$qvq^{-1} = \exp(\theta \mathbf{n}) \mathbf{v} \exp(-\theta \mathbf{n}) = (\cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta) \mathbf{v} (\cos \theta - \mathbf{n} \sin \theta).$$

Shoemake^[2] 提出的球面线性插值公式 $\text{Slerp}(q_0, q_1; t) = q_0 (q_0^{-1} q_1)^t$ 提供了 S^3 空间中 q_0 到 q_1 之间的最短路径的计算方法, 其中 q_0 和 q_1 是 2 个单位四元数, $t \in [0, 1]$.

球面线性插值公式的几何形式为

$$\text{Slerp}(q_0, q_1; t) = \frac{\sin(1-t)\alpha}{\sin \alpha} q_0 + \frac{\sin t\alpha}{\sin \alpha} q_1;$$

其中, q_0 和 q_1 是 2 个单位四元数; α 是 q_0, q_1 间的夹角, 满足 $\cos \alpha = q_0 \cdot q_1$.

2 单位四元数插值样条曲线

2.1 单位四元数插值样条曲线的构造

刚体运动动画通常有 2 个以上的关键位置需要连接. 为了获得给定朝向序列的光滑插值曲线, 本文提出一种基于四次多项式的单位四元数插值样条曲线的构造方案. 这一方案能够生成插值给定朝向序列的 C^2 连续的单位四元数曲线.

定义 1. 给定关键帧朝向序列 $\{q_i \in S^3\}_{i=1,2,\dots,n}$, 令 $q_0 = q_1, q_{n+1} = q_n$, 定义

$$Q_i(t) = q_{i-1}^{\tilde{B}_0(t)} \prod_{j=1}^3 (q_{i+j-2}^{-1} q_{i+j-1})^{\tilde{B}_j(t)} \quad (1)$$

为第 i 段单位四元数插值样条曲线, 其中, $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n-1$; 即样条曲线为

$$Q(t) = \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i(t) \quad (2)$$

$$\tilde{B}_j(t) = \sum_{k=j}^3 B_k(t) \quad (3)$$

$$\begin{cases} B_0(t) = \frac{1}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \\ B_1(t) = -\frac{1}{2}t^4 + \frac{5}{2}t^3 - 3t^2 + 1 \\ B_2(t) = -\frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \\ B_3(t) = \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^3 \end{cases} \quad (4)$$

$t \in [0, 1]$.

图 1 和图 2 分别为 $B_i(t)$ 和 $\tilde{B}_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$), $t \in [0, 1]$ 的函数图像.

欧氏空间中样条曲线的构造方法已获得充分的研究, 如 Hermite 插值曲线、Bézier 曲线、B 样条曲线等. 给定 \mathbb{R}^d ($d = 2$ or 3) 空间中的型值点列

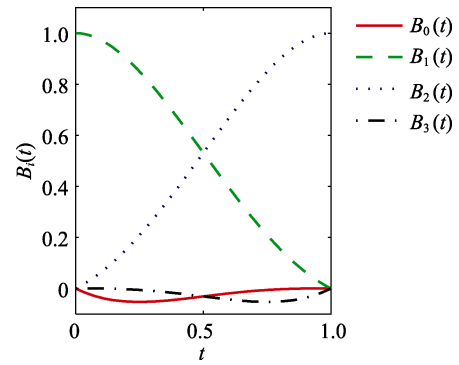


图 1 $B_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 在 $t \in [0, 1]$ 上的图像

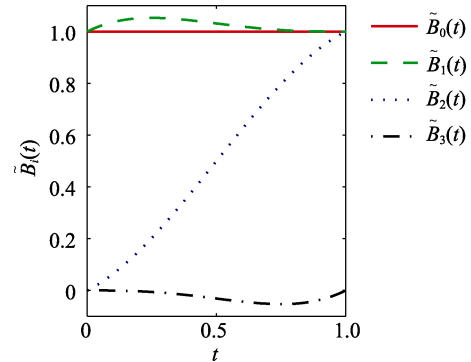


图 2 $\tilde{B}_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 在 $t \in [0, 1]$ 上的图像

$\{p_k\}_{k=0}^3$, 式(4)中的 4 个四次多项式调配函数 $\{B_k(t)\}_{k=0}^3$ 的选取使得 \mathbb{R}^d 空间中的曲线段

$$C(t) = \sum_{k=0}^3 p_k B_k(t), \quad t \in [0, 1], \quad p_k \in \mathbb{R}^d,$$

其首尾恰好为 4 个控制顶点中的中间两点 $\{p_1, p_2\}$. 通过计算可以发现, 利用式(3)这种累和形式的基函数恰能使 S^3 空间中形如式(1)的曲线段首末端点取到 4 个控制顶点 $\{q_{i-1}, q_i, q_{i+1}, q_{i+2}\}$ 中的中间两点 $\{q_i, q_{i+1}\}$. 进一步地, 这些曲线段依次拼接起来形成的样条曲线式(2)恰好能够插值型值点序列 $\{q_i\}_{i=1}^n$ 且在等距节点下达到 C^2 连续性. 式(1)和式(2)这种形式的单位四元数样条曲线具有求导方便、与欧氏空间中对应样条曲线性质类似(如插值性、连续性)等优点.

2.2 单位四元数插值样条曲线的连续性

定理 1. 定义 1 中的单位四元数样条曲线插值给定的朝向序列, 并且在等距节点下是 C^2 连续的.

证明. 从式(3)(4)易知 $\tilde{B}_0(t) \equiv 1, t \in [0, 1]$.

由式(1), 有

$$Q_i(t) = q_{i-1} (q_{i-1}^{-1} q_i)^{\tilde{B}_1(t)} (q_i^{-1} q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)} (q_{i+1}^{-1} q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)} \quad (5)$$

计算

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_1(0) &= 1, & \tilde{B}_2(0) &= 0, & \tilde{B}_3(0) &= 0, \\
\tilde{B}_1'(0) &= \frac{1}{2}, & \tilde{B}_2'(0) &= \frac{1}{2}, & \tilde{B}_3'(0) &= 0, \\
\tilde{B}_1''(0) &= -3, & \tilde{B}_2''(0) &= 3, & \tilde{B}_3''(0) &= 0, \\
\tilde{B}_1(1) &= 1, & \tilde{B}_2(1) &= 1, & \tilde{B}_3(1) &= 0, \\
\tilde{B}_1'(1) &= 0, & \tilde{B}_2'(1) &= \frac{1}{2}, & \tilde{B}_3'(1) &= \frac{1}{2}, \\
\tilde{B}_1''(1) &= 0, & \tilde{B}_2''(1) &= -3, & \tilde{B}_3''(1) &= 3.
\end{aligned}$$

把 $t=0$ 和 $t=1$ 代入式(5)得

$$Q_i(0) = q_{i-1}(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(0)}(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(0)}(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(0)} = q_i,$$

$$Q_i(1) = q_{i-1}(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(1)}(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(1)}(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(1)} = q_{i+1}.$$

因此, 曲线段 $Q_i(t)$ ($t \in [0, 1], i=1, \dots, n-1$) 的 2 端点是 q_i 和 q_{i+1} . 所以, 定义 1 中的单位四元数曲线 $Q(t)$ 插值给定的型值点列 $\{q_i\}_{i=1}^n$.

由 $Q_i(1) = q_{i+1} = Q_{i+1}(0)$ 知, 曲线 $Q(t)$ 是 C^0 连续的.

接着对曲线 $Q(t)$ 关于 t 求一阶导数, 得

$$\begin{aligned}
Q_i'(t) &= q_{i-1}[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]'(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)} + \\
& q_{i-1}(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]'(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)} + \\
& q_{i-1}(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]', \quad (6)
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]' &= (q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)} \ln(q_{i-1}^{-1}q_i) \tilde{B}_1'(t), \\
[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]' &= (q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)} \ln(q_i^{-1}q_{i+1}) \tilde{B}_2'(t), \\
[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]' &= (q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)} \ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2}) \tilde{B}_3'(t).
\end{aligned}$$

为了后继演算方便, 计算

$$\begin{aligned}
[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]'|_{t=0} &= \frac{1}{2}(q_{i-1}^{-1}q_i) \ln(q_{i-1}^{-1}q_i), \\
[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]'|_{t=0} &= \frac{1}{2} \ln(q_i^{-1}q_{i+1}), \\
[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]'|_{t=0} &= 0; \\
[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]'|_{t=1} &= 0, \\
[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]'|_{t=1} &= \frac{1}{2}(q_i^{-1}q_{i+1}) \ln(q_i^{-1}q_{i+1}), \\
[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]'|_{t=1} &= \frac{1}{2} \ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2}).
\end{aligned}$$

把 $t=0$ 和 $t=1$ 代入式(6), 计算得到

$$\begin{aligned}
Q_i'(0) &= \frac{1}{2}q_i(\ln(q_{i-1}^{-1}q_i) + \ln(q_i^{-1}q_{i+1})), \\
Q_i'(1) &= \frac{1}{2}q_{i+1}(\ln(q_i^{-1}q_{i+1}) + \ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})).
\end{aligned}$$

因而 $Q_i'(1) = Q_{i+1}'(0)$.

再求二阶导数

$$\begin{aligned}
Q_i''(t) &= q_{i-1}[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]''(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)} + \\
& q_{i-1}(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]''(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)} + \\
& q_{i-1}(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]'' + \\
& 2q_{i-1}[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]'[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]'(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)} + \\
& 2q_{i-1}[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]'(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]' + \\
& 2q_{i-1}(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]'[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]', \quad (7)
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]'' &= (q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}[\ln(q_{i-1}^{-1}q_i)\tilde{B}_1'(t)]^2 + \\
& (q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)} \ln(q_{i-1}^{-1}q_i)\tilde{B}_1''(t), \\
[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]'' &= (q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}[\ln(q_i^{-1}q_{i+1})\tilde{B}_2'(t)]^2 + \\
& (q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)} \ln(q_i^{-1}q_{i+1})\tilde{B}_2''(t), \\
[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]'' &= (q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}[\ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})\tilde{B}_3'(t)]^2 + \\
& (q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)} \ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})\tilde{B}_3''(t).
\end{aligned}$$

计算

$$\begin{aligned}
[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]''|_{t=0} &= (q_{i-1}^{-1}q_i) \ln(q_{i-1}^{-1}q_i) \left[\frac{1}{4} \ln(q_{i-1}^{-1}q_i) - 3 \right], \\
[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]''|_{t=0} &= \frac{1}{4} [\ln(q_i^{-1}q_{i+1})]^2 + 3 \ln(q_i^{-1}q_{i+1}), \\
[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]''|_{t=0} &= 0; \\
[(q_{i-1}^{-1}q_i)^{\tilde{B}_1(t)}]''|_{t=1} &= 0, \\
[(q_i^{-1}q_{i+1})^{\tilde{B}_2(t)}]''|_{t=1} &= (q_i^{-1}q_{i+1}) \ln(q_i^{-1}q_{i+1}) \left[\frac{1}{4} \ln(q_i^{-1}q_{i+1}) - 3 \right], \\
[(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})^{\tilde{B}_3(t)}]''|_{t=1} &= \frac{1}{4} [\ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2})]^2 + 3 \ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2}).
\end{aligned}$$

把 $t=0$ 和 $t=1$ 代入式(7), 计算可得

$$\begin{aligned}
Q_i''(0) &= \frac{1}{4}q_i[\ln(q_i^{-1}q_{i+1}) + \ln(q_{i-1}^{-1}q_i)]^2 + \\
& 3q_i[\ln(q_i^{-1}q_{i+1}) - \ln(q_{i-1}^{-1}q_i)], \\
Q_i''(1) &= \frac{1}{4}q_{i+1}[\ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2}) + \ln(q_i^{-1}q_{i+1})]^2 + \\
& 3q_{i+1}[\ln(q_{i+1}^{-1}q_{i+2}) - \ln(q_i^{-1}q_{i+1})].
\end{aligned}$$

因此, $Q_i''(1) = Q_{i+1}''(0)$.

曲线 $Q(t) = \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i(t)$ 中各曲线段 $Q_i(t)$ 均定义在

局部参数 $t \in [0, 1]$ 上. 若整条曲线定义在统一的连续参变量区间上, 且结点分割均匀, 那么在等距节点下任意 2 条相邻曲线段在连接点处的 0, 1, 2 各阶导数值仍然相等. 因为此时的 0 阶、1 阶、2 阶

导数值分别是上面计算结果乘以一个系数(系数分别为相应节点间隔长度的倒数的0, 1, 2次幂).

综上所述, 定义1中单位四元数样条曲线插值给定的型值点列在等距结点下是 C^2 连续的. 证毕.

类似地, 但形式更加复杂的计算可以证明 $Q_i'(1) \neq Q_{i+1}'(0)$, 由此可知定义1中的插值样条曲线在节点处达不到 C^3 连续.

3 实验与分析

本节给出2个动画实例来说明本文提出的单位四元数插值样条曲线的可行性和有效性. 图3和图4中刚体的朝向曲线均是由 S^3 空间中单位四元数样条曲线生成, 而位置曲线则分别简单地取为直线和圆. 图3, 4中, 红线是本文方案生成的单位四元数曲线的对数曲线, 蓝线是单位四元数3次均匀B样条对数曲线. 3次均匀B样条四元数插值曲线的控制顶点的计算是采用Nielson^[16]的迭代算法.

表1对比了3次均匀B样条单位四元数曲线

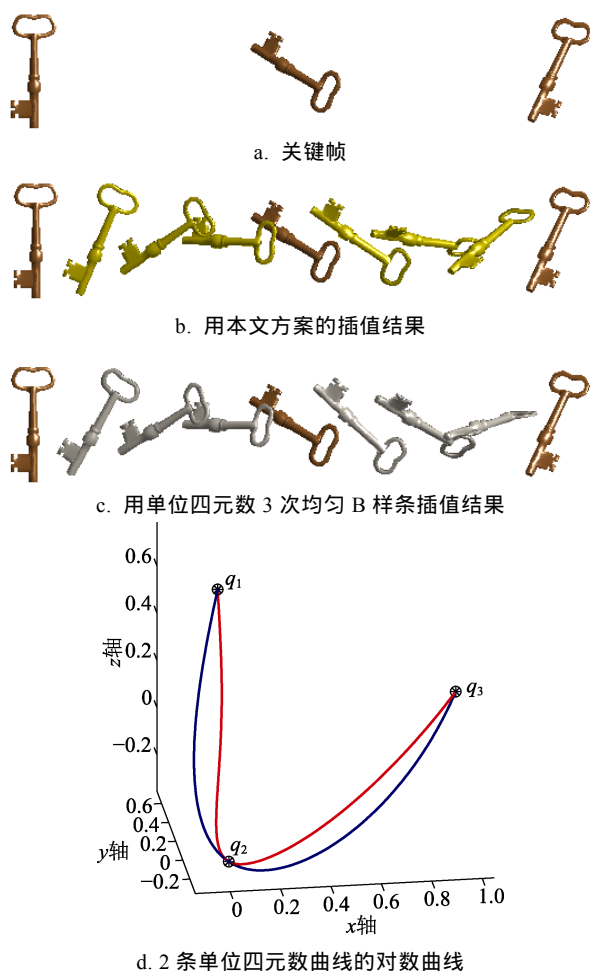


图3 钥匙的朝向插值

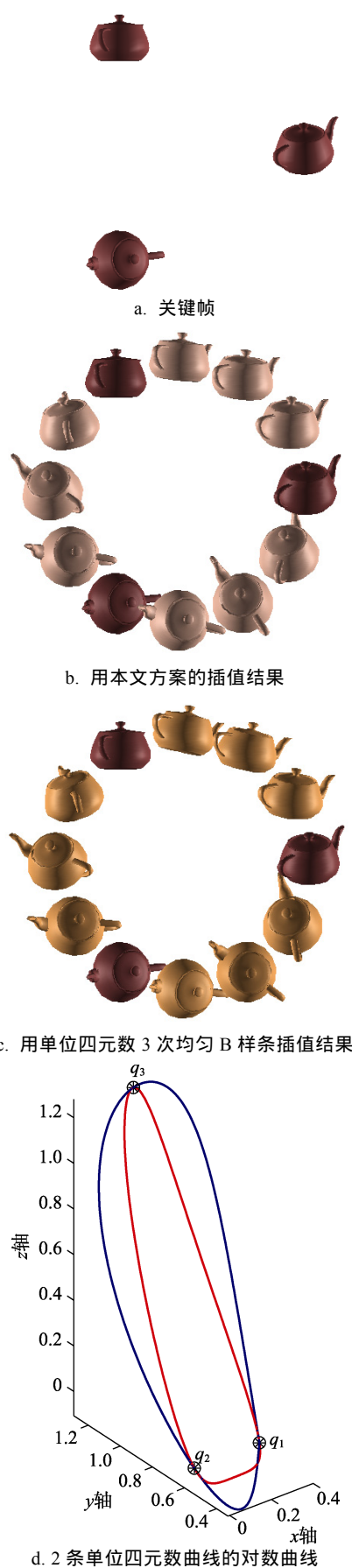


图4 Utah 茶壶的朝向插值

表 1 2 类单位四元数样条曲线时间消耗比较

方案	插值实例	迭代次数	耗时/s	≤误差
3 次均匀 B 样条单位四元数曲线	图 3 钥匙动画(9 帧)	16	0.428 924	1E-6
	生成 101 个钥匙朝向	16	2.269 482	1E-6
	生成 201 个钥匙朝向	16	4.056 699	1E-6
	图 4 茶壶动画(12 帧)	40	1.067 959	1E-6
	生成 150 个茶壶朝向	40	3.830 228	1E-6
	生成 300 个茶壶朝向	40	6.129 554	1E-6
本文方案	图 3 钥匙动画(9 帧)	—	0.232 556	—
	生成 101 个钥匙朝向	—	0.054 245	—
	生成 201 个钥匙朝向	—	0.059 091	—
	图 4 茶壶动画(12 帧)	—	0.261 552	—
	生成 150 个茶壶朝向	—	0.068 203	—
	生成 300 个茶壶朝向	—	0.069 013	—

与本文基于四次多项式的单位四元数插值样条曲线在朝向插值应用中消耗的时间。实验数据是在 Intel Core i5-3210M CPU @2.5GHz, 8.0GB RAM, Matlab 7.11.0 下获得。实验中待插值的型值点序列分别采用图 3 和图 4 实验中选取的初始关键帧序列; 其中, 3 次均匀 B 样条四元数曲线是采用文献[16]的迭代算法生成。在 2 组不同的型值点列下, 逼近误差设置为 1E-6 时, 分别需要迭代 16 次和 40 次。每生成一个中间帧朝向须执行迭代算法一次, 因此生成的中间帧越多, 时间开销越大。而本文方案无需迭代, 直接计算式(1)就可以求出三维关键帧动画中中间帧朝向序列, 节省了耗时的迭代开销; 而且, 需要生成的中间帧越多, 本文方案的优势越明显。表 1 中分别列出了 2 种方案在 2 组实验中的时间开销。每组实验的第一行列出了生成图 3 中钥匙动画(含 9 帧画面)或生成图 4 中茶壶动画(含 12 帧画面)总共花费的时间, 即包括图片渲染时间; 每组中其余各行所列的时间仅为生成中间帧朝向序列的时间, 没有计入渲染图片的时间。

由图 3, 图 4 和表 1 可见, 在动画效果相似的情形下, 本文的方案大大节约了运行时间, 提高了实时动画的计算效率, 而且不必担心迭代不收敛的情况发生(生成的动画无法精确插值关键帧)。

本文构造的单位四元数插值样条曲线在插值节点处 C^2 连续、节点间 C^∞ 光滑, 生成的动画效果令人满意。尽管本文方案有自动精确插值、保证 C^2 连续性、速度快、效率高等优点, 但是从光顺的角度来说, 本文构造的插值曲线似乎不如 B 样条

曲线(如图 3d, 4d 所示)。这激发了我们下一步的工作: 从能量优化的角度, 构造扭矩能或曲率能最小的单位四元数插值样条曲线。

4 结 语

本文提出一种新的 C^2 连续的单位四元数插值样条曲线, 此方案可以应用于计算机动画和机器人运动控制中的刚体朝向曲线设计。由于传统的单位四元数三次 B 样条曲线做插值应用时从型值点反求控制顶点需要求解非线性方程组, 耗时的迭代算法会使计算效率降低。本文提出的单位四元数插值样条曲线能够自动地精确通过任意给定的朝向序列, 大大提高了动画制作效率, 并且达到 C^2 连续。实验结果表明了本文方案的有效性和实用性。

参考文献(References):

- [1] Jin Xiaogang, Bao Hujun, Peng Qunsheng. A survey of computer animation[J]. Journal of Software, 1997, 8(4): 241-251 (in Chinese)
(金小刚, 鲍虎军, 彭群生. 计算机动画技术综述[J]. 软件学报, 1997, 8(4): 241-251)
- [2] Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves[J]. Computer Graphics, 1985, 19(3): 245-254
- [3] Jin Xiaogang, Peng Qunsheng. Quaternion and its application in computer animation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 1994, 6(3): 174-180(in Chinese)
(金小刚, 彭群生. 四元数及其在计算机动画中的应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1994, 6(3): 174-180)
- [4] Hanson A J. Visualizing quaternions: course notes for Siggraph 2007[C] //Proceedings of ACM SIGGRAPH. New York: ACM Press, 2007: Article No.1
- [5] Wang W, Joe B. Orientation interpolation in quaternion space using spherical biarcs[C] //Proceedings of Graphics Interface. Toronto: Canadian Information Processing Society Press, 1993: 24-32
- [6] Fang Y C, Hsieh C C, Kim M J, *et al.* Real time motion fairing with unit quaternions[J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(3): 191-198
- [7] Buss S R, Fillmore J P. Spherical averages and applications to spherical splines and interpolation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2001, 20(2): 95-126
- [8] Neubauer M, Muller A. Smooth orientation path planning with quaternions using B-splines[C] //Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2015: 2087-2092
- [9] Kim M S, Nam K W. Interpolating solid orientations with cir-

- cular blending quaternion curves[J]. Computer-Aided Design, 1995, 27(5): 385-398
- [10] Ramamoorthi R, Barr A H. Fast construction of accurate quaternion splines[C] //Proceedings of the 24th International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1997: 287-292
- [11] Su B Y, Zhang J, Wang G J. The solid orientations interpolation in quaternion space using a class of blending interpolation spline[J]. International Journal of Advancements in Computing Technology, 2013, 5(6): 335-341
- [12] Xing Y, Xu R Z, Tan J Q, *et al.* A class of generalized B-spline quaternion curves[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271: 288-300
- [13] Kim M J, Kim M S, Shin S Y. A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives[C] //Proceedings of SIGGRAPH, Conference on Computer Graphics & Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1995: 369-376
- [14] Schlag J. Using geometric constructions to interpolate orientation with quaternions[M] //Arvo J. Graphics Gems II, VIII.4. San Diego: Academic Press, 1991: 377-380
- [15] Kim M J, Kim M S, Shin S Y. A C^2 -continuous B-spline quaternion curve interpolating a given sequence of solid orientations[C] //Proceedings of IEEE Computer Animation. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1995: 72-81
- [16] Nielson G M. v-quaternion splines for the smooth interpolation of orientations[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2004, 10(2): 224-229
- [17] Yu Mingcai, Yang Xunnian, Wang Guozhao. Interpolation of unit quaternion curve with high order continuity[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(3): 437-441(in Chinese)
(虞铭财, 杨勋年, 汪国昭. 高阶连续的单位四元数插值曲线[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(3): 437-441)
- [18] Ge W B, Huang Z J, Wang G P. Interpolating solid orientations with a C^2 -continuous B-spline quaternion curve[M] //Lecture Notes in Computer Science. Heidelberg: Springer, 2007, 4469: 606-615