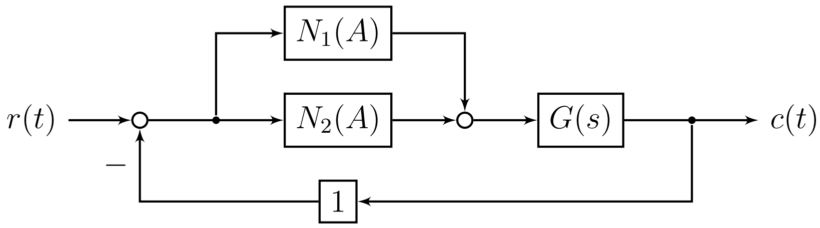
# 西北工业大学考试试题（卷）评分标准

2016 — 2017 学年第 1 学期

开课学院 航天学院 课程 自动控制理论 II 学时 32

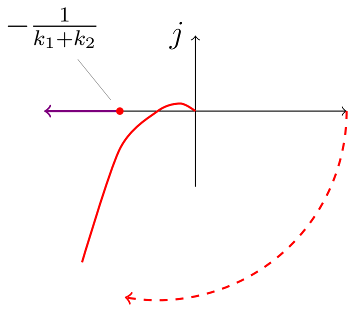
考试日期 考试时间 小时 考试形式（闭）（A）卷

一、(20 分) 已知控制系统结构图如下所示，已知 $G(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}$，非线性环节描述函数 $N_1(A)=\frac{k_1}{A}$, $N_2(A)=\frac{k_2}{A}$ $(A>1)$, 求使系统稳定无自振的 $k_1,k_2$ 范围。




答：两个非线性环节并联，其描述函数为两个环节描述函数之和。

$$
\begin{aligned}
N(A) &= N_1(A)+N_2(A) \\
&= \frac{k_1}{A}+\frac{k_2}{A} \\
-\frac{1}{N(A)} &= -\frac{A}{k_1+k_2} \\
\angle G(j\omega) &= -90^\circ - 2\angle(s+1) \\
\angle G(j\omega)|_{\omega=1} &= -180^\circ \\
G(j\omega)|_{\omega=1} &= -0.5
\end{aligned}
$$




当 $-\frac{1}{N(A)}<-0.5$ 时，系统稳定无自振，得：

$$
\begin{aligned}
-\frac{A}{k_1+k_2} &< -0.5 \\
0<k_1+k_2 &< 2A \\
0<k_1+k_2 &< 2
\end{aligned}
$$

二、（20 分）单位负反馈控制系统开环传递函数:

$$G(s)=\frac{10}{s(10s+1)}$$

串联校正网络：

$$G_c(s) = k \cdot \frac{10s+1}{as+1}$$

求解参数 $k, a$ 使校正后系统截止频率不变，相角裕度为 $45°$ 。

答：计算校正前截止频率：

$$\begin{aligned} |G(s)| &= 1 \\ \omega_c &= 1 \end{aligned}$$

根据相角裕度要求，得：

$$\begin{aligned} \angle(aj+1) &= 45° \\ a &= 1 \end{aligned}$$

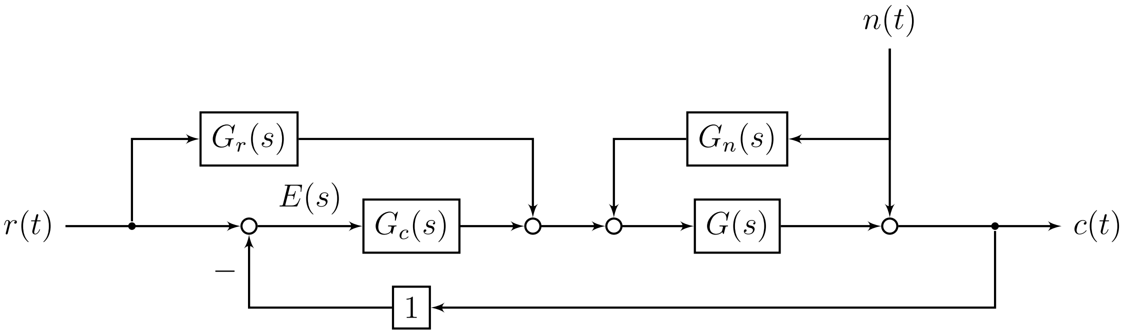
校正后前截止频率不变：

$$\begin{aligned} |G_c(\omega_c)G(\omega_c)| &= 1 \\ k &\approx 0.1 \end{aligned}$$

三、（20 分）已知控制系统结构图如下所示，已知

$$G(s) = \frac{1}{s}, G_c(s) = 1, G_r(s) = \frac{k_1 s}{T_1 s+1}, G_n(s) = \frac{k_2 s}{T_2 s+1}, (T_1 \geq 0, T_2 \geq 0)$$

当 $r(t) = t, n(t) = 1, (t > 0)$ 时，是否存在 $k_1, k_2$ 使稳态误差为零？当 $r(t) = sin(t), n(t) = sin(2t), (t > 0)$ 时，是否存在 $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$ 使系统稳态输出 $c(t)$ 满足 $|c(t) - sin(t)| < 0.01$ ？




答：

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1 - G_r(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} R(S) - \frac{1 + G_n(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} N(s) \\ &= \frac{1 - \frac{k_1 s}{(T_1 s+1)s}}{1 + \frac{1}{s}} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1 + \frac{k_2 s}{(T_2 s+1)s}}{1 + \frac{1}{s}} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{T_1 s + 1 - k_1}{(T_1 s+1)(s+1)s} - \frac{T_2 s + 1 + k_2}{(T_2 s+1)(s+1)} \end{aligned}$$

当 $k_1 = 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
sE(s) &= \frac{T_1 s}{(T_1 s+1)(s+1)} - \frac{s(T_2 s+1+k_2)}{(T_2 s+1)(s+1)} \\
\lim_{s\to 0} sE(s) &= 0
\end{aligned}
$$

系统稳态时，输出可由频域模型求解：

$$
\begin{aligned}
e(t) &= c(t) - r(t) \\
&= c(t) - sin(t) \\
E(j\omega) &= \frac{1 - \frac{k_1 j\omega}{(T_1 j\omega+1)j\omega}}{1+\frac{1}{j\omega}} R(j\omega) - \frac{1 + \frac{k_2 j\omega}{(T_2 j\omega+1)j\omega}}{1+\frac{1}{j\omega}} N(j\omega) \\
&= \frac{j\omega(T_1 j\omega + 1 - k_1)}{(T_1 j\omega+1)(j\omega+1)} R(j\omega) - \frac{j\omega(T_2 j\omega+1+k_2)}{(T_2 j\omega+1)(j\omega+1)} N(j\omega)
\end{aligned}
$$

为满足 $r(t) = sin(t), n(t) = sin(2t)$ 时，$|c(t) - sin(t)| < 0.01$ 要求

$$
\left.\frac{E(j\omega)}{R(j\omega)}\right|_{\omega=1} < 0.01, \left.\frac{E(j\omega)}{R(j\omega)}\right|_{\omega=2} < 0.01
$$

但与 $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ 矛盾，因此不存在满足要求的 $k_1, k_2$。
若不限制 $k_2 \geq 0$ , 当 $k_1 = 1, k_2 = -1$ 时

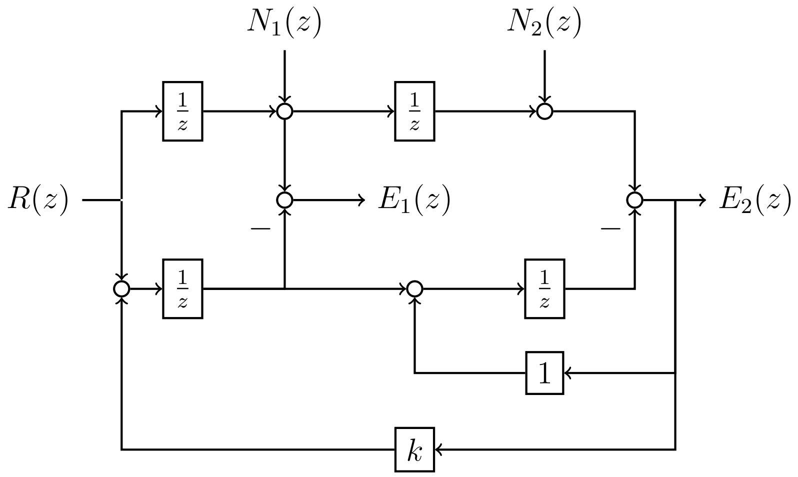
$$
E(j\omega) = \frac{-T_1\omega^2}{(T_1 j\omega+1)(j\omega+1)} R(j\omega) + \frac{T_2\omega^2}{(T_2 j\omega+1)(j\omega+1)} N(j\omega)
$$

$r(t) = sin(t), n(t) = sin(2t)$ 时，

$$
\begin{aligned}
|c(t) - sin(t)| &= |e(t)| \\
&\leq \left| \left.\frac{-T_1\omega^2}{(T_1 j\omega+1)(j\omega+1)}\right|_{\omega=1} + \left.\frac{T_2\omega^2}{(T_2 j\omega+1)(j\omega+1)}\right|_{\omega=2} \right| \\
&\leq \left| \frac{-T_1}{(T_1 j+1)(j+1)} \right| + \left| \frac{4T_2}{(2T_2 j+1)(2j+1)} \right|
\end{aligned}
$$

选取 $T_1 << 1, T_2 << 1$ ，得：$|c(t) - sin(t)| \approx 0,$ 满足 $|c(t) - sin(t)| < 0.01$

四、(20 分) 已知控制系统结构图如下所示，求 $E_1(z), E_2(z)$ ; 为使系统稳定，应如何选取 $k$ ？




解：
根据结构图可得：

$$
\begin{aligned}
E_1(z) &= R(z)z^{-1} + N_1(z) - R(z)z^{-1} - E_2(z)kz^{-1} \\
E_2(z) &= R(z)z^{-2} + N_2(z) + N_1(z)z^{-1} - R(z)z^{-2} - E_2(z)kz^{-2} - E_2(z)z^{-1}
\end{aligned}
$$

化简得：

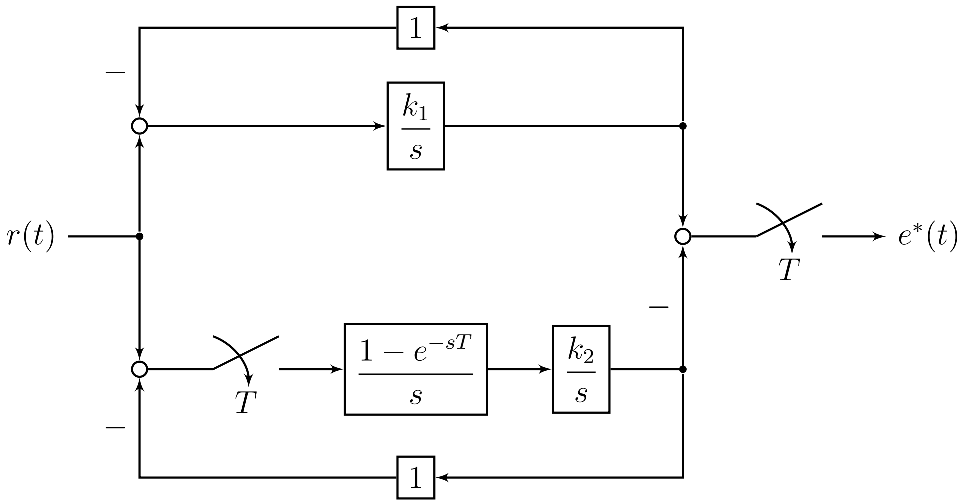
$$
\begin{aligned}
E_2(z) &= N_2(z) + N_1(z)z^{-1} - E_2(z)kz^{-2} - E_2(z)z^{-1} \\
&= \frac{N_2(z) + N_1(z)z^{-1}}{1 + kz^{-2} + z^{-1}} \\
&= \frac{z^2N_2(z) + zN_1(z)}{z^2 + z + k} \\
E_1(z) &= N_1(z) - E_2(z)kz^{-1} \\
&= N_1(z) - \frac{kzN_2(z) + kN_1(z)}{z^2 + z + k} \\
&= \frac{(z^2 + z)N_1(z) - kzN_2(z)}{z^2 + z + k}
\end{aligned}
$$

利用 $w$ 变换分析稳定性：

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + \frac{w+1}{w-1} + k = 0 \\
(w+1)^2 + (w+1)(w-1) + k(w-1)^2 = 0 \\
(2+k)w^2 + (2-2k)w + k = 0
\end{aligned}
$$

当 $0 < k < 1$ 时系统稳定。

五、(20 分) 已知控制系统结构图如下所示, 分析使系统稳定的 $k_1, k_2$ 取值范围; 若 $k_1 = 1$, 是否存在 $k_2$ 使 $e(nT) = 0$ ?




常见 $Z$ 变换表：

| $f(t)$ | $F(s)$ | $F(Z)$ |
|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $1$ |
| $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ |
| $a^{t/T}$ | $\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ |

答：由结构图可知：

$$
\begin{aligned}
R(s) &= \frac{1}{s} \\
E^*(s) &= \left[\frac{\frac{k_1}{s}}{1+\frac{k_1}{s}}R(s)\right]^* - \frac{\left[\frac{k_2}{s}\right]^*}{1+\left[\frac{k_2}{s}\right]^*}R^*(s) \\
&= \left[\frac{k_1}{s(s+k_1)}\right]^* - \frac{\left[\frac{(1-e^{-sT})k_2}{s^2}\right]^*}{1+\left[\frac{(1-e^{-sT})k_2}{s^2}\right]^*}R^*(s) \\
&= \left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+k_1}\right]^* - \frac{\left[\frac{(1-e^{-sT})k_2}{s^2}\right]^*}{1+\left[\frac{(1-e^{-sT})k_2}{s^2}\right]^*}R^*(s) \\
E(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-k_1T}z^{-1}} - \frac{\frac{(1-z^{-1})k_2Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}}{1+\frac{(1-z^{-1})k_2Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}}\frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-k_1T}z^{-1}} - \frac{k_2Tz^{-1}}{1-z^{-1}+k_2Tz^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-k_1T}z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}+k_2Tz^{-1}} \\
&= -\frac{1}{1-e^{-k_1T}z^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}+k_2Tz^{-1}} \\
e(nT) &= -e^{-nk_1T} + (1-k_2T)^n
\end{aligned}
$$

由 $e(nT)$ 表达式可知，当 $k_1 \in (0,\infty), k_2 \in (0,\frac{2}{T})$ 时系统稳定。当 $k_2 = \frac{1-e^{-k_1T}}{T}$ 时，$e(nT)=0$
。