线性定常系统的经典辨识

邢超

西北工业大学航天学院

经典辨识方法定义

由上述三种经典输入信号来获取系统数学模型的方法。

- 正弦输入—频率响应
- 阶跃输入—阶跃响应
- 脉冲输入—脉冲响应

本课程重点：由脉冲输入信号来求取系统数学模型的方法。

经典辨识的内容、目的及方法

- 经典辨识内容及目的：
  - 如何获取系统的脉冲响应？
  - 如何从系统的脉冲响应求取系统的传递函数和脉冲传递函数
- 解决方法：
  - 如何获取系统的脉冲响应，采用相关法；
  - 由脉冲响应求取系统的参数模型，采用纯解析法。

相关法求取系统的脉冲响应：系统模型

设 SISO 系统脉冲响应函数 $g(\tau)$。依据线性系统的卷积定理有：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma$$

设 $x(t)$ 为均值 0 的平稳随机过程，则 $y(t)$ 亦为均值 0 的平稳随机过程。任取时刻 t_2，当 $t = t_2$ 时，上式为

$$y(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)x(t_2-\sigma)d\sigma$$

用另一时刻的输入 $x(t_1)$ 乘以上式，得：

$$x(t_1)y(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)x(t_1)x(t_2-\sigma)d\sigma$$

相关法求取系统的脉冲响应: 维纳 -霍夫方程

两边取数学期望，得：

$$E[x(t_1)y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)E[x(t_1)x(t_2-\sigma)]d\sigma$$

可得维纳 -霍夫方程：

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau)]d\sigma$$

其中：$\tau = t_2 - t_1$ 若方程中 R_{xy} 及 R_x 已知，则解上述方程可得 $g(\tau)$

相关法求取系统的脉冲响应: 维纳 -霍夫方程求解

当 $x(t)$ 为白噪声信号时，有 $R_x(\tau)=K\delta(\tau)$，以及 $R_x(\tau-\sigma)=K\delta(\tau-\sigma)$

代入维纳霍夫方程后，可得

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)K\delta(\tau-\sigma)d\sigma \\ &= Kg(\tau) \\ g(\tau) &= \frac{R_{xy}(\tau)}{K} \end{aligned}$$

$g(\tau)$ 的求解，只需计算 R_{xy}。若观测时间 T_m 充分大，则

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} x(t)y(t+\tau)dt \\ R_{xy}(k) &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i y_{i+k} \end{aligned}$$

其中 x_i, y_{i+k} 是记录的数据序列。

白噪声过程

如果随机过程 $w(t)$ 的均值为 0，自相关函数为：

$$R_w(t) = \sigma^2 \delta(t)$$

则称该过程为白噪声过程。其中：

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

工程中的问题

- 脉冲输入得脉冲响应，工程上不可实现
- 白噪声在工程上人为不可产生；

因此，必须用工程中可重复产生的输入信号来辨识系统的脉冲响应序列。

- 伪随机噪声；
- 离散二位式白噪声序列；
- 伪随机离散二位式序列；(M 序列)
- 二电平 M 序列；

伪随机噪声辨识脉冲响应

伪随机噪声由白噪声截断而来，是一个周期性信号。

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_x(\tau + T) \\ &= \delta(nT + \tau) \end{aligned}$$

其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

伪随机噪声信号作为输入信号，则有：

$$
\begin{aligned}
R_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma \\
&= \int_{0}^{T} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma + \int_{T}^{2T} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma + \cdots \\
&= \int_{0}^{T} g(\sigma)K\delta(\tau-\sigma)d\sigma + \int_{T}^{2T} g(\sigma)K\delta(T+\tau-\sigma)d\sigma \\
&\quad + \cdots \\
&= Kg(\tau) + Kg(\tau+T) + Kg(\tau+2T) + \cdots
\end{aligned}
$$

伪随机噪声辨识脉冲响应: 计算 $g(\tau)$

选择适当的截断周期，使 $g(\tau)$ 在 $\tau < T$ 时已衰减至零。则：

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= Kg(\tau) + 0 \\ &= Kg(\tau) \\ g(\tau) &= R_{xy}(\tau)/K \end{aligned}$$

得到了与白噪声作为输入的相同辨识结果。

计算 $R_x(\tau), R_{xy}(\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT}\int_0^{nT}x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{nT}\int_0^{T}x(t)x(t+\tau)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T}x(t)x(t+\tau)dt \\
R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}g(\sigma)\left[\frac{1}{T}\int_0^{T}x(t)x(t+\tau-\sigma)dt\right]d\sigma \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T}x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(\sigma)x(t+\tau-\sigma)d\sigma\right]dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T}x(t)y(t+\tau)dt
\end{aligned}
$$

可见计算 $R_{xy}(\tau)$ 只需计算一个周期即可。

离散白噪声

连续白噪声等间隔采样而成的随机序列。具有连续白噪声相同的统计特性，即

$$E(x_i x_j) = \begin{cases} \sigma^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

其中 $i, j = 1, 2, 3, \cdots$

离散二位式白噪声

离散随机变量取值只有两种数值。序列中元素一般取为 1 和 -1

例：某离散二位式噪声

1111-1-1-11-1-111-11-1 $\cdots$

主要性质:

- -1 和 1 出现的次数相等；
- 总游程 (状态“1”和“-1”连续出现的段叫游程) 数为 (N+1)/2, 且 -1 和 1 出现的游程相等，最多相差 1 个。(N 为序列长度)
- 其自相关函数为

$$R_{xx}(\tau)=\begin{cases}1 & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases}$$

M 序列的特点

实际工程上，常用 M 序列来代替白噪声输入信号。来辨识系统的脉冲响应序列。M 序列的特点：

- 伪随机二位式序列；
- M 序列的数字特征与白噪声相似；
- 确定性序列；
- 工程上可以方便地重复产生。

M 序列的产生方法及其性质

M 序列：将离散二位式噪声序列截断后，构造出的伪随机序列。显著特点：

- M 序列是一个确定性序列，可重复产生；
- M 序列具有与离散二位式白噪声相似的性质。

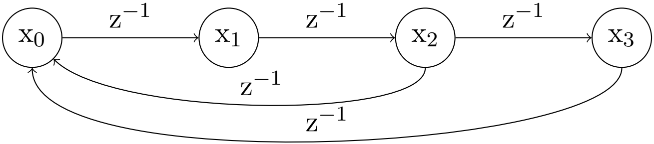
产生方法：工程上产生 M 序列采用移位寄存器方法。

$$
\begin{aligned}
x_0(k+1) &= a_0x_0(k) \oplus a_1x_1(k) \oplus \cdots \oplus a_nx_n(k) \\
x_1(k+1) &= x_0(k) \\
&\cdots \\
x_n(k+1) &= x_{n-1}(k)
\end{aligned}
$$

产生伪随机序列条件：各寄存器初始状态不全为零。

M 序列的产生方法及其性质

例：



$$
\begin{aligned}
x_0(k+1) &= x_2(k) \oplus x_3(k) \\
x_1(k+1) &= x_0(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k) \\
x_3(k+1) &= x_2(k)
\end{aligned}
$$

取初始状态全为 1，则各寄存器状态为

x0: 100010011010111
x1: 110001001101011
x2: 111000100110101
x3: 111100010011010

输出序列为：111100010011010 (长度 N=15)

M 序列的产生方法及其性质

若寄存器个数为 n，则有

- 周期长度 $N = 2^n - 1$;
- 总游程 $=2^{n-1}$;
- “0”出现次数为 (N-1)/2, “1”出现次数为 (N+1)/2. 相差 1 次。

二电平 M 序列及其性质

- 将 M 序列转变成电平信号，
  - “0” 取为 a，“1” 取为 -a。
  - 移位脉冲周期为 Δ，则该二电平 M 序列的周期为 $N\Delta$。
- 数字特征：在一个周期 $N\Delta$ 内，其均值 m_x 为

$$
\begin{aligned}
m_x &= \frac{1}{N\Delta}\left(\frac{N-1}{2}a\Delta - \frac{N+1}{2}a\Delta\right) = -\frac{a}{N} \\
\lim_{N\to\infty} m_x &= 0
\end{aligned}
$$

自相关函数 $R_x(\tau)$

$$
R_x\tau = \begin{cases} \dfrac{-a^2}{N} & (kN{+}1)\Delta{<}\tau{<}((k{+}1)N{-}1)\Delta \\ a^2\left[1-\dfrac{(N+1)|\tau|}{N\Delta}\right] & (kN{-}1)\Delta{<}\tau{<}(kN{+}1)\Delta \end{cases}
$$

三角脉冲分量与直流分量

$$R_x(\tau) = R_x^1(\tau) + R_x^2(\tau)$$

其中：

$R_x^2(\tau) = \frac{-a^2}{N}$ 为直流分量

$R_x^1(\tau) = R_x(\tau) - R_x^2(\tau)$ 为三角脉冲分量

当 Δ 很小时，$R_x^1(\tau)$ 可认为是脉冲函数，则有

$$\begin{aligned} R_x^1(\tau) &= \frac{N+1}{N} a^2 \Delta \delta(\tau) \\ R_x(\tau) &= \frac{N+1}{N} a^2 \Delta \delta(\tau) - \frac{a^2}{N} \end{aligned}$$

因此，M 序列具有白噪声序列的数字特性。

二电平 M 序列辨识系统的脉冲序列 $g(\tau)$: 作图法

二电平 M 序列辨识 $g(\tau)$ 有两种方法：作图法和公式法。首先介绍作图法：

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma \\
&= \int_{0^+}^{N\Delta^-} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma \\
&= \int_{0^+}^{N\Delta^-} \left[\frac{N+1}{N}a^2\Delta\delta(\tau-\sigma)-\frac{a^2}{N}\right]g(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{N+1}{N}a^2\Delta g(\tau)-\int_{0^+}^{N\Delta^-} g(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{N+1}{N}a^2\Delta g(\tau)-A
\end{aligned}
$$

其中：

$$A=\int_{0^+}^{N\Delta^-} g(\sigma)d\sigma$$

$R_{xy}(\tau)$ 可根据输入输出数据序列计算：

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} x(i)y(i+\tau)$$

只需将 $R_{xy}(\tau)$ 曲线向上平移 A，即可得 $g(\tau)$。

公式法求 $g(\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta g(\tau) - \frac{a^2}{N}\int_0^{N\Delta} g(\sigma)d\sigma \\
\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\tau)d\tau &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta\int_0^{N\Delta} g(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{a^2}{N}N\Delta\int_0^{N\Delta} g(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{\Delta a^2}{N}\int_0^{N\Delta} g(\tau)d\tau \\
R_{xy}(\tau) &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta g(\tau) - \frac{1}{\Delta}\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\sigma)d\sigma \\
g(\tau) &= \frac{N}{(N+1)\Delta a^2}\left[R_{xy}(\tau) + \frac{1}{\Delta}\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\sigma)d\sigma\right]
\end{aligned}
$$

公式法求 $g(\tau)$ 公式组

$$
\begin{aligned}
g(\tau) &= \frac{N}{(N+1)\Delta a^2} R_{xy}(\tau) + g_0 \\
g_0 &= \frac{N}{(N+1)\Delta^2 a^2} \int_0^{N\Delta} R_{xy}(\tau) d\tau \\
\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\tau) d\tau &\approx \Delta \sum_{i=0}^{N-1} R_{xy}(i) \\
R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) y(i+\tau)
\end{aligned}
$$

$g(\tau)$ 的矩阵表示

离散维纳 -霍夫方程：

$$\begin{aligned} R_{xy}(i\Delta) &= \sum_{k=0}^{N-1} \Delta g(k\Delta) R(i\Delta - k\Delta) \\ R_{xy} &= Rg\Delta \\ g &= \frac{R^{-1}R_{xy}}{\Delta} \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned} g &= [g(0), g(1), \cdots, g(N-1)]^T \\ R_{xy} &= [R_{xy}(0), R_{xy}(1), \cdots, R_{xy}(N-1)]^T \\ R &= \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x(-N+1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x(-N+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$g(\tau)$ 的矩阵表示: 计算 R^{-1}

$$
\begin{aligned}
R_x(k) &= \begin{cases} a^2 & k = 0 \\ -\frac{a^2}{N} & 1 \le k \le N-1 \end{cases} \\
R &= a^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & 1 & \cdots & -\frac{1}{N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
R^{-1} &= \frac{N}{a^2(N+1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$g(\tau)$ 的矩阵表示: 计算 R_{xy}

$$
\begin{aligned}
R_{xy} &= [R_{xy}(0), R_{xy}(1), \cdots, R_{xy}(N-1)]^T \\
&= \frac{1}{rN} XY \\
X &= \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(rN-1) \\ x(-1) & x(0) & \cdots & x(rN-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(-N+1) & x(-N+2) & \cdots & x(rN-N) \end{bmatrix} \\
Y &= \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(rN-1) \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

$g(\tau)$ 的递推算法 (在线辨识)

递推算法：假设我们得到了 $(m-1)$ 组观测数据时的辨识结果 g_{m-1}，现在又得到了一组新的观测值 (x_m, y_m)。现在讨论，就 g_{m-1} 与 (x_m, y_m) 数据来如何得到新的 $g(\tau)$ 估计值 g_m 问题。

一般递推算法的计算公式形式如下：

$$g_m = Kg_{m-1} + \tilde{g}_m$$

其中，$\tilde{g}_m$ 为从新得到的数据添加的信息。

R_{xy} 递推公式

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(i,m) &= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} y(k)x(k-i) \\
&= \frac{1}{m+1}\left[\sum_{k=0}^{m-1} y(k)x(k-i) + y(m)x(m-i)\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[mR_{xy}(i,m-1) + y(m)x(m-i)\right] \\
R_{xy}(m) &= \frac{1}{m+1}\left[mR_{xy}(m-1) + y(m)X(m)\right]
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(m) &= [R_{xy}(0), R_{xy}(1), \cdots, R_{xy}(N-1)]^T \\
X(m) &= [x(m), x(m-1), \cdots, x(m-N+1)]^T
\end{aligned}
$$

$g(\tau)$ 递推公式

$$
\begin{aligned}
g_m &= \frac{R^{-1}R_{xy}(m)}{\Delta} \\
&= \frac{R^{-1}}{\Delta}\frac{1}{m+1}\left[mR_{xy}(m-1)+y(m)X(m)\right] \\
&= \frac{mR^{-1}R_{xy}(m-1)}{(m+1)\Delta}+\frac{R^{-1}}{(m+1)\Delta}y(m)X(m) \\
&= \frac{m}{m+1}g_{m-1}+\frac{R^{-1}}{(m+1)\Delta}y(m)X(m)
\end{aligned}
$$

脉冲响应序列求 G(z)

$G(z)$ 称为系统的脉冲传递函数，是系统的离散数学模型。

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} \\
&= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}
\end{aligned}
$$

可得：

$$
\begin{aligned}
c_t + a_1 c_{t-1} + \cdots + a_n c_{t-n} &= b_0 r_t + \cdots + b_n r_{t-n} \\
g(t) + a_1 g(t-1) + \cdots + a_n g(t-n) &= b_0 \delta(t) + \cdots + b_n \delta(t-n)
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \\ g(2) & g(3) & \cdots & g(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(n) & g(n+1) & \cdots & g(2n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(n+1) \\ -g(n+2) \\ \vdots \\ -g(2n) \end{bmatrix}$$

脉冲响应序列求 G(s)

$G(s)$ 称为系统的传递函数，是系统的连续数学模型。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

若系统具有 n 个两两互不相等的闭环极点 $s_1, s_2, \cdots, s_n$.
则上式可分部因式为：

$$G(s) = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - s_n}$$

任务：已知 $\{g(i)\}$ 及 n, 求 $G(s)$ 中系数 c_i 和 s_i.

求 a_i

系统的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots b_n z^n}{1 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}$$

取 $r(t) = \delta(t)$, 则 $c(t) = g(t)$。代入上式，写成差分方程为

$$g(k) + a_1 g(k+1) + \cdots + a_n g(k+n) = 0$$

可得：

$$\begin{aligned} a_1 g(k+1) + \cdots + a_n g(k+n) &= -g(k) \\ &\cdots \\ a_1 g(k+n) + \cdots + a_n g(k+2n-1) &= -g(k+n-1) \end{aligned}$$

解上述 n 元一次方程组，可得 a_i.

求 s_i

由 G(s) 进行拉氏反变换可得:

$$g(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_n e^{s_n t}$$

所以：

$$\begin{aligned}
g(t) &= c_1 e^{s_1(t)} + c_2 e^{s_2(t)} + \ldots + c_n e^{s_n(t)} \\
g(t+\Delta) &= c_1 e^{s_1(t+\Delta)} + c_2 e^{s_2(t+\Delta)} + \ldots + c_n e^{s_n(t+\Delta)} \\
\cdots &\quad \cdots \\
g(t+n\Delta) &= c_1 e^{s_1(t+n\Delta)} + c_2 e^{s_2(t+n\Delta)} + \ldots + c_n e^{s_n(t+n\Delta)} \\
0 &= c_1 e^{s_1 t}[1 + a_1 e^{s_1\Delta} + \cdots + a_n e^{s_1 n\Delta}] \\
&\quad + c_2 e^{s_2 t}[1 + a_1 e^{s_2\Delta} + \cdots + a_n e^{s_2 n\Delta}] + \cdots \\
&\quad + c_n e^{s_n t}[1 + a_1 e^{s_n\Delta} + \cdots + a_n e^{s_n n\Delta}]
\end{aligned}$$

可得 $e^{s_i\Delta}$ 需满足的一元 n 次方程：

$$1 + a_1 e^{s_i\Delta} + a_2[e^{s_i\Delta}]^2 + \cdots + a_n[e^{s_i\Delta}]^n = 0$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n$

求 c_i

$$g(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_n e^{s_n t}$$

得：

$$\begin{aligned}
g(0) &= c_1 + c_2 + \cdots c_n \\
g(1) &= c_1 e^{s_1 \Delta} + c_2 e^{s_2 \Delta} + \cdots + c_n e^{s_n \Delta} \\
&\cdots \\
g(n-1) &= c_1 e^{s_1 (n-1)\Delta} + c_2 e^{s_2 (n-1)\Delta} + \cdots + c_n e^{s_n (n-1)\Delta}
\end{aligned}$$

求解公式

$$
\begin{bmatrix}
g(k+1) & \cdots & g(k+n) \\
g(k+2) & \cdots & g(k+n+1) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
g(k+n) & \cdots & g(k+2n-1)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -g(k) \\ -g(k+1) \\ \vdots \\ -g(k+n-1) \end{bmatrix}
$$

$$
1 + a_1 x + \cdots a_n x^n = 0
$$

$$
s_i = \frac{\ln x_i}{\Delta}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(n-1) \end{bmatrix}
$$