补充例子

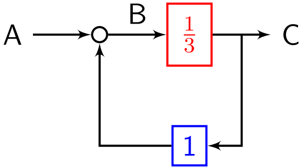
Outline

- 关于反馈
- 非线性
- 稳定性
- 卷积
- 误差
- Fourier 变换
- 连续系统频域分析
- 部分分式分解求解差分方程
- 最少拍控制

Topic

- 关于反馈
- 非线性
- 稳定性
- 卷积
- 误差
- Fourier 变换
- 连续系统频域分析
- 部分分式分解求解差分方程
- 最少拍控制

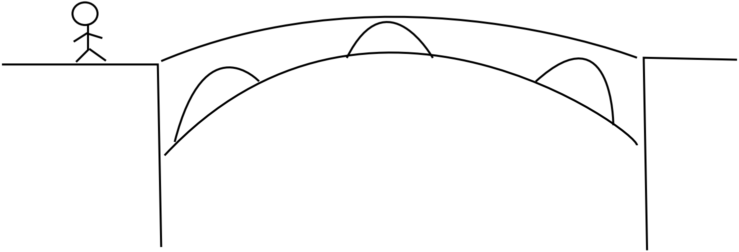
反馈与方程（静态）



$$
\begin{aligned}
C &= \frac{B}{3} && (1)\\
A + C &= B && (2)\\
A &= 10 && (3)\\
C &= ? && (4)
\end{aligned}
$$

笑话：过桥

路人甲要过桥，发现桥很长，问桥边路人乙桥长多少，乙说：50 米。甲走上桥后不一会儿，乙追了上来，说，桥长 100 米，你要是过了 50 米就转弯，就掉下去了。

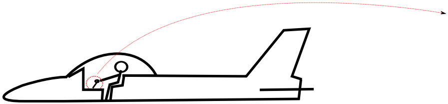


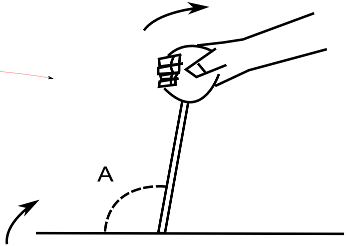
开环控制：笑话：不听话的儿子

开环控制：声东击西

操纵杆

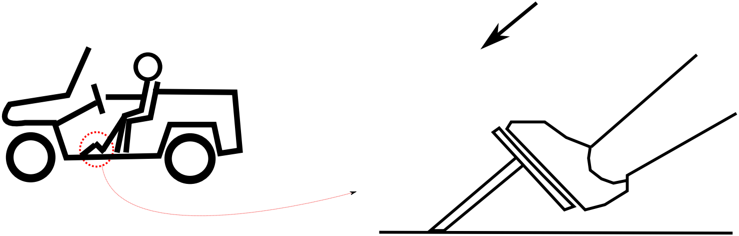
飞行员拉动操纵杆，飞机机头上扬，结果减弱了拉动操纵杆的效果，即：拉杆->A 增大-> 机头上扬->A 减小





油门、刹车

司机踩刹车，汽车减速，司机因为惯性会有前冲的趋势，易导致踩刹车的力度变大。
司机踩油门，汽车加速，司机因为惯性会有后仰的趋势，易导致踩油门的力度变小。



Topic

- 关于反馈
- 非线性
- 稳定性
- 卷积
- 误差
- Fourier 变换
- 连续系统频域分析
- 部分分式分解求解差分方程
- 最少拍控制

几个例子

$$
\begin{aligned}
c &= u \\
c &= u+1 \\
c &= 1 \\
c &= 0 \\
c &= \sqrt[3]{u} \quad u = x^3 \\
c + c^2 &= u \quad u = r + c^2
\end{aligned}
$$

$x' + 1 = u$

方法 1

变量代换，为方程右边与输出变量无关的部分指定另一个变量。

$$
\begin{aligned}
x' + 1 &= u \\
w &= u - 1 \\
x' &= w
\end{aligned}
$$

方法 2

将方程右边与输出变量无关的部分用泰勒级数展开。

$$
\begin{aligned}
x' &= u - 1 \\
u - 1 &= (u - 1)|_{u=1} + \Delta u \\
x' &= \Delta u
\end{aligned}
$$

$cc' = u$

在 $c_0 = 1, c'_0 = 1$ 处线性化

$$
\begin{aligned}
(1+\Delta c)(1+\Delta c') &= u \\
1+\Delta c+\Delta c' + \Delta c\Delta c' &= u \\
\Delta c+\Delta c' &= \Delta u
\end{aligned}
$$

$\Delta u = 0, u = 1$ 时，$cc' = 1$ 。接着随着 c 增大，c' 会减小。

变量代换
$c = t+\Delta c, c' = 1+\Delta c'$

$$
\begin{aligned}
(t+\Delta c)(1+\Delta c') &= u \\
t+\Delta c+t\Delta c' + \Delta c\Delta c' &= u \\
\Delta c+t\Delta c' + \Delta c\Delta c' &= u-t \\
\Delta c+t\Delta c' &= \Delta u
\end{aligned}
$$

$\Delta u = 0, u = t$ 时，$cc' = t$ 。接着随着 c 增大，c' 不变。

Topic

稳定性与平衡点

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - x(t) &= r(t) \\ r &= 1 \\ x(0) &= -1 \\ x(t) &= -1\end{aligned}$$

- 通解：$x_1(t) = a_0 e^t$
- 特解：$x_2(t) = -1$
- $x_1(0) + x_2(0) = x(0)$ 得 $a_0 = 0$

信号、系统、零极点相消

考虑两种情况：

- $G(s) = \frac{s-1}{s+1}, R(s) = \frac{1}{s-1}$
- $G(s) = \frac{1}{s-1}, R(s) = \frac{s-1}{s+1}$

系统初始值为 0 时，可得：$C(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{s+1}$ 当系统存在初始值 y_0 时，则分别变为

- $C(s) = \frac{y_0}{s+1} + \frac{1}{s+1}$
- $C(s) = \frac{y_0}{s-1} + \frac{1}{s+1}$

终值定理、稳态响应、直流分量

终值定理计算的是瞬态响应消失后稳态响应中的直流分量，可以结合 Fourier 变换分析。

$$\lim_{s\to 0} sC(s) = \lim_{s\to 0} G(s)R(s)$$

$$\lim_{\omega\to 0} C(j\omega) = \lim_{\omega\to 0} G(j\omega)R(j\omega)$$

从终值定理的证明过程 (用到微分性质 $\mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0)$，两边对 $s \to 0$ 取极限) 也可以看出，对于 $f(t) = e^{\lambda t}$，

$$\lim_{s\to 0} \mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = \lim_{s\to 0} \frac{\lambda}{s-\lambda} = \begin{cases} -f(0) & \lambda \neq 0 \\ 0 & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \begin{cases} 0 & \lambda \neq 0 \\ f(0) & \lambda = 0 \end{cases}$$

即：对于 $e^{\lambda t}, (\lambda \neq 0)$ 的分量，无论 $\lambda > 0, \lambda < 0$ 利用终值定理计算时均为 0。

正反馈与离散系统稳定性

$$
\begin{aligned}
x(n+1) - kx(n) &= r(n) \\
r(n) &= 0 \\
x(n) &= x(0)k^n
\end{aligned}
$$

正反馈与延迟系统稳定性

$$\begin{aligned} x(t+a) - kx(t) &= r(t) \\ r(t) &= 0 \\ x(na) &= x(0)k^n \end{aligned}$$

Topic

- 关于反馈
- 非线性
- 稳定性
- 卷积
- 误差
- Fourier 变换
- 连续系统频域分析
- 部分分式分解求解差分方程
- 最少拍控制

卷积与脉冲响应

- 卷积

$$
\begin{aligned}
x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \\
x(t) * \delta(t) &= x(t)
\end{aligned}
$$

- 脉冲响应设线性时不变 (Linear Time Invariant,LTI) 系统脉冲响应为 $h(t)$：

$$
\begin{aligned}
h(t) &= LTI[\delta(t)] \\
h(t-\tau) &= LTI[\delta(t-\tau)]
\end{aligned}
$$

卷积与系统响应

设输入信号为 $x(t)$ 时，输出为 $y(t)$：

$$
\begin{aligned}
y(t) &= LTI[x(t)] \\
&= LTI\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} LTI[x(\tau)\delta(t-\tau)]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)LTI[\delta(t-\tau)]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= x(t) * h(t)
\end{aligned}
$$

Topic

- 关于反馈
- 非线性
- 稳定性
- 卷积
- 误差
- Fourier 变换
- 连续系统频域分析
- 部分分式分解求解差分方程
- 最少拍控制

阶跃输入

$$
\begin{aligned}
m\dot{v} &= f \\
m\dot{v} &= r - v \\
m\dot{v} &= 1 - v \\
m\frac{d}{dt}(v-1) &= 1 - v \\
m\frac{d}{dt}(1-v) &= -(1-v) \\
m\dot{E} &= -E \\
E &= e^{-\frac{t}{m}}
\end{aligned}
$$

斜坡输入

$$
\begin{aligned}
m\dot{v} &= f \\
m\dot{v} &= r - v \\
m\dot{v} &= t - v \\
m\frac{d}{dt}(v - t) + m &= t - v \\
m\frac{d}{dt}(t - v) &= -(t - v) + m \\
m\dot{E} &= -E + m \\
E &= (1 - m)e^{-\frac{t}{m}} + m
\end{aligned}
$$

Topic

- 关于反馈
- 非线性
- 稳定性
- 卷积
- 误差
- Fourier 变换
- 连续系统频域分析
- 部分分式分解求解差分方程
- 最少拍控制

Fourier 级数 (三角形式)

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

其中：

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{T} \\
a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos(n\omega t) dt \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin(n\omega t) dt
\end{aligned}$$

Fourier 级数 (复指数形式)

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t} \\
f_T(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,d\tau\right]e^{j\omega_n t}
\end{aligned}
$$

Fourier 积分

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} f_T(t) &= f(t) \\
f(t) &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} \\
\Delta\omega &= \frac{2\pi}{T} \\
f(t) &= \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} \Delta\omega \\
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega
\end{aligned}
$$

Fourier 变换定义

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega \\
F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
F(j\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] \\
f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]
\end{aligned}
$$

常用函数的 Fourier 变换

- 单位脉冲函数 $f(t) = \delta(t) \to F(j\omega) = 1$
- 阶跃函数 $f(t) = A, (t \geq 0) \to F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
- 指数函数 $f(t) = e^{at}, (t \geq 0) \to F(j\omega) = \frac{1}{j\omega - a}$
- 正弦函数 $f(t) = \sin(\omega_0 t) \to F(j\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

性质

- 线性: $f(t) = af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow F(j\omega) = aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$, 其中 a, b 为常数
- 时移: $g(t) = f(t \pm a) \rightarrow G(s) = F(j\omega)e^{\pm j\omega a}$
- 频移：$\mathcal{F}[e^{\pm\omega_0 t}f(t)] = F(j(\omega \mp \omega_0))$
- 时域微分: $g(t) = f(t)' \rightarrow G(j\omega) = j\omega F(j\omega)$
- 频域微分：$\mathcal{F}[tf(t)] = j\frac{dF(j\omega)}{d\omega}$
- 时域积分: $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \rightarrow G(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
- 卷积：$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)]\mathcal{F}[f_2(t)]$

Topic

基本信号 $e^{j\omega t}$ 通过线性系统

$$
\begin{aligned}
f(t) &= e^{j\omega t}, \qquad -\infty < t < \infty \\
H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= |H(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \\
y_f(t) &= e^{j\omega t} * h(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\
&= e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= H(j\omega)e^{j\omega t} \\
&= |H(j\omega)|e^{j(\omega t+\phi(\omega))}
\end{aligned}
$$

正弦（余弦）信号通过线性系统

$$
\begin{aligned}
f(t) &= A\cos\omega t, \qquad -\infty < t < \infty \\
&= \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\
y_f(t) &= \frac{A}{2}(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}) \\
&= \frac{A}{2}|H(j\omega)|(e^{j\omega t+\phi(\omega)} + e^{-j\omega t-\phi(\omega)}) \\
&= A|H(j\omega)|\cos(\omega t + \phi(\omega))
\end{aligned}
$$

非正弦周期信号通过线性系统

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t} \\
F_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega t}dt \\
&= |F_n|e^{j\theta(n\omega)} \\
y_f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega)e^{jn\omega t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n||H(jn\omega)|e^{jn\omega t+\phi(n\omega)+\theta(n\omega)} \\
&= F_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2|F_n||H(jn\omega)|\cos(jn\omega t+\phi(n\omega)+\theta(n\omega))
\end{aligned}
$$

系统对非周期信号的响应

$$
\begin{aligned}
y(t) &= f(t) * h(t) \\
Y(j\omega) &= F(j\omega)H(j\omega) \\
y(t) &= \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] \\
H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}
\end{aligned}
$$

利用 Fourier 变换计算零状态响应

某线性时不变系统的脉冲响应 $h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})U(t)$，求输入信号 $f(t)=e^{-t}U(t)$ 时系统的零状态响应。其中 $U(t)$ 为单位阶跃函数。

解：

$$
\begin{aligned}
F(j\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{j\omega+1} \\
H(j\omega) &= \mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+3} = \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+3)} \\
Y(j\omega) &= F(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)} \\
&= \frac{1/2}{j\omega+1} + \frac{-1}{j\omega+2} + \frac{1/2}{j\omega+3} \\
y(t) &= (\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t})U(t)
\end{aligned}
$$

Topic

- 关于反馈
- 非线性
- 稳定性
- 卷积
- 误差
- Fourier 变换
- 连续系统频域分析
- 部分分式分解求解差分方程
- 最少拍控制

$C(n+2) - 6C(n+2) + 8C(n) = U(n)$ 零状态阶跃响应

部分分式分解方法有两种，求和限不同，但结果相同。

$$
\begin{aligned}
(z^2 - 6z + 8)C(z) &= \frac{z}{z-1} \\
C(z) &= \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-4)} \\
C(z) &= \frac{1}{3(z-1)} - \frac{1}{z-2} + \frac{2}{3(z-4)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{3} z^{-n} - \frac{1}{2} 2^n z^{-n} + \frac{1}{6} 4^n z^{-n}] \\
C(z) &= \frac{z}{3(z-1)} - \frac{z}{2(z-2)} + \frac{z}{6(z-4)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{1}{3} z^{-n} - \frac{1}{2} 2^n z^{-n} + \frac{1}{6} 4^n z^{-n}]
\end{aligned}
$$

$C_{n+2}+3C_{n+1}+2C_n=0$ 求 $C(0)=0, C(1)=1$ 时的响应

部分分式分解有两种，可以看到，第一种分解计算时，如果 n 的取值范围没有限定好，会出现错误。（如：求和时设定 n 从 1 开始。）

$$z^2C(z)-z^2+3(zC(z)-z)+2C(z)=0$$

$$\begin{aligned}
C(z)&=\frac{2}{z+2}-\frac{2}{z+1}+1\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}[-(-2)^n z^{-n}]+\sum_{n=1}^{\infty}[2(-1)^n z^{-n}]+1\\
&=1+0z^{-1}+\cdots\\
C(z)&=\frac{2z}{z+1}-\frac{z}{z+2}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}[2(-1)^n z^{-n}]-\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{-n}\\
C(n)&=2(-1)^n-(-2)^n
\end{aligned}$$

两种部分分式分解之间的关系

从上面的例子可以看出，两种部分分式都可以求解出差分方程的解，但一个能够直接利用 z 反变换求解出时域函数，另一个要用到 z 变换的性质 $\mathcal{Z}[e(t-T)] = E(z)z^{-1}$ 。因此，解的范围不同，一个是 $n \geq 0$ ，一个是 $n \geq 1$ 。这两个解中包含共同的项（对应于差分方程的特征根），它们在 $n \leq 1$ 时是一致的。由于第一种方法的解从 $n = 1$ 开始求和，因此它们只是在 $n = 0$ 时相差一个常数。而分析第二种方法的解，可以从其它部分推导出来。
对于 n 阶差分方程，知道通解、特解与初始条件即可惟一确定其解。而初始条件可以替换为任意 n 个时刻的值。当两个函数满足通解与特解条件，并且在两个时刻的值相等时，可以断定这两个函数相等，都是方程的解。

Topic

- 关于反馈
- 非线性
- 稳定性
- 卷积
- 误差
- Fourier 变换
- 连续系统频域分析
- 部分分式分解求解差分方程
- 最少拍控制

最小拍

为使误差信号在有限拍内变为 0，设 $X(z)$ 为关于 z^{-1} 的有限多项式：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+D(z)G(z)} \cdot \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} &= A(z)X(z) \\
\frac{1}{1+D(z)G(z)} &= X(z)(1-z^{-1})^m \\
D(z)G(z) &= \frac{1}{X(z)(1-z^{-1})^m} - 1 \\
D(z) &= \frac{1-X(z)(1-z^{-1})^m}{X(z)(1-z^{-1})^m G(z)}
\end{aligned}
$$

无纹波最少拍

为使误差信号在有限拍内变为 0，且控制器 $D(z)$ 的输出在有限拍内为常值，设 $X(z)$ 为关于 z^{-1} 的有限多项式，$Y(z)$ 为关于 z^{-1} 的有限多项式，或有一个极点 $z=1$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+D(z)G(z)} \cdot \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} &= A(z)X(z) \\
\frac{D(z)}{1+D(z)G(z)} \cdot \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} &= A(z)Y(z) \\
D(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\
(1+\frac{Y(z)}{X(z)}G(z))(1-z^{-1})^m &= \frac{1}{X(z)} \\
(X(z)+Y(z)G(z))(1-z^{-1})^m &= 1
\end{aligned}
$$

无纹波最少拍示例

$$G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1+0.717z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$X(z) = 1 + cz^{-1}$$

$$Y(z) = \frac{(1-0.368z^{-1})(a+bz^{-1})}{1-z^{-1}}$$

$$b = -0.22435314655638$$

$$c = -0.59196923837781$$

$$a = 0.38261705478864$$

```
e:3.68*z*(1+0.717*z)*(a+b*z)+(1-c*z)*(1-z)^2;
m:map(lambda([i],coeff((taylor(e,z,0,3)),z,i)),[1,2,3]);
float(solve(m));
```