线性系统的根轨迹法

根轨迹绘制法则

Outline

Topic

根轨迹图的绘制

- 前提条件:
  - 变动参数为开环传递函数的根轨迹增益 $K_g, (K^*)$
  - 系统为负反馈系统
- 目的:
  - 根据开环零极点分布绘制闭环极点的运动轨迹

根轨迹图的绘制

- 前提条件:
  - 变动参数为开环传递函数的根轨迹增益 $K_g, (K^*)$
  - 系统为负反馈系统
- 目的:
  - 根据开环零极点分布绘制闭环极点的运动轨迹

根轨迹图的绘制

- 前提条件:
  - 变动参数为开环传递函数的根轨迹增益 $K_g, (K^*)$
  - 系统为负反馈系统
- 目的:
  - 根据开环零极点分布绘制闭环极点的运动轨迹

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点,
- 根轨迹终止于开环零点,
- 有 $\max(m, n)$ 条分支,
- 有 $n - m$ 条分支趋向无穷远处.

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点,
- 根轨迹终止于开环零点,
- 有 $\max(m, n)$ 条分支,
- 有 $n - m$ 条分支趋向无穷远处.

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点,
- 根轨迹终止于开环零点,
- 有 $\max(m, n)$ 条分支,
- 有 $n - m$ 条分支趋向无穷远处.

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点,
- 根轨迹终止于开环零点,
- 有 $\max(m, n)$ 条分支,
- 有 $n-m$ 条分支趋向无穷远处.

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点,
- 根轨迹终止于开环零点,
- 有 $\max(m, n)$ 条分支,
- 有 $n-m$ 条分支趋向无穷远处.

根轨迹的对称性

- 根轨迹对称于实轴

根轨迹的对称性

- 根轨迹对称于实轴

实轴上的根轨迹

- 实轴上某区域若其右边开环实数零极点个数之和为奇数, 则该区域为根轨迹区域
- 例:

$$G_o(s) = \frac{K_g(s+1)(s+3)}{s(s+2)}$$

  - 实轴上根轨迹区域:

$$[0,-1],[-2,-3]$$

实轴上的根轨迹

- 实轴上某区域若其右边开环实数零极点个数之和为奇数, 则该区域为根轨迹区域
- 例:

$$G_o(s) = \frac{K_g(s+1)(s+3)}{s(s+2)}$$

- 实轴上根轨迹区域:

$$[0, -1], [-2, -3]$$

实轴上的根轨迹

- 实轴上某区域若其右边开环实数零极点个数之和为奇数，则该区域为根轨迹区域
- 例:

$$G_o(s) = \frac{K_g(s+1)(s+3)}{s(s+2)}$$

  - 实轴上根轨迹区域:

$$[0, -1], [-2, -3]$$

渐近线

- $n > m$ 时, 渐近线与实轴交点为 σ_a , 夹角为 ϕ 则:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

$$\phi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

渐近线

- $n > m$ 时，渐近线与实轴交点为 σ_a，夹角为 ϕ 则:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} \\ \phi &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \end{aligned}$$

分离点与分离角

- 分离点: 两条或两条以上根轨迹分支在 s 平面上相交又立刻分开的点称为根轨迹的分离点 (会合点)
- 分离角: 相邻两条根轨迹分支的夹角

分离点计算:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_g M(s)}{N(s)} \\
D(s) &= N(s) + K_g M(s) \\
D(s) &= 0 \\
N(s) &= -K_g M(s) \\
D'(s) &= 0 \\
N'(s) &= -K_g M'(s) \\
M'(s)N(s) &= M(s)N'(s)
\end{aligned}
$$

分离角计算:

$\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \cdots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

分离点与分离角

- 分离点: 两条或两条以上根轨迹分支在 s 平面上相交又立刻分开的点称为根轨迹的分离点 (会合点)
- 分离角: 相邻两条根轨迹分支的夹角

分离点计算:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_g M(s)}{N(s)} \\
D(s) &= N(s) + K_g M(s) \\
D(s) &= 0 \\
N(s) &= -K_g M(s) \\
D'(s) &= 0 \\
N'(s) &= -K_g M'(s) \\
M'(s)N(s) &= M(s)N'(s)
\end{aligned}
$$

分离角计算:

$\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \cdots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

分离点与分离角

- 分离点：两条或两条以上根轨迹分支在 s 平面上相交又立刻分开的点称为根轨迹的分离点 (会合点)
- 分离角：相邻两条根轨迹分支的夹角

分离点计算：

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_g M(s)}{N(s)} \\
D(s) &= N(s) + K_g M(s) \\
D(s) &= 0 \\
N(s) &= -K_g M(s) \\
D'(s) &= 0 \\
N'(s) &= -K_g M'(s) \\
M'(s)N(s) &= M(s)N'(s)
\end{aligned}
$$

分离角计算：

$\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \cdots, l-1$，其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

分离点与分离角

- 分离点: 两条或两条以上根轨迹分支在 s 平面上相交又立刻分开的点称为根轨迹的分离点 (会合点)
- 分离角: 相邻两条根轨迹分支的夹角

分离点计算:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_g M(s)}{N(s)} \\
D(s) &= N(s) + K_g M(s) \\
D(s) &= 0 \\
N(s) &= -K_g M(s) \\
D'(s) &= 0 \\
N'(s) &= -K_g M'(s) \\
M'(s)N(s) &= M(s)N'(s)
\end{aligned}
$$

分离角计算:

$\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \cdots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

分离点与分离角

- 分离点: 两条或两条以上根轨迹分支在 s 平面上相交又立刻分开的点称为根轨迹的分离点 (会合点)
- 分离角: 相邻两条根轨迹分支的夹角

分离点计算:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_g M(s)}{N(s)} \\
D(s) &= N(s) + K_g M(s) \\
D(s) &= 0 \\
N(s) &= -K_g M(s) \\
D'(s) &= 0 \\
N'(s) &= -K_g M'(s) \\
M'(s)N(s) &= M(s)N'(s)
\end{aligned}
$$

分离角计算:

$\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \cdots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

根轨迹的起始角与终止角

- 起始角 (θ_{p_i}): 根轨迹从开环极点出发时, 其切线与正实轴的夹角 (出射角)
- 终止角 (ϕ_{z_j}): 根轨迹终止于开环零点时, 其切线与正实轴的夹角 (入射角)

起始角

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m} \angle(s - z_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) &= (2k+1)\pi \\
s &= p_q + \delta r e^{j\theta} \\
\sum_{l=1}^{m} \angle(p_q + \delta r e^{j\theta} - z_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(p_q + \delta r e^{j\theta} - p_i) &= (2k+1)\pi \\
\lim_{\delta r \to 0} \sum_{l=1}^{m} \angle(p_q + \delta r e^{j\theta} - z_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(p_q + \delta r e^{j\theta} - p_i) &= (2k+1)\pi \\
\sum_{l=1}^{m} \angle(p_q - z_l) - \sum_{p_q = p_i} \theta - \sum_{p_q \neq p_i} \angle(z_q - p_i) &= (2k+1)\pi
\end{aligned}
$$

终止角

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m} \angle(s - z_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) &= (2k+1)\pi \\
s &= z_q + \delta r e^{j\theta} \\
\sum_{l=1}^{m} \angle(z_q + \delta r e^{j\theta} - z_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(z_q + \delta r e^{j\theta} - p_i) &= (2k+1)\pi \\
\lim_{\delta r \to 0} \sum_{l=1}^{m} \angle(z_q + \delta r e^{j\theta} - z_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(z_q + \delta r e^{j\theta} - p_i) &= (2k+1)\pi \\
\sum_{z_q \neq z_l} \angle(z_q - z_l) + \sum_{z_q = z_l} \theta - \sum_{i=1}^{n} \angle(z_q - p_i) &= (2k+1)\pi
\end{aligned}
$$

根轨迹的起始角与终止角计算公式:

$$\theta_{p_i} = \frac{(2k+1)\pi}{l} + \frac{1}{l}\left[\sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ p_j \neq p_i}}^{n} \angle(p_i - p_j)\right]$$

$$\phi_{z_j} = \frac{(2k+1)\pi}{J} - \frac{1}{J}\left[\sum_{\substack{i=1 \\ z_i \neq z_j}}^{m} \angle(z_j - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(z_j - p_i)\right]$$

- l 极点重根个数
- J 零点重根个数

根轨迹的起始角与终止角计算公式 (无重根时):

$$
\begin{aligned}
\theta_{p_i} &= 180^\circ + \left[\sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \angle(p_i - p_j) \right] \\
\phi_{z_j} &= 180^\circ - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} \angle(z_j - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(z_j - p_i) \right]
\end{aligned}
$$

即:

- θ_{p_i} 等于: 180° +(所有零点指向极点 p_i 的角度之和 -所有其它极点指向极点 p_i 的角度之和)
- ϕ_{z_i} 等于: 180° -(所有其它零点指向零点 z_j 的角度之和 -所有极点指向零点 z_j 的角度之和)

根轨迹与虚轴交点

直接计算

将 $s=j\omega$ 代入 $D(s)$，求出 K_g,ω，$(0,j\omega)$ 即为交点

$$\begin{aligned} D(s) &= K_gM(s)+N(s) \\ &= 0 \\ s &= j\omega \\ D(j\omega) &= 0 \\ \Re[D(j\omega)] &= 0 \\ \Im[D(j\omega)] &= 0 \end{aligned}$$

利用 Routh 判据计算

例:

$$G_o(s)=\frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

$$D(s)=s^3+3s^2+2s+K_g$$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K_g \\ s^1 & \frac{6-K_g}{3} & \\ s^0 & K_g & \end{array}$$

令 $\frac{6-K_g}{3}=0$ 得 $K_g=6$, 解辅助方程: $3s^2+K_g=0$ 得 $s=\pm j\sqrt{2}$

根轨迹与虚轴交点

直接计算

将 $s=j\omega$ 代入 $D(s)$，求出 K_g,ω，$(0,j\omega)$ 即为交点

$$
\begin{aligned}
D(s) &= K_gM(s)+N(s) \\
&= 0 \\
s &= j\omega \\
D(j\omega) &= 0 \\
\Re[D(j\omega)] &= 0 \\
\Im[D(j\omega)] &= 0
\end{aligned}
$$

利用 Routh 判据计算

例:

$$G_o(s)=\frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

$$D(s)=s^3+3s^2+2s+K_g$$

$$
\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 3 & K_g \\
s^1 & \frac{6-K_g}{3} & \\
s^0 & K_g &
\end{array}
$$

令 $\frac{6-K_g}{3}=0$ 得 $K_g=6$, 解辅助方程: $3s^2+K_g=0$ 得 $s=\pm j\sqrt{2}$

根轨迹与虚轴交点

直接计算

将 $s = j\omega$ 代入 $D(s)$ ，求出 K_g, ω , $(0, j\omega)$ 即为交点

$$\begin{aligned} D(s) &= K_g M(s) + N(s) \\ &= 0 \\ s &= j\omega \\ D(j\omega) &= 0 \\ \Re[D(j\omega)] &= 0 \\ \Im[D(j\omega)] &= 0 \end{aligned}$$

利用 Routh 判据计算

例:

$$G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K_g$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K_g \\ s^1 & \frac{6-K_g}{3} & \\ s^0 & K_g & \end{array}$$

令 $\frac{6-K_g}{3} = 0$ 得 $K_g = 6$, 解辅助方程: $3s^2 + K_g = 0$ 得 $s = \pm j\sqrt{2}$

根之和

- $n-m \geq 2$ 时，闭环极点之和等于开环极点之和

根之和

- $n - m \geq 2$ 时, 闭环极点之和等于开环极点之和

Topic

根轨迹示例 1 $G_o(s) = \frac{K_g(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -1 , 开环极点: $0, -4, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-1, 0], [-\infty, -4]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{3}$
- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (90^\circ - 135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{3}) = 27^\circ$
  - $\theta_{p_2} = -27^\circ$

根轨迹示例 1 $G_o(s) = \frac{K_g(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -1 , 开环极点: $0, -4, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-1, 0], [-\infty, -4]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{3}$
- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (90^\circ - 135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{3}) = 27^\circ$
  - $\theta_{p_2} = -27^\circ$

根轨迹示例 1 $G_o(s)=\frac{K_g(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -1 , 开环极点: $0,-4,-1\pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-1,0],[-\infty,-4]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}=\frac{-6+1}{3}=-\frac{5}{3}$
  - $\phi=\pm\frac{\pi}{3}$
- 起始角:
  - $\theta_{p_1}=180^\circ+(90^\circ-135^\circ-90^\circ-\arctan\frac{1}{3})=27^\circ$
  - $\theta_{p_2}=-27^\circ$

根轨迹示例 1 $G_o(s) = \frac{K_g(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -1 , 开环极点: $0, -4, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-1, 0], [-\infty, -4]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{3}$
- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180° + (90° - 135° - 90° - \arctan\frac{1}{3}) = 27°$
  - $\theta_{p_2} = -27°$

根轨迹示例 1 $G_o(s) = \frac{K_g(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -1 , 开环极点: $0, -4, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-1, 0], [-\infty, -4]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{3}$
- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (90^\circ - 135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{3}) = 27^\circ$
  - $\theta_{p_2} = -27^\circ$

根轨迹示例 1(续)

与虚轴交点 $D(s)=s^4+6s^3+10s^2+(8+K_g)s+K_g=0$

Routh 表如下

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 10 & K_g \\
s^3 & 6 & 8+K_g & \\
s^2 & \frac{52-K_g}{6} & K_g & \\
s^1 & 8+K_g-\frac{36K_g}{52-K_g} & & \\
s^0 & K_g & &
\end{array}
$$

根轨迹示例 1(续)

计算交点处 K_g

$$\begin{aligned} 8+K_g-\frac{36K_g}{52-K_g} &= 0 \\ K_g^2-8K_g-416 &= 0 \\ K_g &= 4\pm4\sqrt{27} \end{aligned}$$

取 $K_g=4+4\sqrt{27}$ 代入辅助方程:

$$\begin{aligned} \frac{52-K_g}{6}s^2+K_g &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j2.3 \end{aligned}$$

根轨迹示例 1(续)

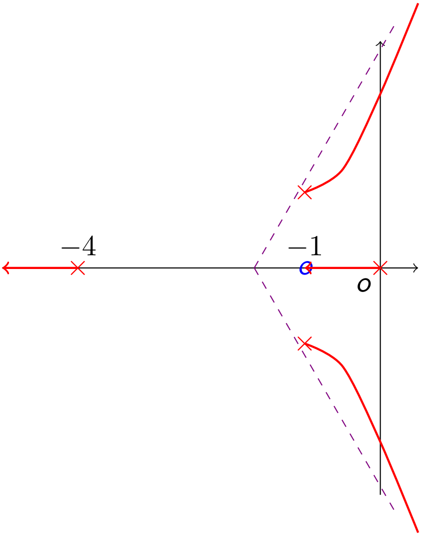
计算交点处 K_g

$$\begin{aligned} 8+K_g-\frac{36K_g}{52-K_g} &= 0 \\ K_g^2-8K_g-416 &= 0 \\ K_g &= 4\pm 4\sqrt{27} \end{aligned}$$

取 $K_g = 4+4\sqrt{27}$ 代入辅助方程:

$$\begin{aligned} \frac{52-K_g}{6}s^2+K_g &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j2.3 \end{aligned}$$

根轨迹示例 1(续) 根轨迹图



根轨迹示例 2 $G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, -3, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-3, 0]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$
- 分离点:

$$
\begin{aligned}
M'(s)N(s) - M(s)N'(s) &= 0 \\
4s^3 + 15s^2 + 16s + 6 &= 0 \\
s &= -2.3
\end{aligned}
$$

- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (-135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{2}) = -71.6^\circ$
  - $\theta_{p_2} = 71.6^\circ$

根轨迹示例 2 $G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, -3, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-3, 0]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$
- 分离点:

$$\begin{aligned} M'(s)N(s) - M(s)N'(s) &= 0 \\ 4s^3 + 15s^2 + 16s + 6 &= 0 \\ s &= -2.3 \end{aligned}$$

- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180° + (-135° - 90° - \arctan\frac{1}{2}) = -71.6°$
  - $\theta_{p_2} = 71.6°$

根轨迹示例 2 $G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, -3, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-3, 0]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$
- 分离点:

$$
\begin{aligned}
M'(s)N(s) - M(s)N'(s) &= 0 \\
4s^3 + 15s^2 + 16s + 6 &= 0 \\
s &= -2.3
\end{aligned}
$$

- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (-135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{2}) = -71.6^\circ$
  - $\theta_{p_2} = 71.6^\circ$

根轨迹示例 2 $G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, -3, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-3, 0]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$
- 分离点:

$$\begin{aligned} M'(s)N(s) - M(s)N'(s) &= 0 \\ 4s^3 + 15s^2 + 16s + 6 &= 0 \\ s &= -2.3 \end{aligned}$$

- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (-135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{2}) = -71.6^\circ$
  - $\theta_{p_2} = 71.6^\circ$

根轨迹示例 2 $G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, -3, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-3, 0]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$
- 分离点:

$$
\begin{aligned}
M'(s)N(s) - M(s)N'(s) &= 0 \\
4s^3 + 15s^2 + 16s + 6 &= 0 \\
s &= -2.3
\end{aligned}
$$

- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (-135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{2}) = -71.6^\circ$
  - $\theta_{p_2} = 71.6^\circ$

根轨迹示例 2 $G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, -3, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-3, 0]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$
- 分离点:

$$
\begin{aligned}
M'(s)N(s) - M(s)N'(s) &= 0 \\
4s^3 + 15s^2 + 16s + 6 &= 0 \\
s &= -2.3
\end{aligned}
$$

- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (-135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{2}) = -71.6^\circ$
  - $\theta_{p_2} = 71.6^\circ$

根轨迹示例 2(续)

- 与虚轴交点
  $D(s) = s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K_g = 0$

Routh 表如下

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 8 & K_g \\
s^3 & 5 & 6 & \\
s^2 & \frac{34}{5} & K_g & \\
s^1 & \frac{204-25K_g}{34} & & \\
s^0 & K_g & &
\end{array}
$$

根轨迹示例 2(续)

计算交点处 K_g

$$
\begin{aligned}
\frac{204-25K_g}{34} &= 0 \\
K_g &= 8.16
\end{aligned}
$$

代入辅助方程:

$$
\begin{aligned}
\frac{34}{5}s^2+K_g &= 0 \\
s_{1,2} &= \pm j1.1
\end{aligned}
$$

根轨迹示例 2(续)

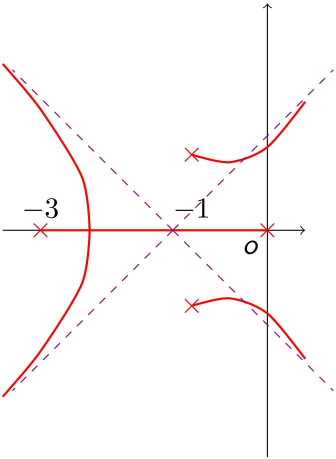
计算交点处 K_g

$$\begin{aligned}\frac{204-25K_g}{34} &= 0 \\ K_g &= 8.16\end{aligned}$$

代入辅助方程:

$$\begin{aligned}\frac{34}{5}s^2+K_g &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j1.1\end{aligned}$$

根轨迹示例 2(续) 根轨迹图



根轨迹示例 3 $G_o(s) = \frac{K_g}{s^2(s+10)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, 0, -10$
- 实轴上根轨迹: $[-\infty, -10]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{10}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{3}, \pi$

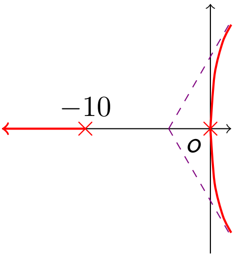
当 $G_o = \frac{K_g(s+z)}{s^2(s+10)}, 0 < z < 10$

得: $\sigma_a = \frac{-10+z}{2}, \phi = \pm\frac{\pi}{2}$

根轨迹示例 3 $G_o(s) = \frac{K_g}{s^2(s+10)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, 0, -10$
- 实轴上根轨迹: $[-\infty, -10]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{10}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{3}, \pi$



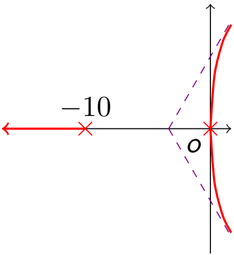
当 $G_o = \frac{K_g(s+z)}{s^2(s+10)}, 0 < z < 10$

得: $\sigma_a = \frac{-10+z}{2}, \phi = \pm\frac{\pi}{2}$

根轨迹示例 3 $G_o(s) = \frac{K_g}{s^2(s+10)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, 0, -10$
- 实轴上根轨迹: $[-\infty, -10]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{10}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{3}, \pi$



当 $G_o = \frac{K_g(s+z)}{s^2(s+10)}, 0 < z < 10$

得: $\sigma_a = \frac{-10+z}{2}, \phi = \pm\frac{\pi}{2}$