线性系统时域分析法

Outline

Contents

1 动态性能分析 **1**
1.1 一阶系统动态性能 2
1.2 二阶系统时域分析 3
1.3 二阶系统阶跃响应指标计算 5
1.4 二阶系统单位斜坡响应 7
1.5 高阶系统时域分析（3 阶及以上系统） 8

2 稳定性分析 **9**
2.1 稳定性的概念 9
2.2 古尔维茨判据及劳斯判据 10
2.3 劳斯判据示例 12
2.4 劳斯判据应用中的特殊情况 12
2.5 劳斯判据求解系统参数 13
2.6 相对稳定性 14

3 稳态误差 **15**
3.1 误差传递函数 15
3.2 系统类型与静态误差系数 17
3.3 动态误差系数 21
3.4 减小稳态误差的措施 25

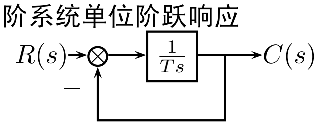
4 示例 **26**
4.1 速度反馈 26
4.2 比例 -微分控制 28
4.3 比例 -积分控制 31

1 动态性能分析

分析 $\sigma\%, t_s$ 等指标, $r(t) = 1, R(s) = \frac{1}{s}$

1.1 一阶系统动态性能

一阶系统单位阶跃响应



$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{Ts} \\
\Phi(s) &= \frac{1}{Ts+1} \\
R(s) &= \frac{1}{s} \\
C(s) &= \Phi(s)R(s) \\
&= \frac{-T}{Ts+1} + \frac{1}{s} \\
c(t) &= 1 - e^{-t/T}
\end{aligned}$$

一阶系统单位脉冲响应

$$\begin{aligned}
R(s) &= 1 \\
C(s) &= \Phi(s)R(s) \\
&= \Phi(s) \\
&= \frac{1}{Ts+1} \\
c(t) &= \frac{1}{T}e^{-t/T}
\end{aligned}$$

一阶系统单位斜坡响应

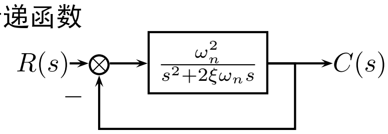
$$\begin{aligned}
R(s) &= \frac{1}{s^2} \\
C(s) &= \Phi(s)R(s) \\
&= \frac{1}{(Ts+1)s^2} \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \\
c(t) &= (t-T) + Te^{-t/T}
\end{aligned}$$

一阶系统单位加速度响应

$$
\begin{aligned}
R(s) &= \frac{1}{s^3} \\
C(s) &= \Phi(s)R(s) \\
&= \frac{1}{(Ts+1)s^3} \\
&= \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^3}{sT+1} \\
c(t) &= \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-t/T})
\end{aligned}
$$

1.2 二阶系统时域分析

传递函数



- ξ: 阻尼比
- ω_n: 自然频率, 无阻尼振荡频率

$$
\begin{aligned}
r(t) &= 1 \\
R(s) &= \frac{1}{s} \\
G(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s} \\
\Phi(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\
p_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}
\end{aligned}
$$

$\xi \leq 0$

- $\xi < 0$ 时有正实根, 不稳定
- $\xi = 0$ 时有两个纯虚根, 无阻尼, 临界稳定, 等幅振荡, 频率为 ω_n,

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \\
&= \frac{-s}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{1}{s} \\
c(t) &= 1 - \cos\omega_n t
\end{aligned}
$$

$\xi > 1$

系统闭环极点为两个不同的实根. 过阻尼, 相当于两个一阶系统并联, $\sigma\% = 0$

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)} \\
&= \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} \\
c(t) &= 1 - \frac{e^{p_1 t}}{1-\frac{p_1}{p_2}} - \frac{e^{p_2 t}}{1-\frac{p_2}{p_1}}
\end{aligned}$$

$\xi = 1$

- 闭环极点有两个相同的负实根 $p_{1,2} = -\xi\omega_n = -\omega_n$

$$\begin{aligned}
C(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2} \\
c(t) &= 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}
\end{aligned}$$

- 且有:

$$\begin{aligned}
\frac{dc(t)}{dt} &= \omega_n e^{-\omega_n t} + \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} - \omega_n e^{-\omega_n t} > 0 \\
c(0) &= 0 \\
c(\infty) &= 1 \\
\sigma\% &= 0 \\
t_s &= 4.75T \qquad T = \frac{1}{\omega_n}
\end{aligned}$$

$0 < \xi < 1$

系统有一对实部小于零的共轭复根, $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\begin{aligned}
C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s} + \frac{p_2}{(p_1-p_2)(s-p_1)} + \frac{p_1}{(p_2-p_1)(s-p_2)}
\end{aligned}$$

$0 < \xi < 1$

$$c(t) = 1 + \frac{p_2}{p_1-p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2-p_1} e^{p_2 t}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+2\Re\left[\frac{p_2}{p_1-p_2}e^{p_1 t}\right] \\
&= 1+2\Re\left[\frac{-\omega_n e^{j\beta}}{2j\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}e^{j\omega_d t}\right] \\
&= 1-e^{-\xi\omega_n t}\Re\left[\frac{\omega_n}{j\omega_d}e^{j(\omega_d t+\beta)}\right] \\
&= 1-\frac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta) \\
\beta &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \qquad \omega_d=\sqrt{1-\xi^2}\omega_n
\end{aligned}
$$

1.3 二阶系统阶跃响应指标计算

二阶欠阻尼系统阶跃响应指标

$$
c(t) = 1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta)
$$

- 欠阻尼. ω_d 称为有阻尼振荡频率. 最佳阻尼比 $\xi = 0.707$
- 指标: $\sigma\%, t_s, t_p, t_r$ 等

上升时间 t_r

- 100% 的 t_r : $c(t)$ 首次达到 $c(\infty)$ 的时间
- 90% 的 t_r : $c(t)$ 首次达到 $90\%c(\infty)$ 的时间
- 70% 的 t_r : $c(t)$ 首次达到 $70\%c(\infty)$ 的时间

$$
\begin{aligned}
c(t) &= c(\infty) \\
1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta) &= 1 \\
sin(\omega_d t+\beta) &= 0 \\
\omega_d t+\beta &= k\pi \\
t_r &= \frac{\pi-\beta}{\omega_d}
\end{aligned}
$$

峰值时间 t_p

$c(t)$ 达到最大值的时间

$$\begin{aligned}
\frac{dc(t)}{dt} &= 0 \\
-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta)+e^{-\xi\omega_n t}\omega_d\cos(\omega_d t+\beta) &= 0 \\
\omega_d\cos(\omega_d t+\beta) &= \xi\omega_n\sin(\omega_d t+\beta) \\
\tan(\omega_d t+\beta) &= \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \\
\tan(\omega_d t+\beta) &= \tan\beta \\
\omega_d t &= k\pi \\
t_p &= \frac{\pi}{\omega_d}
\end{aligned}$$

超调量 $\sigma\%$

$$\begin{aligned}
\sigma\% &= \frac{c_{max}-c(\infty)}{c(\infty)}\times 100\% = (c(t_p)-1) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t_p}\sin(\omega_d t_p+\beta) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi\omega_n\pi}{\omega_d}}\sin(\pi+\beta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\sin(\beta) \\
&= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\%
\end{aligned}$$

分析:

- $\sigma\%$ 只与 ξ 有关, 两者成反比关系
- 工程上一般取 $\xi \in [0.4, 0.8]$
- 最佳阻尼比 $\xi = 0.707, \sigma\% = 4.3\%$

调节时间 t_s

近似估算:

$$c(t) = 1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\beta)$$

$$
\begin{aligned}
&\approx 1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t} \\
e(t) &= c(\infty)-c(t) \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}
\end{aligned}
$$

- t_s 与 ω_n,ξ 有关: 通常取 $\xi\omega_n t_s = 3.5, t_s = \frac{3.5}{\xi\omega}$

二阶过阻尼系统阶跃响应指标

- $\sigma\% = 0$
- $\xi = 1$ 时,
$$t_s = \frac{4.75}{\omega_n}$$
- $\xi > 1, |p_1| \ll |p_2|$ 时, 系统降阶, 去掉极点 p_2 ,
$$t_s = \frac{3}{|p_1|}$$

1.4 二阶系统单位斜坡响应

欠阻尼单位斜坡响应

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} \\
&= \frac{1}{s^2}-\frac{2\xi}{\omega_n s}+\frac{2\xi(s+\xi\omega_n)+\omega_n(2\xi^2-1)}{\omega_n(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} \\
c(t) &= t-\frac{2\xi}{\omega_n}+\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+2\beta) \\
e(t) &= \frac{2\xi}{\omega_n}\left[1-\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+2\beta)\right]
\end{aligned}
$$

临界阻尼单位斜坡响应

$$
\begin{aligned}
c(t) &= t-\frac{2}{\omega_n}+\frac{2}{\omega_n}(1+\frac{1}{2}\omega_n t)e^{-\omega_n t} \\
e(t) &= \frac{2}{\omega_n}\left[1-(1+\frac{1}{2}\omega_n t)e^{-\omega_n t}\right]
\end{aligned}
$$

过阻尼单位斜坡响应

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{2\xi}{\omega_n s} + \frac{2\xi(s+\xi\omega_n)+\omega_n(2\xi^2-1)}{\omega_n(s-p_1)(s-p_2)} \\
p_1 &= -\omega_n\xi + \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \\
p_2 &= -\omega_n\xi - \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \\
c(t) &= t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{2\xi^2-1+2\xi\sqrt{\xi^2-1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}e^{p_1 t} \\
&\quad - \frac{2\xi^2-1-2\xi\sqrt{\xi^2-1}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}e^{p_2 t}
\end{aligned}
$$

1.5 高阶系统时域分析（3 阶及以上系统）

三阶系统

- 根的几种情况
  - 3 个负实根 p_1, p_2, p_3
  - 1 个负实根, 一对共轭复根

$$-s_0, -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, (0<\xi<1)$$

- 重点考虑有复根的情况.

三阶系统 ($\Phi(s)$) 单位阶跃响应 ($C(s)$)

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{s_0\omega_n^2}{(s+s_0)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} \\
C(s) &= \frac{s_0\omega_n^2}{s(s+s_0)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)} \\
c(t) &= 1 - \frac{e^{-s_0 t}}{b\xi^2(b-2)+1} - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{b\xi^2(b-2)+1} \\
&\quad \left(b\xi^2(b-2)\cos\omega_d t + \frac{b\xi(\xi^2(b-2)+1)}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t \right) \\
\omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\
b &= \frac{s_0}{\xi\omega_n}
\end{aligned}
$$

b 对 $c(t)$ 的影响

- 复根比实根离虚轴近得多

$$\begin{aligned} b &\gg 1 \\ c(t) &\approx 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right) \end{aligned}$$

  近似看作 2 阶欠阻尼系统.

- 实根比复根离虚轴近得多

$$\begin{aligned} b &\approx 0 \\ c(t) &\approx 1 - e^{-s_0 t} \end{aligned}$$

  近似看作 1 阶系统

- 实根与复根与虚轴距离同

$$\begin{aligned} b &\approx 1 \\ c(t) &\approx 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{1-\xi^2}\left(1 + \xi\sin(\omega_d t - \beta)\right) \end{aligned}$$

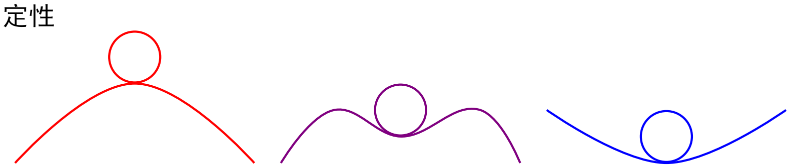
主导极点法

- 目的: 分析高阶系统的性能
- 内容: 系统有多个极点, 其中某些极点决定了整个系统的性能, 对系统起主导作用, 称这些极点为主导极点.
- 确定方法: 主导极点离虚轴距离为 a , 其它极点离虚轴距离 $\geq 5a$

2 稳定性分析

2.1 稳定性的概念

稳定性



定义: 系统处于平衡状态时, 若有干扰使系统偏离平衡状态, 当扰动消除后, 系统仍能回到原来的平衡状态, 则称该系统是稳定的, 反之称为不稳定.

稳定的充要条件

- 系统的传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_g \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

- 设系统输入为单位脉冲信号: $r(t)=\delta(t), R(s)=1$

$$\begin{aligned} C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{k_g \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \\ &= k_g \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{s-p_j} \\ c(t) &= k_g \sum_{j=1}^{n} k_j e^{p_j t} \end{aligned}$$

- 当 $\Re(p_j)<0$ 时, 有 $\lim_{t\to\infty} c(t)=0$
- 稳定性充要条件: 系统的闭环极点均具有负实部

2.2 古尔维茨判据及劳斯判据

特征多项式

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{M(s)}{N(s)} \\ M(s) &= b_o s^m + \cdots + b_n \\ N(s) &= a_0 s^n + \cdots + a_n \end{aligned}$$

其中:

- $N(s)$ 称为特征多项式
- $N(s)=0$ 称为特征方程 (只与 $a_0,\cdots,a_n$ 有关)

古尔维茨判据 (代数判据):

- 稳定的必要条件: 特征多项式中各项系数大于零.
- 稳定的充要条件: 特征多项式中各项系数所构成的主行列式及顺序主子式全部大于零.

- 主行列式:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

- 顺序主子式有 n-1 个: $\Delta_1, \cdots, \Delta_{n-1}$
- 李纳德 -戚帕特判据: 若所有奇次古尔维茨行列式为正, 则偶次古尔维茨行列式必为正, 反之亦然

劳斯 -古尔维茨判据, 简称劳斯判据

- 构造劳斯表判断系统是否稳定

$$\begin{array}{ccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ s^{n-2} & c_1 = \frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} & c_2 = \frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1} & \cdots & \\ s^{n-3} & d_1 = \frac{c_1a_3-a_1c_2}{c_1} & d_2 = \frac{c_1a_5-a_1c_3}{c_1} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \\ s^0 & a_n & & & \end{array}$$

- 劳斯判据:
  - 系统稳定的充要条件: 劳斯表中第一列元素均大于零
  - 若第一列元素有小于零的, 则系统不稳定, 且正实部根的个数等于第一列元素变号的次数.

劳斯表与多项式除法

$$\begin{array}{ccccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ s^{n-2} & c_1 = a_2 - \frac{a_0a_3}{a_1} & c_2 = a_4 - \frac{a_0a_5}{a_1} & \cdots & \\ s^{n-3} & d_1 = a_3 - \frac{a_1c_2}{c_1} & d_2 = a_5 - \frac{a_1c_3}{c_1} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \\ s^0 & a_n & & & \end{array}$$

即:

$$a_0s^n + a_2s^{n-2} + \cdots = s\frac{a_0}{a_1}(a_1s^{n-1} + a_3s^{n-3} + \cdots) + c_1s^{n-2} + c_2s^{n-4} + \cdots$$

$$c_1s^{n-2} + c_2s^{n-4} + \cdots = s\frac{c_1}{d_1}(d_1s^{n-3} + d_2s^{n-5} + \cdots) + \cdots$$

2.3 劳斯判据示例

Routh 判据示例 1: $3s^4+10s^3+5s^2+s+2=0$

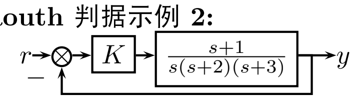
解:

- 劳斯表:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 3 & 5 & 2 \\ s^3 & 10 & 1 & \\ s^2 & 4.7 & 2 & \\ s^1 & -\frac{15.3}{4.7} & & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

- 结论 系统不稳定, 有 2 个不稳定根.

Routh 判据示例 2:



求使系统稳定的 K 的范围

解:

- 传递函数

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \\ \Phi(s) &= \frac{K(s+1)}{s^3+5s^2+(6+K)s+K} \end{aligned}$$

- 劳斯表:

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 6+K \\ s^2 & 5 & K \\ s^1 & \frac{30+4K}{5} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

稳定条件:

$$\begin{aligned} 30+4K &> 0 \\ K &> 0 \end{aligned}$$

得: $K>0$

2.4 劳斯判据应用中的特殊情况

Routh 表特殊情况: 第一列元素有零元, 系统不稳定:

- 先用 ϵ 代替, 再令 $\epsilon\to 0$
- 系统升阶: $(s+a)D(s), a>0$

- 例: 系统特征方程: $D(s)=s^4+2s^3+s^2+2s+1=0$ 判断系统的稳定性, 求出正实部根的个数.
- Roth 表:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 2 & 2 & \\ s^2 & 0(\epsilon) & 1 & \\ s^1 & \frac{2\epsilon-2}{\epsilon} & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

- $(s+1)D(s)=s^5+3s^4+3s^3+3s^2+3s+1$

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 3 & 3 \\ s^4 & 3 & 3 & 1 \\ s^3 & 2 & \frac{8}{3} & \\ s^2 & -1 & 1 & \\ s^1 & \frac{14}{3} & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

特殊情况: 全行为零时:

- 全零行的数值由上一行求导代替
- 辅助方程: 全零行的上一行可构成辅助方程, 辅助方程的解全部为系统特征根
- 例: $D(s)=s^4+5s^3+5s^2-5s-6$ 求系统不稳定根的个数
- Routh 表

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 5 & -6 \\ s^3 & 5 & -5 & \\ s^2 & 6 & -6 & \\ s^1 & 0(12) & 0 & \\ s^0 & -6 & & \end{array}$$

- 辅助方程
  - 对 $6s^2-6$ 求导得 $12s$
  - 辅助方程 $6s^2-6=0$, 得 $s_{1,2}=\pm1$ 系统不稳定根为1

2.5 劳斯判据求解系统参数

例: $D(s)=s^4+2s^3+ks^2+s+2$ **求** K **值稳定范围**

解:

- Routh 表

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & K & 2 \\ s^3 & 2 & 1 & \\ s^2 & \frac{2K-1}{2} & 2 & \\ s^1 & 1-\frac{8}{2K-1} & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2K-1 &> 0 \\ 1-\frac{8}{2K-1} &> 0 \end{aligned}$$

得: $K > \frac{9}{2}$

- 当 $K = \frac{9}{2}$ 时: Routh 表:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 4.5 & 2 \\ s^3 & 2 & 1 & \\ s^2 & 4 & 2 & \\ s^1 & 0(8) & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

其中辅助方程为 $4s^2+2=0$, 可解得 $s = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}j$

例: $D(s) = Ts^3 + s^2 + K = 0$

- Routh 表

$$\begin{array}{lll} s^3 & T & 0 \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & -TK & \\ s^0 & K & \end{array}$$

- 无解

$$\begin{aligned} T &> 0 \\ K &> 0 \\ TK &< 0 \end{aligned}$$

2.6 相对稳定性

例:$D(s) = s^3 + 5.5s^2 + 8.5s + 3$

- 判断系统是否具有相对稳定性:$\sigma = 1$

解:

- Routh 表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 8.5 \\ s^2 & 5.5 & 3 \\ s^1 & 8.5-\frac{3}{5.5} & 0 \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

- 将 $s=z-\sigma$ 代入 $D(s)$ 中 得 $D(z)=z^3+2.5z^2+0.5z-1$, 不稳定.

  - Routh 表:

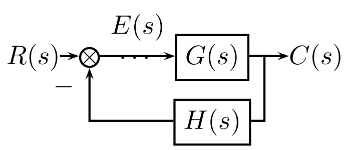
$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 0.5 \\ s^2 & 2.5 & -1 \\ s^1 & 0.5+\frac{1}{2.5} & 0 \\ s^0 & -1 & \end{array}$$

  - 结论 有一个不稳定极点.

3 稳态误差

3.1 误差传递函数

系统误差



- ignore

  系统误差有两种:

  - 输入端定义:$E_2(s)=E(s)$
  - 输出端定义:$E_1(s)=C_{expect}-C_{real}$
  - 不加特别说明, 系统误差指的是输入端定义.

- $E(s)$ 与 $E_1(s)$

$$\begin{aligned} C_{expect} &= \frac{R(s)}{H(s)} \\ E_1(s) &= \frac{R(s)}{H(s)}-C(s) \\ &= \frac{R(s)-C(s)H(s)}{H(s)} \\ &= \frac{E(s)}{H(s)} \end{aligned}$$

误差传递函数:

$$\begin{aligned}
\Phi_e(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} \\
&= \frac{1}{1+G(s)H(s)} \\
&= \frac{R(s)-H(s)C(s)}{R(s)} \\
&= 1-H(s)\Phi(s)
\end{aligned}$$

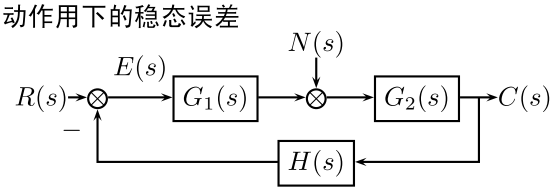
- 系统误差:$E(s)=\Phi_e(s)R(s)$

稳态误差:

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= \lim_{t\to\infty} e(t) \\
&= \lim_{s\to 0} sE(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\Phi_e(s)R(s)
\end{aligned}$$

- 稳态误差与输入信号有关
- 求稳态误差前要判断系统稳定性

扰动作用下的稳态误差



- 输入端定义:

$$\begin{aligned}
E(s) &= E_R(s)+E_N(s) \\
E_R(s) &= \Phi_e(s)R(s) \\
E_N(s) &= \Phi_{en}(s)N(s)
\end{aligned}$$

- 输出端定义: 令 $R(s)=0$, 计算 $N(s)$ 单独引起的 e_{ss} , 此时 $C_{expect}(s)=0$

$$\begin{aligned}
E(s) &= 0-C(s) \\
&= -\Phi_N(s)N(s) \\
\Phi_N(s) &= \frac{G_2}{1+G_1G_2} \\
e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s(-\Phi_N(s)N(s))
\end{aligned}$$

3.2 系统类型与静态误差系数

阶跃输入:

$$
\begin{aligned}
r(t) &= A \\
R(s) &= \frac{A}{s} \\
e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G_{open}(s)}\cdot\frac{A}{s} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{A}{1+G_{open}(s)}
\end{aligned}
$$

速度输入

$$
\begin{aligned}
r(t) &= vt \\
R(s) &= \frac{v}{s^2} \\
e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G_{open}(s)}\cdot\frac{v}{s^2} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{A}{s+sG_{open}(s)} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{A}{sG_{open}(s)}
\end{aligned}
$$

加速度输入

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \frac{1}{2}at^2 \\
R(s) &= \frac{a}{s^2} \\
e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G_{open}(s)}\cdot\frac{a}{s^3} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2+s^2G_{open}(s)} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2G_{open}(s)}
\end{aligned}
$$

系统类型

- 由开环传递函数定义

$$
\begin{aligned}
G_{open} &= G(s)H(s) \\
&= \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}
\end{aligned}
$$

- 其中 K 为开环增益.
- 定义:
  - $\nu = 0$ 称为 0 型系统
  - $\nu = 1$ 称为 I 型系统
  - $\nu = 2$ 称为 II 型系统

静态误差系数

- 静态位置误差系数

$$
\begin{aligned}
r(t) &= A \\
e_{ss} &= \frac{A}{1+K_p}, \qquad K_p = \lim_{s\to 0} G_{open}(s)
\end{aligned}
$$

- 静态速度误差系数

$$
\begin{aligned}
r(t) &= vt \\
e_{ss} &= \frac{v}{K_v}, \qquad K_v = \lim_{s\to 0} sG_{open}(s)
\end{aligned}
$$

- 静态加速度误差系数

$$
\begin{aligned}
r(t) &= \frac{1}{2}at^2 \\
e_{ss} &= \frac{a}{K_a}, \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2G_{open}(s)
\end{aligned}
$$

零型系统 ($\nu = 0$)

- $r(t) = A$ 时:

$$
\begin{aligned}
K_p &= \lim_{s\to 0} G_o(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K\prod_{i=0}^{m}(\tau_i s+1)}{\prod_{j=1}^{n}(\tau_j s+1)} = K \\
e_{ss1} &= \frac{A}{1+K_p}
\end{aligned}
$$

称为有差系统.

- $r(t) = vt$ 时:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s\to 0} sG_o(s) = 0 \\ e_{ss2} &= \infty \end{aligned}$$

- $r(t) = \frac{1}{2}at^2$ 时:

$$\begin{aligned} K_a &= \lim_{s\to 0} s^2G_o(s) = 0 \\ e_{ss3} &= \infty \end{aligned}$$

I 型系统 ($\nu = 1$)

- $r(t) = A$ 时:

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s\to 0} G_o(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K\prod_{i=0}^{m}(\tau_i s + 1)}{s\prod_{j=1}^{n-1}(\tau_j s + 1)} = \infty \\ e_{ss1} &= \frac{1}{1 + K_p} = 0 \end{aligned}$$

  无差系统.

- $r(t) = vt$ 时:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s\to 0} sG_o(s) = K \\ e_{ss2} &= \frac{v}{K_v} = \frac{v}{K} \end{aligned}$$

- $r(t) = \frac{1}{2}at^2$ 时:

$$\begin{aligned} K_a &= \lim_{s\to 0} s^2G_o(s) = 0 \\ e_{ss3} &= \infty \end{aligned}$$

II 型系统 ($\nu = 2$)

$$\begin{aligned} K_p &= \infty \\ e_{ss1} &= 0 \\ K_v &= \infty \\ e_{ss2} &= 0 \\ K_a &= K \\ e_{ss3} &= \frac{a}{K} \end{aligned}$$

小结:

- 零型:
$$e_{ss1} = \frac{A}{1+K}, e_{ss2} = e_{ss3} = \infty$$
- I 型:
$$e_{ss1} = 0, e_{ss2} = \frac{v}{K}, e_{ss3} = \infty$$
- II 型:
$$e_{ss1} = e_{ss2} = 0, e_{ss3} = \frac{a}{K}$$

例:

若 $G(s)H(s) = \frac{10K_h}{s+1}, K_h \in \{0.1, 1\}$, 求单位阶跃下的 e_{ss} .
解:

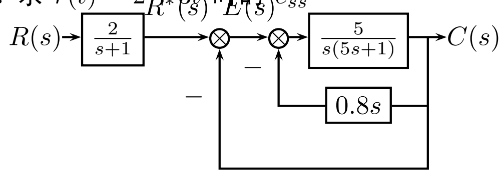
- 解法 1 零型系统, $r(t) = 1, e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s\to 0} G(s)H(s) \\ &= 10K_h \\ &= \begin{cases} 1 & K_h = 0.1 \\ 10 & K_h = 1 \end{cases} \\ e_{ss} &= \begin{cases} 0.5 & K_h = 0.1 \\ \frac{1}{11} & K_h = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- 解法 2:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s\Phi_e(s)R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{s+1}{s+1+10K_h}\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{1+10K_h} \\ &= \begin{cases} 0.5 & K_h = 0.1 \\ \frac{1}{11} & K_h = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

例: 求 $r(t)=2+3t$ 时的 e_{ss}



解:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{C(s)}{E(s)} \\
&= \frac{\frac{5}{s(5s+1)}}{1+\frac{4s}{s(5s+1)}} \\
&= \frac{5}{5s^2+5s} \\
&= \frac{1}{s(s+1)}
\end{aligned}
$$

例: 计算稳态误差

判断稳定性:

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{C(s)}{R^*(s)} = \frac{1}{s(s+1)+1} \\
\Phi_e(s) &= \frac{s(s+1)}{s(s+1)+1}
\end{aligned}
$$

系统稳定.

$$
\begin{aligned}
R(s) &= \frac{2s+3}{s^2} \\
e_{ss} &= \lim_{s\to 0} s\Phi_e(s)R^*(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s(s+1)}{s(s+1)+1}\cdot\frac{2}{s+1}\cdot\frac{2s+3}{s^2} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

3.3 动态误差系数

动态误差系数

动态误差系数可描述系统稳态误差随时间变化的规律，静态误差可看作动态误差的一个特例.

$$
\begin{aligned}
E(s) &= \Phi_e(s)R(s) \\
\Phi_e(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} \\
&= \frac{1}{1+G(s)H(s)} \\
&= \frac{M(s)}{N(s)}
\end{aligned}
$$

在 $s=0$ 处展开，得:

$$
\begin{aligned}
\phi_e(s) &= \Phi_e(0) + \dot{\Phi}_e(0)s + \cdots + \frac{\Phi_e^{(n)}(0)s^n}{n!} + \cdots \\
E(s) &= \Phi_e(0)R(s) + \dot{\Phi}_e(0)sR(s) + \cdots + \frac{\Phi_e^{(n)}(0)s^n R(s)}{n!} + \cdots \\
e_{ss}(t) &= \Phi_e(0)r(t) + \dot{\Phi}_e(0)\dot{r}(t) + \cdots + \frac{\Phi_e^{(n)}(0)r^{(n)}(t)}{n!} + \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} C_i r^{(i)}(t), \qquad C_i = \frac{\Phi_e^{(i)}(0)}{i!}
\end{aligned}
$$

- 其中 C_i 称为动态误差系数.
  - C_0 动态位置误差系数
  - C_1 动态速度误差系数
  - C_2 动态加速度误差系数

动态误差系数示例:

- 零型系统 $r(t)=1$ 则

$$e_{ss}(t) = C_0, C_0 = \frac{1}{1+K_p}$$

- I 型系统 $r(t)=t$ 则

$$e_{ss}(t) = C_0 t + C_1, C_0 = 0, C_1 = \frac{1}{K_v}$$

- II 型系统 $r(t)=t$ 则

$$e_{ss}(t) = C_0 \frac{1}{2}at^2 + C_1 at + C_2 a, C_0 = C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{K_a}$$

讨论：C_i 的计算

$$\begin{aligned}\Phi_e(s) &= \frac{M(s)}{N(s)} \\ &= C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \cdots\end{aligned}$$

例：$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

综合除法:

divident		divisor		quotient	remainder
s^2+s	$\div$	s^2+s+1	$\rightarrow$	s	$s^2+s-s(1+s+s^2)$
$-s^3$	$\div$	s^2+s+1	$\rightarrow$	$-s^3$	$-s^3-(-s^3)(1+s+s^2)$
s^4+s^5	$\div$	s^2+s+1	$\rightarrow$	s^4	$\cdots$
$\cdots$	$\div$	s^2+s+1	$\rightarrow$	$\cdots$	$\cdots$

得:

$$\Phi_e(s) = s - s^3 + s^4 + \cdots$$

例：$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ 另一种写法：

$$\begin{aligned}\frac{s^2+s}{s^2+s+1} &= s + \frac{-s^2+s-s(1+s+s^2)}{s^2+s+1} \\ \frac{-s^3}{s^2+s+1} &= -s^3 + \frac{-s^3-(-s^3)(1+s+s^2)}{s^2+s+1} \\ \frac{s^4+s^5}{s^2+s+1} &= s^4 + \cdots \\ \cdots &= \cdots \\ \Phi_e(s) &= s - s^3 + s^4 + \cdots\end{aligned}$$

例：$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ 长除法

$$\begin{array}{r|llllll}
 & s & & -s^3 & +s^4 & & \cdots \\ \hline
1+s+s^2 & s & +s^2 & & & & \\
 & s & +s^2 & +s^3 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & -s^3 & & & \\
 & & & -s^3 & -s^4 & -s^5 & \\ \cline{4-6}
 & & & & s^4 & +s^5 & \\
 & & & & s^4 & +s^5 & +s^6 \\ \cline{5-7}
 & & & & & & -s^6 \\
 & & & & & & \cdots
\end{array}$$

例:

单位负反馈系统开环传递函数: $G_o(s) = \frac{100}{s(0.s1+1)}$ 求输入信号为 $\sin(5t)$ 时的稳态误差.

解: 系统稳定,

$$\begin{aligned} r(t) &= sin(\omega t), \omega = 5 \\ E(s) &= \Phi_e(s)R(s) \\ e_{ss} &= \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^{(i)} \\ \Phi_e(s) &= \frac{1}{1+G_o(s)} \\ &= \frac{0.1s^2+s}{0.1s^2+s+100} \end{aligned}$$

解法 1

- $\frac{0.1s^2+s}{0.1s^2+s+100} = 0.01s + \frac{0.1s^2+s-0.01s(0.1s^2+s+100)}{0.1s^2+s+100}$
- $\frac{-10^{-3}s^3+0.09s^2}{0.1s^2+s+100} = 9\times 10^{-4}s^2 + \frac{-10^{-3}s^3+0.09s^2-9\times 10^{-4}s^2(0.1s^2+s+100)}{0.1s^2+s+100}$
- $\frac{-9\times 10^{-5}s^4-1.9\times 10^{-3}s^3}{0.1s^2+s+100} = -1.9\times 10^{-5}s^3 + \cdots$

所以

- $\Phi_e(s) = 0 + 0.01s + 9\times 10^{-4}s^2 - 1.9\times 10^{-5}s^3 + \cdots$
- $e_{ss}(t) = (C_0 - C_2\omega^2 + C_4\omega^4 + \cdots)\sin(\omega t) + (C_1 - C_3\omega^3 + C_5\omega^5 + \cdots)\cos(\omega t)$
- $e_{ss}(t) = -0.055\cos(5t - 249°)$

解法 2:

$$\begin{aligned} E(s) &= \Phi_e(s)R(s) \\ &= \frac{s^2+10S}{s^2+10S+1000}\cdot\frac{5}{s^2+25} \\ &= \frac{-0.0498s-0.1115}{s^2+25} + \frac{as+b}{s^2+10s+1000} \\ e_{ss}(t) &= -0.055\cos(5t-249°) + \Delta \end{aligned}$$

其中: $\lim_{t\to\infty}\Delta = 0$

3.4 减小稳态误差的措施

减小 e_{ss} 的措施

- 增大开环增益
- 提高系统类型
- 串级控制抑制扰动
- 复合控制

增大开环增益

$$G(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}$$

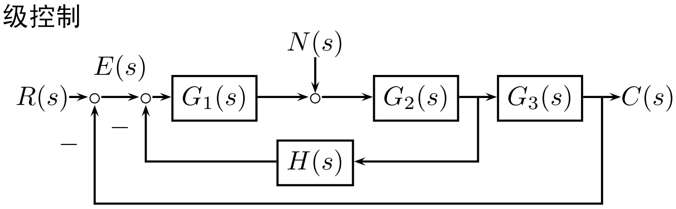
$$e_{ss} = \begin{cases} \frac{1}{1+K} & \nu=0, R(s)=\frac{1}{s} \\ \frac{1}{K} & \nu=1, R(s)=\frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{K} & \nu=2, R(s)=\frac{1}{s^3} \end{cases}$$

提高系统类型

$$G(s) = \frac{1}{s}\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n-\nu}(T_j s+1)}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \frac{1}{K} & \nu=0, R(s)=\frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{K} & \nu=1, R(s)=\frac{1}{s^3} \end{cases}$$

串级控制



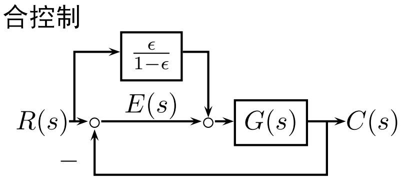
$$C(s) = (G_1(s)E'(s)+N(s))G_2(s)G_3(s)$$

$$E'(s) = E(s) - \frac{H(s)}{G_3(s)}C(s)$$

$$C(s) = \frac{(G_1(s)E(s)+N(s))G_2(s)G_3(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$C(s) \approx \frac{G_3(s)E(s)}{H(s)} \qquad (G_1(s) >> 1)$$

复合控制

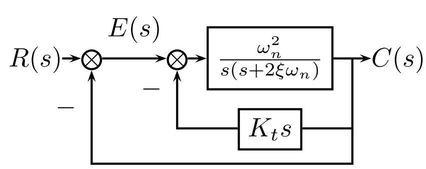


$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{r(\infty)-c(\infty)}{r(\infty)} \\
c(\infty) &= (1-\epsilon)r(\infty) \\
r(t) &= \frac{r'(t)}{1-\epsilon} \\
c(\infty) &= r'(\infty) \\
e'_{ss} &= r'(\infty)-c(\infty) \\
&= 0
\end{aligned}$$

4 示例

4.1 速度反馈

速度反馈分析

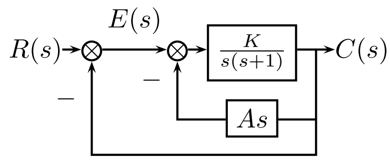


- 结构图
- 分析:

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi_t\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\xi_t = \xi + \frac{1}{2}K_t\omega_n$$

速度反馈示例



- 结构图

  As 为系统的速度反馈, 求解:

  - $A=\{0.8,0\}$ 时系统稳态误差及动态品质指标（$K=1$，求 e_{ss} 时 $R(s)=\frac{1}{s^2}$）
  - 若要求系统的 $\sigma\%=20\%$，$t_s\le 1s$，确定 A,K 的值

- 解:

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)+KAs}=\frac{K}{s^2+(KA+1)s}$$
$$\Phi(s)=\frac{K}{s^2+(KA+1)s+K}$$

  系统稳定, 为 I 型系统.

（续）计算稳态误差:
$R(s)=\frac{1}{s^2}$ 时,

$$e_{ss}=\frac{1}{Kv}$$
$$K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s+KA+1}=\frac{K}{KA+1}$$

- $K=1, A=0.8$ 时, $e_{ss}=\frac{KA+1}{K}=1.8$
- $K=1, A=0$ 时, $e_{ss}=\frac{KA+1}{K}=1$

（续）：计算动态品质:

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{K}{s^2+(KA+1)s+K}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma\% &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
t_s &= \frac{3.5}{\xi\omega_n}
\end{aligned}
$$

- $K=1, A=0$ 时, $\omega_n=1, \xi=0.5, \sigma\%=16.3\%, t_s=7$
- $K=1, A=0.8$ 时, $\omega_n=1, \xi=0.9, \sigma\%=0.15\%, t_s=3.89$

（续）确定 A, K 值

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} &= 20\% \\
\frac{3.5}{\xi\omega_n} &= 1
\end{aligned}
$$

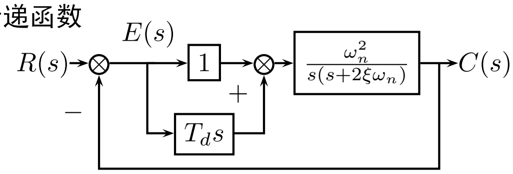
得: $\xi=0.456, \omega_n=7.68$

$$
\begin{aligned}
2\xi\omega_n &= AK+1 \\
K &= \omega_n^2
\end{aligned}
$$

得: $A=0.102, K=58.9$

4.2 比例 -微分控制

传递函数



比较原系统与 PD 控制系统的稳态性能与动态性能
解:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s^2+2\xi\omega_n s} \\
\Phi(s) &= \frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s^2+(2\xi+T_d\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2}
\end{aligned}
$$

稳态误差

系统稳定, 为 I 型系统.

$$
\begin{aligned}
e_{ss} &= \frac{1}{K_v} \\
K_v &= \lim_{s\to 0} sG(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s+2\xi\omega_n} \\
&= \frac{\omega_n}{2\xi}
\end{aligned}
$$

e_{ss} 与 T_d 无关.

动态性能分析

考虑如下三个系统:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \\
\Phi_2(s) &= \frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s^2+(2\xi+T_d\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2} \\
\Phi_3(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+(2\xi+T_d\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2}
\end{aligned}
$$

- 与系统 1 相比, 系统 3 的阻尼比较大, 两者的自然频率相同.
- 因为:

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(s) &= (1+T_d s)\Phi_3(s) \\
c_2(t) &= c_3(t) + T_d\frac{dc_3(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

由于存在微分作用, 因此对高频噪声有放大作用.

动态性能计算：阶跃响应

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{\omega_n^2}{z}\left(\frac{s+z}{s^2+2\xi_d\omega_n s+\omega_n^2}\right) \qquad (\xi_d = \xi + \frac{\omega_n}{2z}, z = \frac{1}{T_d}) \\
C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi_d\omega_n s+\omega_n^2)} + \frac{1}{z}\frac{s\omega_n^2}{s(s^2+2\xi_d\omega_n s+\omega_n^2)} \\
h(t) &= 1 + re^{-\xi_d\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}t+\psi) \\
r &= \frac{\sqrt{z^2-2\xi_d\omega_n z+\omega_n^2}}{z\sqrt{1-\xi_d^2}} \\
\psi &= -\pi + \arctan\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}}{z-\xi_d\omega_n} + \arctan\frac{\sqrt{1-\xi_d^2}}{\xi_d}
\end{aligned}
$$

动态性能计算：峰值时间

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\tan(\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}t_p+\psi) &= \frac{\sqrt{1-\xi_d^2}}{\xi_d} \\
t_p &= \frac{\beta_d-\psi}{\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}} \qquad \left(\beta_d=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi_d^2}}{\xi_d}\right)
\end{aligned}
$$

动态性能计算：超调量

$$
\begin{aligned}
h(t_p) &= 1+re^{-\xi_d\omega_n t_p}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}t_p+\psi) \\
&= 1+re^{-\xi_d\omega_n t_p}\sin(\beta_d) \\
\sigma\% &= r\sqrt{1-\xi_d^2}e^{-\xi_d\omega_n t_p}\times 100\%
\end{aligned}
$$

动态性能计算：调节时间

$$
\begin{aligned}
\Delta &= |h(t)-h(\infty)| \\
&= |re^{-\xi_d\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}t+\psi)| \\
&\leqslant re^{-\xi_d\omega_n t} \\
t_s &= \frac{3+\ln r}{\xi_d\omega_n} \qquad (\Delta=0.05)
\end{aligned}
$$

比例 -微分控制示例

设单位反馈系统开环传递函数：$G(s)=\frac{K(T_ds+1)}{s(1.67s+1)}$ 若要求单位斜坡函数输入时 $e_{ss}\le 0.2, \xi_d=0.5$ 求 K, T_d 的值，并估算系统在阶跃函数作用下的动态性能。

解：

- 求 K ：

$$
\begin{aligned}
e_{ss} &= \frac{1}{K}\le 0.2 \\
K &= 5
\end{aligned}
$$

- $T_d = 0$

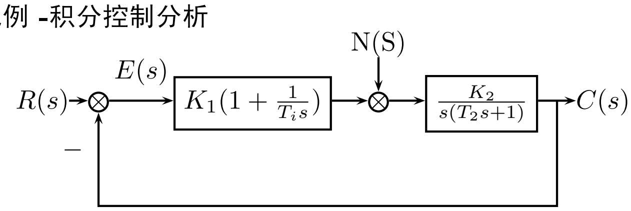
$$\begin{aligned} s^2 + 0.6s + 3 &= 0 \\ \xi &= 0.173 \\ \omega_n &= 1.732 \\ t_p &= 1.84s \\ \sigma\% &= 57.6\% \\ t_s &= 11.7s \end{aligned}$$

- $T_d \neq 0$

$$\begin{aligned} \xi_d &= 0.5 \\ T_d &= \frac{2(\xi_d - \xi)}{\omega_n} \\ t_p &= 1.63s \\ \sigma\% &= 22\% \\ t_s &= 3.49s \end{aligned}$$

4.3 比例 -积分控制

比例 -积分控制分析



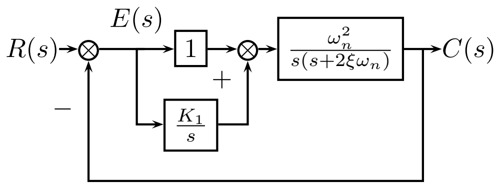
$$E_n(s) = -\frac{K_2 T_i s}{T_i T_2 s^3 + T_i s^2 + K_1 K_2 T_i s + K_1 K_2} N(s)$$

系统稳定时：

$$e_{ssn} = \lim_{s\to 0} sE_n(s) = 0 \qquad (N(s) = \frac{n_0}{s})$$

$$e_{ssn} = \lim_{s\to 0} sE_n(s) = -\frac{n_1 T_i}{K_1} \qquad (N(s) = \frac{n_1}{s^2})$$

比例 -积分控制示例



已知参数 $\xi = 0.2, \omega_n = 86.6$ 求：

- 使闭环系统稳定的 K_1 范围
- 使闭环系统极点实部全部小于 -1 的 K_1 范围

解：

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{\omega_n(s+K_1)}{s^3+2\xi\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K_1\omega_n^2} \\
D(s) &= s^3+2\xi\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K_1\omega_n^2 = 0 \\
D(s) &= s^3+34.6s^2+7500s+7500K_1 = 0
\end{aligned}
$$

比例 -积分控制示例 (稳定性)

Routh 表：

$$
\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 7500 \\
s^2 & 34.6 & 7500K_1 \\
s^1 & \frac{34.6\times7500-7500K_1}{34.6} & 0 \\
s^0 & 7500K_1 &
\end{array}
$$

得：

$$0 < K_1 < 34.6$$

比例 -积分控制示例 (相对稳定性)

设：$s = s_1 - 1$

$$
\begin{aligned}
(s_1-1)^3+34.6(s_1-1)^2+7500(s_1-1)+7500K_1 &= 0 \\
s_1^3+31.6s_1^2+7433.8s_1+(7500K_1-7466.4) &= 0
\end{aligned}
$$

Routh 表：

$$
\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 7433.8 \\
s^2 & 31.6 & 7500K_1-7466.4 \\
s^1 & \frac{31.6\times7433.8-(7500K_1-7466.4)}{31.6} & 0 \\
s^0 & 7500K_1-7466.4 &
\end{array}
$$

得：

$$1 < K_1 < 32.3$$