线性离散系统分析

信号采样与保持

Outline

1. 信号的采样
2. 采样函数 Laplace 变换性质
3. 信号的保持

Topic

1. 信号的采样
2. 采样函数 Laplace 变换性质
3. 信号的保持

采样信号

- 若采样开关为理想采样开关，则有：

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

其中 $\delta_T(t)$ 为理想单位脉冲序列：

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 得：

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t)\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT) \end{aligned}$$

采样信号

- 若采样开关为理想采样开关, 则有:

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

其中 $\delta_T(t)$ 为理想单位脉冲序列:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 得:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t)\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) \end{aligned}$$

采样信号

- 若采样开关为理想采样开关, 则有:

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

其中 $\delta_T(t)$ 为理想单位脉冲序列:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 得:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t)\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT) \end{aligned}$$

采样信号的 Laplace 变换

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^*(t)) &= \mathcal{L}(\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\mathcal{L}(\delta(t-nT)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs}
\end{aligned}
$$

采样信号的频谱分析

- 将 $\delta_T(t)$ 以 Fourier 级数表示, 得:

$$
\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \\
C_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \\
\omega_s &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}
$$

采样信号的频谱分析

- 将 $\delta_T(t)$ 以 Fourier 级数表示, 得:

$$
\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \\
C_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \\
\omega_s &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}
$$

采样信号的频谱分析 (续)

- 采样

$$
\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\
e^*(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t)e^{jn\omega_s t} \\
E^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s+jn\omega_s) \\
E^*(j\omega) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega+n\omega_s))
\end{aligned}
$$

- $e^*(t)$ 的频谱为以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和.
- 设 $e(t)$ 带宽有限, 最高角频率为 ω_h, 则当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时, $e^*(t)$ 频谱的各部分不会相互重叠.

采样信号的频谱分析 (续)

- 采样

$$
\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\
e^*(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t)e^{jn\omega_s t} \\
E^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s+jn\omega_s) \\
E^*(j\omega) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega+n\omega_s))
\end{aligned}
$$

- $e^*(t)$ 的频谱为以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和.
- 设 $e(t)$ 带宽有限, 最高角频率为 ω_h, 则当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时, $e^*(t)$ 频谱的各部分不会相互重叠.

采样信号的频谱分析 (续)

- 采样

$$
\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\
e^*(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t)e^{jn\omega_s t} \\
E^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s+jn\omega_s) \\
E^*(j\omega) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega+n\omega_s))
\end{aligned}
$$

- $e^*(t)$ 的频谱为以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和.
- 设 $e(t)$ 带宽有限, 最高角频率为 ω_h , 则当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时, $e^*(t)$ 频谱的各部分不会相互重叠.

Nyquist-Shannon sampling theorem

- 若采样器的输入信号 $e(t)$ 只有有限带宽，且其最高频率分量为 ω_h，
- 当采样周期满足

$$T \le \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

则信号 $e(t)$ 可以完全从 $e^*(t)$ 中恢复出来.

Nyquist-Shannon sampling theorem

- 若采样器的输入信号 $e(t)$ 只有有限带宽, 且其最高频率分量为 ω_h ,
- 当采样周期满足

$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

则信号 $e(t)$ 可以完全从 $e^*(t)$ 中恢复出来.

Nyquist-Shannon sampling theorem

- 若采样器的输入信号 $e(t)$ 只有有限带宽, 且其最高频率分量为 ω_h ,
- 当采样周期满足

$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

则信号 $e(t)$ 可以完全从 $e^*(t)$ 中恢复出来.

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
  - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c, 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
  - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
  - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c, 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
  - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
  - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c, 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
  - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}$, $T = \frac{t_s}{40}$

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
  - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
  - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
  - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
  - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

Topic

1 信号的采样

2 采样函数 Laplace 变换性质

3 信号的保持

采样函数 Laplace 变换性质:$G^*(s) = G^*(s+jk\omega_s)$

- 证明:

$$
\begin{aligned}
G^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s+jn\omega_s) \\
G^*(s+jk\omega_s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s+j(n+k)\omega_s) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s+jn\omega_s) \\
&= G^*(s)
\end{aligned}
$$

采样函数 Laplace 变换性质:$G^*(s) = G^*(s + jk\omega_s)$

- 证明:

$$
\begin{aligned}
G^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\
G^*(s + jk\omega_s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + j(n+k)\omega_s) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\
&= G^*(s)
\end{aligned}
$$

采样函数 Laplace 变换性质:$[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$

- 证明

$$
\begin{aligned}
[G(s)E^*(s)]^* &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G(s+jn\omega_s)E^*(s+jn\omega_s)] \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G(s+jn\omega_s)E^*(s)] \\
&= (\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(s+jn\omega_s))E^*(s) \\
&= G^*(s)E^*(s)
\end{aligned}
$$

采样函数 Laplace 变换性质:$[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$

- 证明

$$
\begin{aligned}
[G(s)E^*(s)]^* &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G(s+jn\omega_s)E^*(s+jn\omega_s)] \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G(s+jn\omega_s)E^*(s)] \\
&= (\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(s+jn\omega_s))E^*(s) \\
&= G^*(s)E^*(s)
\end{aligned}
$$

Topic

1 信号的采样

2 采样函数 Laplace 变换性质

3 信号的保持

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT+\Delta t) = a_0 + a_1\Delta t + a_2(\Delta t)^2 + \cdots + a_m(\Delta t)^m$$

  式中 $a_0, \cdots, a_m$ 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0,\cdots,m)$ 惟一确定.
- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT+\Delta t) = a_0 + a_1\Delta t + a_2(\Delta t)^2 + \cdots + a_m(\Delta t)^m$$

  式中 $a_0, \cdots, a_m$ 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0,\cdots,m)$ 惟一确定.
- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT+\Delta t)=a_0+a_1\Delta t+a_2(\Delta t)^2+\cdots+a_m(\Delta t)^m$$

式中 $a_0,\cdots,a_m$ 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T),(i=0,\cdots,m)$ 惟一确定.

- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT+\Delta t) = a_0 + a_1\Delta t + a_2(\Delta t)^2 + \cdots + a_m(\Delta t)^m$$

式中 $a_0, \cdots, a_m$ 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0,\cdots,m)$ 惟一确定.

- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT+\Delta t) = a_0 + a_1\Delta t + a_2(\Delta t)^2 + \cdots + a_m(\Delta t)^m$$

式中 $a_0, \cdots, a_m$ 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0,\cdots,m)$ 惟一确定.

- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

零阶保持器

- $e(nT+\Delta t)=a_0$，当 $\Delta t=0$ 时, 有 $e(nT)=a_0$，即: 按常值外推, $e(t)=e(nT), t\in[nT,(n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为 $r^*(t)=\delta(t)$，则输出为 $e(t)=1, t\in[nT,(n+1)T)$ 因此

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(r^*) &= 1 \\
\mathcal{L}(e) &= \frac{1}{s}-\frac{e^{-Ts}}{s} \\
G_h(s) &= \frac{E(s)}{R^*(s)}=\frac{1-e^{-Ts}}{s} \\
G_h(j\omega) &= \frac{1-e^{-jT\omega}}{j\omega}=\frac{e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2})}{j\omega} \\
&= \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}e^{-j\omega T/2} \\
&= \frac{2\sin\frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\omega}e^{-j\pi\omega/\omega_s}
\end{aligned}
$$

零阶保持器

- $e(nT+\Delta t)=a_0$，当 $\Delta t=0$ 时，有 $e(nT)=a_0$，即：按常值外推，$e(t)=e(nT), t\in[nT,(n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为 $r^*(t)=\delta(t)$，则输出为 $e(t)=1, t\in[nT,(n+1)T)$ 因此

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(r^*) &= 1\\
\mathcal{L}(e) &= \frac{1}{s}-\frac{e^{-Ts}}{s}\\
G_h(s) &= \frac{E(s)}{R^*(s)}=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\\
G_h(j\omega) &= \frac{1-e^{-jT\omega}}{j\omega}=\frac{e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2})}{j\omega}\\
&= \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}e^{-j\omega T/2}\\
&= \frac{2\sin\frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\omega}e^{-j\pi\omega/\omega_s}
\end{aligned}
$$

零阶保持器

- $e(nT+\Delta t)=a_0$，当 $\Delta t=0$ 时，有 $e(nT)=a_0$，即：按常值外推，$e(t)=e(nT), t\in[nT,(n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为 $r^*(t)=\delta(t)$，则输出为 $e(t)=1, t\in[nT,(n+1)T)$ 因此

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(r^*) &= 1\\
\mathcal{L}(e) &= \frac{1}{s}-\frac{e^{-Ts}}{s}\\
G_h(s) &= \frac{E(s)}{R^*(s)}=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\\
G_h(j\omega) &= \frac{1-e^{-jT\omega}}{j\omega}=\frac{e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2})}{j\omega}\\
&= \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}e^{-j\omega T/2}\\
&= \frac{2\sin\frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\omega}e^{-j\pi\omega/\omega_s}
\end{aligned}
$$

零阶保持器频率特性

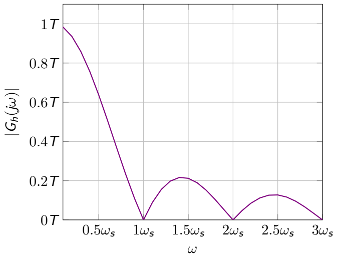
Bode 图

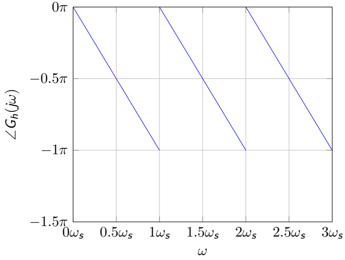
零阶保持器特性

- 低通滤波
- 相角迟后
- 时间延迟

零阶保持器频率特性

Bode 图



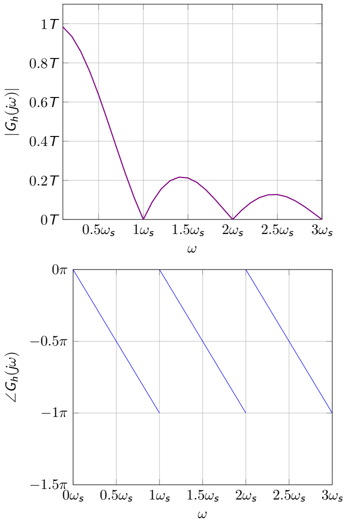


零阶保持器特性

- 低通滤波
- 相角迟后
- 时间延迟

零阶保持器频率特性

Bode 图



零阶保持器特性

- 低通滤波
- 相角迟后
- 时间延迟

一阶保持器

$$
\begin{aligned}
e(nT+\Delta t) &= a_0 + a_1\Delta t, \qquad (0 \le \Delta t < T) \\
a_0 &= e(nT) \\
a_1 &= \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T} \\
G_h(s) &= T(1+s)\left(\frac{1-e^{-Ts}}{Ts}\right)^2 \\
G_h(j\omega) &= \sqrt{1+(\omega T)^2}\left(\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}\right)^2 e^{-j(\omega T - \arctan\omega T)}
\end{aligned}
$$

- 高频噪声增大
- 因此一般只用零阶保持器.

一阶保持器

$$
\begin{aligned}
e(nT+\Delta t) &= a_0 + a_1\Delta t, \qquad (0 \le \Delta t < T) \\
a_0 &= e(nT) \\
a_1 &= \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T} \\
G_h(s) &= T(1+s)\left(\frac{1-e^{-Ts}}{Ts}\right)^2 \\
G_h(j\omega) &= \sqrt{1+(\omega T)^2}\left(\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}\right)^2 e^{-j(\omega T - \arctan\omega T)}
\end{aligned}
$$

- 高频噪声增大
- 因此一般只用零阶保持器.

一阶保持器

$$
\begin{aligned}
e(nT+\Delta t) &= a_0 + a_1\Delta t, \qquad (0 \le \Delta t < T)\\
a_0 &= e(nT)\\
a_1 &= \frac{e(nT)-e((n-1)T)}{T}\\
G_h(s) &= T(1+s)\left(\frac{1-e^{-Ts}}{Ts}\right)^2\\
G_h(j\omega) &= \sqrt{1+(\omega T)^2}\left(\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}\right)^2 e^{-j(\omega T-\arctan\omega T)}
\end{aligned}
$$

- 高频噪声增大
- 因此一般只用零阶保持器.