线性离散系统分析

Z 变换

Outline

1. Z 变换

2. Z 反变换

Topic

Z 变换定义

- 采样信号 $e^*(t)$ 的 Laplacian 变换

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nsT}$$

- 令 $Z = e^{sT}$，则

$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$

- 得:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)Z^{-n}$$

- 记作

$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换定义

- 采样信号 $e^*(t)$ 的 Laplacian 变换

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nsT}$$

- 令 $Z = e^{sT}$，则

$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$

- 得:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)Z^{-n}$$

- 记作

$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换定义

- 采样信号 $e^*(t)$ 的 Laplacian 变换

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nsT}$$

- 令 $Z = e^{sT}$，则

$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$

- 得:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)Z^{-n}$$

- 记作

$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换方法

- 级数求合法
  - 按照 Z 变换的定义求解
- 部分分式法:
  - 先求出 $e(t)$ 的 Laplacian 变换 $E(s)$, 将其展开成部分分式之和, 使每部分对应的 Z 变换是已知的.

级数求合法示例: 单位阶跃信号 $1(t)$

- 解:

$$\begin{aligned}
e(nT) &= 1, \\
E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
&= \frac{1}{z - 1}
\end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

级数求合法示例: 单位阶跃信号 $1(t)$

- 解:

$$\begin{aligned} e(nT) &= 1, \\ E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

级数求合法示例: $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

- 解:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \\ e(nT) &= 1 \\ E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

- $1(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 对应的 Z 变换相同.

级数求合法示例: $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

- 解:

$$
\begin{aligned}
e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \\
e(nT) &= 1 \\
E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{z}{z-1}
\end{aligned}
$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

- $1(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 对应的 Z 变换相同.

级数求合法示例: $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

- 解:

$$
\begin{aligned}
e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\
e(nT) &= 1 \\
E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
&= \frac{z}{z - 1}
\end{aligned}
$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

- $1(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 对应的 Z 变换相同.

部分分式法示例: $E(s)=\frac{a}{s(s+a)}$

- 解:

$$
\begin{aligned}
E(s) &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s+a} \\
e(t) &= 1-e^{-at} \\
E(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}
\end{aligned}
$$

- Z 变换表:

$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$

部分分式法示例: $E(s)=\frac{a}{s(s+a)}$

- 解:

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s+a} \\ e(t) &= 1-e^{-at} \\ E(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}} \end{aligned}$$

- Z 变换表:

$$\begin{array}{ccc} \delta(t) & 1 & 1 \\ 1(t) & \frac{1}{s} & \frac{1}{1-z^{-1}} \\ t & \frac{1}{s^2} & \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \\ e^{-at} & \frac{1}{s+a} & \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \end{array}$$

部分分式法示例: $E(s)=\frac{a}{s(s+a)}$

- 解:

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s+a} \\ e(t) &= 1-e^{-at} \\ E(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}} \end{aligned}$$

- Z 变换表:

$$\begin{array}{ccc} \delta(t) & 1 & 1 \\ 1(t) & \frac{1}{s} & \frac{1}{1-z^{-1}} \\ t & \frac{1}{s^2} & \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \\ e^{-at} & \frac{1}{s+a} & \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \end{array}$$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t)+\beta e_2(t)]=\alpha E_1(z)+\beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t+kT)]=z^k[E(z)-\sum_{n=0}^{k-1}e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)]=E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n\to\infty}e(nT)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT)=x(nT)*y(nT)$ 则 $G(z)=X(z)Y(z)$. $(x(nT)*y(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)y((n-k)T))$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t)+\beta e_2(t)]=\alpha E_1(z)+\beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t+kT)]=z^k[E(z)-\sum_{n=0}^{k-1}e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)]=E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n\to\infty}e(nT)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT)=x(nT)*y(nT)$ 则 $G(z)=X(z)Y(z)$. $(x(nT)*y(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)y((n-k)T))$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t+kT)] = z^k[E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n\to\infty} e(nT) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$. $(x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T))$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t)+\beta e_2(t)]=\alpha E_1(z)+\beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t+kT)]=z^k[E(z)-\sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)]=E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n\to\infty} e(nT)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT)=x(nT)*y(nT)$ 则 $G(z)=X(z)Y(z)$. $(x(nT)*y(nT)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T))$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t)+\beta e_2(t)]=\alpha E_1(z)+\beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t+kT)]=z^k[E(z)-\sum_{n=0}^{k-1}e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)]=E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n\to\infty}e(nT)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT)=x(nT)*y(nT)$ 则 $G(z)=X(z)Y(z)$. $(x(nT)*y(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)y((n-k)T))$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t)+\beta e_2(t)]=\alpha E_1(z)+\beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t+kT)]=z^k[E(z)-\sum_{n=0}^{k-1}e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)]=E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n\to\infty}e(nT)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT)=x(nT)*y(nT)$ 则 $G(z)=X(z)Y(z)$. $(x(nT)*y(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)y((n-k)T))$

Topic

Z 反变换

$$e(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[E(z)]$$

- 幂级数展开法
- 部分分式法
  - 展开成部分分式后查表
- 反演积分法

幂级数展开法

$$
\begin{aligned}
E(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \\
&= c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\
e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta(t - nT) \\
e(nT) &= c_n
\end{aligned}
$$

反演积分法

$$
\begin{aligned}
E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n} \\
&= e(0) + e(T) z^{-1} + \cdots + e(nT) z^{-n} + \cdots \\
E(z) z^{n-1} &= e(0) z^{n-1} + e(T) z^{n-2} + \cdots + e(nT) z^{-1} + \cdots \\
e(nT) &= Res(E(z) z^{n-1})
\end{aligned}
$$

反演积分法示例: $E(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$ 求 $e(nT)$

- 解:

$$\begin{aligned}
E(z)z^{n-1} &= \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
Res_1 &= \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
&= 2 \\
Res_2 &= \lim_{z\to 0.5}\frac{(z-0.5)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
&= -0.5^n \\
e(nT) &= Res_1 + Res_2 \\
&= 2-0.5^n
\end{aligned}$$

反演积分法示例: $E(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$ 求 $e(nT)$

- 解:

$$
\begin{aligned}
E(z)z^{n-1} &= \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
Res_1 &= \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
&= 2 \\
Res_2 &= \lim_{z\to 0.5}\frac{(z-0.5)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
&= -0.5^n \\
e(nT) &= Res_1 + Res_2 \\
&= 2-0.5^n
\end{aligned}
$$