

线性系统的根轨迹法

Outline

Contents

1	基本概念	1
1.1	零极点与根轨迹	1
1.2	根轨迹的基本条件	2
2	绘制根轨迹图的基本原则	2
2.1	根轨迹图绘制法则	2
2.2	示例	6
3	广义根轨迹与零度根轨迹	10
3.1	广义根轨迹	10
3.2	零度根轨迹	12
4	系统性能分析	14
4.1	性能估算	14
4.2	极点配置 (输出反馈)	14
4.3	串联校正	17

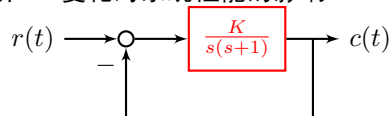
1 基本概念

1.1 零极点与根轨迹

根轨迹法

- 系统性能由闭环极点决定
- 目的: 分析系统参数变化对系统性能影响
- 根轨迹法: 根据系统开环零极点作出系统闭环极点随参数变动的轨迹

分析 K 变化对系统性能的影响



$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

$$D(s) = s^2 + s + K$$

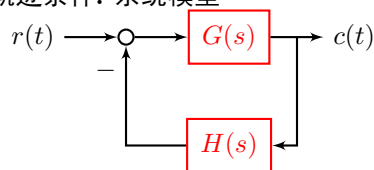
$$D(s) = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K}}{2}$$

K	0	0.25	1	4	...	∞
s_1	0	-0.5	$-0.5 + 0.87j$	$-0.5 + 1.9j$...	$-0.5 + \infty j$
s_2	-1	-0.5	$-0.5 - 0.87j$	$-0.5 - 1.9j$...	$-0.5 - \infty j$

1.2 根轨迹的基本条件

根轨迹条件: 系统模型



- 开环传递函数 (零极点形式):

$$G(s) = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

- 变动的参数: 根轨迹增益 K_g
- K_g 从 $0 \rightarrow \infty$ 时, 闭环极点的运动轨迹
- 对于负反馈系统, 称为 180° 根轨迹.

根轨迹条件: 幅值条件与相角条件

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -1$$

$$\frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -1$$

- 幅值条件: $\frac{K_g \prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = 1$
- 相角条件: $\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$
- 命题
 - 满足相角条件的点一定是根轨迹上的点
 - 根轨迹上的点何时成为系统闭环极点由 K_g 决定
- 结论: 绘制根轨迹只依据相角条件即可

2 绘制根轨迹图的基本原则

2.1 根轨迹图绘制法则

根轨迹图的绘制

- 前提条件:
 - 变动参数为开环传递函数的根轨迹增益 $K_g, (K^*)$
 - 系统为负反馈系统
- 目的:
 - 根据开环零极点分布绘制闭环极点的运动轨迹

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点,
- 根轨迹终止于开环零点,
- 有 $\max(m, n)$ 条分支,
- 有 $n - m$ 条分支趋向无穷远处.

根轨迹的对称性

- 根轨迹对称于实轴

实轴上的根轨迹

- 实轴上某区域若其右边开环实数零极点个数之和为奇数, 则该区域为根轨迹区域
- 例:

$$G_o(s) = \frac{K_g(s+1)(s+3)}{s(s+2)}$$

- 实轴上根轨迹区域:

$$[0, -1], [-2, -3]$$

渐近线

- $n > m$ 时, 渐近线与实轴交点为 σ_a , 夹角为 ϕ 则:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$
$$\phi = \frac{(2k+1)\pi}{n - m}$$

分离点与分离角

- 分离点: 两条或两条以上根轨迹分支在 s 平面上相交又立刻分开的点称为根轨迹的分离点 (会合点)
- 分离角: 相邻两条根轨迹分支的夹角
- 分离点计算:

$$G(s) = \frac{K_g M(s)}{N(s)}$$
$$D(s) = N(s) + K_g M(s)$$
$$D'(s) = 0$$
$$N(s) = -K_g M(s)$$
$$D'(s) = 0$$
$$N'(s) = -K_g M'(s)$$
$$M'(s)N(s) = M(s)N'(s)$$
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d - z_j}$$

- 分离角计算: $\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \dots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

根轨迹的起始角与终止角

- 起始角 (θ_{p_i}): 根轨迹从开环极点出发时, 其切线与正实轴的夹角 (出射角)
- 终止角 (ϕ_{z_j}): 根轨迹终止于开环零点时, 其切线与正实轴的夹角 (入射角)

起始角

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^m \angle(s - z_l) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) &= (2k+1)\pi \\
s &= p_q + \delta r e^{j\theta} \\
\sum_{l=1}^m \angle(p_q + \delta r e^{j\theta} - z_l) - \sum_{i=1}^n \angle(p_q + \delta r e^{j\theta} - p_i) &= (2k+1)\pi \\
\lim_{\delta r \rightarrow 0} \sum_{l=1}^m \angle(p_q + \delta r e^{j\theta} - z_l) - \sum_{i=1}^n \angle(p_q + \delta r e^{j\theta} - p_i) &= (2k+1)\pi \\
\sum_{l=1}^m \angle(p_q - z_l) - \sum_{p_q=p_i} \theta - \sum_{p_q \neq p_i} \angle(z_q - p_i) &= (2k+1)\pi
\end{aligned}$$

终止角

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^m \angle(s - z_l) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) &= (2k+1)\pi \\
s &= z_q + \delta r e^{j\theta} \\
\sum_{l=1}^m \angle(z_q + \delta r e^{j\theta} - z_l) - \sum_{i=1}^n \angle(z_q + \delta r e^{j\theta} - p_i) &= (2k+1)\pi \\
\lim_{\delta r \rightarrow 0} \sum_{l=1}^m \angle(z_q + \delta r e^{j\theta} - z_l) - \sum_{i=1}^n \angle(z_q + \delta r e^{j\theta} - p_i) &= (2k+1)\pi \\
\sum_{z_q \neq z_l} \angle(z_q - z_l) + \sum_{z_q=z_l} \theta - \sum_{i=1}^n \angle(z_q - p_i) &= (2k+1)\pi
\end{aligned}$$

根轨迹的起始角与终止角计算公式:

$$\begin{aligned}
\theta_{p_i} &= \frac{(2k+1)\pi}{I} + \frac{1}{I} \left[\sum_{j=1}^m \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ p_j \neq p_i}}^n \angle(p_i - p_j) \right] \\
\phi_{z_j} &= \frac{(2k+1)\pi}{J} - \frac{1}{J} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ z_i \neq z_j}}^m \angle(z_j - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z_j - p_i) \right]
\end{aligned}$$

- I 极点重根个数
- J 零点重根个数

根轨迹的起始角与终止角计算公式 (无重根时):

$$\begin{aligned}\theta_{p_i} &= 180^\circ + \left[\sum_{j=1}^m \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \angle(p_i - p_j) \right] \\ \phi_{z_j} &= 180^\circ - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \angle(z_j - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z_j - p_i) \right]\end{aligned}$$

即:

- θ_{p_i} 等于: $180^\circ +$ (所有零点指向极点 p_i 的角度之和 - 所有其它极点指向极点 p_i 的角度之和)
- ϕ_{z_i} 等于: $180^\circ -$ (所有其它零点指向零点 z_j 的角度之和 - 所有极点指向零点 z_j 的角度之和)

根轨迹与虚轴交点

- 直接计算 将 $s = j\omega$ 代入 $D(s)$, 求出 K_g, ω , $(0, j\omega)$ 即为交点

$$\begin{aligned}D(s) &= K_g M(s) + N(s) \\ &= 0 \\ s &= j\omega \\ D(j\omega) &= 0 \\ \Re[D(j\omega)] &= 0 \\ \Im[D(j\omega)] &= 0\end{aligned}$$

- 利用 Routh 判据计算 例:

$$\begin{aligned}G_o(s) &= \frac{K_g}{s(s+1)(s+2)} \\ D(s) &= s^3 + 3s^2 + 2s + K_g \\ \begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K_g \\ s^1 & \frac{6-K_g}{3} & \\ s^0 & K_g & \end{array}\end{aligned}$$

令 $\frac{6-K_g}{3} = 0$ 得 $K_g = 6$, 解辅助方程: $3s^2 + K_g = 0$ 得 $s = \pm j\sqrt{2}$

根之和

- $n - m \geq 2$ 时, 闭环极点之和等于开环极点之和

2.2 示例

根轨迹示例 1 $G_o(s) = \frac{K_g(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -1 , 开环极点: $0, -4, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-1, 0], [-\infty, -4]$
- 渐近线:

$$\begin{aligned} - \sigma_a &= \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3} \\ - \phi &= \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

- 起始角:

$$\begin{aligned} - \theta_{p_1} &= 180^\circ + (90^\circ - 135^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{1}{3}) = 27^\circ \\ - \theta_{p_2} &= -27^\circ \end{aligned}$$

根轨迹示例 1(续)

与虚轴交点 $D(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (8 + K_g)s + K_g = 0$

- Routh 表如下

s^4	1	10	K_g
s^3	6	$8 + K_g$	
s^2	$\frac{52-K_g}{6}$	K_g	
s^1	$8 + K_g - \frac{36K_g}{52-K_g}$		
s^0	K_g		

根轨迹示例 1(续)

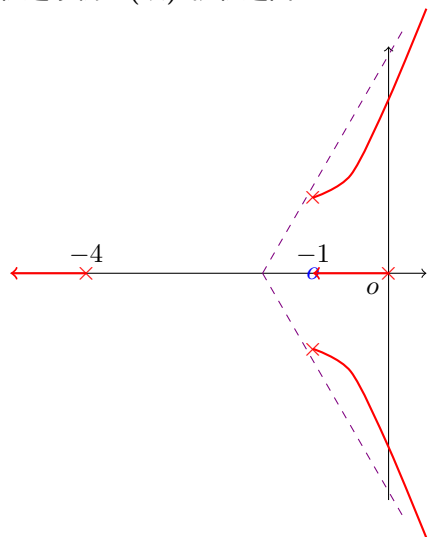
- 计算交点处 K_g

$$\begin{aligned} 8 + K_g - \frac{36K_g}{52 - K_g} &= 0 \\ K_g^2 - 8K_g - 416 &= 0 \\ K_g &= 4 \pm 4\sqrt{27} \end{aligned}$$

- 取 $K_g = 4 + 4\sqrt{27}$ 代入辅助方程:

$$\begin{aligned} \frac{52 - K_g}{6} s^2 + K_g &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j2.3 \end{aligned}$$

根轨迹示例 1(续) 根轨迹图



根轨迹示例 2 $G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, -3, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-3, 0]$
- 渐近线:

$$- \sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{5}{3}$$

$$- \phi = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$$

- 分离点:

$$\begin{aligned} M'(s)N(s) - M(s)N'(s) &= 0 \\ 4s^3 + 15s^2 + 16s + 6 &= 0 \\ s &= -2.3 \end{aligned}$$

- 起始角:

$$- \theta_{p_1} = 180^\circ + (-135^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{1}{2}) = -71.6^\circ$$

$$- \theta_{p_2} = 71.6^\circ$$

根轨迹示例 2(续)

- 与虚轴交点

$$D(s) = s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K_g = 0$$

- Routh 表如下

$$\begin{array}{r|rr}
 s^4 & 1 & 8K_g \\
 s^3 & 5 & 6 \\
 s^2 & \frac{34}{5} & K_g \\
 s^1 & \frac{204-25K_g}{34} & \\
 s^0 & K_g &
 \end{array}$$

根轨迹示例 2(续)

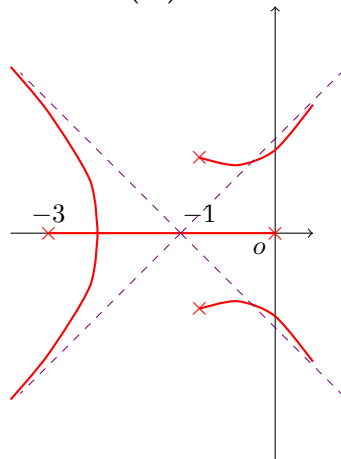
- 计算交点处 K_g

$$\begin{aligned}
 \frac{204-25K_g}{34} &= 0 \\
 K_g &= 8.16
 \end{aligned}$$

- 代入辅助方程:

$$\begin{aligned}
 \frac{34}{5}s^2 + K_g &= 0 \\
 s_{1,2} &= \pm j1.1
 \end{aligned}$$

根轨迹示例 2(续) 根轨迹图

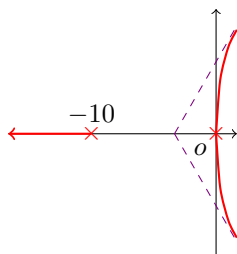


根轨迹示例 3 $G_o(s) = \frac{K_g}{s^2(s+10)}$

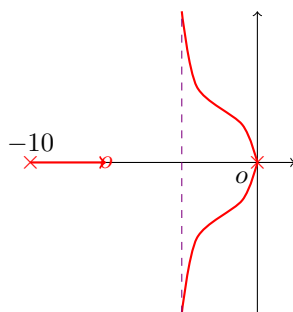
- 解:
 - 开环零点: 无, 开环极点: $0, 0, -10$
 - 实轴上根轨迹: $[-\infty, -10]$
 - 渐近线:

$$* \sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{10}{3}$$

$$* \phi = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$$



- 当 $G_o = \frac{K_g(s+z)}{s^2(s+10)}$, $0 < z < 10$ 得: $\sigma_a = \frac{-10+z}{2}$, $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$



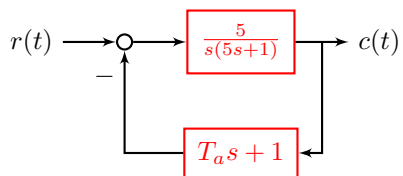
3 广义根轨迹与零度根轨迹

3.1 广义根轨迹

广义根轨迹

变化参数可以是系统任意参数

- 例: T_a 从 $0 \rightarrow +\infty$ 时系统根轨迹.



解:

$$G_o(s) = \frac{5(T_a s + 1)}{s(5s + 1)}$$

$$D(s) = 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5$$

- 构造系统,

$$D(s) = 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5$$

等效开环传递函数:

$$G'_o(s) = \frac{5T_a s}{5s^2 + s + 5}$$

求其 180° 根轨迹即可.

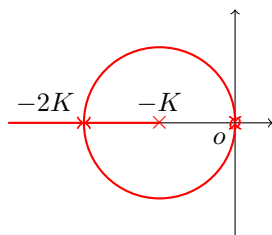
广义根轨迹示例 1

某负反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$, $K > 0$ 求 T 从 $0 \rightarrow +\infty$ 时闭环极点的运动轨迹, 并证明其根轨迹非实轴上的点构成一个圆, 求出圆心和半径.

- 解: 构造等效开环传递函数 $G'_o(s)$

$$D(s) = Ts^2 + s + K$$

$$G'_o(s) = \frac{Ts^2}{s + K}$$



- 根轨迹图

广义根轨迹示例 1(续)

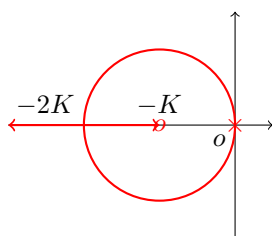
- 解法 2:

$$Ts^2 + s + K = 0$$

$$s^2 + \frac{1}{T}(s + K) = 0$$

$$G'_o(s) = \frac{K_g(s + K)}{s^2}$$

$$\frac{1}{T} = K_g$$



- 根轨迹图

广义根轨迹示例 1(续) 证明其非实轴上的根轨迹为圆:

- 设根轨迹非实轴上的点为 $x + iy$, $D(s) = Ts^2 + s + K = 0$

$$\begin{aligned} T(x + iy)^2 + x + iy + K &= 0 \\ T(x^2 - y^2) + x + K + i(y + 2xyT) &= 0 \\ Tx^2 - Ty^2 + x + K &= 0 \\ y + 2xyT &= 0 \end{aligned}$$

广义根轨迹示例 1(续) 圆心与半径:

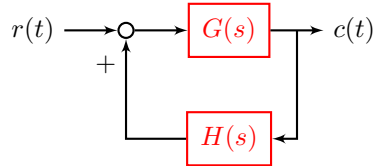
- 消去 T 后, 得:

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2} + \frac{y^2}{2x} + x + K &= 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2x} + K &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2xK &= 0 \\ (x + K)^2 + y^2 &= K^2 \end{aligned}$$

- 圆心为 $(-K, 0)$, 半径为 K

3.2 零度根轨迹

零度根轨迹 (正反馈系统)



$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \\ D(s) &= 1 - G(s)H(s) \end{aligned}$$

- 幅值条件: $|G(s)H(s)| = 1$
- 相角条件: $\angle G(s)H(s) = 2k\pi$

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点
- 终止于开环零点
- 有 $\max(m, n)$ 条分支数, 有 $n-m$ 条趋向无穷远处.

根轨迹的对称性

根轨迹对称于实轴

实轴上的根轨迹

实轴上某区域若其右边开环实数零极点个数之和为偶数, 则该区域为根轨迹区域.

渐近线

- $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$
- $\phi = \frac{2k\pi}{n-m}$

分离点与分离角

- 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$
- 分离角: $\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \dots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

根轨迹的起始角与终止角

$$\begin{aligned}\theta_{p_i} &= \frac{2k\pi}{I} + \frac{1}{I} \left[\sum_{j=1}^m \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ p_j \neq p_i}}^n \angle(p_i - p_j) \right] \\ \phi_{z_j} &= \frac{2k\pi}{J} - \frac{1}{J} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ z_i \neq z_j}}^m \angle(z_j - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z_j - p_i) \right]\end{aligned}$$

根轨迹与虚轴交点

- 直接计算将 $s = j\omega$ 代入 $D(s)$, 求出 K_g, ω , $(0, j\omega)$ 即为交点
- 利用 Routh 判据计算

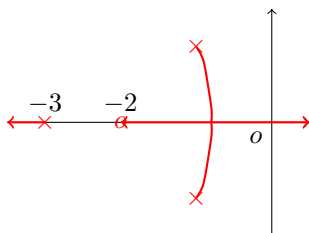
根之和: $n - m \geq 2$ 时, 闭环极点之和等于开环极点之和

零度根轨迹示例 1:

某正反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K_g(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -2 , 开环极点: $-1 \pm j, -3$
- 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$ 得: $s = -0.8$
- 起始角: $\theta = \pm 71.6^\circ$



4 系统性能分析

4.1 性能估算

性能估算

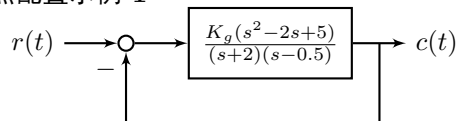
- 闭环零点: 加快响应速度 $t_p \downarrow, \sigma\% \uparrow, \xi \downarrow, t_s$ 不定
- 闭环非主导极点: 减缓响应速度 $t_p \uparrow, \sigma\% \downarrow, \xi \uparrow, t_s$ 不定

偶极子及其影响

- 偶极子: 一个闭环极点与闭环零点距离很近, (实数偶极子, 复数偶极子),
- 偶极子不影响主导极点的地位
- 判定: 零极点间距离小于其模的 10%

4.2 极点配置 (输出反馈)

极点配置示例 1



- 绘制 K_g 的根轨迹
- 确定使系统稳定的开环增益 K 范围
- 确定闭环传递函数具有欠阻尼的开环增益 K

解:

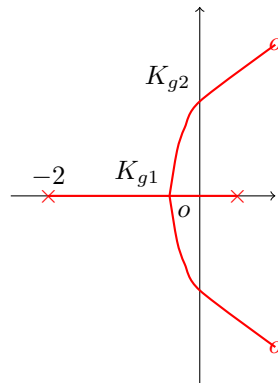
- 开环零点: $1 \pm 2j$, 开环极点: $-2, 0.5$
- 分离点:

$$\begin{aligned} M'(s)N(s) - N'(s)M(s) &= 0 \\ (2s-2)(s^2+1.5s-1) - (s^2-2s+5)(2s+1.5) &= 0 \\ s_1 &= 3.8(\text{舍去}) \\ s_2 &= -0.4 \end{aligned}$$

极点配置示例 1(续)

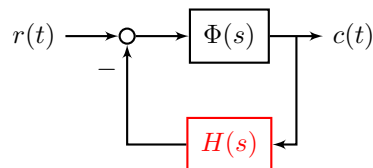
- 与虚轴交点
 - $D(s) = (1 + K_g)s^2 + (1.5 - 2K_g)s + (5K_g - 1) = 0$,
 - 令 $1.5 - 2K_g = 0$ 得 $K_g = 0.75$,
 - 由 $1.75s^2 + 2.75 = 0$ 得 $s_{1,2} = \pm j1.25$
- 入射角 (终止角) $\phi_{z_1} = 180^\circ - (90^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan 4) = 200^\circ$ 得:
 $\phi_{z_2} = -200^\circ$

极点配置示例 1 续



- 根轨迹图
- 确定 K
 - 由 $D(0) = 0$ 解得 $K_g = 0.2$ 所以系统稳定时 $0.2 < K_g < 0.75$
 $K = \frac{5K_g}{2 \times 0.5} = 5K_g$, 所以 $1 < K < 3.75$
 - 由图可知 K_{g1}, K_{g2} 分别为分离点以及实轴交点对应的 K_g , $K_{g1} < K_g < K_{g2}$ 时, 系统为欠阻尼. 由分离点处 $D(-0.4) = 0$ 得: $K_{g1} = 0.24$, 所以 $0.24 < K_g < 0.75$, $1.2 < K < 3.75$

极点配置示例 2: $\Phi(s) = \frac{1}{(s+0.5)(s+1)(s+2)}$, $H(s) = K_1 + K_2s + K_3s^2$
 设计指标: $\sigma\% = 4.3\%$, $t_s = 4s$ 设计输出反馈控制器.



- 结构图

极点配置示例 2(续)

- 解:

$$\begin{aligned}\sigma\% &= 0.043 \\ \xi &= 0.707 \\ t_s &= \frac{3.5}{\xi\omega_n} \\ \omega_n &= 1.2376 \\ p_{1,2} &= -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -0.875 \pm j0.875\end{aligned}$$

- 期望特征多项式 取 $p_{1,2} = -1 \pm j$ 作为主导极点, $p_3 = -10$, 得期望特征多项式:

$$\begin{aligned}D_1(s) &= (s+1+j)(s+1-j)(s+10) \\ &= s^3 + 12s^2 + 12s + 10\end{aligned}$$

极点配置示例 2(续)

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{\Phi(s)}{1 + H(s)\Phi(s)} \\ &= \frac{1}{(s+0.5)(s+1)(s+2) + K_1 + K_2s + K_3s^2} \\ D(s) &= s^3 + (3.5 + K_3)s^2 + (3.5 + K_2)s + K_1 + 1\end{aligned}$$

令 $D(s) = D_1(s)$ 得

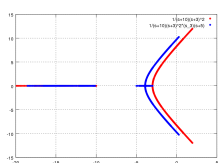
$$\begin{aligned}3.5 + K_3 &= 12 \\ K_3 &= 8.5 \\ 3.5 + K_2 &= 12 \\ K_2 &= 8.5 \\ K_1 + 1 &= 20 \\ K_1 &= 19\end{aligned}$$

4.3 串联校正

超前校正

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+3)^2}$$

$$G_c(s) = \frac{s+3}{s+5}$$



滞后校正

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+3)^2}$$

$$G_c(s) = \frac{10s+1}{100s+1}$$

