线性系统的频域分析法

开环频率特性

邢超

Outline

Topic

开环系统 Nyquist 图 $G_o(s) = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu}(T_i s+1)}$

- 当 $\nu = 0$ 时, 为零型系统:

$$\begin{aligned}
A(\omega)\big|_{\omega=0} &= K \\
\phi(\omega)\big|_{\omega=0} &= 0 \\
\lim_{\omega\to\infty} A(\omega) &= 0 \\
\lim_{\omega\to\infty} \phi(\omega) &= -(n-m)\times\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

开环系统 Nyquist 图 (续) $G_o(s) = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n-\nu}(T_i s+1)}$

- 当 $\nu = 1$ 时, 为 I 型系统:

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0} A(\omega) &= \infty \\
\lim_{\omega\to 0} \phi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \\
\lim_{\omega\to \infty} A(\omega) &= 0 \\
\lim_{\omega\to \infty} \phi(\omega) &= -(n-m)\times\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

开环系统 Nyquist 图 (续)$G_o(s) = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{n-\nu}(T_i s+1)}$

- 当 $\nu = 2$ 时, 为 II 型系统:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0} A(\omega) &= \infty \\
\lim_{\omega\to 0} \phi(\omega) &= -\pi \\
\lim_{\omega\to \infty} A(\omega) &= 0 \\
\lim_{\omega\to \infty} \phi(\omega) &= -(n-m)\times\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

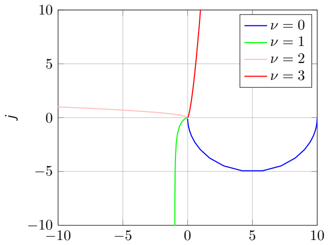
开环系统 Nyquist 图 (续) $G_o(s) = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(\tau_j s+1)}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{n-\nu}(T_i s+1)}$

- 当 $\nu = 3$ 时, 为 III 型系统:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0} A(\omega) &= \infty \\
\lim_{\omega\to 0} \phi(\omega) &= -\frac{3}{2}\pi \\
\lim_{\omega\to \infty} A(\omega) &= 0 \\
\lim_{\omega\to \infty} \phi(\omega) &= -(n-m)\times\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

开环系统 Nyquist 图，例 1

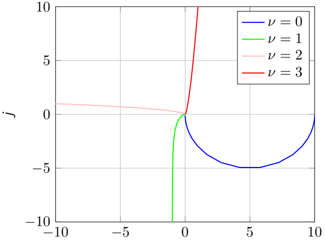
$$G_o(s) = \frac{10}{s^{\nu}(0.1s+1)}$$



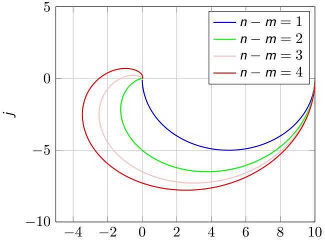
$$G_o(s) = \frac{10}{(0.1s+1)^n}$$

开环系统 Nyquist 图，例 1

$$G_o(s) = \frac{10}{s^{\nu}(0.1s+1)}$$



$$G_o(s) = \frac{10}{(0.1s+1)^n}$$



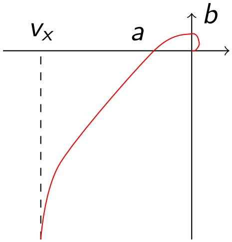
开环系统 Nyquist 图, 例 2: $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

- 绘制 Nyquist 图, 求出各特征点坐标:
- 由于 $\nu = 1$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0} A(\omega) &= \infty \\
\lim_{\omega\to 0} \phi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \\
\lim_{\omega\to \infty} A(\omega) &= 0 \\
\lim_{\omega\to \infty} \phi(\omega) &= -2\pi
\end{aligned}
$$

开环系统 Nyquist 图，例 2(续), $G(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

概略 Nyquist 图：



开环系统 Nyquist 图, 例 2(续), $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

- 起始点实部 v_x:

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{10}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)(4j\omega+1)} \\
&= \frac{10\omega(8\omega^2-7)+10(14\omega^2-1)j}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+16\omega^2)} \\
\lim_{\omega\to 0}\Re[G(j\omega)] &= -70
\end{aligned}
$$

开环系统 Nyquist 图, 例 2(续), $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

- 与实轴交点 a:

$$
\begin{aligned}
\Im[G(j\omega)] &= 0 \\
\frac{10(14\omega^2 - 1)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+16\omega^2)} &= 0 \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{14}} \\
G(j\sqrt{\frac{1}{14}}) &\approx -21.78
\end{aligned}
$$

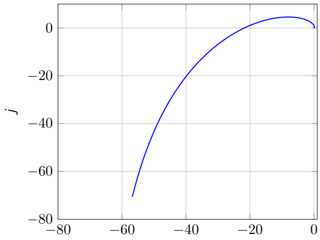
开环系统 Nyquist 图, 例 2(续), $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

- 与虚轴交点 b:

$$
\begin{aligned}
\Re[G(j\omega)] &= 0 \\
\frac{10\omega(8\omega^2-7)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+16\omega^2)} &= 0 \\
8\omega^2 - 7 &= 0 \\
\omega &= \sqrt{\frac{7}{8}} \\
G(j\sqrt{\frac{7}{8}}) &\approx 0.95j
\end{aligned}
$$

开环系统 Nyquist 图，例 2(续)，$G(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

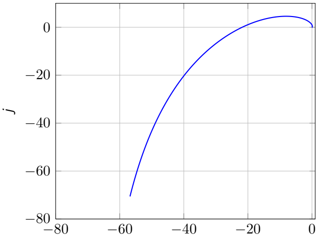
Nyquist 图



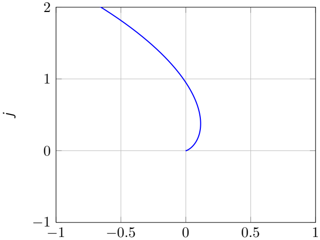
局部放大:

开环系统 Nyquist 图，例 2(续), $G(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(2s+1)(4s+1)}$

Nyquist 图



局部放大:



Topic

开环系统 Bode 图

$$
\begin{aligned}
G_o(s) &= G_1(s)G_2(s)G_3(s)\cdots Gn(s)\\
A(\omega) &= A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega)\cdots A_n(\omega)\\
L(\omega) &= 20\lg A_1(\omega)+\cdots+20\lg A_n(\omega)\\
\phi(\omega) &= \phi_1(\omega)+\cdots+\phi_n(\omega)
\end{aligned}
$$

- 结论:
  - 系统的低频段由系统的类型和开环增益 K 决定, 代表稳态性能. 由初始斜率可得系统类型.
  - 系统的高频段反映系统的抗噪能力, 下降速度要快.

开环系统 Bode 图

$$
\begin{aligned}
G_o(s) &= G_1(s)G_2(s)G_3(s)\cdots Gn(s) \\
A(\omega) &= A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega)\cdots A_n(\omega) \\
L(\omega) &= 20\lg A_1(\omega)+\cdots+20\lg A_n(\omega) \\
\phi(\omega) &= \phi_1(\omega)+\cdots+\phi_n(\omega)
\end{aligned}
$$

- 结论:
  - 系统的低频段由系统的类型和开环增益 K 决定, 代表稳态性能. 由初始斜率可得系统类型.
  - 系统的高频段反映系统的抗噪能力, 下降速度要快.

开环系统 Bode 图

$$
\begin{aligned}
G_o(s) &= G_1(s)G_2(s)G_3(s)\cdots Gn(s) \\
A(\omega) &= A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega)\cdots A_n(\omega) \\
L(\omega) &= 20\lg A_1(\omega)+\cdots+20\lg A_n(\omega) \\
\phi(\omega) &= \phi_1(\omega)+\cdots+\phi_n(\omega)
\end{aligned}
$$

- 结论:
  - 系统的低频段由系统的类型和开环增益 K 决定, 代表稳态性能. 由初始斜率可得系统类型.
  - 系统的高频段反映系统的抗噪能力, 下降速度要快.

开环系统 Bode 图，例 1: $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

绘制 Bode 图:

1. 改写为标准形式: $G_o(s) = \frac{7.5(\frac{s}{3}+1)}{s(0.5s+1)(0.5s^2+0.5s+1)}$
2. 写出转折频率: $\omega = \sqrt{2}, 2, 3$
3. 找到点 $(1, 20\lg K)$，其中 $K = 7.5$
4. 过点 $(1, 20\lg K)$ 作斜率为 $-20dB/dec$ 的直线
5. 找转折点依次做直线即可

开环系统 Bode 图, 例 1: $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

绘制 Bode 图:

1. 改写为标准形式: $G_o(s) = \frac{7.5(\frac{s}{3}+1)}{s(0.5s+1)(0.5s^2+0.5s+1)}$
2. 写出转折频率: $\omega = \sqrt{2}, 2, 3$
3. 找到点 $(1, 20\lg K)$, 其中 $K = 7.5$
4. 过点 $(1, 20\lg K)$ 作斜率为 $-20dB/dec$ 的直线
5. 找转折点依次做直线即可

开环系统 Bode 图, 例 1: $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

绘制 Bode 图:

1. 改写为标准形式: $G_o(s) = \frac{7.5(\frac{s}{3}+1)}{s(0.5s+1)(0.5s^2+0.5s+1)}$
2. 写出转折频率: $\omega = \sqrt{2}, 2, 3$
3. 找到点 $(1, 20\lg K)$, 其中 $K = 7.5$
4. 过点 $(1, 20\lg K)$ 作斜率为 $-20dB/dec$ 的直线
5. 找转折点依次做直线即可

开环系统 Bode 图, 例 1: $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

绘制 Bode 图:

1. 改写为标准形式: $G_o(s) = \frac{7.5(\frac{s}{3}+1)}{s(0.5s+1)(0.5s^2+0.5s+1)}$
2. 写出转折频率: $\omega = \sqrt{2}, 2, 3$
3. 找到点 $(1, 20\lg K)$ ，其中 $K = 7.5$
4. 过点 $(1, 20\lg K)$ 作斜率为 $-20dB/dec$ 的直线
5. 找转折点依次做直线即可

开环系统 Bode 图，例 1: $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

绘制 Bode 图:

1. 改写为标准形式: $G_o(s) = \frac{7.5(\frac{s}{3}+1)}{s(0.5s+1)(0.5s^2+0.5s+1)}$
2. 写出转折频率: $\omega = \sqrt{2}, 2, 3$
3. 找到点 $(1, 20\lg K)$, 其中 $K = 7.5$
4. 过点 $(1, 20\lg K)$ 作斜率为 $-20dB/dec$ 的直线
5. 找转折点依次做直线即可

开环系统 Bode 图, 例 1: $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

绘制 Bode 图:

1. 改写为标准形式: $G_o(s) = \frac{7.5(\frac{s}{3}+1)}{s(0.5s+1)(0.5s^2+0.5s+1)}$
2. 写出转折频率: $\omega = \sqrt{2}, 2, 3$
3. 找到点 $(1, 20\lg K)$, 其中 $K = 7.5$
4. 过点 $(1, 20\lg K)$ 作斜率为 $-20dB/dec$ 的直线
5. 找转折点依次做直线即可

开环系统 Bode 图，例 1(续): $G_o(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$

Bode 图