

# 线性离散系统分析

## Outline

## Contents

<b>1</b>	<b>离散系统基本概念</b>	<b>2</b>
1.1	特点	2
1.2	采样控制系统	2
1.3	数字控制系统	3
1.4	离散系统研究方法	5
<b>2</b>	<b>信号的采样与保持</b>	<b>6</b>
2.1	信号的采样	6
2.2	采样函数 Laplace 变换性质	8
2.3	信号的保持	9
<b>3</b>	<b>Z 变换</b>	<b>11</b>
3.1	Z 变换	11
3.2	Z 反变换	13
<b>4</b>	<b>离散系统数学模型</b>	<b>14</b>
4.1	差分方程	14
4.2	脉冲传递函数	15
4.3	开环系统的脉冲传递函数	16
4.4	闭环系统的脉冲传递函数	18
4.5	修正 Z 变换	19
<b>5</b>	<b>离散系统稳定性</b>	<b>21</b>
5.1	稳定性	21
5.2	稳定性判据	21
5.3	离散系统稳定性影响因素	23
<b>6</b>	<b>离散系统稳态误差</b>	<b>23</b>
6.1	离散系统稳态误差	23
6.2	离散系统型别与静态误差系数	24

7 离散系统动态性能分析	26
7.1 离散系统时间响应	26
7.2 采样器, 保持器对系统动态性能的影响	27
7.3 闭环极点与动态响应的关系	27

## 1 离散系统基本概念

### 1.1 特点

#### 离散系统与离散信号

离散信号只在离散的时刻有值, 通常也把只在离散时刻有非零值的脉冲序列称为离散信号。

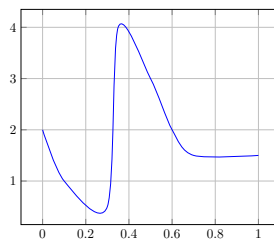
- 离散信号: 脉冲或数字信号。
- 离散系统: 控制系统中有一处或几处信号是脉冲或数字信号

### 1.2 采样控制系统

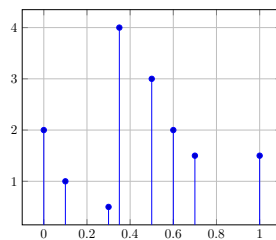
#### 采样控制系统

通常被控对象是连续系统, 采用离散系统作为控制器时需要将连续信号采样, 得到离散信号供控制器使用, 还需要将控制器的输出复现为连续信号输入到被控对象。

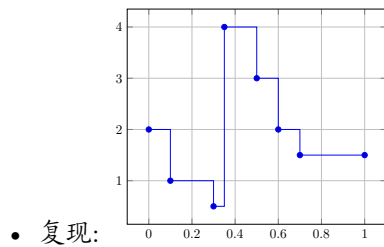
- 采样: 连续信号转变为离散脉冲序列的过程
  - 周期采样: 离散信号的获取是周期性的
  - 非周期采样: 离散信号的获取是非周期的
- 复现: 把脉冲序列转变为连续信号的过程



- 连续信号

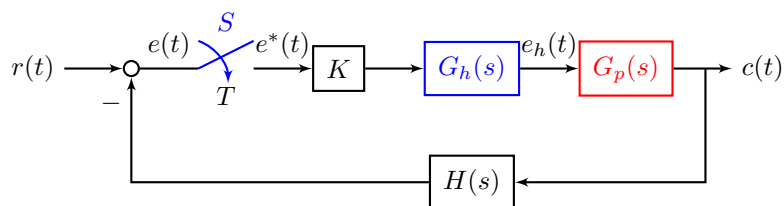


- 采样:



### 采样器与保持器

- 典型采样控制系统中既有连续的模拟信号, 又有离散的脉冲信号, 因此需要:
  - 采样器: 模拟信号转换为脉冲信号
  - 保持器: 脉冲信号转换为模拟信号



- $e^*(t)$ : 采样信号
- $G_h(s)$ : 保持器
- $e_h(t)$ : 复现信号
- $S$ : 理想采样开关
- $T$ : 采样周期

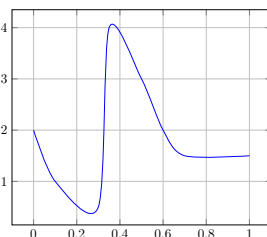
## 1.3 数字控制系统

### 数字控制系统

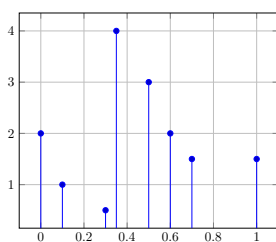
- 以数字计算机作为控制器控制连续对象
- 系统中既有连续信号, 又有数字信号, 实现两种信号之间的转换装置为 A/D, D/A.

## 模数转换器 (A/D)

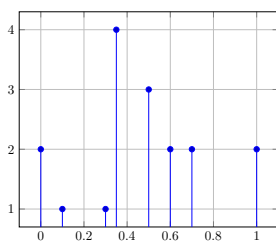
- 将连续信号转换为数字信号.
- 工作过程:
  - 采样过程:  $e(t) \rightarrow e^*(t)$
  - 量化过程:  $e^*(t) \rightarrow \bar{e}^*(t)$



- 连续信号



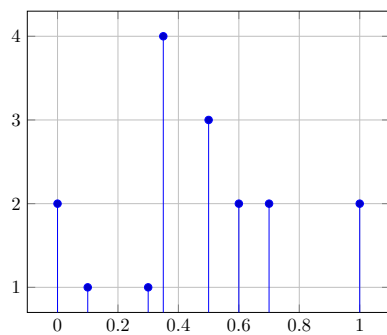
- 采样:



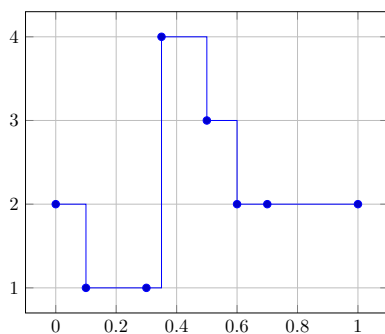
- 量化:

## 数模转换器 (D/A)

- 将离散的数字信号转换为连续模拟信号
- 工作过程:
  - 解码过程: 将离散数字信号转换为离散模拟信号
  - 复现过程: 将离散的模拟信号转换为连续的模拟信号



- 数字信号



- 复现:

#### 量化方法

- 只舍不入: 只取量化单位  $q$  的整数部分

$$E(e) = \frac{q}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{q^2}{3}$$

- 有舍有入: 类似四舍五入

$$E(e) = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{q^2}{12}$$

#### 减小量化误差方法

- 减小  $q$ , 即增大字长  $i$ :

$$q = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^i}$$

### 1.4 离散系统研究方法

#### 离散系统研究方法

- 连续系统: Laplacian 变换
- 离散系统: Z 变换
- 离散系统学习要点
  - 离散数学模型, 离散系统与连续系统对比
  - 离散系统的稳定性, 稳态性能与动态性能分析

## 2 信号的采样与保持

### 2.1 信号的采样

采样信号

- 理想采样的结果是脉冲信号, 其强度为连续信号在采样时刻的值  
若采样开关为理想采样开关, 则有:

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

其中  $\delta_T(t)$  为理想单位脉冲序列:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 将单位脉冲序列乘以连续信号即可完成采样, 将连续信号转换成采样信号 (加权脉冲序列)。

得:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

采样信号的 Laplace 变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^*(t)) &= \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \mathcal{L}(\delta(t - nT)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs} \end{aligned}$$

直接计算离散信号的 Laplace 变换时会发现，时域信号可由一系列有延迟的脉冲信号构成。根据 Laplace 变换的性质，时域延迟会导致复域出现  $s$  的指数函数，而不是关于  $s$  的有理分式，难以分析。为了能够方便地分析离散信号，需要学习一种新的数学工具 — Z 变换

### 采样信号的频谱分析

为了得到采样信号的频谱，可用另一种思路计算离散信号的 Laplace 变换

- 将  $\delta_T(t)$  以 Fourier 级数表示, 得:

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \\ \omega_s &= \frac{2\pi}{T}\end{aligned}$$

### 采样信号的频谱分析 (续)

通过 Laplace 变换或 Fourier 变换对比分析连续信号与采样信号的频率特性，可以看到采样过程的频域描述：将连续信号的频谱平移后再叠加。

- 采样

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\ e^*(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t) e^{jn\omega_s t} \\ E^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s) \\ E^*(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega + n\omega_s))\end{aligned}$$

- $e^*(t)$  的频谱为以  $\omega_s$  为周期的无穷多个频谱之和.
- 设  $e(t)$  带宽有限, 最高角频率为  $\omega_h$ , 则当  $\omega_s > 2\omega_h$  时,  $e^*(t)$  频谱的各部分不会相互重叠.

## Nyquist-Shannon sampling theorem

- 若采样器的输入信号  $e(t)$  只有有限带宽, 且其最高频率分量为  $\omega_h$ ,
- 当采样周期满足

$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

则信号  $e(t)$  可以完全从  $e^*(t)$  中恢复出来.

这是连续信号能完全从离散信号复现的保证, 即: 连续信号转换为离散信号时没有丢失任何信息。

### 工程中 $T$ 的选取

为了满足控制系统的性能指标, 需要采样频率尽可能大一些。但采样频率过大或过小都有不足之处。

- $T$  过小, 增加计算量
- $T$  过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
  - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为  $\omega_c$ , 则采样频率为  $\omega_s = 10\omega_c$ , 即  $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
  - 按  $t_r, t_s$  选取,  $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

## 2.2 采样函数 Laplace 变换性质

采样函数 Laplace 变换性质:  $G^*(s) = G^*(s + jk\omega_s)$

这个性质表明采样信号的 Laplace 变换是周期函数。

- 证明:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\ G^*(s + jk\omega_s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + j(n+k)\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\ &= G^*(s) \end{aligned}$$



采样函数 Laplace 变换性质:  $[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$

这个性质表明: 当一个连续系统的输入信号为采样信号时, 如何得到输出信号的采样。

- 证明

$$\begin{aligned}
 [G(s)E^*(s)]^* &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(s + jn\omega_s)E^*(s + jn\omega_s)] \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(s + jn\omega_s)E^*(s)] \\
 &= \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)\right)E^*(s) \\
 &= G^*(s)E^*(s)
 \end{aligned}$$

## 2.3 信号的保持

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决  $nT$  与  $(n+1)T$  之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1\Delta t + a_2(\Delta t)^2 + \cdots + a_m(\Delta t)^m$$

式中  $a_0, \dots, a_m$  由过去各采样时刻  $(m+1)$  个离散的信号  $e^*((n-i)T)$ ,  $(i = 0, \dots, m)$  惟一确定.

- $m = 0$  时称为零阶保持器,
- $m = 1$  时称为一阶保持器.

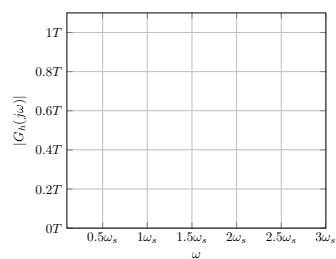
零阶保持器

- $e(nT + \Delta t) = a_0$ , 当  $\Delta t = 0$  时, 有  $e(nT) = a_0$ , 即: 按常值外推,  $e(t) = e(nT), t \in [nT, (n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为  $r^*(t) = \delta(t)$ , 则输出为  $e(t) = 1, t \in [nT, (n+1)T)$

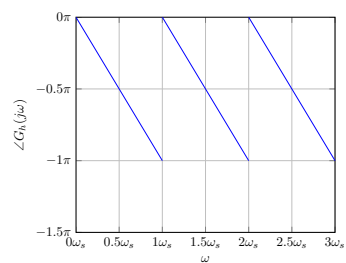
因此

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(r^*) &= 1 \\
 \mathcal{L}(e) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \\
 G_h(s) &= \frac{E(s)}{R^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \\
 G_h(j\omega) &= \frac{1 - e^{-jT\omega}}{j\omega} = \frac{e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega} \\
 &= \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-j\omega T/2} \\
 &= \frac{2 \sin \frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\omega} e^{-j\pi\omega/\omega_s}
 \end{aligned}$$

零阶保持器频率特性



• Bode 图



• 零阶保持器特性

- 低通滤波
- 相角迟后
- 时间延迟

一阶保持器

$$\begin{aligned}
e(nT + \Delta t) &= a_0 + a_1 \Delta t, & (0 \leq \Delta t < T) \\
a_0 &= e(nT) \\
a_1 &= \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T} \\
G_h(s) &= T(1+s) \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right)^2 \\
G_h(j\omega) &= \sqrt{1 + (\omega T)^2} \left( \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 e^{-j(\omega T - \arctan \omega T)}
\end{aligned}$$

- 高频噪声增大
- 因此一般只用零阶保持器.

### 3 Z 变换

#### 3.1 Z 变换

Z 变换定义

- 采样信号  $e^*(t)$  的 Laplace 变换

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nsT}$$

- 令  $Z = e^{sT}$ , 则

$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$

- 得:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) Z^{-n}$$

- 记作

$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换计算

- 级数求和法
  - 按照 Z 变换的定义求解
- 部分分式法:
  - 先求出  $e(t)$  的 Laplace 变换  $E(s)$ , 将其展开成部分分式之和, 使每部分对应的 Z 变换是已知的.

级数求和法示例:  $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

- 解:

$$\begin{aligned}
 e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\
 e(nT) &= 1 \\
 E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
 &= \frac{z}{z - 1}
 \end{aligned}$$

其中  $|z^{-1}| < 1$

- $1(t)$  与  $\delta_T(t)$  对应的 Z 变换相同.

级数求和法示例: 单位阶跃信号  $1(t)$

- 解:

$$\begin{aligned}
 e(nT) &= 1, \\
 E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
 &= \frac{z}{z - 1}
 \end{aligned}$$

其中  $|z^{-1}| < 1$

部分分式法示例:  $E(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

- 解:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \\
 e(t) &= 1 - e^{-at} \\
 E(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}}
 \end{aligned}$$

- Z 变换表:

$$\begin{array}{lll} \delta(t) & 1 & 1 \\ 1(t) & \frac{1}{s} & \frac{1}{1-z^{-1}} \\ t & \frac{1}{s^2} & \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \\ e^{-at} & \frac{1}{s+a} & \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \end{array}$$

### Z 变换性质

- 线性定理:  $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理:  $\mathcal{Z}[e(t + kT)] = z^k[E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理:  $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理:  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若  $g(nT) = x(nT) * y(nT)$  则  $G(z) = X(z)Y(z)$  .  $(x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T))$

### 3.2 Z 反变换

#### Z 反变换

$$e(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[E(z)]$$

- 幂级数展开法
- 部分分式法
  - 展开成部分分式后查表
- 反演积分法

#### 幂级数展开法

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \\ &= c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\ e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta(t - nT) \\ e(nT) &= c_n \end{aligned}$$

## 反演积分法

$$\begin{aligned}
 E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} \\
 &= e(0) + e(T)z^{-1} + \cdots + e(nT)z^{-n} + \cdots \\
 E(z)z^{n-1} &= e(0)z^{n-1} + e(T)z^{n-2} + \cdots + e(nT)z^{-1} + \cdots \\
 e(nT) &= \text{Res}(E(z)z^{n-1})
 \end{aligned}$$

反演积分法示例:  $E(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$  求  $e(nT)$

• 解:

$$\begin{aligned}
 E(z)z^{n-1} &= \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
 \text{Res}_1 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
 &= 2 \\
 \text{Res}_2 &= \lim_{z \rightarrow 0.5} \frac{(z-0.5)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
 &= -0.5^n \\
 e(nT) &= \text{Res}_1 + \text{Res}_2 \\
 &= 2 - 0.5^n
 \end{aligned}$$

## 4 离散系统数学模型

### 4.1 差分方程

差分方程模型

• n 阶后向差分方程

$$\begin{aligned}
 &c(k) + a_1c(k-1) + \cdots + a_nc(k-n) \\
 &= b_0r(k) + b_1r(k-1) + \cdots + b_mr(k-m)
 \end{aligned}$$

即  $k$  时刻的输出  $c(k)$  与  $k$  时刻前  $n$  个时刻输出及前  $m$  个输入, 当前时刻输入有关.

• n 阶前向差分方程

$$\begin{aligned}
 &c(k+n) + a_1c(k+n-1) + \cdots + a_nc(k) \\
 &= b_0r(k+m) + b_1r(k+m-1) + \cdots + b_mr(k)
 \end{aligned}$$

### 差分方程解法：迭代法

- 利用差分方程的递推关系, 逐步计算  $c(k)$  的值
- 例:  $c(k) = r(k) + 5c(k-1) - 6c(k-2)$  输入  $r(k) = 1$ , 初始条件:  $c(0) = 0, c(1) = 1$
- 解:

$$\begin{aligned}c(2) &= 6 \\c(3) &= 25 \\c(4) &= 90\end{aligned}$$

### z 变换法

- 将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.
- 例: 差分方程  $c(t+2T) + 3c(t+T) + 2c(t) = 0$  初始条件  $c(0) = 0, c(1) = 1$
- 解:

$$\begin{aligned}z^2(c(z) - c(0) - c(1)z^{-1}) + 3z(c(z) - c(0)) + 2c(z) &= 0 \\(z^2 + 3z + 2)c(z) &= z \\c(z) &= \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} = \frac{1}{1+z^{-1}} - \frac{1}{1+2z^{-1}} \\c(k) &= (-1)^k - (-2)^k\end{aligned}$$

其中  $k = 0, 1, 2, \dots$

## 4.2 脉冲传递函数

### 脉冲传递函数定义

- 连续系统: 传递函数 (s 域)
- 离散系统: 脉冲传递函数 (z 域)
- 定义: 输出  $c^*(t)$  的 Z 变换与输入  $r^*(t)$  的 Z 变换之比 (零初始条件下) 叫做系统的脉冲传递函数. 记为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

### 脉冲传递函数意义

- 加权序列: 输入  $r^*(t) = \delta(t)$  的输出序列称为加权序列, 记为  $k^*(t)$
- 脉冲传递函数:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\ &= \mathcal{Z}[k^*(t)] \\ &= k(z) \end{aligned}$$

- 脉冲传递函数为加权序列  $k^*(t)$  的 Z 变换

两种模型之间的变换关系:

$$\begin{aligned} c(nT) + \sum_{k=1}^n a_k c((n-k)T) &= \sum_{k=0}^m b_k r((n-k)T) \\ G(z) &= \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}} \end{aligned}$$

- 差分方程在零初始条件下进行 Z 变换, 得脉冲传递函数.

### 脉冲传递函数计算

- 差分方程 Z 变换:  $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数  $G(s)$  求解 (部分分式法)
- 例:  $c(nT) = r[(n-k)T]$
- 解:

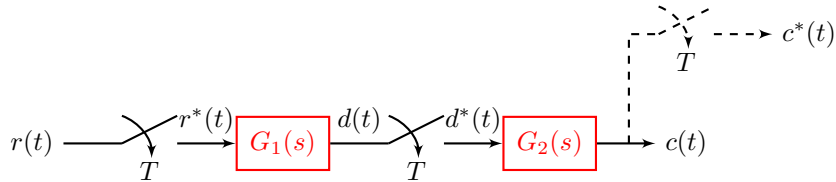
$$\begin{aligned} C(z) &= z^{-k} R(z) \\ G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} \\ &= z^{-k} \end{aligned}$$

## 4.3 开环系统的脉冲传递函数

### 开环系统脉冲传递函数

按定义求, 即:  $G(z) = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$

- 结构图

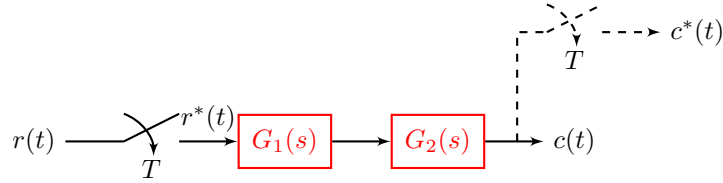




- 推导

$$\begin{aligned} D(z) &= R(z)G_1(z) \\ C(z) &= D(z)G_2(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \\ G(z) &= G_1(z)G_2(z) \end{aligned}$$

开环系统脉冲传递函数 (续)

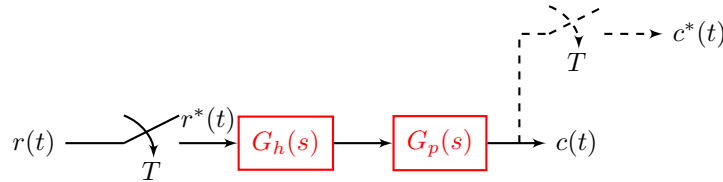


- 结构图

- 推导

$$\begin{aligned} C^*(s) &= [R^*(s)G_1(s)G_2(s)]^* = R^*(s)[G_1(s)G_2(s)]^* \\ C(z) &= R(z)G_1G_2(z) \\ G(z) &= G_1G_2(z) \end{aligned}$$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:



- 结构图

- 推导

$$\begin{aligned} - C^*(s) &= [R^*(s) \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^* \\ - C^*(s) &= R^*(s)[(1-e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^* \\ - C^*(s) &= R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^* \\ - C(z) &= R(z)\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] - z^{-1}\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] \\ - G(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] \end{aligned}$$

开环系统脉冲传递函数示例:  $G_p(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

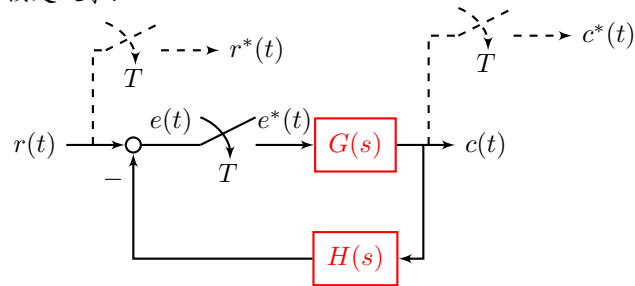
- 解:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{a}{s^2(s+a)}\right] \\
 &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)\right] \\
 &= (1 - z^{-1}) \left[ \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{a} \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

#### 4.4 闭环系统的脉冲传递函数

闭环系统的脉冲传递函数

按定义求:



- 脉冲传递函数

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\
 \Phi_e(z) &= \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[e^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}
 \end{aligned}$$

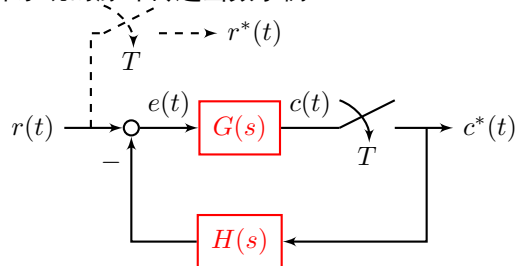
- 解:

$$\begin{aligned}
 C(s) &= G(s)E^*(s) \\
 E(s) &= R(s) - H(s)C(s) \\
 &= R(s) - H(s)G(s)E^*(s)
 \end{aligned}$$

闭环系统的脉冲传递函数 (续)

$$\begin{aligned}
E^*(s) &= R^*(s) - HG^*(s)E^*(s) \\
&= \frac{R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \\
\Phi_e(z) &= \frac{1}{1 + HG(z)} \\
C^*(s) &= G^*(s)E^*(s) \\
&= \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \\
\Phi(z) &= \frac{G(z)}{1 + HG(z)}
\end{aligned}$$

闭环系统的脉冲传递函数示例:



• 解:

$$\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - H(s)C^*(s) \\
C(s) &= G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s) \\
C^*(s) &= GR^*(s) - GH^*(s)C^*(s) = \frac{GR^*(s)}{1 + GH^*(s)}
\end{aligned}$$

• 没有闭环脉冲传递函数

## 4.5 修正 Z 变换

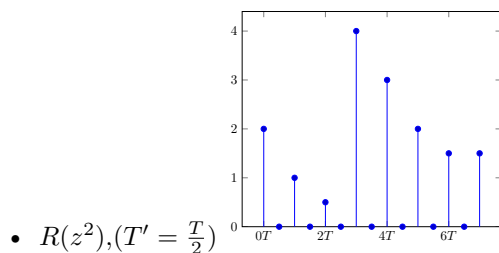
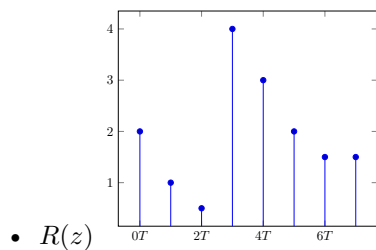
$c^*(t)$  与  $c(t)$

- 采样间隔  $\tau$  要远小于系统最小时间常数
- $c(nT)$  不能反映采样间隔中的信息
- $G(s)$  要满足:  $n \geq m + 2$ , 否则  $c^*(t)$  与  $c(t)$  差别较大.

## 修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
  - 将周期为  $T$  的原输入采样信号序列  $r^*(t)$  再次以周期  $\frac{T}{n}$  采样, 即得:  

$$R'(z) = R(z^n)$$
  - 计算在采样周期  $\frac{T}{n}$  下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
  - 原输入信号 Z 变换为  $R(z)$ , 将  $z$  替换为:  $z^n$ .
  - 以  $\frac{T}{n}$  重新计算系统脉冲传递函数.



## 修正 Z 变换示例:

$$G(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$T = 1$ ,  $r(t) = 1(t)$ , 要求每采样周期中间插入两点.

- 解:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z}{z - e^{-1/3}} \\ r(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ r'(z) &= r(z^3) \\ &= \frac{1}{1 - z^{-3}} \\ c'(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-1/3}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-3}} \end{aligned}$$

## 5 离散系统稳定性

### 5.1 稳定性

S 域到 Z 域的映射

- $S \leftrightarrow Z$

$$\begin{aligned}z &= e^{sT} \\s &= \sigma + j\omega \\z &= e^{\sigma T} e^{j\omega T} \\|z| &= e^{\sigma T} \\\angle z &= \omega T\end{aligned}$$

- 当  $\sigma = 0$  时, 对应到  $z$  平面的单位圆, 此时,  $\omega$  从  $-\infty \rightarrow \infty$  时,  $z$  平面上的点已绕单位圆运动了无数圈, 称  $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$  为主要带.

- 主要映射关系:
  - 等  $\sigma$  线: 单位圆:  $|z| = e^{\sigma T}$
  - 等  $\omega$  线: 过原点射线:  $\angle z = \omega T$
  - 等  $\xi$  线 (S 平面过原点射线): 对数螺线

离散系统的稳定性

- 稳定性定义: 离散系统在有界输入序列下, 输出序列也有界.
- 连续系统中: 闭环系统的特征根实部  $\sigma$  小于 0.
- 离散系统中:  $|z| < 1$ , ( $|z| = e^{\sigma}$ )
  - 差分方程: 特征根的模均小于 1
  - 闭环脉冲传递函数: 离散系统闭环特征根在 Z 平面的单位圆内 ( $|z_i| < 1$ )

### 5.2 稳定性判据

解特征方程, 根据  $|z_i| < 1$  判断

W 域的劳斯判据

- Z 域变换到 W 域:

$$\begin{aligned}z &= x + jy \\w &= u + jv \\z &= \frac{w+1}{w-1} \\w &= \frac{z+1}{z-1}\end{aligned}$$

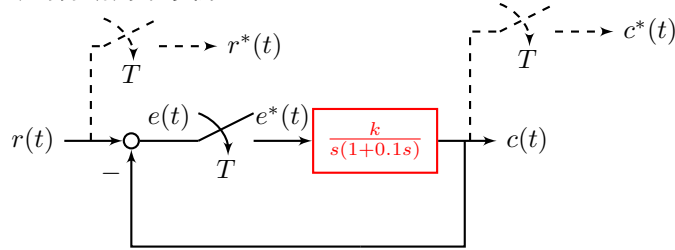
- 等价关系:

$$u + jv = \frac{x^2 + y^2 - 1 - 2yj}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$|z| < 1 \Leftrightarrow u < 0$$

- 可在 W 域中使用 Routh 判据.

W 域的劳斯判据示例:



分有无采样开关 ( $T = 0.1s$ ) 两种情况分析使系统稳定的  $k$  需要满足的条件.

- 解: 无采样开关时:

$$D(s) = 0.1s^2 + s + k$$

得:  $k > 0$

W 域的劳斯判据示例 (续): 有采样开关时:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{k}{s(1+0.1s)}\right] = \frac{0.632kz}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

$$D(z) = z^2 + (0.632k - 1.368)z + 0.368$$

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$D(w) = 0.632Kw^2 + 1.264w + (2.736 - 0.632k)$$

W 域的劳斯判据示例 (续): 有采样开关时:

- Routh 表:

$w^2$	$0.632k$	$2.7360 - 0.632k$
$w^1$	$1.264$	$0$
$w^0$	$2.736 - 0.632k$	

- 得:

$$\begin{aligned} 0.632k &> 0 \\ 2.736 - 0.632k &> 0 \end{aligned}$$

- 得:

$$0 < k < 4.33$$

- 采样开关对稳定性有很大影响.

## 5.3 离散系统稳定性影响因素

### 离散系统稳定性影响因素

- 系统开环增益
  - $k \uparrow$  则离散系统稳定性下降
  - $k \downarrow$  则离散系统稳定性提高
- 采样周期
  - $T \uparrow$  则离散系统稳定性下降
  - $T \downarrow$  则离散系统稳定性提高

## 6 离散系统稳态误差

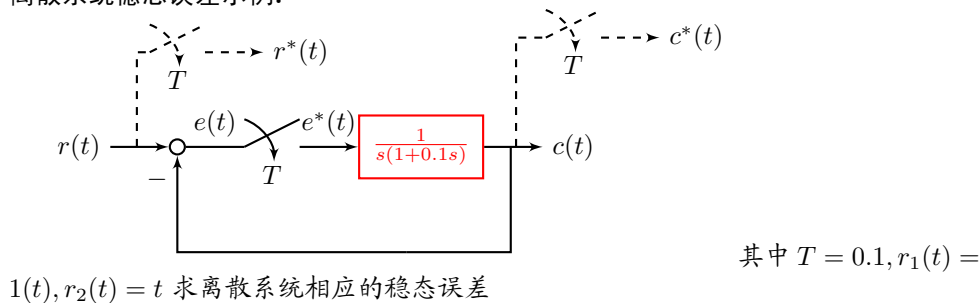
### 6.1 离散系统稳态误差

#### 离散系统稳态误差

- 连续系统稳定误差:
  - Laplacian 变换的终值定理
  - 静态误差系数
  - 动态误差系数
- 离散系统稳态误差
  - Z 变换终值定理

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)\Phi_e(z)R(z) \end{aligned}$$

离散系统稳态误差示例:



• 解:

$$G(z) = \frac{z(1 - 0.368)}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + G(z)} = \frac{(z - 1)(z - 0.368)}{z^2 - 0.736z + 0.368}$$

离散系统稳态误差示例 (续)

•  $r_1(t) = 1(t)$  时

$$R_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \Phi_e(z) R_1(z) = 0$$

•  $r_2(t) = t(t)$  时

$$R_1(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \Phi_e(z) R_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T(z - 0.368)}{z^2 - 0.736z + 0.368}$$

$$= T$$

$$= 0.1$$

## 6.2 离散系统型别与静态误差系数

离散系统型别

• 连续系统型别:

$$G_o(s) = \frac{M(s)}{s^\nu N(s)}$$

若  $\nu = 0, 1, 2$  则分别称为 0 型, I 型, II 型系统.



- 离散系统型别:

$$G_o(z) = \frac{M(z)}{(z-1)^\nu N(z)}$$

若  $\nu = 0, 1, 2$  则分别称为 0 型, I 型, II 型系统. ( $G_o(z)$  为单位负反馈开环脉冲传递函数)

静态误差系数: 0 型系统:

- 连续系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) \\ r(t) &= 1 \\ e_{ss} &= \frac{1}{1 + K_p} \end{aligned}$$

- 离散系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 + G_o(z)) \\ r(t) &= 1(t) \\ e_{ss} &= \frac{1}{K_p} \end{aligned}$$

静态误差系数: I 型系统:

- 连续系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) \\ r(t) &= t \\ e_{ss} &= \frac{1}{K_v} \end{aligned}$$

- 离散系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G_o(z) \\ r(t) &= t \\ e_{ss} &= \frac{T}{K_v} \end{aligned}$$

静态误差系数: II 型系统:

- 连续系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) \\ r(t) &= \frac{t^2}{2} \\ e_{ss} &= \frac{1}{K_a} \end{aligned}$$

- 离散系统

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 0} (z-1)^2 G_o(s)$$

$$r(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$e_{ss} = \frac{T^2}{K_a}$$

## 7 离散系统动态性能分析

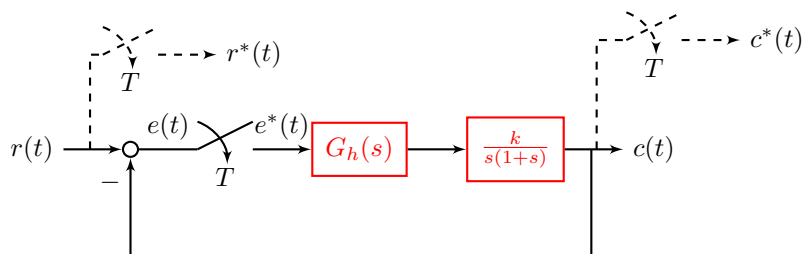
连续系统: 时域分析, 根轨迹法, 频域法, 离散系统也有类似方法, 这里只讨论时域响应

### 7.1 离散系统时间响应

离散系统时间响应计算

- 求  $\Phi(z)$  计算  $C(z) = \Phi(z)R(z)$ , Z 反变换求出  $C^*(t)$
- 不存在  $\Phi(z)$  时, 直接计算  $C(z)$ , Z 反变换求出  $C^*(t)$

离散系统时间响应计算示例:



- 结构图

其中  $r(t) = 1(t)$ ,  $T = 1s$ ,  $k = 1$  求系统动态性能指标.

- 解:

$$G_o(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right] = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

$$C(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.632z^{-2} - 0.632z^{-3}}$$

$$C(z) = 0.368z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5} + 0.895z^{-6} + 0.802z^{-7} + 0.868z^{-8} + \dots$$

$$t_r = 2s, t_s = 12s, \sigma\% = 40\%$$

## 7.2 采样器, 保持器对系统动态性能的影响

采样器, 保持器对系统动态性能的影响

- 定性说明:
  - 采样器: 使系统稳定性下降, 使  $\sigma\% \uparrow, t_r \downarrow, t_s \downarrow$
  - 保持器: 使系统稳定性下降, 使  $\sigma\% \uparrow, t_r \uparrow, t_s \uparrow$
- 对大迟延系统, 无上述定性结论

## 7.3 闭环极点与动态响应的关系

闭环极点与动态响应的关系

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \\ &= e^{\sigma T} e^{j\omega T} \end{aligned}$$

- 若闭环极点  $|z| > 1$ , 则有  $\sigma > 0$ , 系统不稳定.
- 若闭环极点  $|z| = 1$ , 则有  $\sigma = 0$ , 等幅振荡.
- 若闭环极点  $|z| < 1$ , 则有  $\sigma < 0$ , 系统稳定.
  - 闭环极点为正实数: 单调收敛
  - 闭环极点为负实数: 振荡收敛
  - 闭环极点为具有正实部的复数: 低频振荡收敛
  - 闭环极点为具有负实部的复数: 高频振荡收敛
  - 若  $|z| \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow -\infty$ , 收敛极快
  - 系统期望的闭环极点在 Z 平面单位圆的右半圆内