系统辨识 MLE 2012



极大似然法辨识

邢超

极大似然法辨识

邢超

西北工业大学航天学院

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛頓 -拉卜森逆推公式

基本思想



极大似然法辨识

邢超

辨识准则 观测值的出现概率最大似然函数 观察值的概率密度函数

19 71

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森递推公式

方法特点



极大似然法辨识

邢超

- ① 适用于 ξ(k) 相关情况;
- ② 当系统信噪比较小时有较好的估计效果;
- ◎ 算法稳定度好;
- 有递推算法;
- ⑤ 实际工程中广泛使用

. 4 - 1

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 在色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛頓 -拉卜森递推公式



极大似然法辨识

邢超

设某离散随机过程 $\{V_k\}$ 与待辨识参数 θ 有关,其概率分布密度 $f(V_k|\theta)$ 已知,若测得 n 个独立的观测值 V_1,V_2,\cdots,V_n ,其分布密度为: $f(V_1|\theta),\cdots,f(V_n|\theta)$,定义似然函数 L 为:

$$L(V_1,\cdots,V_n|\theta) = f(V_1|\theta) \cdot f(V_2|\theta) \cdots f(V_n|\theta)$$

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛頓 -拉卜森送推公式

极大似然估计



辨识 θ 的原则就是使得L达到极大值,即:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta} = 0$$

通常对 L 取对数:

$$\ln L = \ln f(V_1|\theta) + \dots + \ln f(V_n|\theta)$$

求解:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$$

所得 θ 即为极大似然估计 $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$

极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识

有色噪声情况 递推极大似然法

近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森递推公式

差分方程的极大似然辨识:系统模型(白噪声情况)



极大似然法辨识

邢超

系统差分方程:

$$a(z^{-1})y(k) = b(z^{-1})u(k) + \xi(k)$$

式中, $\xi(k)$ 为高斯白噪声序列且与 u(k) 无关。以向量形式表示:

$$Y_{N} = \Phi_{N} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}$$

简介

极大似然原理

极大似然辨识

白噪声情况

有色噪声情况

遊推极大似然法 近似的選推极大似然法 牛頓 -拉卜森選推公式

差分方程的极大似然辨识: 残差(白噪声情况)

系统估计残差:



极大似然法辨识

邢詔

$e_N = Y_N - \Phi_N \hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$e_{N} = [e(n+1), e(n+2), \cdots, e(n+N)]^{T}$$

由于 $\xi(k)$ 为高斯白噪声,故假设 e(k) 也为高斯白噪声。 设 e(k) 方差为 σ^2 。概率密度函数为:

$$p(e(k)|\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{e^2(k)}{2\sigma^2}}$$

简介

极大似然原理

极大似然辨识

白噪声情况 右色噪声情况.

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森遂推公式

差分方程的极大似然辨识:似然函数(白噪声情况)



似然函数为:

极大似然法辨识 邢超

$$\begin{split} L(Y_N|\hat{\theta}) &= \prod_{k=n+1}^{n+1} p(e(k)|\hat{\theta}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} exp[-\frac{\sum e^2(k)}{2\sigma^2}] \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} exp[-\frac{(Y_N - \Phi_N \hat{\theta})^T (Y_N - \Phi_N \hat{\theta})}{2\sigma^2}] \end{split}$$

简介

极大似然原理

极大似然辨识

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛頓 -拉卜森递推公式

 $\ln L(Y_{N}|\hat{\theta}) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma^{2} - \frac{(Y_{N} - \Phi_{N}\hat{\theta})^{T}(Y_{N} - \Phi_{N}\hat{\theta})}{2\sigma^{2}}$

差分方程的极大似然辨识: 似然函数 (白噪声情况)



则依极大似然辨识原理有:

$$\begin{split} \frac{\partial \ln L(Y_N|\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} &= \frac{\Phi_N^T Y_N - \Phi_N^T \Phi_N \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sigma^2} = 0\\ \frac{\partial \ln L(Y_N|\hat{\theta})}{\partial \hat{\sigma}^2} &= -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{(Y_N - \Phi_N \hat{\boldsymbol{\theta}})^T (Y_N - \Phi_N \hat{\boldsymbol{\theta}})}{2\sigma^4} = 0 \end{split}$$

解上述方程有:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = (\boldsymbol{\Phi}_{N}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{N})^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{N}^{T}Y_{N}
\sigma^{2} = \frac{(Y_{N} - \boldsymbol{\Phi}_{N}\hat{\boldsymbol{\theta}})^{T}(Y_{N} - \boldsymbol{\Phi}_{N}\hat{\boldsymbol{\theta}})}{N}$$

可见在 $\xi(k)$ 为高斯白噪声序列这一特殊情况下,极大似然辨识与一般最小二乘法辨识具有相同结果。

极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的选推极大似然法 牛頓 -拉卜森选推公式

差分方程的极大似然辨识:系统模型(有色噪声情况)



极大似然法辨识

邢超

$$a(z^{-1})y(k) = b(z^{-1})u(k) + c(z^{-1})\varepsilon(k)$$

其中:

$$\begin{array}{rcl} a(z^{-1}) & = & 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ b(z^{-1}) & = & b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \\ c(z^{-1}) & = & 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n} \end{array}$$

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的选维极大似然法 牛顿 -拉卜森选维公式

差分方程的极大似然辨识:预测误差(有色噪声情况)

预测误差:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$$

其向量形式为:

$$e_N = Y_N - \Phi_N \hat{\theta}$$

其中:

$$\begin{split} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= [\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n, \hat{b}_0, \cdots, \hat{b}_n, \hat{c}_1, \cdots, \hat{c}_n]^T \\ Y_N &= [y(n+1), \cdots, y(n+N)]^T \\ e_N &= [e(n+1), \cdots, e(n+N)]^T \end{split}$$

$$\Phi_N \ = \ \begin{bmatrix} -y_n & \cdots & -y_1 & u_{n+1} & \cdots & u_1 & e_n & \cdots & e_1 \\ -y_{n+1} & \cdots & -y_2 & u_{n+2} & \cdots & u_2 & e_{n+1} & \cdots & e_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{n+N-1} & \cdots & -y_N & u_{n+N} & \cdots & u_N & e_{n+N-1} & \cdots & e_N \end{bmatrix}$$

差分方程的极大似然辨识: 似然函数 (有色噪声情况)



极大似然法辨识

邢詔

因为 $\varepsilon(k)$ 为高斯白噪声,故而 e(k) 可假设为零均值的高斯白噪声。则似然函数为:

$$\hat{m{ heta}}$$
]

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森送推公式

$$L(Y_N|\hat{\theta}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} exp\left[-\frac{(Y_N - \phi_N\hat{\boldsymbol{\theta}})^T(Y_N - \phi_N\hat{\boldsymbol{\theta}})}{2\sigma^2}\right]$$

$$\ln L(Y_N|\hat{\theta}) \ = \ -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k)$$

由 $\frac{\partial \ln L(Y_N|\hat{\theta})}{\partial \sigma^2} = 0$ 得:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k)$$

差分方程的极大似然辨识:准则(有色噪声情况)



$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k)$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{N} J$$

$$\ln L(Y_N | \hat{\theta}) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln(\frac{2J}{N}) - \frac{N}{2}$$

极大似然法辨识 邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森递推公式

- J 为参数 a₁, a₂, · · · , a_n; b₀, b₁, · · · , b_n; c₁, c₂, · · · , c_n 的
 二次型函数。
- ϕL 最大的 $\hat{\theta}$, 等价于在约束条件

$$\hat{c}(z^{-1})e(k) = \hat{a}(z^{-1})y(k) - \hat{b}(z^{-1})u(k)$$

下求 $\hat{\theta}$,使J最小。

差分方程的极大似然辨识: 牛顿 -拉卜森法



极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛頓 -拉卜森递推公式

牛顿-拉卜森法的迭代公式:

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_0 - \left[\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right] \bigg|_{\theta = \hat{\theta}_0}$$

其中:

- 別 为梯度
- $\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2}$ 为海赛矩阵

Newton-Raphson 迭代步骤:初始值选定



极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的选推极大似然法 牛顿 -拉卜森选推公式

- $\hat{\theta}_0 = [\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_n, \hat{b}_0, \cdots, \hat{b}_n, \hat{c}_1, \cdots, \hat{c}_n]^T$
- 其中:
 - â₁, · · · , â_n, b̂₀, · · · , b̂_n 可用最小二乘法求得
 - ĉ₁, · · · , ĉ_n 可取为零或任意假定某一组值

Newton-Raphson 迭代步骤: 计算预测误差



极大似然法辨识

邢超

• 预测误差, 指标函数与误差方差估计值:

$$\begin{array}{rcl} e(k) & = & y(k) - \hat{y}(k) \\ J & = & \frac{\sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k)}{2} \\ \sigma^2 & = & \frac{2J}{N} \end{array}$$

简介

极大似然原理

极大似然辨识白噪声情况

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的选推极大似然法 牛顿 -拉卜森选推公式

Newton-Raphson 迭代步骤: 计算梯度矩阵及海赛矩阵



极大似然法辨识

邢超

简介

. . .

极大似然原理

极大似然辨识

有色噪声情况 递推极大似然法

近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森递推公式

 $\frac{\partial J}{\partial \theta} = \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k) \frac{\partial e(k)}{\partial \theta}$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} & = & \displaystyle \sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{\partial e(k)}{\partial \theta} \left[\frac{\partial e(k)}{\partial \theta} \right]^T + \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k) \frac{\partial^2 e(k)}{\partial \theta^2} \\ & \approx & \displaystyle \sum_{n+N}^{n+N} \frac{\partial e(k)}{\partial \theta} \left[\frac{\partial e(k)}{\partial \theta} \right]^T \end{array}$$

其中:

$$\frac{\partial e(k)}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial e(k)}{\partial a_1}, \cdots, \frac{\partial e(k)}{\partial a_n}, \frac{\partial e(k)}{\partial b_0}, \cdots, \frac{\partial e(k)}{\partial b_n}, \frac{\partial e(k)}{\partial c_1}, \cdots, \frac{\partial e(k)}{\partial c_n}\right]^T$$

牛顿-拉卜森迭代步骤: 计算新的估计值



极大似然法辨识

邢超

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 - \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \bigg|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0}$$

停上条件:

$$\frac{\hat{\sigma}_{r+1}^2 - \hat{\sigma}_r^2}{\hat{\sigma}_r^2} < \delta$$

其中 δ 可取较小的数, 如 $\delta = 10^{-4}$ 。

简介

极大似然原理

极大似然辨识自噪声情况

有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森递推公式

系统差分方程



极大似然法辨识

邢詔

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况. 右色噪声情况

递推极大似然法

近似的递推极大似然法

牛顿 -拉卜森遂推公式

$$a(z^{-1})y(k)=b(z^{-1})u(k)+c(z^{-1})\varepsilon(k)$$

其中:

$$\begin{array}{rcl} a(z^{-1}) & = & 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ b(z^{-1}) & = & b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \\ c(z^{-1}) & = & 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n} \end{array}$$

可写为:

$$\varepsilon(k) = c^{-1}(z^{-1})[a(z^{-1})y(k) - b(z^{-1})u(k)]$$

二次型指标函数



极大似然法辨识

邢超

将指标函数用二次型近似表示:

$$\begin{split} J_N &= \sum_{k=n+1}^{n+N} \varepsilon^2(k) \\ &\approx & (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_N)^T p_N^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_N) + \beta_N \end{split}$$

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法

近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森逆推公式



利用泰勒级数将 $\varepsilon(k)$ 在估值 $\hat{\theta}$ 展开:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \approx \varepsilon(\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \left. \left[\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^{\mathrm{T}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

其中:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon(k,\hat{\pmb{\theta}}) & = & e(k) \\ e(k) & = & \hat{c}^{-1}(z^{-1})[\hat{a}(z^{-1})y(k) - \hat{b}(z^{-1})u(k)] \end{array}$$

极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 右色噪声情况

递推极大似然法

近似的递推极大似然法

牛頓 -拉卜森递推公式



可得:

$$J_{N+1} = \sum_{k=n+1}^{n+N+1} \varepsilon^{2}(k)$$

$$\approx (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N})^{T} p_{N}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N})$$

$$+\beta_{N} + [e_{N+1} + \boldsymbol{\psi}_{N+1}^{T} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N})]^{2}$$

其中:

$$\mathbf{e}_{N+1} = \mathbf{e}(\mathbf{n} + \mathbf{N} + 1)$$

$$\psi_{N+1} = \frac{\partial \mathbf{e}_{N+1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法

近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森递推公式

设:

$$\theta - \hat{\theta} = \Lambda$$

得:

$$J_{N+1}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Delta}^{T}(P_{N}^{-1} + \boldsymbol{\Psi}_{N+1}\boldsymbol{\Psi}_{N+1}^{T})\boldsymbol{\Delta}$$

$$+2e_{N+1}\boldsymbol{\Psi}_{N+1}^{T}\boldsymbol{\Delta} + e_{N+1}^{2} + \beta_{N}$$

$$= (\boldsymbol{\Delta} + r_{N+1})^{T}P_{N+1}^{-1}(\boldsymbol{\Delta} + r_{N+1}) + \beta_{N+1}$$

其中:

$$\begin{array}{lcl} P_{N+1}^{-1} & = & P_{N}^{-1} + \Psi_{N+1} \Psi_{N+1}^{T} \\ r_{N+1} & = & P_{N+1} \Psi_{N+1} e_{N+1} \end{array}$$

$$\beta_{N+1} = e_{N+1}^{T} + \beta_{N-1}^{T} + \beta_{N+1} \Psi_{N+1}^{T} P_{N+1} \Psi_{N+1} e_{N+1}$$

$$\beta_{N+1}$$
 为已知值,所以

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{N+1}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{N}} - \mathrm{r}_{\mathrm{N+1}}$$

极大似然法辨识

邢詔

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况. 右色噪声情况.

梯推极大似然法

近似的递推极大似然法

牛顿 -拉卜森递推公式

更新 $P_{N+1}, ilde{ heta}_{N+1}$ 利用矩阵求逆引理,得:

$$P_{N+1}^{-1} = P_{N}^{-1} + \Psi_{N+1} \Psi_{N+1}^{T}$$

$$P_{N+1} = P_{N} \left[I - \frac{\Psi_{N+1} \Psi_{N+1}^{T} P_{N}}{1 + \Psi_{N+1}^{T} P_{N} \Psi_{N+1}} \right]$$

$$r_{N+1} = P_{N+1} \Psi_{N+1} e_{N+1}$$

$$= P_{N} \left[I - \frac{\Psi_{N+1} \Psi_{N+1}^{T} P_{N}}{1 + \Psi_{N+1}^{T} P_{N} \Psi_{N+1}} \right] \Psi_{N+1} e_{N+1}$$

$$= P_{N} \left[\frac{1 + \Psi_{N+1} \Psi_{N+1}^{T} P_{N} \Psi_{N+1} - \Psi_{N+1} \Psi_{N+1}^{T} P_{N} \Psi_{N+1}}{1 + \Psi_{N+1}^{T} P_{N} \Psi_{N+1}} \right] e_{N+1}$$

$$= \frac{P_{N}\Psi_{N+1}e_{N+1}}{1 + \Psi_{N+1}^{T}P_{N}\Psi_{N+1}}$$

$$\begin{array}{rcl} \hat{\theta}_{N+1} & = & \hat{\theta}_{N} - r_{N+1} \\ & = & \hat{\theta}_{N} - P_{N} \Psi_{N+1} (1 + \Psi_{N+1}^{T} P_{N} \Psi_{N} + 1)^{-1} e_{N+1} \end{array}$$



极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法

近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森递推公式

 $\Psi_{N+1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \Psi_{N} + D$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} -\hat{c}_1 & \cdots & \cdots & -\hat{c}_n \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理极大似然辨识

白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法

近似的递推极大似然法 牛頓 -拉卜森递推公式

$$B = \begin{bmatrix} -\hat{c}_1 & \cdots & -\hat{c}_n & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\hat{c}_1 & \cdots & \cdots & -\hat{c}_n \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [y_{n+N}, 0, \cdots, 0, -u_{n+N+1}, 0, \cdots, 0, -e_{n+N}, 0, \cdots, 0]^{T}$$

A, B, C 的推导

从

得:

$$e(k) = \hat{c}^{-1}(z^{-1})[\hat{a}(z^{-1})y(k) - \hat{b}(z^{-1})u(k)]$$

 $\frac{\partial e(k)}{\partial \hat{a}_i} = \hat{c}^{-1}(z^{-1})y(k-i)$

 $\frac{\partial e(k)}{\partial \hat{b}_i} \ = \ -\hat{c}^{-1}(z^{-1})u(k-i)$

 $\frac{\partial e(k)}{\partial \hat{c}_i} \ = \ -\hat{c}^{-1}(z^{-1})e(k-i)$

极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然辨识 白噪声情况.

递推极大似然法

近似的递推极大似然法

牛顿 -拉卜森递推公式

极大似然原理

有色噪声情况

进一步有:

$$\frac{\partial e(k)}{\partial \hat{a}_i} \ = \ \frac{\partial e(k-i+j)}{\partial \hat{a}_j}$$

 $\partial \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}$

 $\partial e(k)$ ∂ĉ;

$$\frac{\partial e(k)}{\partial \hat{b}_{i}} = \frac{\partial e(k-i+j)}{\partial \hat{b}_{j}}$$

 $\partial \hat{\mathrm{b}}_{\mathrm{i}}$ $= \ \frac{\partial e(k-i+j)}{\partial \hat{c}_i}$

使用牛顿 -拉卜森方法的递推公式: 系统差分方程



$$a(z^{-1})y(k) = b(z^{-1})u(k) + \frac{1}{d(z^{-1})}\varepsilon(k)$$

其中:

$$\begin{array}{rcl} a(z^{-1}) & = & 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ b(z^{-1}) & = & b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \\ d(z^{-1}) & = & 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n} \end{array}$$

参数向量为:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \cdots, \mathbf{d}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{a}^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}^{\mathrm{T}}, \mathbf{d}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

极大似然法辨识 邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛顿-拉卜森送推公式

MLE 28/33

计算 $\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{q}}$



将系统差分方程改写为:

极大似然法辨识

邢詔

$$\varepsilon(k) = d(z^{-1})[a(z^{-1})y(k) - b(z^{-1})u(k)]$$

简介

可得:

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 右色噪声情况.

递推极大似然法

近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森递推公式

 $\frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial a_{i}} = d(z^{-1})y(k-j) = y_{k-j}^{F}, j = 1, 2, \cdots, n$

 $\frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial b_{i}} \ = \ -d(z^{-1})u(k-j) = u^{F}_{k-j}, j=0,1,2,\cdots,n$

$$\frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial d_i} = a(z^{-1})y(k-j) - b(z^{-1})u(k-j) = -\mu_{k-j}, j = 1, 2, \cdots, n$$

计算 $rac{\partial arepsilon(\mathbf{k})}{\partial oldsymbol{ heta}}$



极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛顿 -拉卜森送推公式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_{(\mathbf{n})}^{F} \\ -\bar{\mathbf{u}}_{(\mathbf{n}+1)}^{F} \\ -\bar{\boldsymbol{\mu}}_{(\mathbf{n})} \end{bmatrix}$$

其中:

$$\begin{split} \bar{y}_{(n)}^F &= [y_{k-1}^F, y_{k-2}^F, \cdots, y_{k-n}^F]^T \\ -\bar{u}_{(n+1)}^F &= [u_k^F, u_{k-1}^F, \cdots, u_{k-n}^F]^T \\ -\bar{\boldsymbol{\mu}}_{(n)} &= [\mu_{k-1}, \mu_{k-2}, \cdots, \mu_{k-n}]^T \end{split}$$





极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛顿-拉卜森送推公式

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \theta^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{a}^2} & \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b}} & \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{d}} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{a}} & \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{b}^2} & \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{d}} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{a}} & \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{d} \partial \mathbf{b}} & \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{d}} \end{bmatrix}$$

其中:

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial^2 \varepsilon(k)}{\partial a_j \partial d_m} & = & \frac{\partial^2 \varepsilon(k)}{\partial d_m \partial a_j} = y(k-j-m) \\ \\ \frac{\partial^2 \varepsilon(k)}{\partial b_j \partial d_m} & = & \frac{\partial^2 \varepsilon(k)}{\partial d_m \partial b_j} = -u(k-j-m) \end{array}$$

估计准则



极大似然法辨识

邢詔

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况. 右色噪声情况.

递推极大似然法 近似的递推极大似然法

牛顿 -拉卜森递推公式

 $J = \frac{\sum_{k=n+1}^{n+N} e(k)}{\sum_{k=n+1}^{n+N} e(k)}$

梯度:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = \sum_{k=n+1}^{n+N} e(k) \frac{\partial e(k)}{\partial \hat{\theta}} = q(N)$$

海寨矩阵:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\theta}^2} = \sum_{k=n+1}^{n+N} \left[\frac{\partial e(k)}{\partial \hat{\theta}} \left(\frac{\partial e(k)}{\partial \hat{\theta}} \right)^T + e(k) \frac{\partial^2 e(k)}{\partial \hat{\theta}^2} \right] = R(N)$$

迭代公式



牛顿 -拉卜森公式:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{r} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{r-1} - R^{-1}(N)q(N)$$

q与R的递推公式:

$$\begin{split} q(N) &= q(N-1) + e(n+N) \frac{\partial e(n+N)}{\partial \hat{\theta}} \\ R(N) &= R(N-1) + \frac{\partial e(n+N)}{\partial \hat{\theta}} \left(\frac{\partial e(n+N)}{\partial \hat{\theta}} \right)^T \\ &+ e(n+N) \frac{\partial^2 e(n+N)}{\partial \hat{\theta}^2} \end{split}$$

极大似然法辨识

邢超

简介

极大似然原理

极大似然辨识 白噪声情况 有色噪声情况

递推极大似然法 近似的递推极大似然法 牛頓 -拉卜森遊推公式