

西北工业大学考试试题（卷）评分标准

2018 — 2019 学年秋学期

开课学院 航天学院

课程 自动控制理论 1

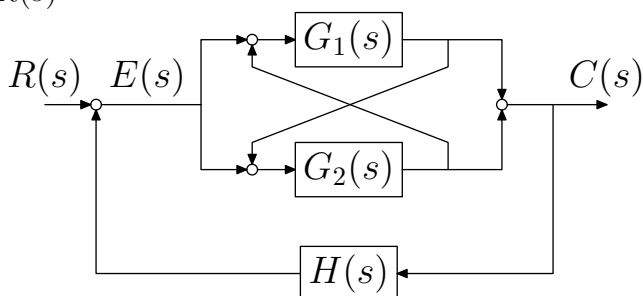
学时 48

考试日期

考试时间 小时

考试形式 $\begin{pmatrix} \text{开} \\ \text{闭} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{A} \\ \text{B} \end{pmatrix}$ 卷

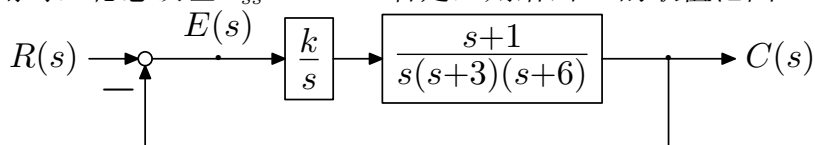
一、(20 分) 已知系统结构图如图所示。求解前向通道传递函数 $\frac{C(s)}{E(s)}$ 与系统闭环传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。



解：

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{E(s)} &= \frac{2G_1(s)G_2(s) + G_1(s) + G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} \\ \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \\ &= \frac{2G_1(s)G_2(s) + G_1(s) + G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s) - H(s)[2G_1(s)G_2(s) + G_1(s) + G_2(s)]} \end{aligned}$$

二、(20 分) 已知某系统的结构图如图所示，分析是否可选取 $k \in \mathbb{R}$ 的值，使系统在 $r(t) = t^2$ 作用时，稳态误差 $e_{ss} < 0.5$ 。若是，则给出 k 的取值范围。



解：

$$G(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{s+1}{s(s+3)(s+6)} \quad (1)$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \quad (3)$$

首先考虑系统稳定性：

$$D(s) = S^2(s+3)(s+6) + k(s+1) = s^4 + 9s^3 + 18s^2 + ks + k$$

Routh 表:

$$\begin{array}{rcl} s^4: & 1 & 18 - k \\ s^3: & 9 & k \\ s^2: & 18 - \frac{k}{9} & k \\ s^1: & k - \frac{9k}{18 - \frac{k}{9}} & \\ s^0: & k & \end{array}$$

得:

$$0 < k < 81$$

然后考虑动态指标 $e_{ss} < 0.5$:

因为:

$$R(s) = 2 \cdot \frac{1}{s^3}$$

所以:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \frac{36}{k}$$

由 $e_{ss} < 0.5$ 得:

$$k > 72$$

因此, k 的范围是:

$$72 < k < 81$$

三、(20 分) 单位负反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K^*(s+3)}{s(s+2)}$$

求使系统闭环极点的实部均小于 -2 的 K^* 范围; 证明系统非实轴上的根轨迹为圆, 并求出其圆心与半径。

解:

系统闭环传递函数为:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{K^*(s+3)}{K^*(s+3) + s(s+2)} \\ &= \frac{K^*(s+3)}{K^*(s+3) + s(s+2)} \end{aligned}$$

设 $s' = s + 2$, 将 $s = s' - 2$ 代入特征方程,

$$\begin{aligned} D(s') &= K^*(s' - 2 + 3) + (s' - 2)(s' - 2 + 2) \\ &= s'^2 + (K^* - 2)s' + K^*2 \end{aligned}$$

利用 Routh 判据可知 $K^* > 2$ 时, 闭环极点实部小于 -2 。

设 $s = x + yi$, 代入特征方程, 得:

$$K^*(x + yi + 3) + (x + yi)(x + yi + 1) = 0$$

$$K^*(x+3) + x(x+1) - y^2 + K^*yi + xyi + (x+1)yi = 0$$

实部、虚部分别为 0, 得:

$$K^*(x+3) + x(x+1) - y^2 = 0$$

$$K^*y + xy + (x+1)y = 0$$

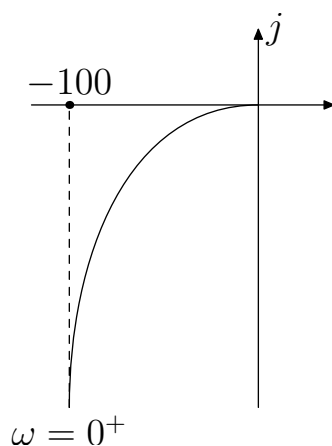
消去 K^* 得:

$$(2x+1)(x+3) - x(x+1) + y^2 = 0$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 3$$

可知, 根轨迹为圆, 圆心 $(-3, 0)$, 半径 $\sqrt{3}$ 。

四、(20 分) 设单位负反馈系统开环传递函数的 Nyquist 曲线如图所示, 且当系统在输入 $r(t) = 2t$ 下测得其稳态误差为 0.2。求解系统的闭环传递函数; 求解系统的截止频率、相角裕度。



解:

由图可知系统为 I 型系统, 且当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $\angle(G(j\omega)) = -180^\circ$; 可设系统开环传递函数为: $G(s) = \frac{k}{s(s+a)}$ 。

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} = \frac{2a}{k} = 0.2$$

由图知, 当 $\omega \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \Re[G(j\omega)] &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \Re\left[\frac{k}{j\omega(j\omega+a)}\right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \Re\left[\frac{k(-\omega^2 - ja\omega)}{\omega^4 + a^2\omega^2}\right] \\ &= -\frac{k}{a^2} \\ &= -100 \end{aligned}$$

可得 $k = 1, a = 0.1$, 所以开环传递函数:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0.1)}$$

闭环传递函数：

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} \\ &= \frac{1}{s^2 + 0.1s + 1}\end{aligned}$$

截止频率：

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\omega_c(\omega_c + 0.1)} \right| &= 1 \\ \left| \frac{1}{\omega_c^2} \right| &\approx 1 \\ \omega_c &\approx 1\end{aligned}$$

由 Nyquist 图可知，幅值裕度：

$$h = \infty$$

相角裕度：

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ - \angle \omega_c j - \angle(\omega_c j + 0.1) \\ &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 10 \\ &= 90^\circ - \arctan(10) \\ &= \arctan\left(\frac{1}{10}\right)\end{aligned}$$

五、(20 分) 已知控制系统模型如下：

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -3u(t) + ke(t) \\ \dot{c}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -3v(t) - 2c(t) + u(t) \\ e(t) &= r(t) - c(t)\end{aligned}$$

求系统闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ ，其中 $C(s) = \mathcal{L}[c(t)]$, $R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$ ；分析是否可改变 k 值使闭环系统稳定，若是，则给出 $k \in \mathbb{R}$ 的取值范围；分析是否可改变 k 的值使闭环系统阶跃响应超调量为 0，若是，则给出 $k \in \mathbb{R}$ 的取值范围。

答：由系统微分方程组可得：

$$\begin{aligned}sU(s) &= -3U(s) + kE(s) \\ sC(s) &= V(s) \\ sV(s) &= -3V(s) - 2C(s) + U(s) \\ E(s) &= R(s) - C(s)\end{aligned}$$

解得：

$$G(s) = \frac{k}{(s+3)(s^2+3s+2)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\
 \Phi(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)} \\
 &= \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)+k}
 \end{aligned}$$

系统闭环传递函数:

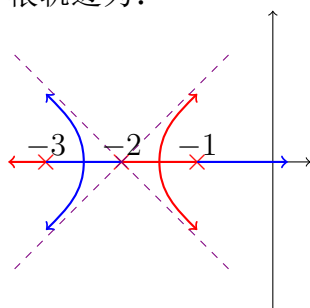
$$\Phi(s) = \frac{k}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + k}$$

Routh 表:

$$\begin{array}{ccc}
 s^3 & 1 & 11 \\
 s^2 & 6 & 6+k \\
 s^1 & 10-\frac{k}{6} & \\
 s^0 & 6+k &
 \end{array}$$

可知, 当 $-6 < k < 60$ 时, 系统稳定。

根轨迹为:



计算分离点, 由

$$\frac{d}{ds}(k + (s+1)(s+2)(s+3)) = 0$$

得

$$\lambda = -2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

分别将其代入特征方程, 可得:

$$\begin{cases} k = \frac{2}{3\sqrt{3}} & (\lambda = -2 + \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ k = -\frac{2}{3\sqrt{3}} & (\lambda = -2 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases}$$

因此, 当 $-\frac{2}{3\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时, 闭环系统根位于实轴负半轴, 即系统超调量为 0。