

自动控制系统的数学模型

用微分方程描述的数学模型

Outline

- 1 简介
- 2 线性微分方程与线性系统
- 3 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

Topic

- 1 简介
- 2 线性微分方程与线性系统
- 3 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

数学模型分类

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类:
 - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域 (s): 传递函数、结构图
 - 频域 (w): 频率特性

数学模型分类

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类:
 - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域 (s): 传递函数、结构图
 - 频域 (ω): 频率特性

数学模型分类

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类:
 - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域 (s): 传递函数、结构图
 - 频域 (w): 频率特性

数学模型分类

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类:
 - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域 (s): 传递函数、结构图
 - 频域 (w): 频率特性

数学模型分类

- 数学模型：描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类：
 - 时域 (t)：微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域 (s)：传递函数、结构图
 - 频域 (w)：频率特性

数学模型分类

- 数学模型：描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类：
 - 时域 (t)：微分方程、差分方程、状态方程
 - 复域 (s)：传递函数、结构图
 - 频域 (w)：频率特性

建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量, 得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量, 得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量, 得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量, 得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量, 得到仅有输入/输出变量的微分方程

线性化原理与方法

原理: 在系统工作点处, 将非线性函数展开成泰勒级数, 忽略高次项, 得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开

- $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$
 - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$

- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开

- $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \dots$
 - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$

- 增量化方程

- $dY = y - y_0$
 - $dX = x - x_0$
 - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理: 在系统工作点处, 将非线性函数展开成泰勒级数, 忽略高次项, 得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开

- $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$
- $y \approx y_0 + k(x - x_0)$

- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开

- $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \dots$
- $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$

- 增量化方程

- $dY = y - y_0$
- $dX = x - x_0$
- $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理: 在系统工作点处, 将非线性函数展开成泰勒级数, 忽略高次项, 得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开

- $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$
 - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$

- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开

- $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \dots$
 - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$

- 增量化方程

- $dY = y - y_0$
 - $dX = x - x_0$
 - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理: 在系统工作点处, 将非线性函数展开成泰勒级数, 忽略高次项, 得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开

- $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$
 - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$

- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开

- $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \dots$
 - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$

- 增量化方程

- $dY = y - y_0$
 - $dX = x - x_0$
 - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理: 在系统工作点处, 将非线性函数展开成泰勒级数, 忽略高次项, 得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
 - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$
 - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
 - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \dots$
 - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
 - $dY = y - y_0$
 - $dX = x - x_0$
 - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理: 在系统工作点处, 将非线性函数展开成泰勒级数, 忽略高次项, 得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
 - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$
 - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
 - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \dots$
 - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
 - $dY = y - y_0$
 - $dX = x - x_0$
 - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理: 在系统工作点处, 将非线性函数展开成泰勒级数, 忽略高次项, 得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
 - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$
 - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
 - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \dots$
 - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
 - $dY = y - y_0$
 - $dX = x - x_0$
 - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理: 在系统工作点处, 将非线性函数展开成泰勒级数, 忽略高次项, 得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
 - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$
 - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
 - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \dots$
 - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
 - $dY = y - y_0$
 - $dX = x - x_0$
 - $dY = KdX$

Topic

- 1 简介
- 2 线性微分方程与线性系统
- 3 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

线性微分方程的解

解 = 特解 + 通解

- 通解由微分方程的特征根决定

- 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$

- 特征方程: $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$

- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 时, 通解为

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解 = 特解 + 通解

- 通解由微分方程的特征根决定

- 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$

- 特征方程: $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$

- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 时, 通解为

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解 = 特解 + 通解

- 通解由微分方程的特征根决定

- 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$

- 特征方程: $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$

- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 时, 通解为

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解 = 特解 + 通解

- 通解由微分方程的特征根决定

- 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
- 特征方程: $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$

- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 时, 通解为

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解 = 特解 + 通解

- 通解由微分方程的特征根决定

- 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
- 特征方程: $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$

- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 时, 通解为
$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解 = 特解 + 通解

- 通解由微分方程的特征根决定
 - 微分方程: $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
 - 特征方程: $a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 时, 通解为
$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$

线性系统的定义与特点

- 条件:
 - 可加性: 若 $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$, $r_2(t) \rightarrow c_2(t)$ 则:
 $r_1(t) + r_2(t) \rightarrow c_1(t) + c_2(t)$
 - 齐次性: $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$ 则: $ar_1(t) \rightarrow ac_1(t)$
- 微积分特性: $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$ 则
 $\int r_1(t) \rightarrow \int c_1(t), r_1(t)' \rightarrow c_1(t)'$

线性系统的定义与特点

- 条件:
 - 可加性: 若 $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$, $r_2(t) \rightarrow c_2(t)$ 则:
 $r_1(t) + r_2(t) \rightarrow c_1(t) + c_2(t)$
 - 齐次性: $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$ 则: $ar_1(t) \rightarrow ac_1(t)$
- 微积分特性: $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$ 则
 $\int r_1(t) \rightarrow \int c_1(t), r_1(t)' \rightarrow c_1(t)'$

线性系统的定义与特点

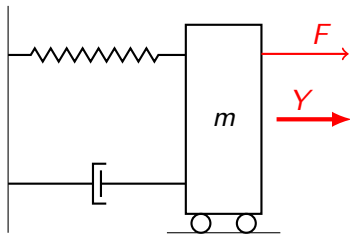
- 条件:
 - 可加性: 若 $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$, $r_2(t) \rightarrow c_2(t)$ 则:
 $r_1(t) + r_2(t) \rightarrow c_1(t) + c_2(t)$
 - 齐次性: $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$ 则: $ar_1(t) \rightarrow ac_1(t)$
- 微积分特性: $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$ 则
 $\int r_1(t) \rightarrow \int c_1(t), r_1(t)' \rightarrow c_1(t)'$

Topic

- 1 简介
- 2 线性微分方程与线性系统
- 3 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)**
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

机械系统示例 1

弹簧-质量-阻尼系统

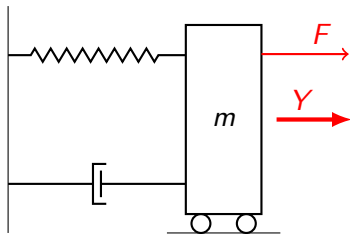


解:

- 输入: $F(t)$, 输出: $Y(t)$
- 原始方程:
$$F - kY(t) - fv = ma$$
- 消去中间变量:
 - $v = Y'(t)$
 - $a = v'$
 - $mY'' + fY' + kY = F$

机械系统示例 1

弹簧 - 质量 - 阻尼系统



解:

- 输入: $F(t)$, 输出: $Y(t)$
- 原始方程:
$$F - kY(t) - fv = ma$$
- 消去中间变量:
 - $v = Y'(t)$
 - $a = v'$
 - $mY'' + fY' + kY = F$

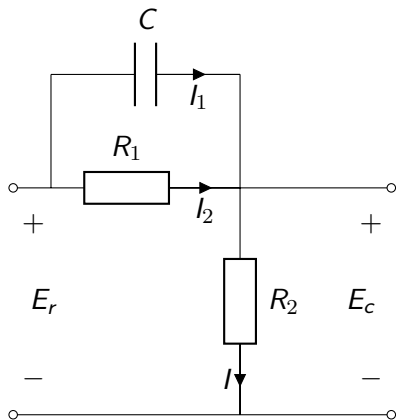
Topic

- 1 简介
- 2 线性微分方程与线性系统
- 3 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ◻ ↺ 🔍 ↻

电气及机电系统示例 1

电阻、电容网络

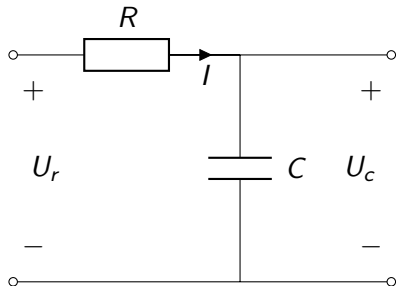


解:

- 输入: E_r , 输出 E_c
- 原始方程:
 - $I = I_1 + I_2$
 - $E_c = R_2 I$
 - $E_r = R_1 I_2 + E_c$
 - $C(E_r - E_c)' = I_1$
- 消去 I, I_1, I_2 得:
 - $R_1 C E_c' + \frac{R_1 + R_2}{R_2} E_c = R_1 C E_r' + E_r$

电气及机电系统示例 2

电阻、电容网络

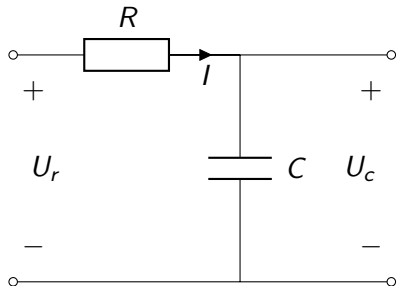


解:

- 输入: U_r , 输出: U_c
- $U_r = RI + U_c$, $CU'_c = I$
- 消去 I , $RCU'_c + U_c = U_r$

电气及机电系统示例 2

电阻、电容网络



解:

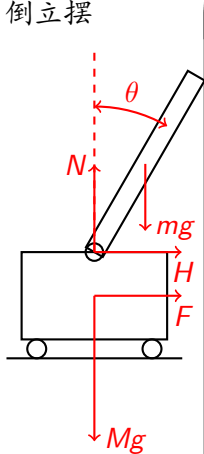
- 输入: U_r , 输出: U_c
- $U_r = RI + U_c$, $CU'_c = I$
- 消去 I , $RCU'_c + U_c = U_r$

Topic

- 1 简介
- 2 线性微分方程与线性系统
- 3 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

倒立摆系统线性化模型

倒立摆

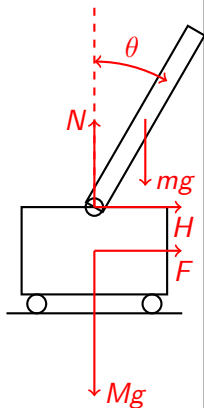


解:

- 输入 F , 输出 θ, r
- 原始方程:
 - 小车水平方向: $Mr'' = F - H$
 - 杆水平方向: $m(r + l\sin(\theta))'' = H$
 - 杆竖直方向: $m(l\cos(\theta))'' = N - mg$
 - 杆转动: $J\theta'' = Nl\sin(\theta) - Hl\cos(\theta)$
- 整理后:
 - $(M + m)r'' + ml\cos(\theta)\theta'' - ml\sin(\theta)(\theta')^2 = F$
 - $ml\cos(\theta)r'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\sin(\theta)$
- 线性化 ($\theta \rightarrow 0, \sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1$)
 - $(M + m)r'' + ml\theta'' = F$
 - $mlr'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\theta$

倒立摆系统线性化模型

倒立摆



解:

- 输入 F , 输出 θ, r
- 原始方程:
 - 小车水平方向: $Mr'' = F - H$
 - 杆水平方向: $m(r + l\sin(\theta))'' = H$
 - 杆竖直方向: $m(l\cos(\theta))'' = N - mg$
 - 杆转动: $J\theta'' = Nl\sin(\theta) - Hl\cos(\theta)$
- 整理后:
 - $(M + m)r'' + ml\cos(\theta)\theta'' - ml\sin(\theta)(\theta')^2 = F$
 - $ml\cos(\theta)r'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\sin(\theta)$
- 线性化 ($\theta \rightarrow 0, \sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1$)
 - $(M + m)r'' + ml\theta'' = F$
 - $mlr'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\theta$