# 最小二乘法辨识

## 改进算法

邢超

西北工业大学航天学院

# 主要内容

1. 辅助变量法
2. 广义最小二乘法
3. 夏氏法
4. 增广矩阵法

# 辅助变量法



- 辨识精度高于基本最小二乘估计法；
- 计算简单；
- 渐近无偏估计；
- 需构造辅助变量矩阵。

# 辅助变量法原理

$$
\begin{aligned}
Y &= \Phi\theta + \xi \\
\Phi^{\mathrm{T}}Y &= \Phi^{\mathrm{T}}\Phi\theta + \Phi^{\mathrm{T}}\xi \\
(\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}Y &= (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\Phi\theta + (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\xi \\
(\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}Y &= \theta + (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\xi
\end{aligned}
$$

# 辅助变量法原理



$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y} &= \Phi\theta + \xi \\
\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} &= \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi\theta + \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\xi \\
(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} &= (\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\Phi\theta + (\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\xi \\
(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} &= \theta + (\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\xi
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\xi) &= 0 \\
\mathrm{E}(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi) &= \mathrm{Q}
\end{aligned}
$$

其中 Q 非奇异。

# 渐近无偏性



$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\hat{\theta}_{\mathrm{IV}}] &= \mathrm{E}[(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}] \\
&= \mathrm{E}[(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}(\Phi\theta+\xi)] \\
&= \theta + \mathrm{E}[(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\xi] \\
\lim_{\mathrm{N}\to\infty}\mathrm{E}[\hat{\theta}_{\mathrm{IV}}] &= \theta + \mathrm{E}[(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}]\mathrm{E}[\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\xi] \\
&= \theta
\end{aligned}
$$

# 辅助变量法的构造方法



- 递推辅助变量参数估计法
- 自适应滤波法
- 纯滞后法
- 塔利原理法

# 递推辅助变量参数估计法:Z



$$
\begin{aligned}
\hat{Y} &= Z\hat{\theta} \\
Z &= \begin{bmatrix} -\hat{y}_n & \cdots & -\hat{y}_1 & u_{n+1} & \cdots & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\hat{y}_{n+N-1} & \cdots & -\hat{y}_N & u_{n+N} & \cdots & u_N \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# 递推辅助变量参数估计法: 具体步骤



- 初始化：应用基本最小二乘法估计 $\hat{\theta}$, 取 $\mathrm{Z} = \Phi$，
- 递推：
  - 更新 Z

$$\hat{\mathrm{Y}} = \mathrm{Z}\hat{\theta}$$

  - 计算 $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = (\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$$

  - 重复迭代，直至 $\hat{\theta}$ 收敛。

在递推辅助变量参数估计法基础上取:

$$\hat{\theta}_{\mathrm{k}} = (1-\alpha)\hat{\theta}_{\mathrm{k}-1} + \alpha\hat{\theta}_{\mathrm{k}-\mathrm{d}}$$

$\alpha$: $\in [0.01, 0.1]$

d: $\in [0, 10]$,

# 纯滞后法



$$\hat{y}_k = u_{k-m}$$

$d = n$ 时，有：

$$Z = \begin{bmatrix} -u_0 & \cdots & -u_{1-n} & u_{n+1} & \cdots & u_1 \\ -u_1 & \cdots & -u_{2-n} & u_{n+2} & \cdots & u_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -u_{N-1} & \cdots & -u_{N-n} & u_{n+N} & \cdots & u_2 \end{bmatrix}$$

# 塔利（Tally）原理

若噪声 $\xi_k$ 可看作模型:

$$\xi_k = c(z^{-1})n_k$$

的输出，其中 $n_k$ 是 0 均值不相关随机噪声。且:

$$c(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_m z^{-m}$$

则可取:

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= y_{k-m} \\ Z &= \begin{bmatrix} -y_{n-m} & \cdots & -y_{1-m} & u_{n+1} & \cdots & u_1 \\ -y_{n+1-m} & \cdots & -y_{2-m} & u_{n+2} & \cdots & u_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -y_{n+N-1-m} & \cdots & -y_{N-m} & u_{n+N} & \cdots & u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# 递推辅助变量法

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_N &= P_N Z_N^T Y_N \\
P_N &= (Z_N^T \Phi_N)^{-1} \\
\hat{\theta}_{N+1} &= P_{N+1} Z_{N+1}^T Y_{N+1}
\end{aligned}
$$

# 递推辅助变量法



$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_N &= P_N Z_N^T Y_N \\
P_N &= (Z_N^T \Phi_N)^{-1} \\
\hat{\theta}_{N+1} &= P_{N+1} Z_{N+1}^T Y_{N+1} \\
P_{N+1} &= \left( \begin{bmatrix} Z_N^T & z_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Psi_{N+1}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= (P_N^{-1} + z_{N+1} \Psi_{N+1}^T)^{-1} \\
\Psi_{N+1} &= \begin{bmatrix} -y_{n+N} & \cdots & -y_{N+1} & u_{n+N+1} & \cdots & u_{N+1} \end{bmatrix}^T \\
z_{N+1} &= \begin{bmatrix} -\hat{y}_{n+N} & \cdots & -\hat{y}_{N+1} & u_{n+N+1} & \cdots & u_{N+1} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

# 递推辅助变量法



利用矩阵求逆引理可推导出递推计算公式：

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{N+1} &= \hat{\theta}_N + K_{N+1}(y_{N+1} - \psi^T_{N+1}\hat{\theta}_N) \\
P_{N+1} &= P_N - K_{N+1}\Psi^T_{N+1}P_N \\
K_{N+1} &= P_N z_{N+1}(1 + \Psi^T_{N+1}P_N z_{N+1})^{-1}
\end{aligned}$$

- 初始参数参照递推最小二乘法选取
- 对初始值 $P_0$ 的选取比较敏感，最好在前 50~100 个点采用递推最小二乘，然后转换到辅助变量法

# 广义最小二乘法



- 建立滤波模型，对数据进行白化处理
- 方法较复杂，计算量较大
- 迭代算法收敛性未证明

# 广义最小二乘法: 系统模型



$$
\begin{aligned}
a(z^{-1})y_k &= b(z^{-1})u_k + \xi_k \\
f(z^{-1}) &= 1 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_m z^{-m} \\
\xi_k &= \frac{1}{f(z^{-1})}\varepsilon_k \\
f(z^{-1})\xi_k &= \varepsilon_k \\
\xi_k &= -f_1\xi_{k-1} - \cdots - f_m\xi_{k-m} + \varepsilon_k
\end{aligned}
$$

# 广义最小二乘法: 系统模型



$$
\begin{aligned}
a(z^{-1})f(z^{-1})y_k &= b(z^{-1})f(z^{-1})u_k + \varepsilon_k \\
a(z^{-1})\bar{y}_k &= b(z^{-1})\bar{u}_k + \varepsilon_k \\
\bar{y}_k &= f(z^{-1})y_k \\
&= y_k + f_1 y_{k-1} + \cdots + f_m y_{k-m} \\
\bar{u}_k &= f(z^{-1})u_k \\
&= u_k + f_1 u_{k-1} + \cdots + f_m u_{k-m}
\end{aligned}
$$

# 广义最小二乘法: 噪声模型参数估计



$$
\begin{aligned}
\xi &= \Omega f + \varepsilon \\
\xi &= \begin{bmatrix} \xi_{n+1} & \xi_{n+2} & \cdots & \xi_{n+N} \end{bmatrix}^T \\
f &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \end{bmatrix}^T \\
\varepsilon &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} & \varepsilon_{n+2} & \cdots & \varepsilon_{n+N} \end{bmatrix}^T \\
\Omega &= \begin{bmatrix} -\xi_n & \cdots & -\xi_{n+1-m} \\ -\xi_{n+1} & \cdots & -\xi_{n+2-m} \\ \vdots & & \vdots \\ -\xi_{n+N-1} & \cdots & -\xi_{n+N-m} \end{bmatrix} \\
\hat{f} &= (\Omega^T\Omega)^{-1}\Omega^T\xi
\end{aligned}
$$

# 广义最小二乘法: 步骤

- 初始化，取
$$\hat{f}(z^{-1}) = 1$$
- 迭代
  - 滤波:
$$\begin{aligned} \bar{y}_k &= \hat{f}(z^{-1}) y_k \\ \bar{u}_k &= \hat{f}(z^{-1}) u_k \end{aligned}$$
  - 最小二乘估计:
$$\hat{\theta} = (\bar{\Phi}^T \bar{\Phi})^{-1} \bar{\Phi}^T \bar{Y}$$
  - 残差:
$$\hat{\xi} = Y - \Phi \hat{\theta}$$
  - 用残差 $\hat{\xi}$ 代替 $\xi$ 计算 $\hat{f}$:
$$\hat{f} = (\hat{\Omega}^T \hat{\Omega})^{-1} \hat{\Omega}^T e$$

# 递推广义最小二乘法



- 包括参数 $\hat{\theta}$ 的递推及噪声模型参数 $\hat{f}$ 的递推
- 离线与递推计算结果不完全一样
- 主要步聚：
  - 初始化，参照递推最小二乘选取初始值
  - 滤波，计算新的 $\bar{y}_k, \bar{u}_k$
  - 按递推最小二乘算法计算 $\hat{\theta}$ 与 $\hat{f}$

# 递推广义最小二乘法

- 初始化：

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_0 &= 0\\ P_0^{(\theta)} &= c_1^2 I\\ \hat{f}_{(0)} &= 0\\ P_0^{(f)} &= c_2^2 I\end{aligned}$$

- 滤波

$$\begin{aligned}\bar{y}_{N+1} &= \hat{f}_{(N)}(z^{-1})y_{N+1}\\ &= \hat{f}_{(N)}(z^{-1})y_{(n+N+1)}\\ \bar{u}_{N+1} &= \hat{f}_{(N)}(z^{-1})u_{N+1}\\ &= \hat{f}_{(N)}(z^{-1})u_{(n+N+1)}\end{aligned}$$

# 递推广义最小二乘法

- 计算 $\hat{\theta}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_{N+1} &= \hat{\theta}_N + K^{(\theta)}_{N+1}(\bar{y}_{N+1} - \bar{\Psi}^T_{N+1}\hat{\theta}_N) \\
K^{(\theta)}_{N+1} &= P^{(\theta)}_N \bar{\Psi}_{N+1}(1 + \bar{\Psi}^T_{N+1}P^{(\theta)}_N \bar{\Psi}_{N+1})^{-1} \\
P^{(\theta)}_{N+1} &= P^{(\theta)}_N - K^{(\theta)}_{N+1}\bar{\Psi}^T_{N+1}P^{(\theta)}_N \\
\bar{\Psi}_{N+1} &= \begin{bmatrix} -\bar{y}_{n+N} & \cdots & -\bar{y}_{N+1} & \bar{u}_{n+N+1} & \cdots & \bar{u}_{N+1} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

# 递推广义最小二乘法



- 计算残差 $\hat{\xi}_{N+1}$

$$\hat{\xi}_{N+1} = y_{N+1} - \Psi_{N+1}\hat{\theta}_{N+1}$$

- 计算 $\hat{f}$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_{N+1} &= \hat{f}_N + K^{(f)}_{N+1}(\hat{\xi}_{N+1} - \hat{\omega}^T_{N+1}\hat{f}_N) \\
K^{(f)}_{N+1} &= P^{(f)}_N \hat{\omega}_{N+1}(1 + \hat{\omega}^T_{N+1}P^{(f)}_N\hat{\omega}_{N+1})^{-1} \\
P^{(f)}_{N+1} &= P^{(f)}_N - K^{(f)}_{N+1}\hat{\omega}^T_{N+1}P^{(f)}_N \\
\hat{\omega}_{N+1} &= \begin{bmatrix} -\hat{\xi}_{n+N} & \cdots & -\hat{\xi}_{n+N+1-m} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

# 夏氏法



- 交替求解系统模型与噪声模型参数
- 分为夏式修正法和夏式改良法两种
- 递推算法可推广至 MIMO 系统
- 不需对数据进行反复过滤，计算效率较高
- 估计结果较好

## 夏氏法: 系统模型

$$
\begin{aligned}
a(z^{-1})y(k) &= b(z^{-1})u(k) + \xi_k \\
\xi_k &= \frac{\varepsilon(k)}{f(z^{-1})} \\
a(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \\
b(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \\
f(z^{-1}) &= 1 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_m z^{-m}
\end{aligned}
$$

# 夏氏法: 系统模型



$$
\begin{aligned}
a(z^{-1})y(k) &= b(z^{-1})u(k) + \xi_k \\
\xi_k &= \frac{\varepsilon(k)}{f(z^{-1})} \\
a(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \\
b(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \\
f(z^{-1}) &= 1 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_m z^{-m} \\
\xi_k &= (1 - f(z^{-1})\xi_k + \varepsilon_k \\
a(z^{-1})y(k) &= b(z^{-1})u(k) + (1 - f(z^{-1}))\xi_k + \varepsilon_k
\end{aligned}
$$

# 夏氏法：系统模型向量表示



$$
\begin{aligned}
y_N &= y_{(n+N)} \\
&= \Psi_N^T\theta + \omega_N^T f + \varepsilon_N \\
f &= \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_m \end{bmatrix}^T \\
\Psi_N &= \begin{bmatrix} -y_{(n+N-1)} & \cdots & -y_{(N)} & u_{(n+N)} & \cdots & u_{(N)} \end{bmatrix}^T \\
\omega_N &= \begin{bmatrix} -\xi_{(n+N-1)} & \cdots & -\xi_{(n+N-m)} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

# 夏氏法：参数求解



$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{y}_\mathrm{N} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Psi_1^\mathrm{T} & \omega_1^\mathrm{T} \\ \vdots & \vdots \\ \Psi_\mathrm{N}^\mathrm{T} & \omega_\mathrm{N}^\mathrm{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathrm{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_\mathrm{N} \end{bmatrix} \\
\mathrm{Y} &= \begin{bmatrix} \Phi & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \mathrm{f} \end{bmatrix} + \varepsilon \\
\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\mathrm{f}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi^\mathrm{T}\Phi & \Phi^\mathrm{T}\Omega \\ \Omega^\mathrm{T}\Phi & \Omega^\mathrm{T}\Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi^\mathrm{T}\mathrm{Y} \\ \Omega^\mathrm{T}\mathrm{Y} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

# 夏氏法：夏式偏差修正法



由分块矩阵求逆：

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\mathrm{f}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi^{\mathrm{T}}\Phi & \Phi^{\mathrm{T}}\Omega \\ \Omega^{\mathrm{T}}\Phi & \Omega^{\mathrm{T}}\Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \\ \Omega^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{P_N}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} - \mathrm{P_N}\Phi^{\mathrm{T}}\Omega\mathrm{D}^{-1}\Omega^{\mathrm{T}}\mathrm{MY} \\ \mathrm{D}^{-1}\Omega^{\mathrm{T}}\mathrm{MY} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{\mathrm{LS}} - \mathrm{P_N}\Phi^{\mathrm{T}}\Omega\hat{\mathrm{f}} \\ \mathrm{D}^{-1}\Omega^{\mathrm{T}}\mathrm{MY} \end{bmatrix} \\
\mathrm{P_N} &= (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1} \\
\mathrm{M} &= \mathrm{I} - \Phi(\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}} \\
\mathrm{D} &= \Omega^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\Omega
\end{aligned}
$$

# 夏氏法：夏式偏差修正法迭代步骤

- 初始化：计算基本最小二乘估计

$$\hat{\theta} = (\Phi^{T}\Phi)^{-1}\Phi^{T}Y$$

- 迭代
  - 计算残差 $\hat{\xi}$ 构造 $\hat{\Omega}$

$$\hat{\xi} = Y - \Phi\hat{\theta}$$

  - 计算 $\hat{f}$, 对 $\hat{\theta}$ 进行修正

$$\begin{aligned}\hat{f} &= D^{-1}\hat{\Omega}^{T}MY \\ \hat{\theta} &= \hat{\theta} - (\Phi^{T}\Phi)^{-1}\Phi^{T}\hat{\Omega}\hat{f}\end{aligned}$$

# 夏氏法：夏氏改良法



用 $\hat{\theta}$ 代替 $\theta$：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y} &= \begin{bmatrix}\Phi & \Omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\theta} \\ \mathrm{f}\end{bmatrix} + \varepsilon \\
&= \Phi\hat{\theta} + \Omega\mathrm{f} + \varepsilon \\
\mathrm{Y} - \Phi\hat{\theta} &= \Omega\mathrm{f} + \varepsilon
\end{aligned}
$$

可得 f 的最小二乘估计：

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathrm{f}} &= (\hat{\Omega}^{\mathrm{T}}\hat{\Omega})^{-1}\hat{\Omega}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Y} - \Phi\hat{\theta}) \\
\hat{\theta} &= \hat{\theta} - (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\Omega\hat{\mathrm{f}}
\end{aligned}
$$

# 夏氏法：夏式改良法迭代步骤

- 初始化：计算基本最小二乘估计

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

- 迭代
  - 计算残差 $\hat{\xi}$ 构造 $\hat{\Omega}$

$$\hat{\xi} = Y - \Phi\hat{\theta}$$

  - 计算 $\hat{f}$, 对 $\hat{\theta}$ 进行修正

$$\begin{aligned}\hat{f} &= (\hat{\Omega}^T\hat{\Omega})^{-1}\hat{\Omega}^T(Y - \Phi\hat{\theta}) \\ \hat{\theta} &= \hat{\theta} - (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\hat{\Omega}\hat{f}\end{aligned}$$

# 夏氏法：递推夏氏法

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &= \begin{bmatrix} \Phi & \hat{\Omega} \end{bmatrix} \\
\tilde{\theta} &= \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \mathrm{f} \end{bmatrix} \\
\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{N+1}} &= \tilde{\theta}_{\mathrm{N}} + \mathrm{K}_{\mathrm{N+1}}(\mathrm{y}_{\mathrm{N+1}} - \tilde{\Psi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{N+1}}\tilde{\theta}_{\mathrm{N}}) \\
\mathrm{P}_{\mathrm{N+1}} &= \mathrm{P}_{\mathrm{N}} - \mathrm{K}_{\mathrm{N+1}}\tilde{\Psi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{N+1}}\mathrm{P}_{\mathrm{N}} \\
\mathrm{K}_{\mathrm{N+1}} &= \mathrm{P}_{\mathrm{N}}\tilde{\Psi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{N+1}}(1 + \tilde{\Psi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{N+1}}\mathrm{P}_{\mathrm{N}}\tilde{\Psi}_{\mathrm{N+1}})^{-1}
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}_{\mathrm{N}} &= \tilde{\Psi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{N}}\tilde{\theta} + \hat{\varepsilon}_{(\mathrm{n+N})} \\
\tilde{\Psi}_{\mathrm{N}} &= \begin{bmatrix} \Psi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{N}} & \hat{\omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{N}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\Psi_{\mathrm{N}} &= \begin{bmatrix} -\mathrm{y}_{(\mathrm{n+N-1})} & \cdots & -\mathrm{y}_{(\mathrm{N})} & \mathrm{u}_{(\mathrm{n+N})} & \cdots & \mathrm{u}_{(\mathrm{N})} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\hat{\omega}_{\mathrm{N}} &= \begin{bmatrix} \hat{\xi}_{(\mathrm{n+N-1})} & \cdots & \hat{\xi}_{(\mathrm{n+N-m})} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\hat{\xi}_{\mathrm{k}} &= \mathrm{y}_{\mathrm{k}} - \Psi_{\mathrm{k}}\hat{\theta}
\end{aligned}
$$

# 增广矩阵法



- 将噪声模型参数扩充到被辨识参数向量中
- 系统参数与噪声参数同时辨识
- 应用广泛，算法收敛性好
- 实际算法中常采用递推方法

# 增广矩阵法: 系统模型

$$
\begin{aligned}
a(z^{-1})y(k) &= b(z^{-1})u(k) + c(z^{-1})\varepsilon(k) \\
a(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \\
b(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \\
c(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n}
\end{aligned}
$$

# 增广矩阵法：系统模型向量表示

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y_N} &= \mathrm{y_{(n+N)}} \\
&= \Psi_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\theta + \varepsilon_{\mathrm{(n+N)}} \\
&= \begin{bmatrix}\Psi_{\mathrm{N,(y,u)}}^{\mathrm{T}} & \Psi_{\mathrm{N},\xi}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{\mathrm{(y,u)}} \\ \theta_\xi\end{bmatrix} + \varepsilon_{\mathrm{N}} \\
\theta &= \begin{bmatrix}\theta_{\mathrm{(y,u)}} & \theta_\xi\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\theta_{\mathrm{(y,u)}} &= \begin{bmatrix}\mathrm{a_1} & \cdots & \mathrm{a_n} & \mathrm{b_0} & \cdots & \mathrm{b_n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\theta_\xi &= \begin{bmatrix}\mathrm{c_1} & \cdots & \mathrm{c_n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\Psi_{\mathrm{N}} &= \begin{bmatrix}\Psi_{\mathrm{N,(y,u)}} & \Psi_{\mathrm{N},\xi}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\Psi_{\mathrm{N,(y,u)}} &= \begin{bmatrix}-\mathrm{y_{(n+N-1)}} & \cdots & -\mathrm{y_{(N)}} & \mathrm{u_{(n+N)}} & \cdots & \mathrm{u_{(N)}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\Psi_{\mathrm{N},\xi} &= \begin{bmatrix}\varepsilon_{\mathrm{(n+N-1)}} & \cdots & \varepsilon_{\mathrm{(N)}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

# 增广矩阵法：参数求解



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^T_{1,(y,u)} & \Psi^T_{1,\xi} \\ \vdots & \vdots \\ \Psi^T_{N,(y,u)} & \Psi^T_{N,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{(y,u)} \\ \theta_\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \Phi_{(y,u)} & \Phi_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{(y,u)} \\ \theta_\xi \end{bmatrix} + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_{(y,u)} \\ \hat{\theta}_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T_{(y,u)}\Phi_{(y,u)} & \Phi^T_{(y,u)}\Phi_\xi \\ \Phi^T_\xi\Phi_{(y,u)} & \Phi^T_\xi\Phi_\xi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi^T_{(y,u)}Y \\ \Phi^T_\xi Y \end{bmatrix}$$

# 增广矩阵法：递推方程



以 $\hat{\varepsilon}$ 代替 $\varepsilon$：

$$
\begin{aligned}
y_N &= \hat{\Psi}_N^T \hat{\theta} + \hat{\varepsilon}_{(n+N)} \\
\hat{\Psi}_N &= \begin{bmatrix} -y_{(n+N-1)} & \cdots & -y_{(N)} & u_{(n+N)} & \cdots & u_{(N)} & \hat{\epsilon}_N^T \end{bmatrix}^T \\
\hat{\epsilon}_N &= \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{(n+N-1)} & \cdots & \hat{\varepsilon}_{(N)} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

可得递推公式：

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_{N+1}^T &= \hat{\theta}_N + K_{N+1}(y_{N+1} - \hat{\Psi}_{N+1}^T \hat{\theta}_N) \\
P_{N+1} &= P_N - K_{N+1} \hat{\Psi}_{N+1}^T P_N \\
K_{N+1} &= P_N \hat{\Psi}_{N+1}^T (1 + \hat{\Psi}_{N+1}^T P_N \hat{\Psi}_{N+1})^{-1}
\end{aligned}
$$