非线性系统示例

自动控制系统的数学模型 用微分方程描述的数学模型

- 1 简介
- ② 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

Topic

- 1 简介
- ② 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

数学模型分类

- 数学模型:描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类
 - 。 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
 - 。 复域 (s):传递函数、结构图
 - 频域 (w): 频率特性

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类
 - 。 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域(s):传递函数、结构图
 - 频域 (w): 频率特性

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达 式
- 数学模型种类:

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达 式
- 数学模型种类:
 - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达 式
- 数学模型种类:
 - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域 (s): 传递函数、结构图

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达 式
- 数学模型种类:
 - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域 (s): 传递函数、结构图
 - 频域 (w): 频率特性

建模步骤

- 1 列出系统的输入变量、输出变量
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量,得到仅有输入/输出变量的微分方程

非线性系统示例

建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量,得到仅有输入/输出变量的微分方程

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量,得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量,得到仅有输入/输出变量的微分方程

非线性系统示例

线性化原理与方法

简介

原理: 在系统工作点处,将非线性函数展开成泰勒级数,忽略高 次项,得到线性化方程

机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)

- y = f(x) 在 x_0 处展开
 - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x x_0) + \cdots$
 - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展升
 - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$ $y = y_0 + K_1(x x_{10}) + K_2(x x_{20})$
- 增量化方程
 - \circ $dY = v v_0$
 - \circ $dX = x x_0$
 - \circ dY = KdX

- y = f(x) 在 x_0 处展开
 - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x x_0) + \cdots$
 - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展升
 - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x_1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + f_{x_2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$ $y = y_0 + K_1(x x_{10}) + K_2(x x_{20})$
- 增量化方程
 - \circ $dY = v v_0$
 - \circ $dX = x x_0$
 - \circ dY = KdX

•
$$y = f(x)$$
 在 x_0 处展开

•
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$$

$$y \approx y_0 + k(x - x_0)$$

•
$$y = f(x_1, x_2)$$
 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$$

$$y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$$

$$\circ$$
 $dY = v - v_0$

$$\circ$$
 $dX = x - xc$

$$\circ$$
 $dY = KdX$

•
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$$

$$y \approx y_0 + k(x - x_0)$$

•
$$y = f(x_1, x_2)$$
 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开

•
$$y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$$

$$y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$$

- 增量化方程
 - \circ $dY = v v_0$
 - \circ $dX = x x_0$
 - \circ dY = KdX

- v = f(x) 在 x₀ 处展开
 - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x x_0) + \cdots$
 - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
 - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$
 - $y = y_0 + K_1(x x_{10}) + K_2(x x_{20})$
- 增量化方程
 - $dY = y y_0$
 - $dX = x x_0$
 - \circ dY = KdX

- v = f(x) 在 x₀ 处展开
 - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x x_0) + \cdots$
 - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
 - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$
 - $y = y_0 + K_1(x x_{10}) + K_2(x x_{20})$
- 增量化方程
 - $dY = y y_0$
 - \bullet $dX = x x_0$
 - \circ dY = KdX

•
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$$

$$y \approx y_0 + k(x - x_0)$$

•
$$y = f(x_1, x_2)$$
 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开

•
$$y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$$

$$y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$$

$$\bullet$$
 $dY = y - y_0$

$$\bullet$$
 $dX = x - x_0$

$$adY = KdX$$

- 1 简介
- ② 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

非线性系统示例

线性微分方程的解

- 通解由微分方程的特征根决定
 - 微分方程: $a_0x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = b$
 - 特征方程: $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 时, 通解为 $v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n}$

- 通解由微分方程的特征根决定
 - 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
 - 特征方程: $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 时, 通解为 $v(t) c_1 \alpha^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \alpha^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n}$

- 通解由微分方程的特征根决定
 - 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
 - 特征方程: $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 时, 通解为 $v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n}$

- 通解由微分方程的特征根决定
 - 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
 - 特征方程: $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 时, 通解为 $v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$

- 通解由微分方程的特征根决定
 - 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
 - 特征方程: $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 时, 通解为 $v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- $y(t) = c_1 e^{x_1 t} + \dots + c_n e^{x_n t}$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$

• 条件

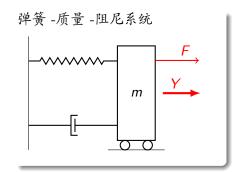
简介

- 可加性: 若 $r_1(t) > c_1(t)$, $r_2(t) > c_2(t)$ 则:
- 多 齐次性: $r_1(t) > c_1(t)$ 则: $ar_1(t) > ac_1(t)$
- 微积分特性: $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$ 则 $r_2(t) \rightarrow c_2(t)$ $r_2(t) \rightarrow c_2(t)$

- 条件:
 - 可加性: $r_1(t) > c_1(t), r_2(t) > c_2(t)$ 则: $r_1(t) + r_2(t) > c_1(t) + c_2(t)$
 - 齐次性: $r_1(t) > c_1(t)$ 则: $ar_1(t) > ac_1(t)$
- 徽积分特性: $r_1(t) \to c_1(t)$ 则 $\int r_1(t) \to \int c_1(t), r_1(t)' \to c_1(t)$

- 条件:
 - 可加性: 若 $r_1(t) > c_1(t)$, $r_2(t) > c_2(t)$ 则:
 - $r_1(t) + r_2(t) > c_1(t) + c_2(t)$
 - 齐次性: $r_1(t) > c_1(t)$ 则: $ar_1(t) > ac_1(t)$
- 微积分特性: r₁(t) → c₁(t) 则 $\int r_1(t) \rightarrow \int c_1(t), r_1(t)' \rightarrow c_1(t)'$

- 1 简 /
 - 2 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

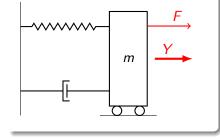


- 输入: F(t), 输出: Y(t)
- 原始为在:F = kY(t) = fv − m=
- 消去中间变量:

$$\circ$$
 $v = Y(t)$

$$mY'' + fY' + kY = F$$

弹簧-质量-阻尼系统



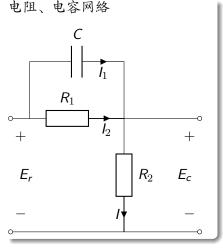
- 輸入: F(t),輸出: Y(t)
- 原始方程:F kY(t) fv = ma

$$v = Y(t)$$

$$mY'' + fY' + kY = F$$

- 1 筒 /
- 2 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

上四 上户回传



- 输入: E_r, 输出 E_c
- 原始方程

$$I = I_1 + I_2$$

•
$$E_c = R_2 I$$

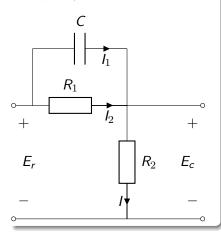
$$\bullet E_r = R_1 I_2 + E_c$$

$$C(E_r - E_c)' = I_1$$

•
$$R_1 CE'_c + (R_1 + R_2)/R_2 E_c = R_1 E'_r + E_r$$

电阻、电容网络

简介



- 输入: E_r, 输出 E_c
- 原始方程:

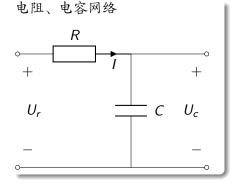
•
$$I = I_1 + I_2$$

$$\bullet E_c = R_2 I$$

$$\bullet \ E_r = R_1 I_2 + E_c$$

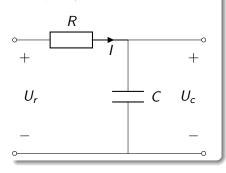
•
$$C(E_r - E_c)' = I_1$$

•
$$R_1 CE'_c + (R_1 + R_2)/R_2 E_c = R_1 E'_r + E_r$$



- 输入: U_r, 输出: U_c
- $U_r = RI + U_c , CU'_c =$
- 消去 Ⅰ, RCU'_c + U_c = U

电阻、电容网络



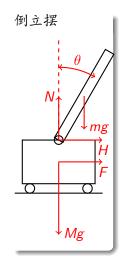
- 输入: U_r, 输出: U_c
- $U_r = RI + U_c , CU'_c = I$
- 消去 I , $RCU'_c + U_c = U_r$

非线性系统示例

Topic

- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 5 非线性系统示例

倒立摆系统线性化模型



解

- 輸入 F, 輸出 θ, r
- 原始方程:
 - 小车水平方向: Mr" = F − H
 - 》杆水平方向: $m(r + lsin(\theta))'' = H$
 - 杆竖直方向: $m(lcos(\theta))'' = N me$
 - 杆转动: $J(\theta)'' = NIsin(\theta) HIcos(\theta)$
- 整理后:

$$(M+m)r'' + ml\cos(\theta)\theta'' - ml\sin(\theta)(\theta')^2 = R$$

•
$$ml\cos(\theta)r'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\sin(\theta)$$

• 线性化 (
$$\theta \to 0$$
, $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 1$)

$$(M+m)r'' + ml\theta'' = F$$

•
$$mlr'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\theta$$

倒立摆 mg

- 输入 F, 输出 θ, r
- 原始方程:
 - 小车水平方向: Mr" = F − H
 - 杆水平方向: $m(r + lsin(\theta))'' = H$
 - 杆竖直方向: $m(lcos(\theta))'' = N mg$
 - 杆转动: $J(\theta)'' = NIsin(\theta) HIcos(\theta)$
- 整理后:

•
$$(M+m)r'' + ml\cos(\theta)\theta'' - ml\sin(\theta)(\theta')^2 = F$$

•
$$ml\cos(\theta)r'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\sin(\theta)$$

• 线性化 (
$$\theta \to 0$$
, $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 1$)

$$(M+m)r'' + ml\theta'' = F$$

•
$$mlr'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\theta$$