



线性系统的根轨迹
法

邢超

线性系统的根轨迹法

特殊的根轨迹

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$\frac{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}{a)G(s)H(s)}$$

邢超

西北工业大学航天学院

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

$$1 + \frac{K^*}{s} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{K^*}{s} = -1 \quad (2)$$

$$\angle s = (2k + 1)\pi \quad (3)$$

$$s + K^* = 0 \quad (4)$$

$$s = -K^* \quad (5)$$

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$\frac{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}{a}$

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s-c}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

$$1 + \frac{K^*}{s-c} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{K^*}{s-c} = -1 \quad (7)$$

$$\angle s-c = (2k+1)\pi \quad (8)$$

$$s-c+K^* = 0 \quad (9)$$

$$s = c - K^* \quad (10)$$

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

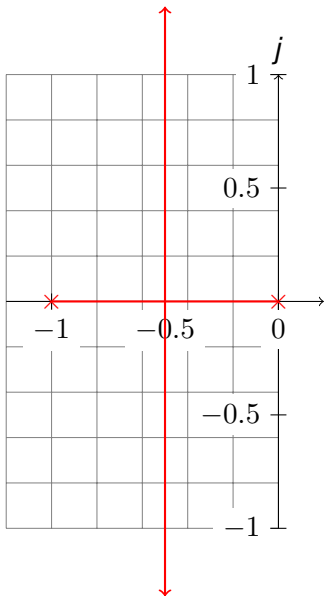
极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$\frac{1+(K^*+a)G(s)H(s)}{a}$



$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



$$a = -1$$

$$b = 0$$

线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$

$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

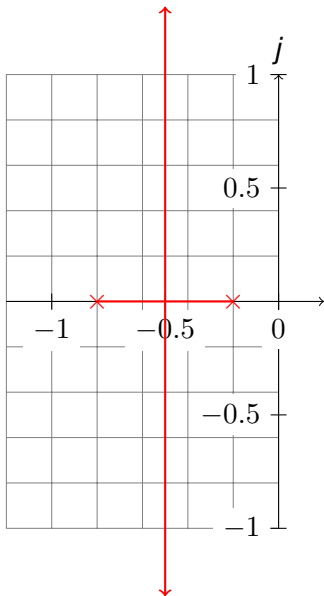
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + \frac{K^*}{a} G(s)H(s)$$



$$a = -0.8$$

$$b = -0.2$$

$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

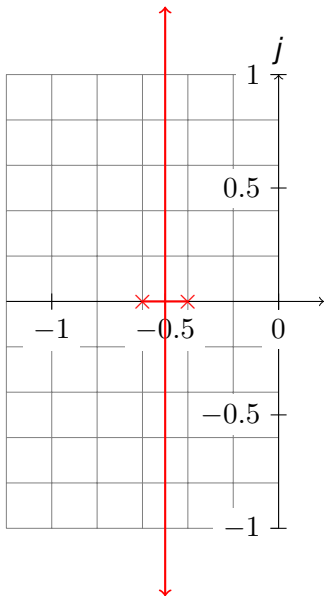
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + \frac{K^*}{a} G(s)H(s)$$



$$a = -0.6$$

$$b = -0.4$$

$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

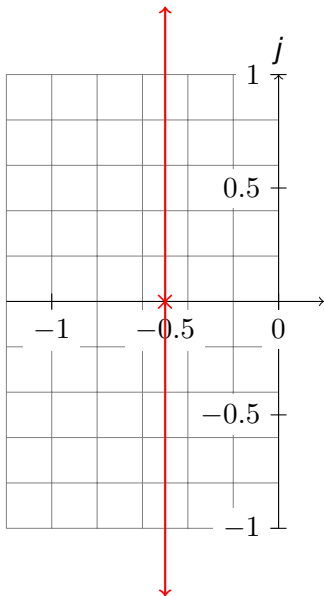
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$a = -0.5$$

$$b = -0.5$$

$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

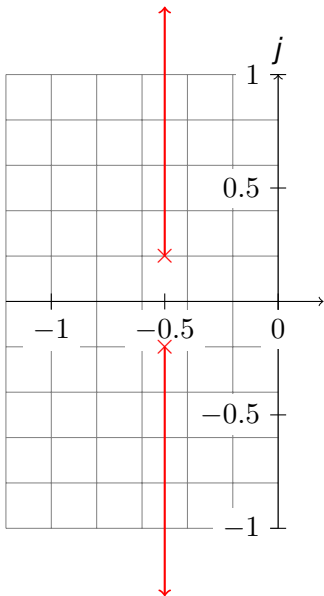
开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$



$$a = -0.5 + 0.2j$$

$$b = -0.5 - 0.2j$$

$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

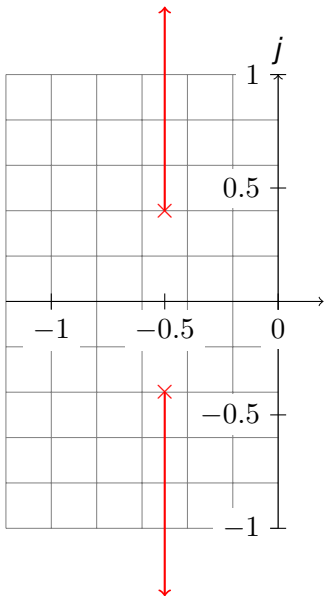
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + \frac{K^*}{a} G(s)H(s)$$



$$a = -0.5 + 0.4j$$

$$b = -0.5 - 0.4j$$

$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

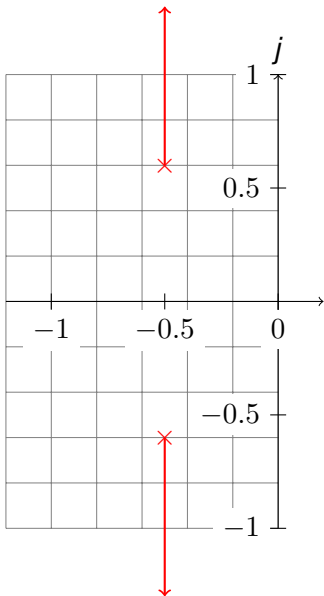
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$a = -0.5 + 0.6j$$

$$b = -0.5 - 0.6j$$

$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

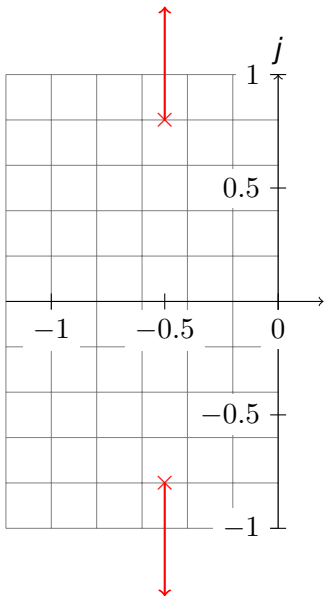
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$a = -0.5 + 0.8j$$

$$b = -0.5 - 0.8j$$

$$G(s)H(s) \frac{K^*}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

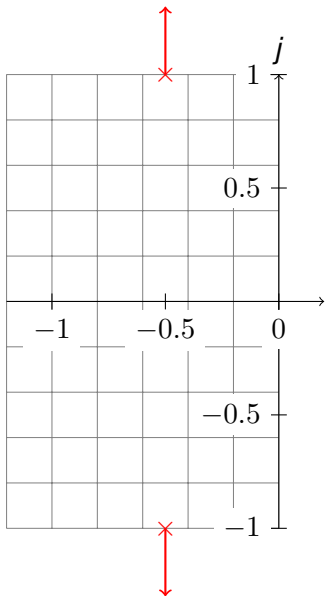
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$a = -0.5 + 1j$$

$$b = -0.5 - 1j$$

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

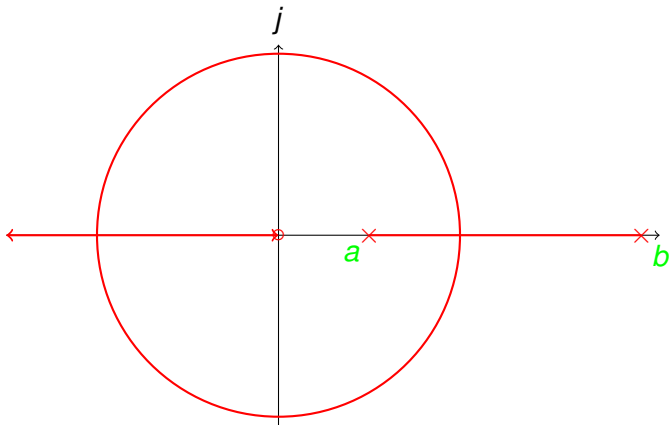
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

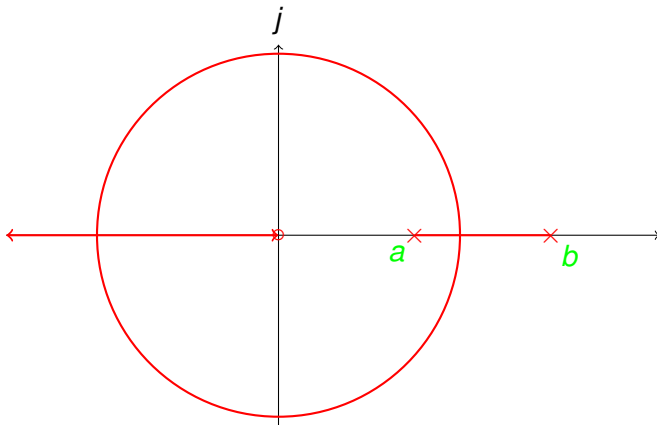
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

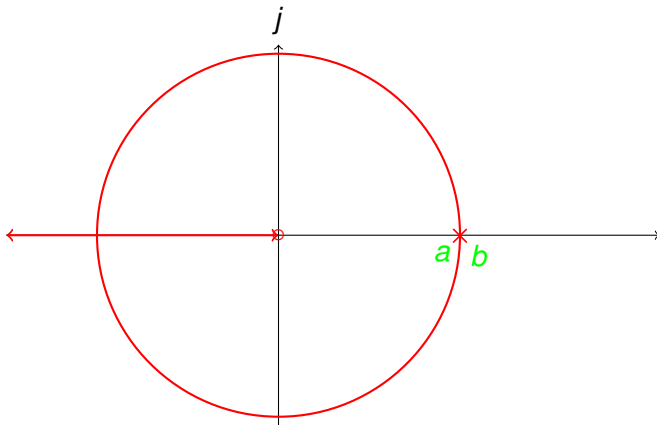
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

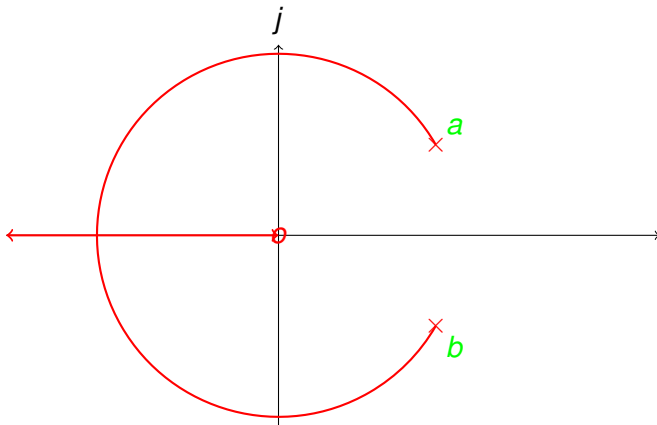
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

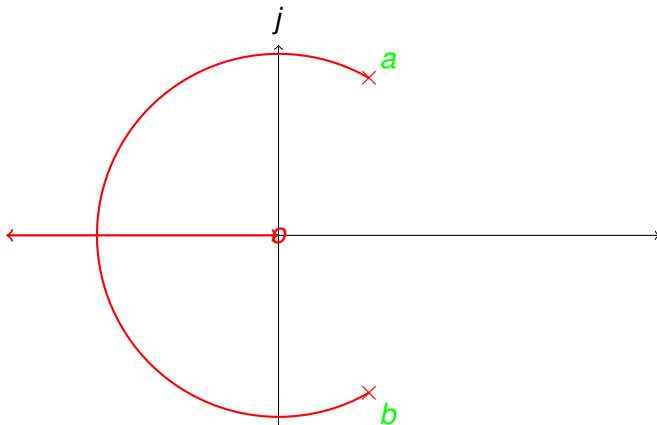
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

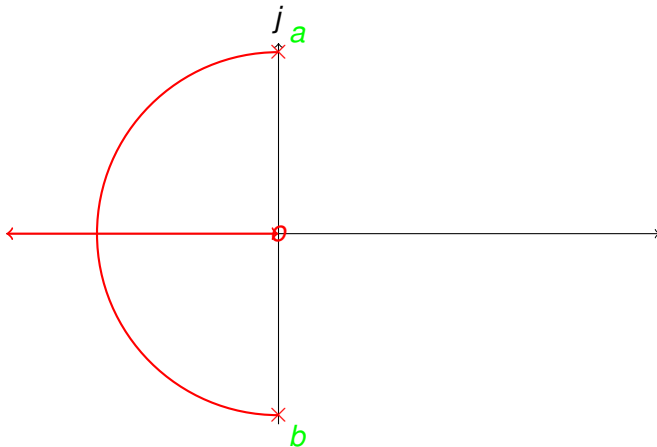
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

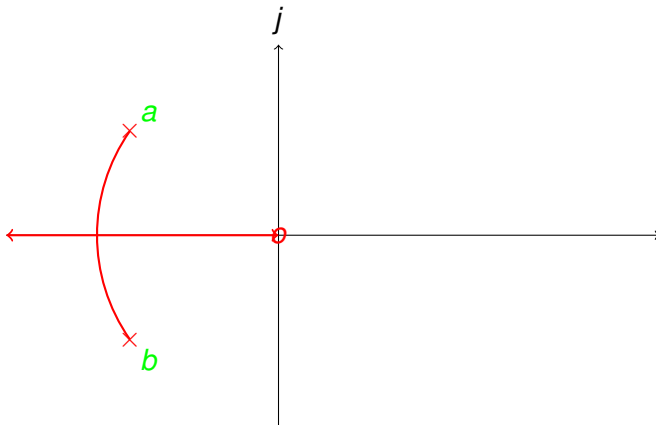
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

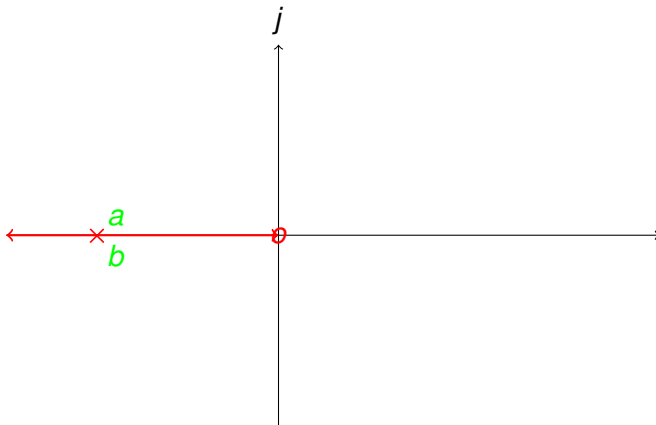
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



根轨迹为圆的证明 (重极点)



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

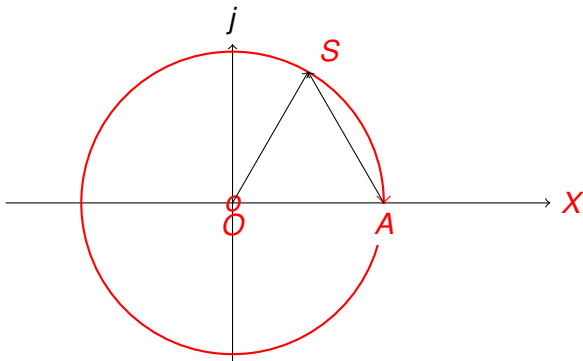
开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$



$$\angle(s-a) + \angle(s-b) - \angle(s-O) = 2\angle SAX - \angle SOX$$

根轨迹为圆的证明 (重极点)



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

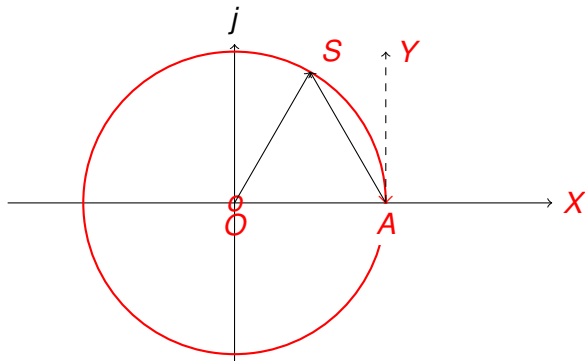
开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$



$$\angle(s-a) + \angle(s-b) - \angle(s-O) = 2\angle SAX - \angle SOX$$

$$\angle SAX = \angle SAY + \frac{\pi}{2}$$

$$2\angle SAY = \angle SOX$$

根轨迹为圆的证明 (共轭极点)



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

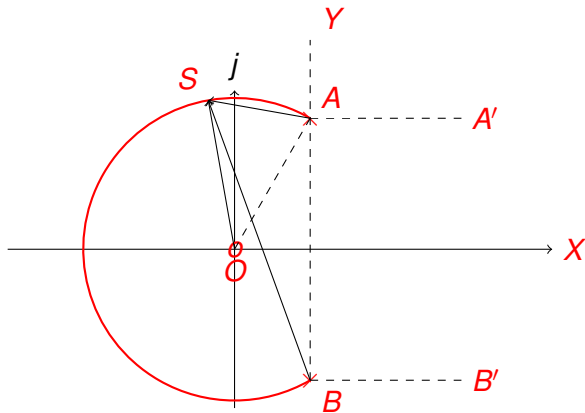
开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$



$$\angle SAY = \angle SBY + \angle BSA$$

$$\angle BSA = \angle AOX$$

$$2\angle SBA = \angle SOA$$

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s^n}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

$$1 + K^* \frac{1}{s^n} = 0 \quad (11)$$

$$K^* \frac{1}{s^n} = -1 \quad (12)$$

$$\angle s^n = (2k+1)\pi \quad (13)$$

$$n\angle s = (2k+1)\pi \quad (14)$$

$$\angle s = \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad (15)$$

$$s^n = -K^* \quad (16)$$

$$s = \sqrt[n]{K^*} e^{j\frac{(2k+1)\pi}{n}} \quad (17)$$

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$

示例 $G(s)H(s) = \frac{K^*}{s^3}$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

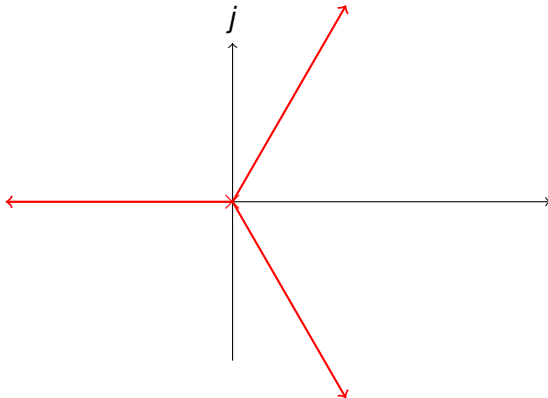
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$\frac{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}{s^3}$$



示例 $G(s)H(s) = \frac{K^*}{s^3}, K^* \in (-\infty, 0)$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

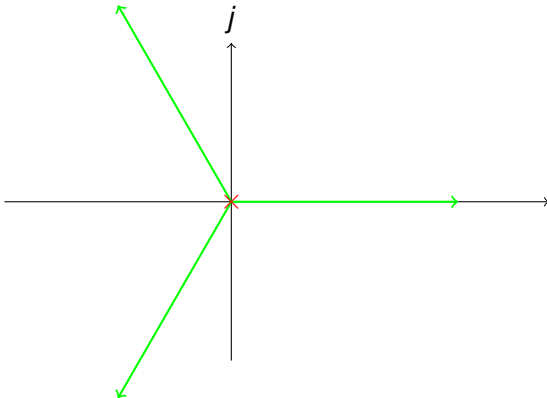
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$$G(s) = \frac{K^*}{(s-c)^n}$$



线性系统的根轨迹法

邢超

$$1 + K^* \frac{1}{(s-c)^n} = 0 \quad (18)$$

$$K^* \frac{1}{(s-c)^n} = -1 \quad (19)$$

$$\angle(s-c)^n = (2k+1)\pi \quad (20)$$

$$n\angle(s-c) = (2k+1)\pi \quad (21)$$

$$\angle(s-c) = \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad (22)$$

$$(s-c)^n = -K^* \quad (23)$$

$$s = c + \sqrt[n]{K^*} e^{j \frac{(2k+1)\pi}{n}} \quad (24)$$

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$\frac{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}{a}$

示例 $G(s)H(s) = \frac{K^*}{(s-1)^3}$



线性系统的根轨迹法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

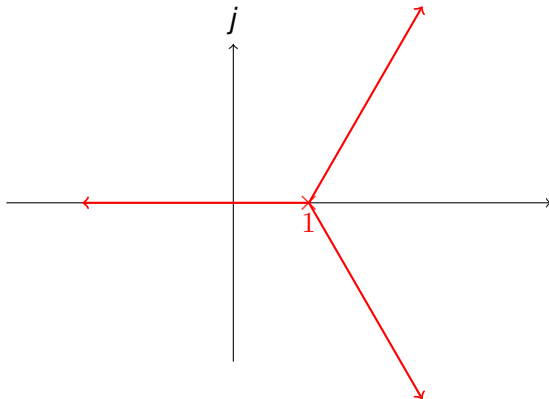
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$



$G(s+a)H(s+a)$ 的根轨迹



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

极点平移

$$\begin{aligned}s' &= s + a \\ 1 + K^* G(s')H(s') &= 0 \\ s' &= f(K^*) \\ s &= f(K^*) - a\end{aligned}$$

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$

$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$ 的根轨迹



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重点

原点为极点

极点平移

$$K' = K^* + a$$

$$s = f(K')$$

$$s = f(K^* + a)$$

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$1 + (K^* + a)G(s)H(s)$$

$\frac{K^*}{s^3+1}$ 的根轨迹



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

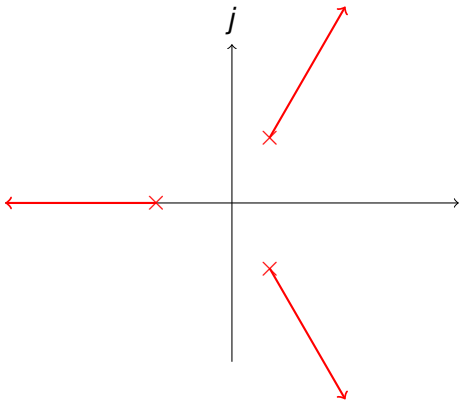
开环重极点

原点为极点

极点平移

$$G(s+a)H(s+a)$$

$$\frac{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}{s^3+1}$$





当 $K^* \in (1, \infty)$ 时, $\frac{K^*}{s^3}$ 的根轨迹

线性系统的根轨迹
法

邢超

$$\frac{K^*}{s^3 + 1} = -1$$
$$K^* = -s^3 - 1$$

$$K^* + 1 = -s^3$$

$$\frac{K^* + 1}{s^3} = -1 \quad (K^* \in (0, +\infty))$$

$$\frac{K'}{s^3} = -1 \quad (K' \in (1, +\infty))$$

$$s = \sqrt[3]{K'} e^{j\frac{(2k+1)\pi}{3}} \quad (K' \in (1, +\infty))$$

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$\frac{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}{a}G(s)H(s)$

$\frac{K^*}{s^3-1}$ 的根轨迹



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

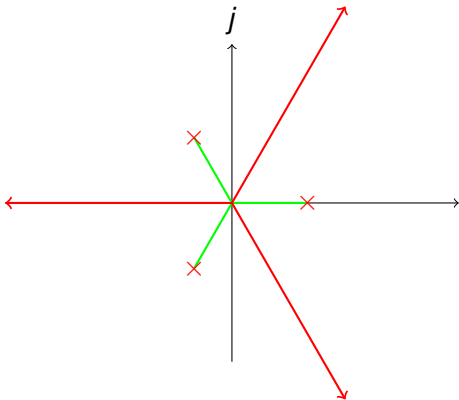
开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$\frac{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}$



当 $K^* \in (-1, \infty)$ 时 $\frac{K^*}{s^3}$ 的根轨迹



线性系统的根轨迹
法

邢超

一阶系统

二阶系统

无开环零点

有开环零点

开环重极点

原点为极点

极点平移

$G(s+a)H(s+a)$

$\frac{1 + (K^* + a)G(s)H(s)}{a}$

$$\frac{K^*}{s^3 - 1} = -1$$

$$K^* = -s^3 + 1$$

$$K^* - 1 = -s^3$$

$$\frac{K^* - 1}{s^3} = -1 \quad (K^* \in (0, +\infty))$$

$$\frac{K'}{s^3} = -1 \quad (K' \in (-1, +\infty))$$

$$s = \begin{cases} \sqrt[3]{-K'} e^{j\frac{2k\pi}{3}} & (K' \in (-1, 0)) \\ \sqrt[3]{K'} e^{j\frac{(2k+1)\pi}{3}} & (K' \in [0, +\infty)) \end{cases}$$