

线性系统的根轨迹法

线性系统动态性能分析

Outline

- ① 性能估算
- ② 极点配置 (输出反馈)
- ③ 串联校正

Topic

① 性能估算

② 极点配置 (输出反馈)

③ 串联校正

性能估算

- 闭环零点: 加快响应速度 $t_p \downarrow, \sigma\% \uparrow, \xi \downarrow, t_s$ 不定
- 闭环非主导极点: 减缓响应速度 $t_p \uparrow, \sigma\% \downarrow, \xi \uparrow, t_s$ 不定

性能估算

- 闭环零点: 加快响应速度 $t_p \downarrow, \sigma\% \uparrow, \xi \downarrow, t_s$ 不定
- 闭环非主导极点: 减缓响应速度 $t_p \uparrow, \sigma\% \downarrow, \xi \uparrow, t_s$ 不定

性能估算

- 闭环零点: 加快响应速度 $t_p \downarrow, \sigma\% \uparrow, \xi \downarrow, t_s$ 不定
- 闭环非主导极点: 减缓响应速度 $t_p \uparrow, \sigma\% \downarrow, \xi \uparrow, t_s$ 不定

偶极子及其影响

- 偶极子: 一个闭环极点与闭环零点距离很近,(实数偶极子, 复数偶极子),
- 偶极子不影响主导极点的地位
- 判定: 零极点间距离小于其模的 10%

偶极子及其影响

- 偶极子: 一个闭环极点与闭环零点距离很近,(实数偶极子, 复数偶极子),
- 偶极子不影响主导极点的地位
- 判定: 零极点间距离小于其模的 10%

偶极子及其影响

- 偶极子: 一个闭环极点与闭环零点距离很近,(实数偶极子, 复数偶极子),
- 偶极子不影响主导极点的地位
- 判定: 零极点间距离小于其模的 10%

偶极子及其影响

- 偶极子: 一个闭环极点与闭环零点距离很近,(实数偶极子, 复数偶极子),
- 偶极子不影响主导极点的地位
- 判定: 零极点间距离小于其模的 10%

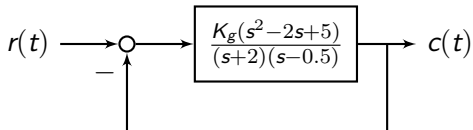
Topic

① 性能估算

② 极点配置 (输出反馈)

③ 串联校正

极点配置示例 1



- 绘制 K_g 的根轨迹
- 确定使系统稳定的开环增益 K 范围
- 确定闭环传递函数具有欠阻尼的开环增益 K

解:

- 开环零点: $1 \pm 2j$, 开环极点: $-2, 0.5$
- 分离点:

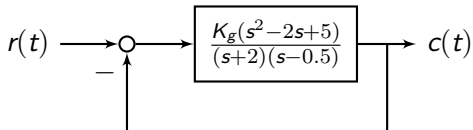
$$M'(s)N(s) - N'(s)M(s) = 0$$

$$(2s - 2)(s^2 + 1.5s - 1) - (s^2 - 2s + 5)(2s + 1.5) = 0$$

$$s_1 = 3.8(\text{舍去})$$

$$s_2 = -0.4$$

极点配置示例 1



- 绘制 K_g 的根轨迹
- 确定使系统稳定的开环增益 K 范围
- 确定闭环传递函数具有欠阻尼的开环增益 K

解:

- 开环零点: $1 \pm 2j$, 开环极点: $-2, 0.5$
- 分离点:

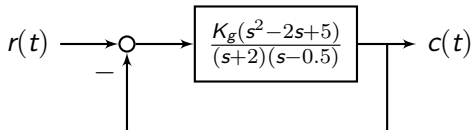
$$M'(s)N(s) - N'(s)M(s) = 0$$

$$(2s - 2)(s^2 + 1.5s - 1) - (s^2 - 2s + 5)(2s + 1.5) = 0$$

$$s_1 = 3.8(\text{舍去})$$

$$s_2 = -0.4$$

极点配置示例 1



- 绘制 K_g 的根轨迹
- 确定使系统稳定的开环增益 K 范围
- 确定闭环传递函数具有欠阻尼的开环增益 K

解:

- 开环零点: $1 \pm 2j$, 开环极点: $-2, 0.5$
- 分离点:

$$\begin{aligned}
 M'(s)N(s) - N'(s)M(s) &= 0 \\
 (2s - 2)(s^2 + 1.5s - 1) - (s^2 - 2s + 5)(2s + 1.5) &= 0 \\
 s_1 &= 3.8(\text{舍去}) \\
 s_2 &= -0.4
 \end{aligned}$$

极点配置示例 1(续)

- 与虚轴交点

- $D(s) = (1 + K_g)s^2 + (1.5 - 2K_g)s + (5K_g - 1) = 0$,
- 令 $1.5 - 2K_g = 0$ 得 $K_g = 0.75$,
- 由 $1.75s^2 + 2.75 = 0$ 得 $s_{1,2} = \pm j1.25$

- 入射角 (终止角)

$\phi_{z1} = 180^\circ - (90^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan 4) = 200^\circ$ 得:

$$\phi_{z2} = -200^\circ$$

极点配置示例 1(续)

- 与虚轴交点

- $D(s) = (1 + K_g)s^2 + (1.5 - 2K_g)s + (5K_g - 1) = 0$,
- 令 $1.5 - 2K_g = 0$ 得 $K_g = 0.75$,
- 由 $1.75s^2 + 2.75 = 0$ 得 $s_{1,2} = \pm j1.25$

- 入射角 (终止角)

$\phi_{z1} = 180^\circ - (90^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan 4) = 200^\circ$ 得:

$$\phi_{z2} = -200^\circ$$

极点配置示例 1(续)

- 与虚轴交点

- $D(s) = (1 + K_g)s^2 + (1.5 - 2K_g)s + (5K_g - 1) = 0$,
- 令 $1.5 - 2K_g = 0$ 得 $K_g = 0.75$,
- 由 $1.75s^2 + 2.75 = 0$ 得 $s_{1,2} = \pm j1.25$

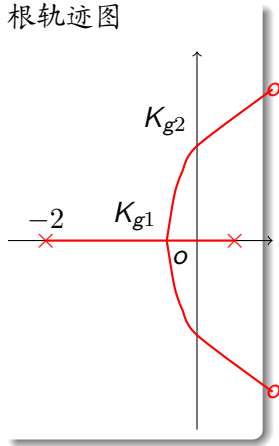
- 入射角 (终止角)

$$\phi_{z_1} = 180^\circ - (90^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan 4) = 200^\circ \text{ 得:}$$

$$\phi_{z_2} = -200^\circ$$

极点配置示例 1 续

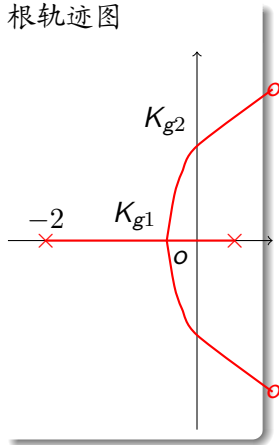
根轨迹图

确定 K

- 由 $D(0) = 0$ 解得 $K_g = 0.2$ 所以系统稳定时 $0.2 < K_g < 0.75$, $K = \frac{5K_g}{2 \times 0.5} = 5K_g$, 所以 $1 < K < 3.75$
- 由图可知 K_{g1}, K_{g2} 分别为分离点以及实轴交点对应的 K_g , $K_{g1} < K_g < K_{g2}$ 时, 系统为欠阻尼. 由分离点处 $D(-0.4) = 0$ 得: $K_{g1} = 0.24$, 所以 $0.24 < K_g < 0.75$, $1.2 < K < 3.75$

极点配置示例 1 续

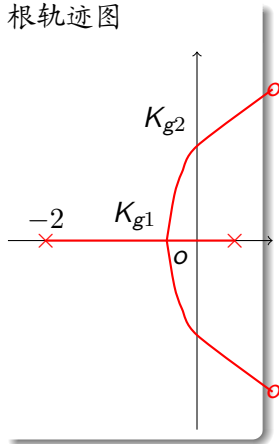
根轨迹图

确定 K

- 由 $D(0) = 0$ 解得 $K_g = 0.2$ 所以系统稳定时 $0.2 < K_g < 0.75$, $K = \frac{5K_g}{2 \times 0.5} = 5K_g$, 所以 $1 < K < 3.75$
- 由图可知 K_{g1}, K_{g2} 分别为分离点以及实轴交点对应的 K_g , $K_{g1} < K_g < K_{g2}$ 时, 系统为欠阻尼. 由分离点处 $D(-0.4) = 0$ 得: $K_{g1} = 0.24$, 所以 $0.24 < K_g < 0.75$, $1.2 < K < 3.75$

极点配置示例 1 续

根轨迹图

确定 K

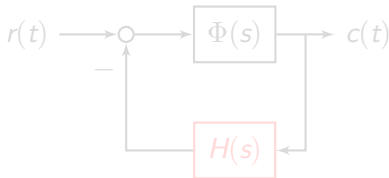
- 由 $D(0) = 0$ 解得 $K_g = 0.2$ 所以系统稳定时 $0.2 < K_g < 0.75$, $K = \frac{5K_g}{2 \times 0.5} = 5K_g$, 所以 $1 < K < 3.75$
- 由图可知 K_{g1}, K_{g2} 分别为分离点以及实轴交点对应的 K_g , $K_{g1} < K_g < K_{g2}$ 时, 系统为欠阻尼. 由分离点处 $D(-0.4) = 0$ 得: $K_{g1} = 0.24$, 所以 $0.24 < K_g < 0.75$, $1.2 < K < 3.75$

极点配置示例 2:

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+0.5)(s+1)(s+2)}, H(s) = K_1 + K_2s + K_3s^2$$

设计指标: $\sigma\% = 4.3\%$, $t_s = 4s$ 设计输出反馈控制器.

结构图

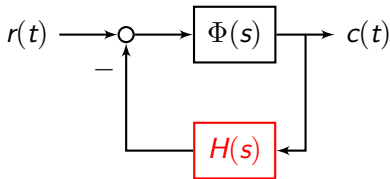


极点配置示例 2:

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+0.5)(s+1)(s+2)}, H(s) = K_1 + K_2s + K_3s^2$$

设计指标: $\sigma\% = 4.3\%$, $t_s = 4s$ 设计输出反馈控制器.

结构图



极点配置示例 2(续)

解:

$$\sigma\% = 0.043$$

$$\xi = 0.707$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

$$\omega_n = 1.2376$$

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -0.875 \pm j0.875 \end{aligned}$$

期望特征多项式

取 $p_{1,2} = -1 \pm j$ 作为主导极点,
 $p_3 = -10$, 得期望特征多项式:

$$\begin{aligned} D_1(s) &= (s+1+j)(s+1-j)(s+10) \\ &= s^3 + 12s^2 + 12s + 10 \end{aligned}$$

极点配置示例 2(续)

解:

$$\sigma\% = 0.043$$

$$\xi = 0.707$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

$$\omega_n = 1.2376$$

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -0.875 \pm j0.875 \end{aligned}$$

期望特征多项式

取 $p_{1,2} = -1 \pm j$ 作为主导极点,
 $p_3 = -10$, 得期望特征多项式:

$$\begin{aligned} D_1(s) &= (s+1+j)(s+1-j)(s+10) \\ &= s^3 + 12s^2 + 12s + 10 \end{aligned}$$

极点配置示例 2(续)

解:

$$\sigma\% = 0.043$$

$$\xi = 0.707$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

$$\omega_n = 1.2376$$

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -0.875 \pm j0.875 \end{aligned}$$

期望特征多项式

取 $p_{1,2} = -1 \pm j$ 作为主导极点,
 $p_3 = -10$, 得期望特征多项式:

$$\begin{aligned} D_1(s) &= (s+1+j)(s+1-j)(s+10) \\ &= s^3 + 12s^2 + 12s + 10 \end{aligned}$$

极点配置示例 2(续)

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{\Phi(s)}{1 + H(s)\Phi(s)} \\ &= \frac{1}{(s + 0.5)(s + 1)(s + 2) + K_1 + K_2s + K_3s^2} \\ D(s) &= s^3 + (3.5 + K_3)s^2 + (3.5 + K_2)s + K_1 + 1\end{aligned}$$

令 $D(s) = D_1(s)$ 得

$$3.5 + K_3 = 12$$

$$K_3 = 8.5$$

$$3.5 + K_2 = 12$$

$$K_2 = 8.5$$

$$K_1 + 1 = 20$$

$$K_1 = 19$$

Topic

① 性能估算

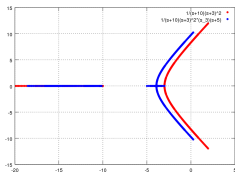
② 极点配置 (输出反馈)

③ 串联校正

超前校正

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+3)^2}$$

$$G_c(s) = \frac{s+3}{s+5}$$



滞后校正

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+3)^2}$$

$$G_c(s) = \frac{10s+1}{100s+1}$$

