闭环系统的脉冲传递函数

Outline

- 1 差分方程
- ② 脉冲传递函数
- ③ 开环系统的脉冲传递函数
- 4 闭环系统的脉冲传递函数
- 5 修正 Z 变换

Topic

- 1 差分方程
- (2) 脉冲传速函数
- ③ 开环系统的脉冲传递函数
- 4 闭环系统的脉冲传递函数
- 5 修正 Z 变换

差分方程模型

• n 阶后向差分方程

$$c(k) + a_1 c(k-1) + \dots + a_n c(k-n)$$

= $b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + \dots + b_m r(k-m)$

即 k 时刻的输出 c(k) 与 k 时刻前 n 个时刻输出及前 m 个输入, 当前时刻输入有关.

• n 阶前向差分方程

$$c(k+n) + a_1c(k+n-1) + \dots + a_nc(k)$$

= $b_0r(k+m) + b_1r(k+m-1) + \dots + b_mr(k)$

■ n 阶后向差分方程

$$c(k) + a_1 c(k-1) + \dots + a_n c(k-n)$$

= $b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + \dots + b_m r(k-m)$

即 k 时刻的输出 c(k) 与 k 时刻前 n 个时刻输出及前 m 个输入, 当前时刻输入有关.

n 阶前向差分方程

$$c(k+n) + a_1c(k+n-1) + \dots + a_nc(k)$$

= $b_0r(k+m) + b_1r(k+m-1) + \dots + b_mr(k)$

差分方程模型

• n 阶后向差分方程

$$c(k) + a_1 c(k-1) + \dots + a_n c(k-n)$$

= $b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + \dots + b_m r(k-m)$

即 k 时刻的输出 c(k) 与 k 时刻前 n 个时刻输出及前 m 个 输入. 当前时刻输入有关.

n 阶前向差分方程

$$c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \dots + a_n c(k)$$

= $b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \dots + b_m r(k)$

差分方程解法: 迭代法

- 利用差分方程的递推关系,逐步计算 c(k) 的值
- 例: c(k) = r(k) + 5c(k-1) 6c(k-2) 输入 r(k) = 1, 初始条件: c(0) = 0, c(1) = 1
- 解

$$c(2) = 6$$

 $c(3) = 2$
 $c(4) = 9$

差分方程解法: 迭代法

- 利用差分方程的递推关系, 逐步计算 c(k) 的值
- 例: c(k) = r(k) + 5c(k-1) 6c(k-2) 输入 r(k) = 1, 初始条件: c(0) = 0, c(1) = 1
- 解

$$c(2) = 6$$

 $c(3) = 25$
 $c(4) = 90$

差分方程解法: 迭代法

- 利用差分方程的递推关系, 逐步计算 c(k) 的值
- 例: c(k) = r(k) + 5c(k-1) 6c(k-2) 输入 r(k) = 1, 初始条件: c(0) = 0, c(1) = 1
- 解:

$$c(2) = 6$$

 $c(3) = 25$
 $c(4) = 90$

闭环系统的脉冲传递函数

差分方程

将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.

$$z^{2}(c(z) - c(0) - c(1)z^{-1}) + 3z(c(z) - c(0)) + 2c(z) = 0$$

$$(z^{2} + 3z + 2)c(z) = z$$

$$c(z) = \frac{z}{z^{2} + 3z + 2} = \frac{z}{z + 1} - \frac{z}{z + 2} = \frac{1}{1 + z^{-1}} - \frac{1}{1 + 2z^{-1}}$$

$$c(k) = (-1)^{k} - (-2)^{k}$$

文伙法

- 将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.
- 例: 差分方程 c(t+2T) + 3c(t+T) + 2c(t) = 0 初始条件 c(0) = 0, c(1) = 1
- 解

$$z^{2}(c(z) - c(0) - c(1)z^{-1}) + 3z(c(z) - c(0)) + 2c(z) = 0$$

$$(z^{2} + 3z + 2)c(z) = z$$

$$c(z) = \frac{z}{z^{2} + 3z + 2} = \frac{z}{z + 1} - \frac{z}{z + 2} = \frac{1}{1 + z^{-1}} - \frac{1}{1 + 2z^{-1}}$$

$$c(k) = (-1)^{k} - (-2)^{k}$$

其中 k = 0.1.2...

- 将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.
- 例: 差分方程 c(t+2T) + 3c(t+T) + 2c(t) = 0 初始条件 c(0) = 0, c(1) = 1
- 解:

$$z^{2}(c(z) - c(0) - c(1)z^{-1}) + 3z(c(z) - c(0)) + 2c(z) = 0$$

$$(z^{2} + 3z + 2)c(z) = z$$

$$c(z) = \frac{z}{z^{2} + 3z + 2} = \frac{z}{z + 1} - \frac{z}{z + 2} = \frac{1}{1 + z^{-1}} - \frac{1}{1 + 2z^{-1}}$$

$$c(k) = (-1)^{k} - (-2)^{k}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$

Topic

- 1 差分方程
- ② 脉冲传递函数
- 3 开环系统的脉冲传递函数
- 4 闭环系统的脉冲传递函数
- 5 修正 Z 变换

闭环系统的脉冲传递函数

- 连续系统: 传递函数 (s 域)
- 离散系统: 脉冲传递函数 (z 域)
- 定义: 输出 c*(t) 的 Z 变换与输入 r*(t) 的 Z 变换之比 (零初始条件下) 叫做系统的脉冲传递函数. 记为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

闭环系统的脉冲传递函数

脉冲传递函数定义

- 连续系统: 传递函数 (s 域)
- 离散系统: 脉冲传递函数 (z 域)
- 定义: 输出 c*(t) 的 Z 变换与输入 r*(t) 的 Z 变换之比 (零初 始条件下) 叫做系统的脉冲传递函数. 记为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

脉冲传递函数意义

- 加权序列: 輸入 $r^*(t) = \delta(t)$ 的输出序列称为加权序列, 记为 $k^*(t)$
- 脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$
$$= \mathcal{Z}[k^*(t)]$$
$$= k(z)$$

• 脉冲传递函数为加权序列 k*(t) 的 Z 变换

脉冲传递函数

开环系统的脉冲传递函数

脉冲传递函数意义

- 加权序列: 输入 $r'(t) = \delta(t)$ 的输出序列称为加权序列, 记为 $k^*(t)$
- 脉冲传递函数:

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$
$$= \mathcal{Z}[k^*(t)]$$
$$= k(z)$$

闭环系统的脉冲传递函数

- 加权序列: 输入 $r'(t) = \delta(t)$ 的输出序列称为加权序列, 记为 $k^*(t)$
- 脉冲传递函数:

$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$
$$= \mathcal{Z}[k^*(t)]$$
$$= k(z)$$

● 脉冲传递函数为加权序列 k*(t) 的 Z 变换

两种模型之间的变换关系:

$$c(nT) + \sum_{k=1}^{n} a_k c((n-k)T) = \sum_{k=0}^{m} b_k r((n-k)T)$$

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}$$

• 差分方程在零初始条件下进行 Z 变换, 得脉冲传递函数

两种模型之间的变换关系:

$$c(nT) + \sum_{k=1}^{m} a_k c((n-k)T) = \sum_{k=0}^{m} b_k r((n-k)T)$$

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}$$

● 差分方程在零初始条件下进行 Z 变换, 得脉冲传递函数.

脉冲传递函数计算

- 差分方程 Z 变换: $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数 G(s) 求解 (部分分式法)
- 例: c(nT) = r[(n-k)T]
- 解

$$C(z) = z^{-k}R(z)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

$$= z^{-k}$$

脉冲传递函数计算

- 差分方程 Z 变换: $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数 G(s) 求解 (部分分式法)
- \mathfrak{P} : c(nT) = r[(n-k)T]
- 解

$$C(z) = z^{-k}R(z)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

$$= z^{-k}$$

脉冲传递函数计算

- 差分方程 Z 变换: $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数 G(s) 求解 (部分分式法)
- 例: c(nT) = r[(n-k)T]
- 解:

$$C(z) = z^{-k}R(z)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

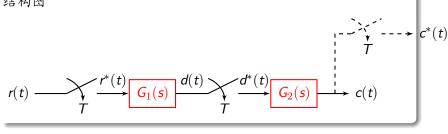
$$= z^{-k}$$

Topic

- 1 差分方程
- 2 脉冲传递函数
- ③ 开环系统的脉冲传递函数
- 4 闭环系统的脉冲传递函数
- 5 修正 Z 变换

开环系统脉冲传递函数

结构图



准导

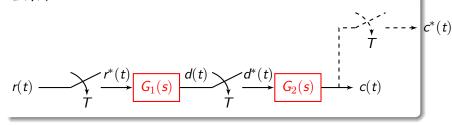
$$D(z) = R(z)G_1(z)$$

$$C(z) = D(z)G_2(z) = G_1(z)G_2(z)R(z)$$

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)$$

开环系统脉冲传递函数

结构图

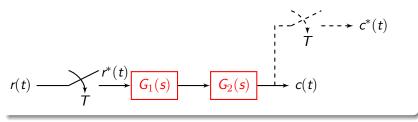


$$D(z) = R(z)G_1(z)$$

 $C(z) = D(z)G_2(z) = G_1(z)G_2(z)R(z)$
 $G(z) = G_1(z)G_2(z)$

开环系统脉冲传递函数 (续)

结构图

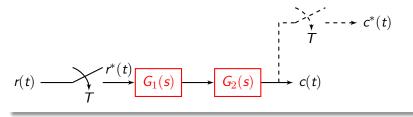


$$C^*(s) = [R^*(s) G_1(s) G_2(s)]^* = R^*(s) [G_1(s) G_2(s)]^*$$
 $C(z) = R(z) G_1 G_2(z)$
 $C(z) = G_2 G_2(z)$

开环系统脉冲传递函数 (续)

结构图

差分方程



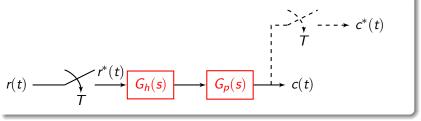
$$C^*(s) = [R^*(s)G_1(s)G_2(s)]^* = R^*(s)[G_1(s)G_2(s)]^*$$
 $C(z) = R(z)G_1G_2(z)$
 $G(z) = G_1G_2(z)$

闭环系统的脉冲传递函数

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:

结构图

差分方程



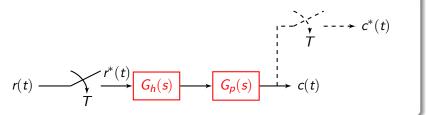
•
$$C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$$

•
$$C^*(s) = R^*(s) \left[\frac{G_{\rho}(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_{\rho}(s)}{s} \right]^*$$

$$C(z) = R(z) \mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{c}\right] - z^{-1} \mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{c}\right]$$

•
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{z}]$$

结构图



推导

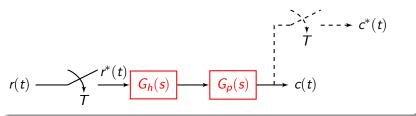
•
$$C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$$

• $C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
• $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$

 $C(z) = R(z)z\left[\frac{z}{s}\right] - z^{-1}z\left[\frac{z}{s}\right]$

结构图

差分方程



•
$$C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$$

• $C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
• $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$

•
$$C(z) = R(z)\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right] - z^{-1}\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right]$$

•
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{c}]$$

结构图

差分方程



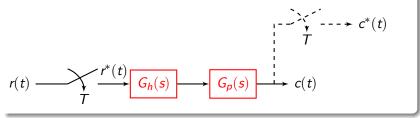
•
$$C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$$

• $C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$

•
$$C^*(s) = R^*(s) \left[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s} \right]^*$$

•
$$C(z) = R(z)\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right] - z^{-1}\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right]$$

差分方程

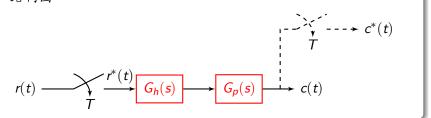


•
$$C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$$

• $C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
• $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$

$$C(z) = R(z)\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right] - z^{-1}\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right]$$

•
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{z}]$$



•
$$C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$$

• $C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
• $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$

•
$$C(z) = R(z)\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right] - z^{-1}\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right]$$

• $G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G_p(z)}{s}\right]$

闭环系统的脉冲传递函数

开环系统脉冲传递函数示例: $G_p(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

• 解

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{a}{s^2 (s+a)} \right]$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) \right]$$

$$= (1 - z^{-1}) \left[\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}} \right) \right]$$

开环系统脉冲传递函数示例: $G_p(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

●解:

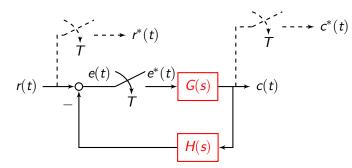
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{a}{s^2 (s+a)} \right]$$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) \right]$$

$$= (1 - z^{-1}) \left[\frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}} \right) \right]$$

Topic

- 1 差分方程
- 2 脉冲传递函数
- ③ 开环系统的脉冲传递函数
- 4 闭环系统的脉冲传递函数
- 5 修正 Z 变换



脉冲传递函数

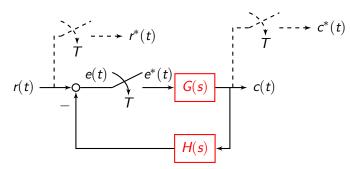
$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

$$F(z) = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[c^*(t)]}$$

$$C(s) = G(s)E^{*}(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$= R(s) - H(s)G(s)E^{*}(s)$$



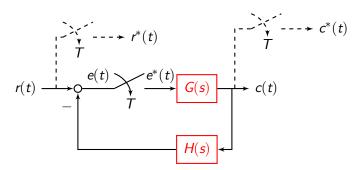
脉冲传递函数

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[e^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

$$C(s) = E(s) = E(s) = E(s)$$

 $(E^*(s))$ $(E^*(s)) - H(s)C(s)$ $(E^*(s)) - H(s)G(s)E^*(s)$



脉冲传递函数

解:

 $= G(s)E^*(s)$ = R(s) - H(s)C(s) $= R(s) - H(s)G(s)E^*(s)$

闭环系统的脉冲传递函数 (续)

$$E^{*}(s) = R^{*}(s) - HG^{*}(s)E^{*}(s)$$

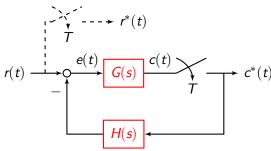
$$= \frac{R^{*}(s)}{1 + HG^{*}(s)}$$

$$\Phi_{e}(z) = \frac{1}{1 + HG(z)}$$

$$C^{*}(s) = G^{*}(s)E^{*}(s)$$

$$= \frac{G^{*}(s)R^{*}(s)}{1 + HG^{*}(s)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1 + HG(z)}$$



解

$$E(s) = R(s) - H(s)C^{*}(s)$$

$$C(s) = G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^{*}(s)$$

$$C^{*}(s) = GR^{*}(s) - GH^{*}(s)C^{*}(s) = \frac{GR^{*}(s)}{1 + GH^{*}(s)}$$

• 没有闭环脉冲传递函数

闭环系统的脉冲传递函数示例:

$$r(t) \xrightarrow{f} G(s) \xrightarrow{f} c^*(t)$$

$$T \xrightarrow{e(t)} G(s) \xrightarrow{f} c^*(t)$$

$$T \xrightarrow{f} c^*(t)$$

• 解:

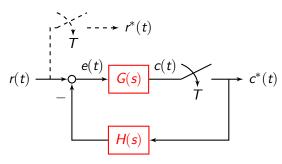
$$E(s) = R(s) - H(s)C^{*}(s)$$

$$C(s) = G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^{*}(s)$$

$$C^{*}(s) = GR^{*}(s) - GH^{*}(s)C^{*}(s) = \frac{GR^{*}(s)}{1 + GH^{*}(s)}$$

• 没有闭环脉冲传递函数

闭环系统的脉冲传递函数示例:



●解:

$$E(s) = R(s) - H(s)C^{*}(s)$$

$$C(s) = G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^{*}(s)$$

$$C^{*}(s) = GR^{*}(s) - GH^{*}(s)C^{*}(s) = \frac{GR^{*}(s)}{1 + GH^{*}(s)}$$

没有闭环脉冲传递函数

脉冲传递函数

开环系统的脉冲传递函数

闭环系统的脉冲传递函数

Topic

- 1 差分方程
- 2 脉冲传递函数
- ③ 开环系统的脉冲传递函数
- 4 闭环系统的脉冲传递函数
- 5 修正 Z 变换

 $c^*(t)$ 与 c(t)

- 采样间隔 7 要远小于系统最小时间常数
- c(nT) 不能反映采样间隔中的信息
- G(s) 要满足: $n \ge m+2$, 否则 $c^*(t)$ 与 c(t) 差别较大

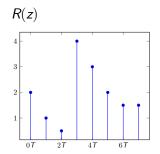
 $c^*(t)$ 与 c(t)

- 采样间隔 τ 要远小于系统最小时间常数
- c(nT) 不能反映采样间隔中的信息
- G(s) 要满足: $n \ge m+2$, 否则 $c^*(t)$ 与 c(t) 差别较大

 $c^*(t)$ 与 c(t)

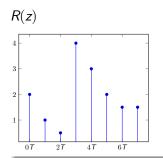
- 采样间隔 τ 要远小于系统最小时间常数
- c(nT) 不能反映采样间隔中的信息
- G(s) 要满足: n≥m+2, 否则 c*(t) 与 c(t) 差别较大.

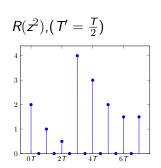
- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
- 方法:



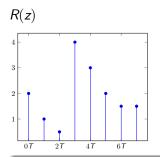


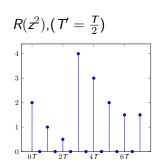
- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
 - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
 - 计算在采样周期 ☐ 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
 - 原输入信号 Z 变换为 R(z),将 z 替换为: zⁿ.
 - · 以 T 重新计算系统脉冲传递函数.



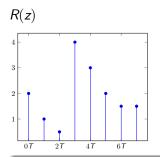


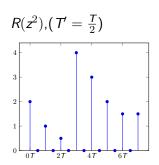
- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
 - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
 - 计算在采样周期 7 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
 - 原輸入信号 Z 变换为 R(z),将 z 替换为: zⁿ.
 - · 以 [重新计算系统脉冲传递函数.





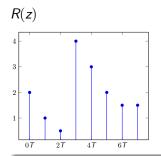
- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
 - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
 - 计算在采样周期 7 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
 - 原输入信号 Z 变换为 R(z),将 z 替换为: zⁿ.
 - 以 ½ 重新计算系统脉冲传递函数.

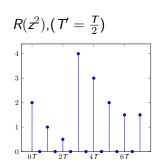




修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
 - 将周期为 T的原输入采样信号序列 r*(t) 再次以周期 Ţ 采 样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
 - 计算在采样周期 7 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
 - 原输入信号 Z 变换为 R(z),将 z 替换为: zⁿ.
 - · 以 [重新计算系统脉冲传递函数.





闭环系统的脉冲传递函数

修正 Z 变换示例:

$$G(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

T=1, r(t)=1(t), 要求每采样周期中间插入两点.

• 解:

$$G(z) = \frac{z}{z - e^{-1/3}}$$

$$r(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$r'(z) = r(z^3)$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-3}}$$

$$c'(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-1/3}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-3}}$$