

线性系统的频域分析法

Outline

Contents

1	频率法介绍	1
1.1	频率法基本概念	1
1.2	频率特性的图示表示法	3
2	典型环节频率特性	4
2.1	比例, 积分微分环节	4
2.2	惯性, 一阶微分环节	7
2.3	二阶环节	9
2.4	非最小相位环节	11
3	系统开环频率特性	13
3.1	开环系统 Nyquist 图	13
3.2	开环系统 Bode 图	16
4	频域稳定性判据	17
4.1	Nyquist 稳定性判据	17
4.2	Bode 稳定性判据	21
5	频率特性分析	21
5.1	频域性能分析	21
5.2	闭环频率特性的确定	23
5.3	指标转换	24

1 频率法介绍

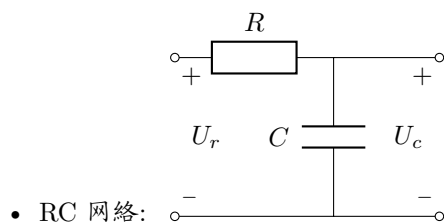
1.1 频率法基本概念

频域法特点:

1. 工程使用广泛, 有自己一套指标体系
2. 时域与频域指标可由经验公式相互转化

3. 根据 Nyquist 判据可由系统的开环频率特性判断闭环系统的稳定性, 频率特性可由实验测定
4. 频率特性还可适用于典型非线性环节系统
5. 可以方便地设计出各种滤波器

频率特性基本概念



$$\begin{aligned}
 U_r &= U_c + RC\dot{U}_c \\
 U_r(s) &= U_c(s) + RsU_c(s)
 \end{aligned}$$

- 传递函数:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{U_c(s)}{U_r(s)} \\
 &= \frac{1}{1 + RCs} \\
 &= \frac{1}{1 + Ts}
 \end{aligned}$$

其中, $T = RC$,

频率特性基本概念 (续)

- 当 $U_r = A \sin \omega t$ 时,

$$\begin{aligned}
 U_c(s) &= G(s)U_r(s) \\
 U_c(t) &= \frac{A\omega t}{1 + \omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \beta)
 \end{aligned}$$

- 稳态分量为

$$\frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \beta)$$

其中, $\tan \beta = \omega T$.

- 结论:

- 对线性系统而言, 输入为正弦信号, 输出也为相同频率的正弦信号, 但幅值与相位发生变化.
- 幅值变化: 输出是输入的 $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ 倍
- 相角变化: 输出比输入滞后 $\arctan \omega T$.

频率特性定义

- 幅频特性: 系统稳态正弦输出量与输入量的幅值比 $A(\omega)$
- 相频特性: 系统稳态正弦输出量与输入量的相角差 $\phi(\omega)$
- 令 $s = j\omega$, 则

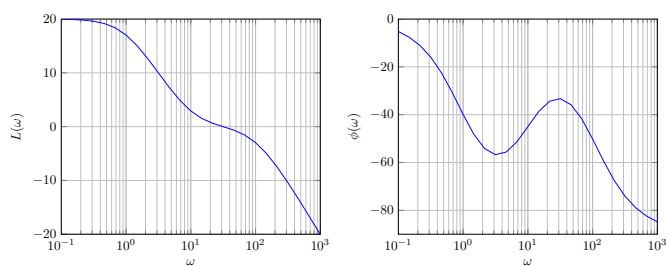
$$\begin{aligned} A(j\omega) &= |G(j\omega)| \\ \phi(j\omega) &= \angle G(j\omega) \end{aligned}$$

1.2 频率特性的图示表示法

Bode 图

- 横坐标: $\log_{10} \omega$
- 纵坐标: $L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega), \phi(\omega)$
- 例:

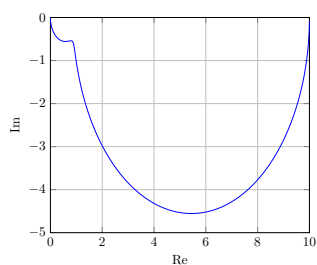
$$G(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{(s + 1)(0.01s + 1)}$$



Nyquist 图

- 横坐标: $\Re[G(j\omega)]$
- 纵坐标: $\Im[G(j\omega)]$
- 例:

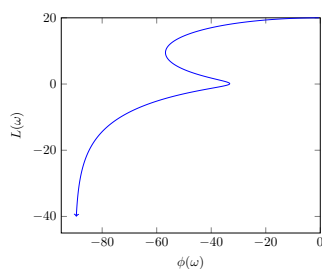
$$G(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{(s + 1)(0.01s + 1)}$$



Nichols 图

- 横坐标: $\phi(j\omega)$
- 纵坐标: $20 \log_{10} A(\omega)$
- 例:

$$G(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{(s + 1)(0.01s + 1)}$$



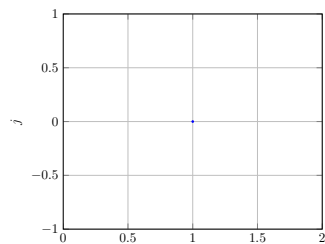
2 典型环节频率特性

2.1 比例, 积分微分环节

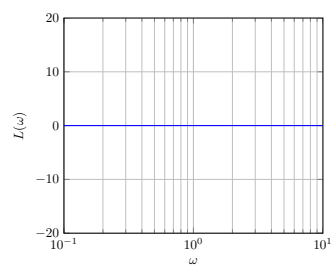
比例环节

$$\begin{aligned} G(s) &= K \\ G(j\omega) &= K \\ A(\omega) &= K \\ \phi(\omega) &= 0 \\ L(\omega) &= 20 \lg K \end{aligned}$$

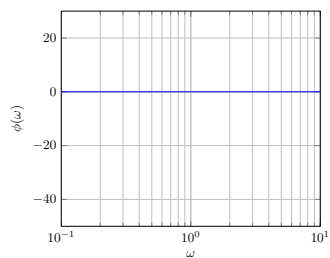
比例环节 (续) $G(j\omega) = K, K = 1$



• Nyquist 图



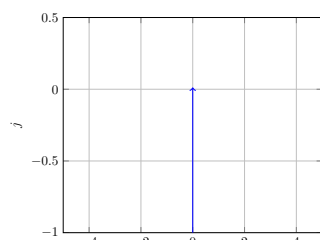
• Bode 图



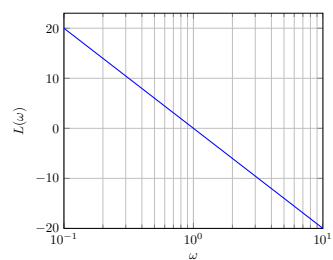
积分环节

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s} \\ G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} \\ A(\omega) &= \frac{1}{\omega} \\ \phi(\omega) &= -90^\circ \\ L(\omega) &= -20 \lg \omega \end{aligned}$$

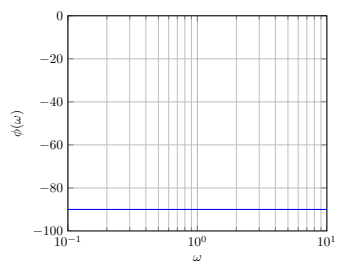
积分环节 (续) $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$



• Nyquist 图



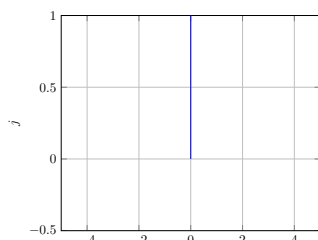
• Bode 图



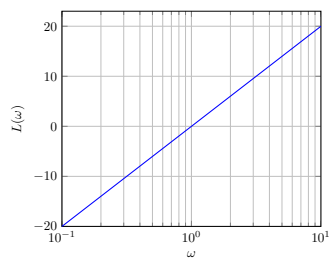
微分环节

$$\begin{aligned} G(s) &= s \\ G(j\omega) &= j\omega \\ A(\omega) &= \omega \\ \phi(\omega) &= 90^\circ \\ L(\omega) &= 20 \lg \omega \end{aligned}$$

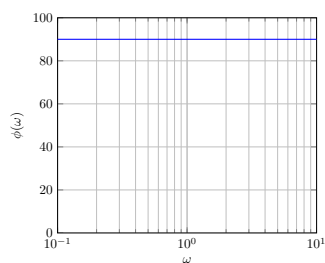
微分环节 (续) $G(j\omega) = j\omega$



- Nyquist 图



- Bode 图

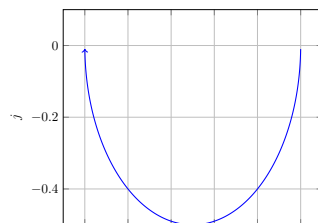


2.2 惯性, 一阶微分环节

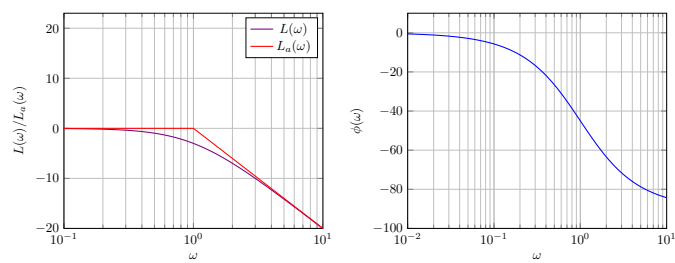
惯性环节

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{Ts + 1} \\
 G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega T + 1} \\
 A(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 T^2}} \\
 \phi(\omega) &= -\arctan \omega T \\
 L(\omega) &= -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\
 L_a(\omega) &= \begin{cases} 0 & \omega < \frac{1}{T} \\ -20 \lg \omega T & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}
 \end{aligned}$$

惯性环节 (续) $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}, T = 1$



• Nyquist 图

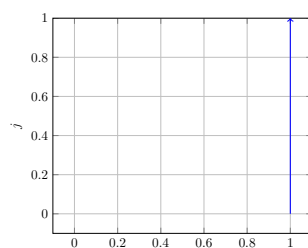


• Bode 图

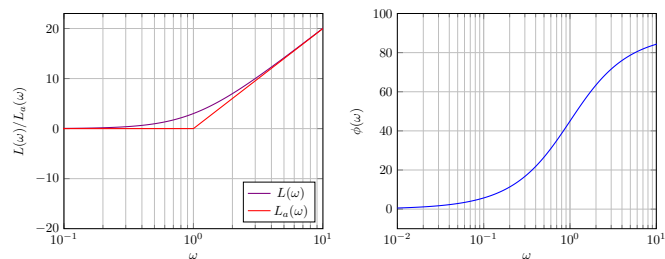
一阶微分环节

$$\begin{aligned} G(s) &= Ts + 1 \\ G(j\omega) &= j\omega T + 1 \\ A(\omega) &= \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \phi(\omega) &= \arctan \omega T \\ L(\omega) &= 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ L_a(\omega) &= \begin{cases} 0 & \omega < \frac{1}{T} \\ 20 \lg \omega T & \omega > \frac{1}{T} \end{cases} \end{aligned}$$

一阶微分环节 (续) $G(j\omega) = j\omega T + 1, T = 1$



• Nyquist 图



- Bode 图

2.3 二阶环节

二阶振荡环节

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2} = \frac{1}{(Ts)^2 + 2\xi Ts + 1} \\
 G(j\omega) &= \frac{1}{1 + 2j\xi\omega T - \omega^2 T^2} \\
 A(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2}} \\
 \phi(\omega) &= \begin{cases} -\arctan \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2} & \omega T < 1 \\ -90^\circ & \omega T = 1 \\ -180 - \arctan \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2} & \omega T > 1 \end{cases} \\
 L(\omega) &= -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2} \\
 L_a(\omega) &= \begin{cases} 0 & \omega T < 1 \\ -40 \lg \omega T & \omega T > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

二阶振荡环节 (续) $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi\omega T - \omega^2 T^2}$

- Nyquist 曲线与虚轴交点:

$$\begin{aligned}
 \Re[G(j\omega)] &= 0 \\
 1 - \omega^2 T^2 &= 0 \\
 \omega T &= 1 \\
 G(j\frac{1}{T}) &= -\frac{1}{2\xi}j
 \end{aligned}$$

二阶振荡环节 (续) $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi\omega T - \omega^2 T^2}$

- 谐振频率与谐振峰值

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2}}$$

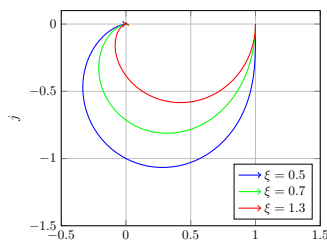
$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = -\frac{-2(1 - \omega^2 T^2)\omega T^2 + 4\xi^2 \omega T^2}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi\omega T)^2}}$$

• 令 $\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$, 得

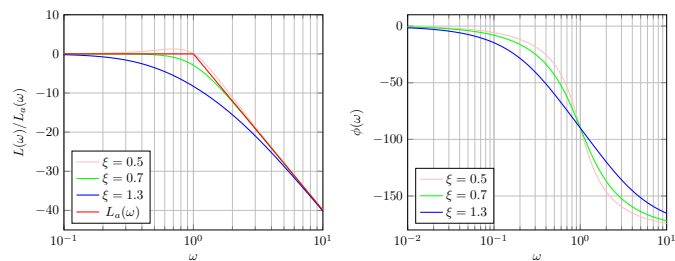
* 谐振频率: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$, 其中 $0 < \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

* 谐振峰值: $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$

二阶振荡环节 (续): $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi\omega T - \omega^2 T^2}, T = 1$



- Nyquist 图



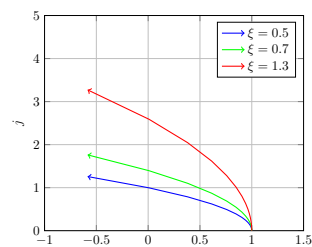
- Bode 图

二阶微分环节

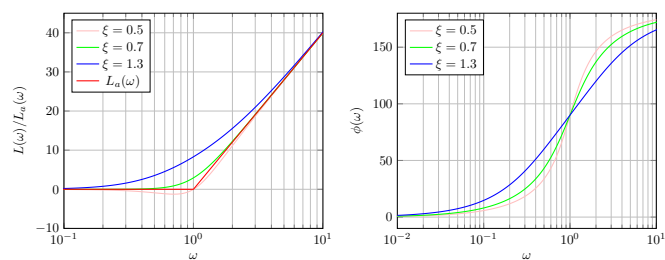
$$G(s) = (Ts)^2 + 2\xi Ts + 1$$

$$G(j\omega) = 1 + 2j\xi\omega T - \omega^2 T^2$$

二阶微分环节 (续) $G(j\omega) = 1 + 2j\xi\omega T - \omega^2 T^2, T = 1$



• Nyquist 图



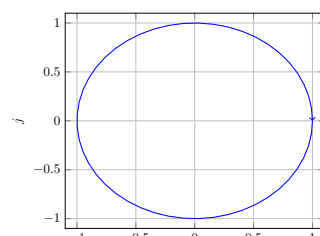
• Bode 图

2.4 非最小相位环节

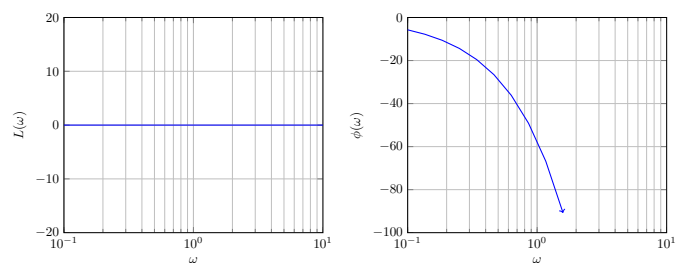
延迟环节

$$\begin{aligned} G(s) &= e^{-\tau s} \\ G(j\omega) &= e^{-j\omega\tau} \\ A(\omega) &= 1 \\ \phi(\omega) &= -\omega\tau \end{aligned}$$

延迟环节 (续) $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}, \tau = 1$



• Nyquist 图



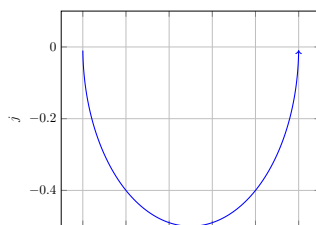
- Bode 图

非最小相位惯性环节

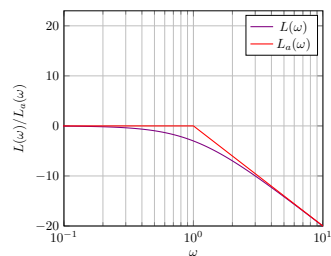
最小相位系统: 在右半平面无零极点

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{Ts - 1} \\
 G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega T - 1} \\
 A(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 T^2}} \\
 \phi(\omega) &= -180^\circ + \arctan \omega T \\
 L(\omega) &= -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\
 L_a(\omega) &= \begin{cases} 0 & \omega < \frac{1}{T} \\ -20 \lg \omega T & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}
 \end{aligned}$$

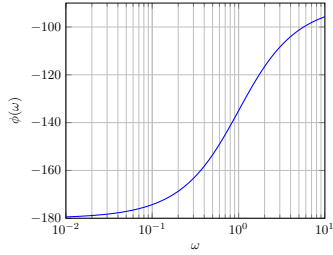
非最小相位惯性环节 (续) $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T - 1}, T = 1$



- Nyquist 图



- Bode 图



3 系统开环频率特性

3.1 开环系统 Nyquist 图

开环系统 Nyquist 图 $G_o(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)}$

- 当 $\nu = 0$ 时, 为零型系统:

$$\begin{aligned} A(\omega)|_{\omega=0} &= K \\ \phi(\omega)|_{\omega=0} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) &= -(n-m) \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

开环系统 Nyquist 图 (续) $G_o(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)}$

- 当 $\nu = 1$ 时, 为 I 型系统:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) &= \infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) &= -(n-m) \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

开环系统 Nyquist 图 (续) $G_o(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)}$

- 当 $\nu = 2$ 时, 为 II 型系统:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) &= \infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) &= -\pi \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) &= -(n-m) \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

开环系统 Nyquist 图 (续) $G_o(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)}$

- 当 $\nu = 3$ 时, 为 III 型系统:

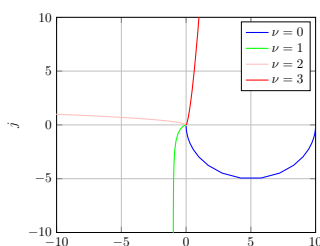
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) = -\frac{3}{2}\pi$$

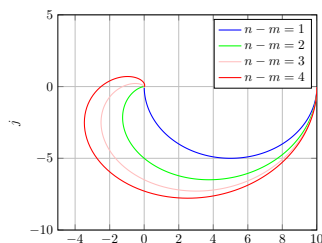
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) = -(n-m) \times \frac{\pi}{2}$$

开环系统 Nyquist 图, 例 1



- $G_o(s) = \frac{10}{s^\nu(0.1s+1)}$



- $G_o(s) = \frac{10}{(0.1s+1)^n}$

开环系统 Nyquist 图, 例 2: $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

- 绘制 Nyquist 图, 求出各特征点坐标:
- 由于 $\nu = 1$

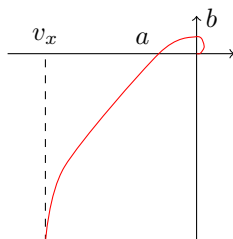
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) = -2\pi$$

开环系统 Nyquist 图, 例 2(续), $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$
概略 Nyquist 图:



开环系统 Nyquist 图, 例 2(续), $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

- 起始点实部 v_x :

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)(4j\omega+1)} \\ &= \frac{10\omega(8\omega^2-7)+10(14\omega^2-1)j}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+16\omega^2)} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \Re[G(j\omega)] &= -70 \end{aligned}$$

开环系统 Nyquist 图, 例 2(续), $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

- 与实轴交点 a :

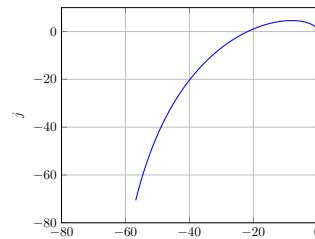
$$\begin{aligned} \Im[G(j\omega)] &= 0 \\ \frac{10(14\omega^2-1)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+16\omega^2)} &= 0 \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{14}} \\ G(j\sqrt{\frac{1}{14}}) &\approx -21.78 \end{aligned}$$

开环系统 Nyquist 图, 例 2(续), $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

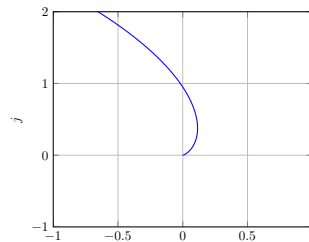
- 与虚轴交点 b :

$$\begin{aligned}\Re[G(j\omega)] &= 0 \\ \frac{10\omega(8\omega^2 - 7)}{(1 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)(1 + 16\omega^2)} &= 0 \\ 8\omega^2 - 7 &= 0 \\ \omega &= \sqrt{\frac{7}{8}} \\ G(j\sqrt{\frac{7}{8}}) &\approx 0.95j\end{aligned}$$

开环系统 Nyquist 图, 例 2(续), $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$



- Nyquist 图



- 局部放大:

3.2 开环系统 Bode 图

开环系统 Bode 图

$$\begin{aligned}G_o(s) &= G_1(s)G_2(s)G_3(s) \cdots G_n(s) \\ A(\omega) &= A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega) \cdots A_n(\omega) \\ L(\omega) &= 20 \lg A_1(\omega) + \cdots + 20 \lg A_n(\omega) \\ \phi(\omega) &= \phi_1(\omega) + \cdots + \phi_n(\omega)\end{aligned}$$

- 结论:
 - 系统的低频段由系统的类型和开环增益 K 决定, 代表稳态性能. 由初始斜率可得系统类型.
 - 系统的高频段反映系统的抗噪能力, 下降速度要快.

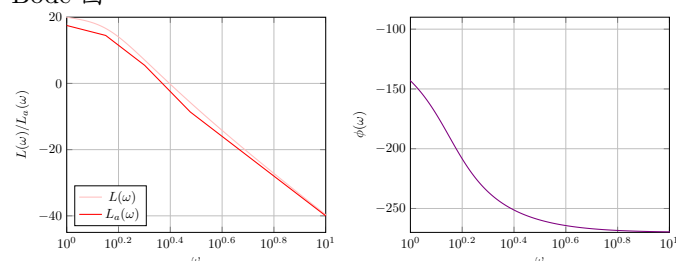
开环系统 Bode 图, 例 1: $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

绘制 Bode 图:

1. 改写为标准形式: $G_o(s) = \frac{7.5(\frac{s}{3}+1)}{s(0.5s)(0.5s^2+0.5s+1)}$
2. 写出转折频率: $\omega = \sqrt{2}, 2, 3$
3. 找到点 $(1, 20 \lg K)$, 其中 $K = 7.5$
4. 过点 $(1, 20 \lg K)$ 作斜率为 -20dB/dec 的直线
5. 找转折点依次做直线即可

开环系统 Bode 图, 例 1(续): $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

Bode 图



$(1, 20 \lg K)$ 在 $L(\omega)$ 上或在其延长线上

4 频域稳定性判据

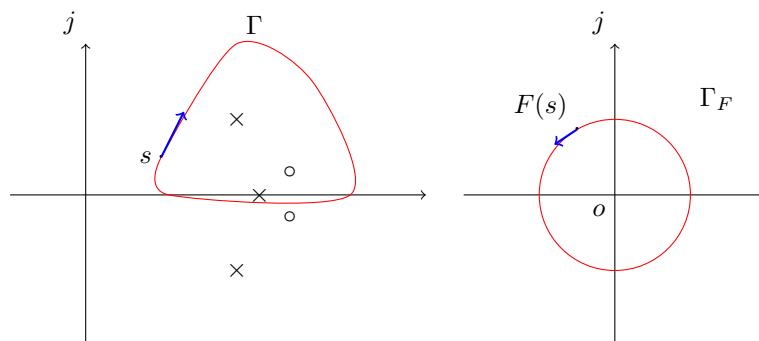
4.1 Nyquist 稳定性判据

辐角原理

- 设 s 为复变量, $F(s)$ 为 s 的有理分式函数. 对于 s 平面上任意一点 s , 通过复变函数 $F(s)$ 的映射关系, 可以确定 s 的象.
- 在 s 平面上任选一条闭合曲线 Γ , 且不通过 $F(s)$ 任一零点和极点, s 沿闭合曲线 Γ 运动一周, 则相应地 $F(s)$ 形成一条闭合曲线 Γ_F .

辐角原理 (续):

设 s 平面闭合曲线 Γ 包围 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点, 则 s 沿 Γ 顺时针运动一周时, 在 $F(s)$ 平面上, $F(s)$ 沿闭合曲线 Γ_F 逆时针包围原点的圈数为 $R = P - Z$.

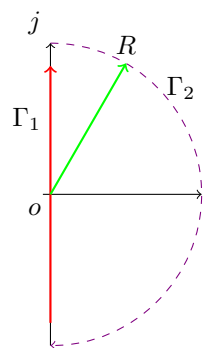


辐角原理的应用

$$\begin{aligned}
 \Phi(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\
 &= \frac{G(s)}{1 + G_o(s)} \\
 &= \frac{G(s)}{F(s)} \\
 F(s) &= 1 + G_o(s)
 \end{aligned}$$

- $F(s)$ 的极点是系统开环极点,
- $F(s)$ 的零点是系统的闭环极点.

辐角原理的应用 (续)

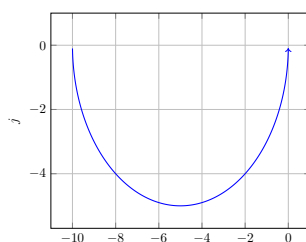


- 示意图
- 将 Γ 分为两段:
 - $\Gamma_1 : s = j\omega, \omega \in [-\infty, \infty]$
 - $\Gamma_2 : s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta}, \theta \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}$
 - 可得对应的 $G_o(s)$ 曲线.

- * s 在 Γ_1 上时, 与 Nyquist 图对应. ($\omega \in [0, \infty]$)
- * s 在 Γ_1 上时, $F(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta} G_o(s) = 1$
- Nyquist 判据
 - * 对于开环稳定系统 ($P = 0$), 若 Nyquist 曲线不包含 $(-1, 0)$ 点, 则系统稳定.
 - * 对于开环稳定系统 ($P > 0$), 若 Nyquist 曲线逆时针包围 $(-1, 0)$ 点的次数为 $\frac{P}{2}$, 则系统稳定.

Nyquist 判据, 例 1:

某负反馈开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{10}{s-1}$, 用 Nyquist 判据判断系统稳定性.



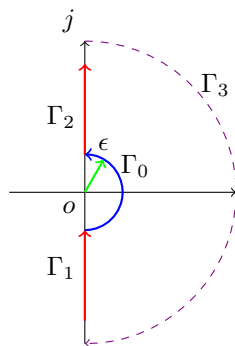
- Nyquist 图
- 稳定性判断

$$\begin{aligned}
 P &= 1 \\
 N &= \frac{1}{2} \\
 P - Z &= 2N \\
 Z &= P - 2N \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

系统稳定.

虚轴上有极点时

- 零型系统 $F(s)$ 沿 Γ 解析且不为 0.
- I 型及以上系统 $F(s)$ 在 $s = 0$ 处不解析, 不满足辐角原理条件.

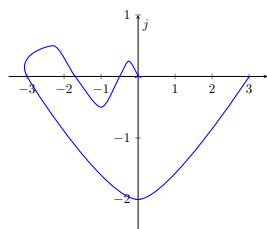


- 示意图

- 将 Γ 分为四段:

- $\Gamma_1 : s = j\omega, \omega \in [-\infty, 0^-]$
- $\Gamma_2 : s = j\omega, \omega \in [0^+, \infty]$
- $\Gamma_3 : s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\Gamma_0 : s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- 对增补后的 Nyquist 图可使用 Nyquist 判据.

穿越次数



- Nyquist 图
- 穿越次数

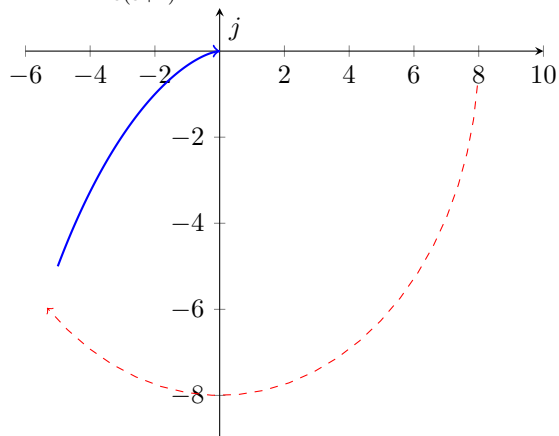
- 根据增补后的 Nyquist 曲线穿越 $(-1, 0)$ 点左侧的次数可得 Γ_F 包围原点的圈数

$$\begin{aligned} R &= 2N \\ &= 2(N_+ - N_-) \end{aligned}$$

其中,

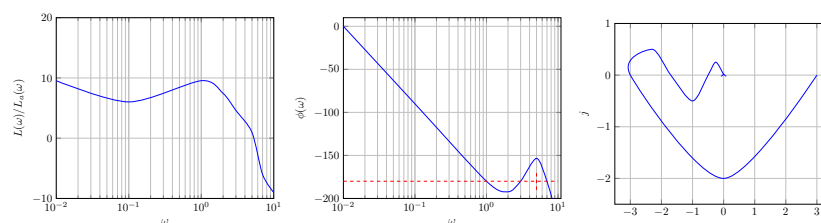
- * N_+ 为正穿越 (自上向下) 次数
- * N_- 为负穿越 (自下向上) 次数

例: $G_o(s) = \frac{10}{s(s+1)}$



4.2 Bode 稳定性判据

Bode 稳定性判据



- Bode 图

- 稳定性判断

- 截止频率 ω_c : $A(\omega_c) = 0$
- 穿越频率 ω_x : $\phi(\omega_x) = (2k+1)\pi$
- Bode 判据:
 - * 最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = 0$, 则系统稳定
 - * 非最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = \frac{P}{2}$, 则系统稳定

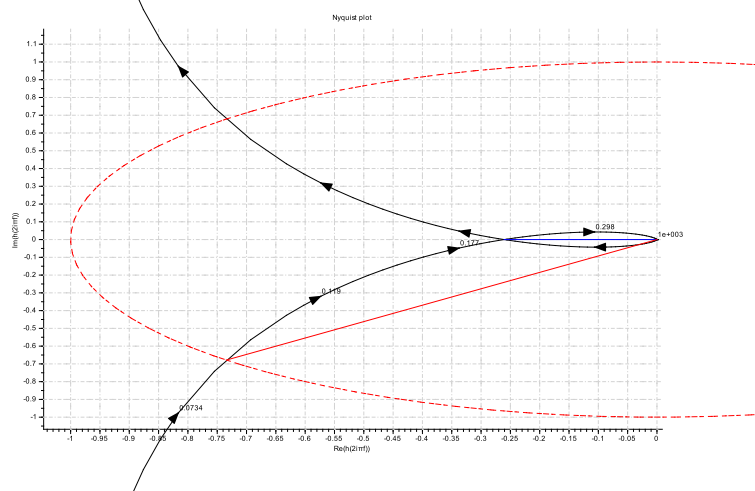
5 频率特性分析

5.1 频域性能分析

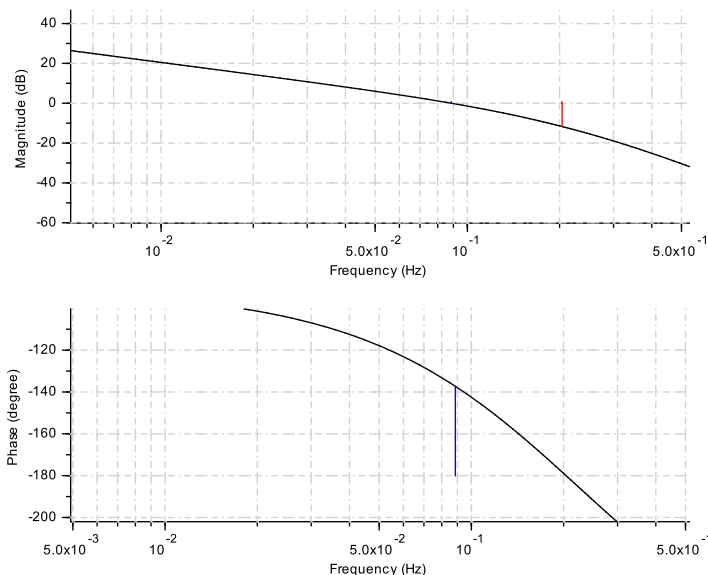
稳定裕度

- 相角裕度 γ : $\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c)$
- 幅值裕度 h : $h = -20 \lg A(\omega_x)$

Nyquist 图与稳定裕度



Bode 图与稳定裕度



ω_c 近似计算

例: $G_o(s) = \frac{100(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$ 近似计算求解 ω_c

- $\omega_c < 1$ 时, $A(\omega) = \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{\omega_c}$, $\omega_c = \frac{200}{3} > 1$ 矛盾.
- $1 < \omega_c < 2$ 时, $A(\omega) = \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{\omega_c \cdot \omega_c}$, $\omega_c = \sqrt{\frac{200}{3}} > 2$ 矛盾.
- $2 < \omega_c < 3$ 时, $A(\omega) = \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{\omega_c \cdot \omega_c \cdots \frac{\omega_c}{2}}$, $\omega_c = \sqrt[3]{\frac{400}{3}} > 3$ 矛盾.
- $3 < \omega_c < 4$ 时, $A(\omega) = \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{\omega_c \cdot \omega_c \cdots \frac{\omega_c}{2} \cdots \frac{\omega_c}{3}}$, $\omega_c = \sqrt[4]{400} > 4$ 矛盾.
- $4 < \omega_c$ 时, $A(\omega) = \frac{200}{3} \cdot \frac{\frac{\omega_c}{4}}{\omega_c \cdot \omega_c \cdots \frac{\omega_c}{2} \cdots \frac{\omega_c}{3}}$, $\omega_c = \sqrt[3]{100} > 4$ 成立.

ω_x 计算

例: $G_o(s) = \frac{100(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$ 求解 ω_x , 即求

$$G_o(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

的根轨迹与虚轴交点.

$$D(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K+6)s + 4K$$

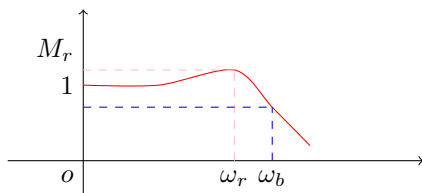
	s^4	1	11	$4K$
	s^3	6	$K+6$	
• Routh 表:	s^2	$\frac{60-K}{6}$	$4K$	
	s^1	0	0	

- 根轨迹与虚轴交点

$$\begin{aligned}\frac{60-K}{6}(K+6) &= 4K \times 6 \\ \frac{K^2}{6} + 15K - 60 &= 0 \\ K &= -45 \pm 3\sqrt{265} \\ \frac{60-K}{6}s^2 &= 4K \\ \omega_x &\approx 1.28\end{aligned}$$

频带宽度

- 设闭环系统频率特性为 $\Phi(j\omega)$ ，若 $\omega > \omega_b$ 时，有 $20\lg|\Phi(j\omega)| < 20\lg|\Phi(j0)| - 3$ ，则称 ω_b 为带宽频率。



5.2 闭环频率特性的确定

等 α 曲线

$$\begin{aligned}G(j\omega) &= Ae^{j\phi} \\ \Phi(j\omega) &= Me^{j\alpha} \\ &= \frac{Ae^{j\phi}}{1 + Ae^{j\phi}} \\ \frac{Ae^{j\phi}}{Me^{j\alpha}} &= 1 + Ae^{j\phi} \\ \frac{A}{M} &= e^{-j(\phi-\alpha)} + Ae^{j\phi} \\ 0 &= \sin(\alpha - \phi) + A \sin \alpha \\ 20\lg A &= 20\lg \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

等 M 曲线

$$\frac{Ae^{j\phi}}{Me^{j\alpha}} = 1 + Ae^{j\phi}$$

$$\frac{A}{M} = |1 + Ae^{j\phi}|$$

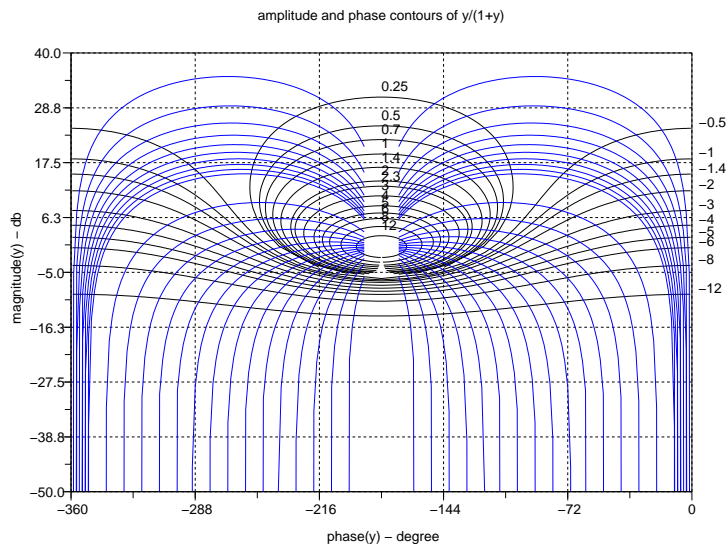
$$\frac{A^2}{M^2} = (1 + A \cos \phi)^2 + A^2 \sin^2 \phi$$

$$0 = (1 - M^{-2})A^2 + 2 \cos \phi A + 1$$

$$A = \frac{\cos \phi \pm \sqrt{\cos^2 \phi + M^{-2} - 1}}{M^{-2} - 1}$$

$$20 \lg A = 20 \lg \frac{\cos \phi \pm \sqrt{\cos^2 \phi + M^{-2} - 1}}{M^{-2} - 1}$$

Nichols Chart



5.3 指标转换

系统闭环和开环和频域指标的关系

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= Ae^{-j(180^\circ - \gamma(\omega))} \\
&= A(-\cos \gamma(\omega) - j \sin \gamma(\omega)) \\
M &= \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| \\
&= \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 - 2A \cos \gamma(\omega)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{A} - \cos \gamma(\omega)\right]^2 + \sin^2 \gamma(\omega)}} \\
M_r &= \frac{1}{\sin \gamma(\omega_r)} \approx \frac{1}{\sin \gamma} \quad (\omega_r \approx \omega_c)
\end{aligned}$$

2 阶系统频域指标

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n)} \\
&= \frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4\xi^2\omega_n^2}} \angle(-\arctan \frac{\omega}{2\xi\omega_n} - 90^\circ) \\
\omega_c &= \omega_n(\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2)^{\frac{1}{2}} \\
\gamma &= 180^\circ + \angle G(j\omega_c) \\
&= \arctan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_c}
\end{aligned}$$

2 阶系统频域指标 (M_r, ω_r)

$$\begin{aligned}
M_r &= \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \\
\omega_r &= \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}
\end{aligned}$$

- M_r 与 $\sigma\%$ 一一对应, 且成正比

高阶系统频域指标

- 经验公式

$$M_r = \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$\sigma\% = 16\% + 0.4(M_r - 1), (1 \leq M_r \leq 1.8)$$

$$t_s = \frac{K\pi}{\omega_c}$$

$$K = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2$$

$$\cdot \gamma \uparrow \rightarrow \sigma\% \downarrow \rightarrow \xi \uparrow$$

$$\cdot \omega_c \uparrow \rightarrow t_s \downarrow$$

- 频域要求:

· 低频段: 稳态性能

· 中频段: 瞬态性能

· 高频段: 抗干扰能力