

线性系统的频域分析法

频域稳定性判据

邢超

Outline

1 Nyquit 稳定性判据

2 Bode 稳定性判据

Topic

1 Nyquit 稳定性判据

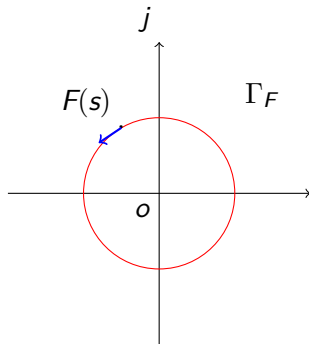
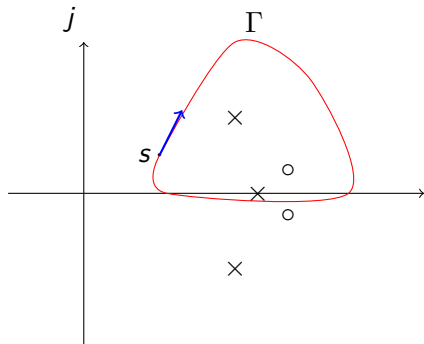
2 Bode 稳定性判据

辐角原理

- 设 s 为复变量, $F(s)$ 为 s 的有理分式函数. 对于 s 平面上任意一点 s , 通过复变函数 $F(s)$ 的映射关系, 可以确定 s 的象.
- 在 s 平面上任选一条闭合曲线 Γ , 且不通过 $F(s)$ 任一零点和极点, s 沿闭合曲线 Γ 运动一周, 则相应地 $F(s)$ 形成一条闭合曲线 Γ_F .

辐角原理 (续):

设 s 平面闭合曲线 Γ 包围 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点, 则 s 沿 Γ 顺时针运动一周时, 在 $F(s)$ 平面上, $F(s)$ 沿闭合曲线 Γ_F 逆时针包围原点的圈数为 $R = P - Z$.



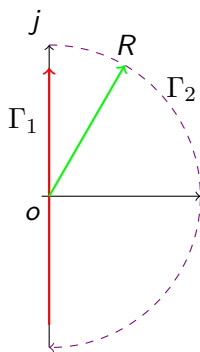
辐角原理的应用

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \frac{G(s)}{1 + G_o(s)} \\ &= \frac{G(s)}{F(s)} \\ F(s) &= 1 + G_o(s)\end{aligned}$$

- $F(s)$ 的极点是系统开环极点,
- $F(s)$ 的零点是系统的闭环极点.

辐角原理的应用 (续)

将 Γ 分为两段:

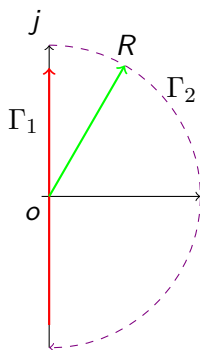


- $\Gamma_1 : s = j\omega, \omega \in [-\infty, \infty]$
- $\Gamma_2 : s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta}, \theta \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}$
- 可得对应的 $G_o(s)$ 曲线.
 - s 在 Γ_1 上时, 与 Nyquist 图对应. ($\omega \in [0, \infty]$)
 - s 在 Γ_1 上时,

$$F(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta} G_o(s) = 1$$
- Nyquist 判据
 - 对于开环稳定系统 ($P=0$), 若 Nyquist 曲线不包含 $(-1, 0)$ 点, 则系统稳定.
 - 对于开环稳定系统 ($P>0$), 若 Nyquist 曲线逆时针包围 $(-1, 0)$ 点的次数为 $\frac{P}{2}$, 则系统稳定.

辐角原理的应用 (续)

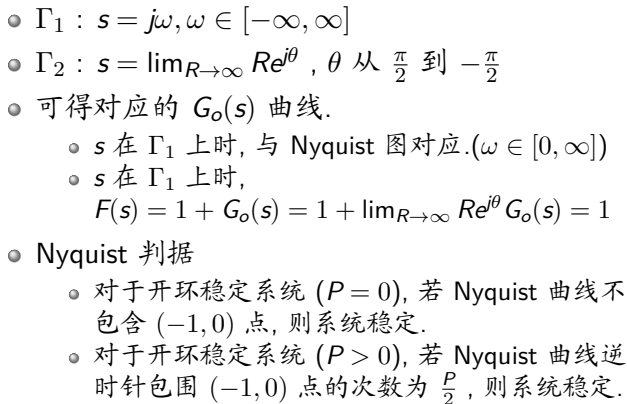
将 Γ 分为两段:



- $\Gamma_1 : s = j\omega, \omega \in [-\infty, \infty]$
- $\Gamma_2 : s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta}, \theta \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}$
- 可得对应的 $G_o(s)$ 曲线.
 - s 在 Γ_1 上时, 与 Nyquist 图对应. ($\omega \in [0, \infty]$)
 - s 在 Γ_1 上时,

$$F(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta} G_o(s) = 1$$
- Nyquist 判据
 - 对于开环稳定系统 ($P = 0$), 若 Nyquist 曲线不包含 $(-1, 0)$ 点, 则系统稳定.
 - 对于开环稳定系统 ($P > 0$), 若 Nyquist 曲线逆时针包围 $(-1, 0)$ 点的次数为 $\frac{P}{2}$, 则系统稳定.

将 Γ 分为两段:

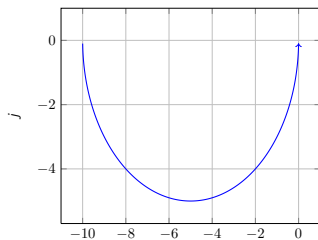


Nyquist 判据, 例 1:

某负反馈开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{10}{s-1}$, 用 Nyquist 判据判断系统稳定性.

稳定性判断

Nyquist 图



$$\begin{aligned}P &= 1 \\N &= \frac{1}{2} \\P - Z &= 2N \\Z &= P - 2N \\&= 0\end{aligned}$$

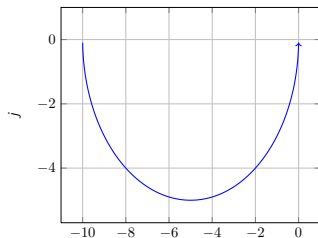
系统稳定.

Nyquist 判据, 例 1:

某负反馈开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{10}{s-1}$, 用 Nyquist 判据判断系统稳定性.

稳定性判断

Nyquist 图

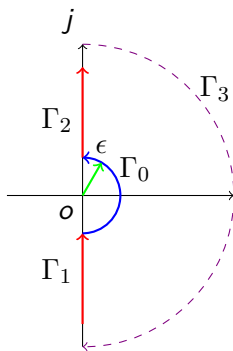


$$\begin{aligned} P &= 1 \\ N &= \frac{1}{2} \\ P - Z &= 2N \\ Z &= P - 2N \\ &= 0 \end{aligned}$$

系统稳定.

虚轴上有极点时

- 零型系统 $F(s)$ 沿 Γ 解析且不为 0.
- I 型及以上系统 $F(s)$ 在 $s=0$ 处不解析, 不满足辐角原理条件.

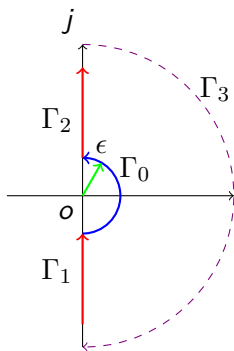


将 Γ 分为四段:

- $\Gamma_1 : s = j\omega, \omega \in [-\infty, 0^-]$
- $\Gamma_2 : s = j\omega, \omega \in [0^+, \infty]$
- $\Gamma_3 : s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\Gamma_0 : s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{j\theta}, \theta \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}$
- 对增补后的 Nyquist 图可使用 Nyquist 判据.

虚轴上有极点时

- 零型系统 $F(s)$ 沿 Γ 解析且不为 0.
- I 型及以上系统 $F(s)$ 在 $s=0$ 处不解析, 不满足辐角原理条件.

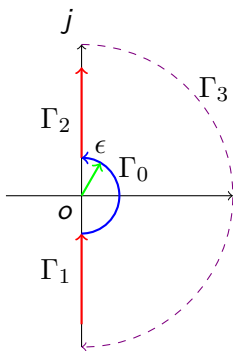


将 Γ 分为四段:

- $\Gamma_1 : s = j\omega, \omega \in [-\infty, 0^-]$
- $\Gamma_2 : s = j\omega, \omega \in [0^+, \infty]$
- $\Gamma_3 : s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\Gamma_0 : s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{j\theta}, \theta \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}$
- 对增补后的 Nyquist 图可使用 Nyquist 判据.

虚轴上有极点时

- 零型系统 $F(s)$ 沿 Γ 解析且不为 0.
- I 型及以上系统 $F(s)$ 在 $s=0$ 处不解析, 不满足辐角原理条件.

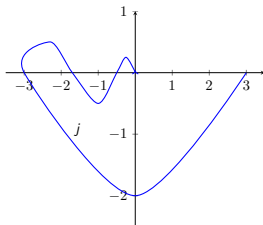


将 Γ 分为四段:

- $\Gamma_1 : s = j\omega, \omega \in [-\infty, 0^-]$
- $\Gamma_2 : s = j\omega, \omega \in [0^+, \infty]$
- $\Gamma_3 : s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\Gamma_0 : s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{j\theta}, \theta \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}$
- 对增补后的 Nyquist 图可使用 Nyquist 判据.

穿越次数

Nyquist 图



穿越次数

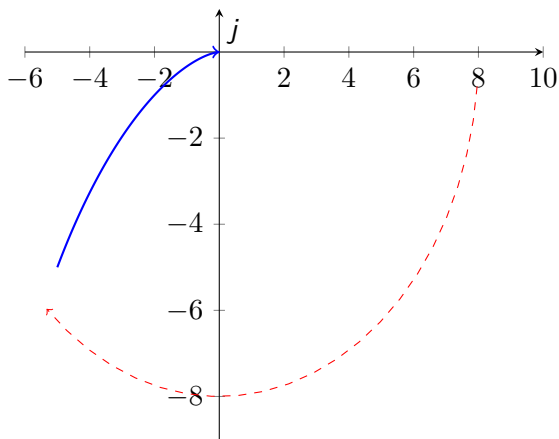
- 根据增补后的 Nyquist 曲线穿越 $(-1, 0)$ 点左侧的次数可得 Γ_F 包围原点的圈数

$$\begin{aligned} R &= 2N \\ &= 2(N_+ - N_-) \end{aligned}$$

其中,

- N_+ 为正穿越 (自上向下) 次数
- N_- 为负穿越 (自下向上) 次数

例: $G_o(s) = \frac{10}{s(s+1)}$

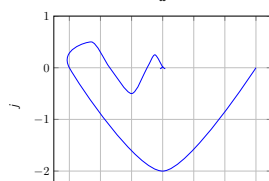
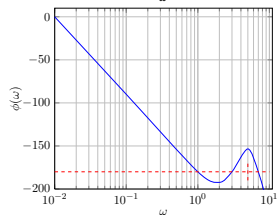
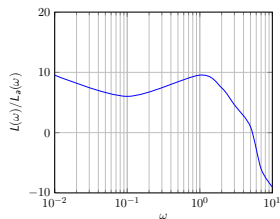


Topic

1 Nyquit 稳定性判据

2 Bode 稳定性判据

Bode 稳定性判据



稳定性判断

- 截止频率 ω_c : $A(\omega_c) = 0$

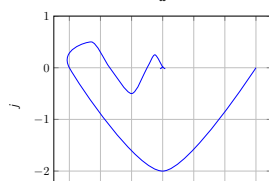
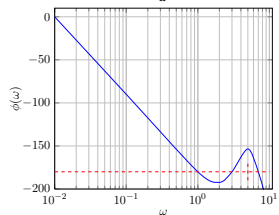
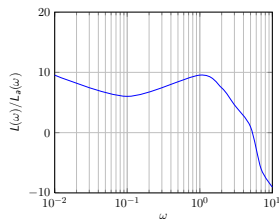
- 穿越频率 ω_x :
 $\phi(\omega_x) = (2k+1)\pi$

- Bode 判据:

- 最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = 0$, 则系统稳定

- 非最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = \frac{P}{2}$, 则系统稳定

Bode 稳定性判据



稳定性判断

- 截止频率 ω_c : $A(\omega_c) = 0$

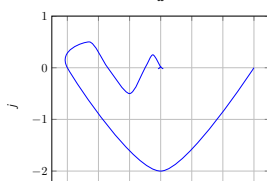
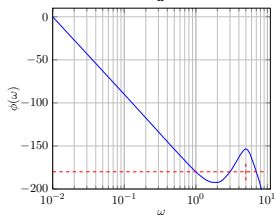
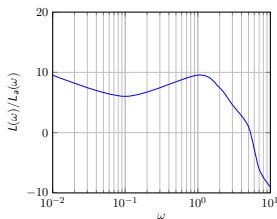
- 穿越频率 ω_x :

$$\phi(\omega_x) = (2k+1)\pi$$

- Bode 判据:

- 最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = 0$, 则系统稳定
- 非最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = \frac{P}{2}$, 则系统稳定

Bode 稳定性判据



稳定性判断

- 截止频率 ω_c : $A(\omega_c) = 0$
- 穿越频率 ω_x :

$$\phi(\omega_x) = (2k+1)\pi$$
- Bode 判据:
 - 最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = 0$, 则系统稳定
 - 非最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = \frac{P}{2}$, 则系统稳定