自动控制系统的数学模型

控制系统的复域数学模型

Outline

Topic

概念

- 定义

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[F(t)] &= F(s) \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt\end{aligned}$$

- 作用：将微积分运算变成代数运算

概念

- 定义

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[F(t)] &= F(s) \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

- 作用：将微积分运算变成代数运算

概念

- 定义

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[F(t)] &= F(s) \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

- 作用：将微积分运算变成代数运算

常用函数的 Laplace 变换

- 单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)\rightarrow F(s)=1$
- 阶跃函数 $f(t)=A,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{A}{s}$
- 斜坡函数（速度）$f(t)=vt,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{v}{s^2}$
- 加速度函数 $f(t)=\frac{1}{2}at^2,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{a}{s^3}$
- 指数函数 $f(t)=e^{at}\rightarrow F(s)=\frac{1}{s-a}$
- 正弦函数 $f(t)=A\sin(\omega t)\rightarrow F(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

常用函数的 Laplace 变换

- 单位脉冲函数 $f(t) = \delta(t) \rightarrow F(s) = 1$
- 阶跃函数 $f(t) = A, (t \geq 0) \rightarrow F(s) = \frac{A}{s}$
- 斜坡函数（速度）$f(t) = vt, (t \geq 0) \rightarrow F(s) = \frac{v}{s^2}$
- 加速度函数 $f(t) = \frac{1}{2}at^2, (t \geq 0) \rightarrow F(s) = \frac{a}{s^3}$
- 指数函数 $f(t) = e^{at} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$
- 正弦函数 $f(t) = A\sin(\omega t) \rightarrow F(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

常用函数的 Laplace 变换

- 单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)\rightarrow F(s)=1$
- 阶跃函数 $f(t)=A,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{A}{s}$
- 斜坡函数（速度）$f(t)=vt,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{v}{s^2}$
- 加速度函数 $f(t)=\frac{1}{2}at^2,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{a}{s^3}$
- 指数函数 $f(t)=e^{at}\rightarrow F(s)=\frac{1}{s-a}$
- 正弦函数 $f(t)=A\sin(\omega t)\rightarrow F(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

常用函数的 Laplace 变换

- 单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)\rightarrow F(s)=1$
- 阶跃函数 $f(t)=A,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{A}{s}$
- 斜坡函数（速度）$f(t)=vt,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{v}{s^2}$
- 加速度函数 $f(t)=\frac{1}{2}at^2,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{a}{s^3}$
- 指数函数 $f(t)=e^{at}\rightarrow F(s)=\frac{1}{s-a}$
- 正弦函数 $f(t)=A\sin(\omega t)\rightarrow F(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

常用函数的 Laplace 变换

- 单位脉冲函数 $f(t) = \delta(t) \to F(s) = 1$
- 阶跃函数 $f(t) = A, (t \geq 0) \to F(s) = \frac{A}{s}$
- 斜坡函数（速度）$f(t) = vt, (t \geq 0) \to F(s) = \frac{v}{s^2}$
- 加速度函数 $f(t) = \frac{1}{2}at^2, (t \geq 0) \to F(s) = \frac{a}{s^3}$
- 指数函数 $f(t) = e^{at} \to F(s) = \frac{1}{s-a}$
- 正弦函数 $f(t) = A\sin(\omega t) \to F(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

常用函数的 Laplace 变换

- 单位脉冲函数 $f(t)=\delta(t)\rightarrow F(s)=1$
- 阶跃函数 $f(t)=A,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{A}{s}$
- 斜坡函数（速度）$f(t)=vt,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{v}{s^2}$
- 加速度函数 $f(t)=\frac{1}{2}at^2,(t\geq 0)\rightarrow F(s)=\frac{a}{s^3}$
- 指数函数 $f(t)=e^{at}\rightarrow F(s)=\frac{1}{s-a}$
- 正弦函数 $f(t)=A\sin(\omega t)\rightarrow F(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

常用函数的 Laplace 变换

- 单位脉冲函数 $f(t) = \delta(t) \to F(s) = 1$
- 阶跃函数 $f(t) = A, (t \geq 0) \to F(s) = \frac{A}{s}$
- 斜坡函数（速度）$f(t) = vt, (t \geq 0) \to F(s) = \frac{v}{s^2}$
- 加速度函数 $f(t) = \frac{1}{2}at^2, (t \geq 0) \to F(s) = \frac{a}{s^3}$
- 指数函数 $f(t) = e^{at} \to F(s) = \frac{1}{s-a}$
- 正弦函数 $f(t) = A\sin(\omega t) \to F(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

Laplace 变换的性质

- 线性: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \rightarrow F(s) = F_1(s) + F_2(s)$
- 衰减: $g(t) = f(t)e^{-at} \rightarrow G(s) = F(s+a)$
- 延迟: $g(t) = f(t-a) \rightarrow G(s) = F(s)e^{-as}$，一个信号经过 e^{-as} 后，相当于对这个信号作延迟运算
- 积分: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \rightarrow G(s) = \frac{F(s)}{s}$，$\frac{1}{s}$ 相当于积分器
- 微分: $g(t) = f(t)' \rightarrow G(s) = sF(s) - f(0)$，零初始条件下，$G(s) = sF(s)$，$s$ 相当于微分器
- 初值定理: 若 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处无脉冲分量则 $f(0) = \lim_{t->0} f(t) = \lim_{s->\infty} sF(s)$
- 终值定理: 若 $F(s)$ 极点全部在左半平面，则 $f(\infty) = lim_{t->\infty} f(t) = lim_{s->0} sF(s)$

Laplace 变换的性质

- 线性: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \rightarrow F(s) = F_1(s) + F_2(s)$
- 衰减: $g(t) = f(t)e^{-at} \rightarrow G(s) = F(s+a)$
- 延迟: $g(t) = f(t-a) \rightarrow G(s) = F(s)e^{-as}$，一个信号经过 e^{-as} 后，相当于对这个信号作延迟运算
- 积分: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \rightarrow G(s) = \frac{F(s)}{s}$，$\frac{1}{s}$ 相当于积分器
- 微分: $g(t) = f(t)' \rightarrow G(s) = sF(s) - f(0)$，零初始条件下，$G(s) = sF(s)$，$s$ 相当于微分器
- 初值定理: 若 $f(t)$ 在 $t=0$ 处无脉冲分量则 $f(0) = \lim_{t->0} f(t) = \lim_{s->\infty} sF(s)$
- 终值定理: 若 $F(s)$ 极点全部在左半平面，则 $f(\infty) = lim_{t->\infty}f(t) = lim_{s->0}sF(s)$

Laplace 变换的性质

- 线性: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \rightarrow F(s) = F_1(s) + F_2(s)$
- 衰减: $g(t) = f(t)e^{-at} \rightarrow G(s) = F(s + a)$
- 延迟: $g(t) = f(t - a) \rightarrow G(s) = F(s)e^{-as}$，一个信号经过 e^{-as} 后，相当于对这个信号作延迟运算
- 积分: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \rightarrow G(s) = \frac{F(s)}{s}$，$\frac{1}{s}$ 相当于积分器
- 微分: $g(t) = f(t)' \rightarrow G(s) = sF(s) - f(0)$，零初始条件下，$G(s) = sF(s)$，$s$ 相当于微分器
- 初值定理: 若 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处无脉冲分量则 $f(0) = \lim_{t->0} f(t) = \lim_{s->\infty} sF(s)$
- 终值定理: 若 $F(s)$ 极点全部在左半平面，则 $f(\infty) = lim_{t->\infty} f(t) = lim_{s->0} sF(s)$

Laplace 变换的性质

- 线性: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \to F(s) = F_1(s) + F_2(s)$
- 衰减: $g(t) = f(t)e^{-at} \to G(s) = F(s+a)$
- 延迟: $g(t) = f(t-a) \to G(s) = F(s)e^{-as}$，一个信号经过 e^{-as} 后，相当于对这个信号作延迟运算
- 积分: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \to G(s) = \frac{F(s)}{s}$，$\frac{1}{s}$ 相当于积分器
- 微分: $g(t) = f(t)' \to G(s) = sF(s) - f(0)$，零初始条件下，$G(s) = sF(s)$，$s$ 相当于微分器
- 初值定理: 若 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处无脉冲分量则 $f(0) = \lim_{t->0} f(t) = \lim_{s->\infty} sF(s)$
- 终值定理: 若 $F(s)$ 极点全部在左半平面，则 $f(\infty) = lim_{t->\infty} f(t) = lim_{s->0} sF(s)$

Laplace 变换的性质

- 线性: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \to F(s) = F_1(s) + F_2(s)$
- 衰减: $g(t) = f(t)e^{-at} \to G(s) = F(s + a)$
- 延迟: $g(t) = f(t - a) \to G(s) = F(s)e^{-as}$，一个信号经过 e^{-as} 后，相当于对这个信号作延迟运算
- 积分: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \to G(s) = \frac{F(s)}{s}$，$\frac{1}{s}$ 相当于积分器
- 微分: $g(t) = f(t)' \to G(s) = sF(s) - f(0)$，零初始条件下，$G(s) = sF(s)$，$s$ 相当于微分器
- 初值定理: 若 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处无脉冲分量则 $f(0) = \lim_{t->0} f(t) = \lim_{s->\infty} sF(s)$
- 终值定理: 若 $F(s)$ 极点全部在左半平面，则 $f(\infty) = lim_{t->\infty} f(t) = lim_{s->0} sF(s)$

Laplace 变换的性质

- 线性: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \to F(s) = F_1(s) + F_2(s)$
- 衰减: $g(t) = f(t)e^{-at} \to G(s) = F(s+a)$
- 延迟: $g(t) = f(t-a) \to G(s) = F(s)e^{-as}$，一个信号经过 e^{-as} 后，相当于对这个信号作延迟运算
- 积分: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \to G(s) = \frac{F(s)}{s}$，$\frac{1}{s}$ 相当于积分器
- 微分: $g(t) = f(t)' \to G(s) = sF(s) - f(0)$，零初始条件下，$G(s) = sF(s)$，$s$ 相当于微分器
- 初值定理: 若 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处无脉冲分量则 $f(0) = \lim_{t->0} f(t) = \lim_{s->\infty} sF(s)$
- 终值定理: 若 $F(s)$ 极点全部在左半平面，则 $f(\infty) = lim_{t->\infty} f(t) = lim_{s->0} sF(s)$

Laplace 变换的性质

- 线性: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \rightarrow F(s) = F_1(s) + F_2(s)$
- 衰减: $g(t) = f(t)e^{-at} \rightarrow G(s) = F(s+a)$
- 延迟: $g(t) = f(t-a) \rightarrow G(s) = F(s)e^{-as}$，一个信号经过 e^{-as} 后，相当于对这个信号作延迟运算
- 积分: $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \rightarrow G(s) = \frac{F(s)}{s}$，$\frac{1}{s}$ 相当于积分器
- 微分: $g(t) = f(t)' \rightarrow G(s) = sF(s) - f(0)$，零初始条件下，$G(s) = sF(s)$，$s$ 相当于微分器
- 初值定理: 若 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处无脉冲分量则 $f(0) = \lim_{t->0} f(t) = \lim_{s->\infty} sF(s)$
- 终值定理: 若 $F(s)$ 极点全部在左半平面，则 $f(\infty) = lim_{t->\infty} f(t) = lim_{s->0} sF(s)$

Laplace 变换的性质

- 线性: $f(t)=f_1(t)+f_2(t)\to F(s)=F_1(s)+F_2(s)$
- 衰减: $g(t)=f(t)e^{-at}\to G(s)=F(s+a)$
- 延迟: $g(t)=f(t-a)\to G(s)=F(s)e^{-as}$，一个信号经过 e^{-as} 后，相当于对这个信号作延迟运算
- 积分: $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau \to G(s)=\frac{F(s)}{s}$，$\frac{1}{s}$ 相当于积分器
- 微分: $g(t)=f(t)'\to G(s)=sF(s)-f(0)$，零初始条件下，$G(s)=sF(s)$，$s$ 相当于微分器
- 初值定理: 若 $f(t)$ 在 $t=0$ 处无脉冲分量则 $f(0)=\lim_{t->0}f(t)=\lim_{s->\infty}sF(s)$
- 终值定理: 若 $F(s)$ 极点全部在左半平面，则 $f(\infty)=lim_{t->\infty}f(t)=lim_{s->0}sF(s)$

传递函数概念

- 概念：数学模型，从现阶段来讲，描述的是输入与输出的数学运算关系。传递函数可以表示出系统的结构，可以用来研究系统结构，参数变化对系统性能的影响。
- 定义：线性定常系统的传递函数是指在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，记作：$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$。

传递函数概念

- 概念：数学模型，从现阶段来讲，描述的是输入与输出的数学运算关系。传递函数可以表示出系统的结构，可以用来研究系统结构，参数变化对系统性能的影响。
- 定义：线性定常系统的传递函数是指在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，记作：$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$。

传递函数概念

- 概念：数学模型，从现阶段来讲，描述的是输入与输出的数学运算关系。传递函数可以表示出系统的结构，可以用来研究系统结构，参数变化对系统性能的影响。
- 定义：线性定常系统的传递函数是指在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比，记作：$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

Topic

传递函数的形式

- 传递函数有三种表达形式
  - 分子分母多项式
  - 零极点形式
  - 典型环节形式

传递函数的形式

- 传递函数有三种表达形式
  - 分子分母多项式
  - 零极点形式
  - 典型环节形式

传递函数的形式

- 传递函数有三种表达形式
  - 分子分母多项式
  - 零极点形式
  - 典型环节形式

传递函数的形式

- 传递函数有三种表达形式
  - 分子分母多项式
  - 零极点形式
  - 典型环节形式

传递函数的形式

- 传递函数有三种表达形式
  - 分子分母多项式
  - 零极点形式
  - 典型环节形式

分子分母多项式

- 在零初始条件下，对微分方程两端进行拉氏变换，有
- 传递函数只与系统的结构和参数有关

分子分母多项式

- 在零初始条件下，对微分方程两端进行拉氏变换，有

- 传递函数只与系统的结构和参数有关

分子分母多项式

- 在零初始条件下，对微分方程两端进行拉氏变换，有

$$a_n c^{(n)}(t) + \ldots + a_0 c(t) \quad = \quad b_m r^{(m)}(t) + \ldots + b_0 r$$

- 传递函数只与系统的结构和参数有关

分子分母多项式

- 在零初始条件下，对微分方程两端进行拉氏变换，有

$$
\begin{aligned}
a_n c^{(n)}(t) + \ldots + a_0 c(t) &= b_m r^{(m)}(t) + \ldots + b_0 r \\
a_n s^n C(s) + \ldots + a_0 C(s) &= b_m s^m R(s) + \ldots + b_0 R(s)
\end{aligned}
$$

- 传递函数只与系统的结构和参数有关

分子分母多项式

- 在零初始条件下，对微分方程两端进行拉氏变换，有

$$
\begin{aligned}
a_n c^{(n)}(t) + \ldots + a_0 c(t) &= b_m r^{(m)}(t) + \ldots + b_0 r \\
a_n s^n C(s) + \ldots + a_0 C(s) &= b_m s^m R(s) + \ldots + b_0 R(s) \\
(a_n s^n + \ldots + a_0) C(s) &= (b_m s^m + \ldots + b_0) R(s)
\end{aligned}
$$

- 传递函数只与系统的结构和参数有关

分子分母多项式

- 在零初始条件下，对微分方程两端进行拉氏变换，有

$$
\begin{aligned}
a_n c^{(n)}(t) + \ldots + a_0 c(t) &= b_m r^{(m)}(t) + \ldots + b_0 r \\
a_n s^n C(s) + \ldots + a_0 C(s) &= b_m s^m R(s) + \ldots + b_0 R(s) \\
(a_n s^n + \ldots + a_0) C(s) &= (b_m s^m + \ldots + b_0) R(s) \\
G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)}
\end{aligned}
$$

- 传递函数只与系统的结构和参数有关

分子分母多项式

- 在零初始条件下，对微分方程两端进行拉氏变换，有

$$
\begin{aligned}
a_n c^{(n)}(t) + \dots + a_0 c(t) &= b_m r^{(m)}(t) + \dots + b_0 r \\
a_n s^n C(s) + \dots + a_0 C(s) &= b_m s^m R(s) + \dots + b_0 R(s) \\
(a_n s^n + \dots + a_0) C(s) &= (b_m s^m + \dots + b_0) R(s) \\
G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} \\
&= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}
\end{aligned}
$$

- 传递函数只与系统的结构和参数有关

分子分母多项式

- 在零初始条件下，对微分方程两端进行拉氏变换，有

$$
\begin{aligned}
a_n c^{(n)}(t) + \dots + a_0 c(t) &= b_m r^{(m)}(t) + \dots + b_0 r \\
a_n s^n C(s) + \dots + a_0 C(s) &= b_m s^m R(s) + \dots + b_0 R(s) \\
(a_n s^n + \dots + a_0) C(s) &= (b_m s^m + \dots + b_0) R(s) \\
G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} \\
&= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}
\end{aligned}
$$

- 传递函数只与系统的结构和参数有关

零极点形式

$$G(s) = \frac{k_g \prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)}$$

- k_g 根轨迹增益
- z_i 零点
- p_j 极点

典型环节形式

$$G(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n}(\tau_j s+1)}$$

- K：系统增益

传递函数的零极点对系统输出的影响

- $N(s)C(s) = M(s)R(s)$
  - $M(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0)$
  - $N(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0)$
- $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$
- $M(s) = 0$ 求得极点，$N(s) = 0$ 求得零点。
- $c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$
- 系统运动模态由极点决定
- 各模态所占比例由零点决定

传递函数的零极点对系统输出的影响

- $N(s)C(s) = M(s)R(s)$
  - $M(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0)$
  - $N(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0)$
- $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$
- $M(s) = 0$ 求得极点，$N(s) = 0$ 求得零点。
- $c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- 系统运动模态由极点决定
- 各模态所占比例由零点决定

传递函数的零极点对系统输出的影响

- $N(s)C(s) = M(s)R(s)$
  - $M(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0)$
  - $N(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0)$
- $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$
- $M(s) = 0$ 求得极点，$N(s) = 0$ 求得零点。
- $c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- 系统运动模态由极点决定
- 各模态所占比例由零点决定

传递函数的零极点对系统输出的影响

- $N(s)C(s) = M(s)R(s)$
  - $M(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0)$
  - $N(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0)$
- $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$
- $M(s) = 0$ 求得极点，$N(s) = 0$ 求得零点。
- $c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- 系统运动模态由极点决定
- 各模态所占比例由零点决定

传递函数的零极点对系统输出的影响

- $N(s)C(s) = M(s)R(s)$
  - $M(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0)$
  - $N(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0)$
- $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$
- $M(s) = 0$ 求得极点, $N(s) = 0$ 求得零点。
- $c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- 系统运动模态由极点决定
- 各模态所占比例由零点决定

传递函数的零极点对系统输出的影响

- $N(s)C(s) = M(s)R(s)$
  - $M(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0)$
  - $N(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0)$
- $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$
- $M(s) = 0$ 求得极点，$N(s) = 0$ 求得零点。
- $c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$
- 系统运动模态由极点决定
- 各模态所占比例由零点决定

传递函数的零极点对系统输出的影响

- $N(s)C(s) = M(s)R(s)$
  - $M(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0)$
  - $N(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0)$
- $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$
- $M(s) = 0$ 求得极点，$N(s) = 0$ 求得零点。
- $c(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$
- 系统运动模态由极点决定
- 各模态所占比例由零点决定

Topic

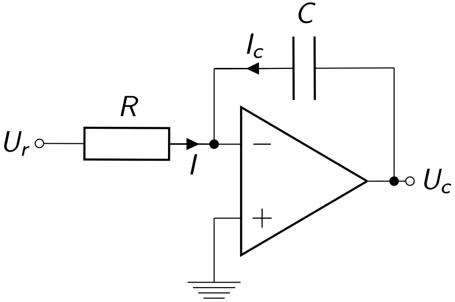
比例环节

$$
\begin{aligned}
c(t) &= kr(t) \\
C(s) &= kR(s) \\
G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} \\
&= k
\end{aligned}
$$

积分环节

传递函数

- $c(t) = \int r(t)dt$
- $C(s) = \frac{R(s)}{s}$
- $G(s) = \frac{1}{s}$



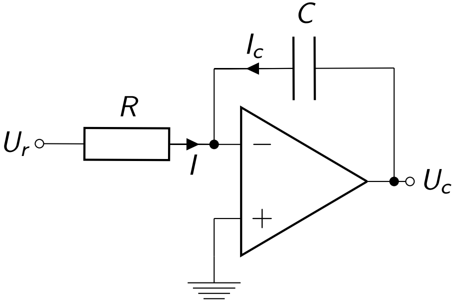
推导

1. $U_r = IR$
2. $U_r(s) = I(s)R$
3. $C\frac{dU_c}{dt} = I_c = -I$
4. $U_c(s) = -\frac{I(s)}{Cs}$
5. $U_c(s) = -\frac{U_r(s)}{RCs}$
6. $\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{1}{RCs}$

积分环节

传递函数

- $c(t) = \int r(t)dt$
- $C(s) = \frac{R(s)}{s}$
- $G(s) = \frac{1}{s}$



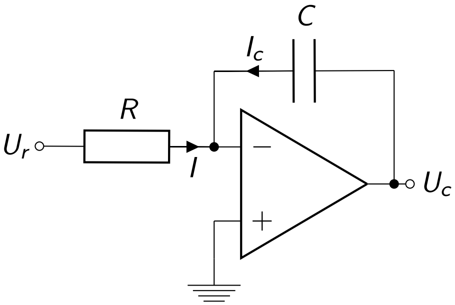
推导

1. $U_r = IR$
2. $U_r(s) = I(s)R$
3. $C\frac{dU_c}{dt} = I_c = -I$
4. $U_c(s) = -\frac{I(s)}{Cs}$
5. $U_c(s) = -\frac{U_r(s)}{RCs}$
6. $\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{1}{RCs}$

积分环节

传递函数

- $c(t) = \int r(t)dt$
- $C(s) = \frac{R(s)}{s}$
- $G(s) = \frac{1}{s}$



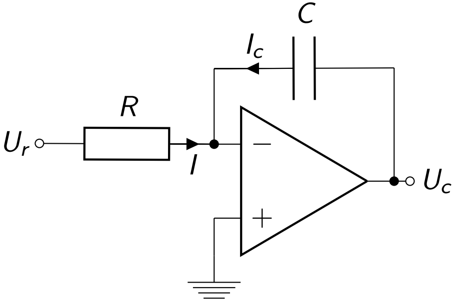
推导

1. $U_r = IR$
2. $U_r(s) = I(s)R$
3. $C\frac{dU_c}{dt} = I_c = -I$
4. $U_c(s) = -\frac{I(s)}{Cs}$
5. $U_c(s) = -\frac{U_r(s)}{RCs}$
6. $\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{1}{RCs}$

积分环节

传递函数

- $c(t) = \int r(t)dt$
- $C(s) = \frac{R(s)}{s}$
- $G(s) = \frac{1}{s}$



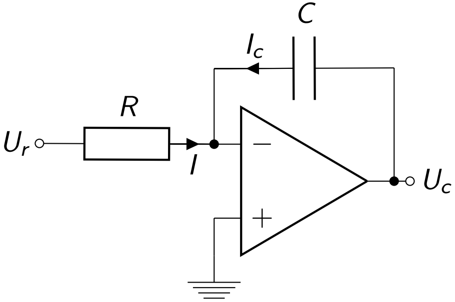
推导

1. $U_r = IR$
2. $U_r(s) = I(s)R$
3. $C\frac{dU_c}{dt} = I_c = -I$
4. $U_c(s) = -\frac{I(s)}{Cs}$
5. $U_c(s) = -\frac{U_r(s)}{RCs}$
6. $\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{1}{RCs}$

积分环节

传递函数

- $c(t) = \int r(t)dt$
- $C(s) = \frac{R(s)}{s}$
- $G(s) = \frac{1}{s}$



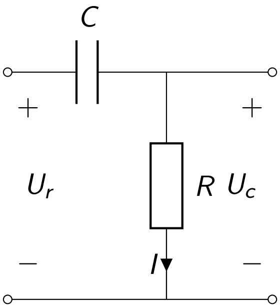
推导

1. $U_r = IR$
2. $U_r(s) = I(s)R$
3. $C\frac{dU_c}{dt} = I_c = -I$
4. $U_c(s) = -\frac{I(s)}{Cs}$
5. $U_c(s) = -\frac{U_r(s)}{RCs}$
6. $\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = -\frac{1}{RCs}$

微分环节

传递函数

- $c(t) = r'(t)$
- $C(s) = sR(s)$
- $G(s) = s$



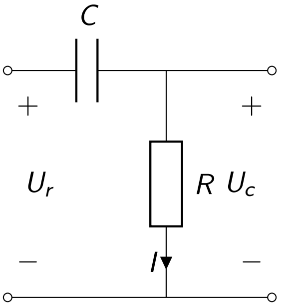
推导

$$
\begin{aligned}
U_r &= \frac{1}{C}\int I dt + U_c \\
U_r(s) &= \frac{I(s)}{Cs} + U_c(s) \\
IR &= U_c \\
I(s)R &= U_c(s) \\
U_r(s) &= \frac{U_c(s)}{RCs} + U_c(s) \\
\frac{U_c(s)}{U_r(s)} &= \frac{RCs}{1 + RCs} \\
&\approx RCs, \qquad (RC \ll 1)
\end{aligned}
$$

微分环节

传递函数

- $c(t) = r'(t)$
- $C(s) = sR(s)$
- $G(s) = s$



推导

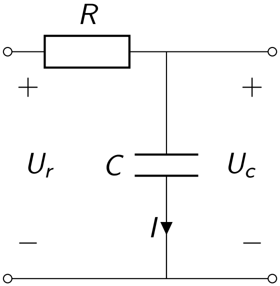
$$
\begin{aligned}
U_r &= \frac{1}{C}\int I dt + U_c \\
U_r(s) &= \frac{I(s)}{Cs} + U_c(s) \\
IR &= U_c \\
I(s)R &= U_c(s) \\
U_r(s) &= \frac{U_c(s)}{RCs} + U_c(s) \\
\frac{U_c(s)}{U_r(s)} &= \frac{RCs}{1+RCs} \\
&\approx RCs, \qquad (RC \ll 1)
\end{aligned}
$$

一阶惯性环节

传递函数

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

其中 $T = RC$ 为时间常数



推导

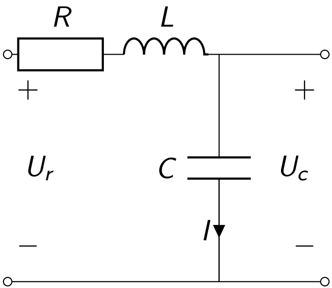
$$\begin{aligned}
U_r &= IRdt + U_c \\
U_r(s) &= I(s)R + U_c(s) \\
U_c &= \frac{1}{C}\int Idt \\
I(s) &= CsU_c \\
U_r(s) &= U_c(s)RCs + U_c(s) \\
\frac{U_c(s)}{U_r(s)} &= \frac{1}{1+RCs}
\end{aligned}$$

一阶微分环节

$$G(s) = 1 + \tau s$$

二阶振荡环节

LC 振荡电路



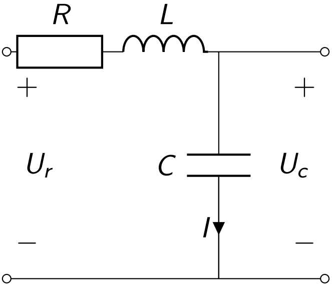
$$
\begin{aligned}
U_r &= IR + U_L + U_c \\
U_c &= \frac{1}{C}\int I dt \\
U_L &= L\frac{dI}{dt}
\end{aligned}
$$

推导

$$
\begin{aligned}
U_r(s) &= I(s)R + U_L(s) + U_c(s) \\
U_c(s) &= \frac{I(s)}{Cs} \\
I(s) &= CsU_c \\
U_L(s) &= LsI(s) \\
&= LCs^2 U_c(s) \\
U_r(s) &= (Rcs + LCs^2 + 1)U_c(s) \\
\frac{U_c(s)}{U_r(s)} &= \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}
\end{aligned}
$$

二阶振荡环节

LC 振荡电路



$$
\begin{aligned}
U_r &= IR + U_L + U_c \\
U_c &= \frac{1}{C}\int Idt \\
U_L &= L\frac{dI}{dt}
\end{aligned}
$$

推导

$$
\begin{aligned}
U_r(s) &= I(s)R + U_L(s) + U_c(s) \\
U_c(s) &= \frac{I(s)}{Cs} \\
I(s) &= CsU_c \\
U_L(s) &= LsI(s) \\
&= LCs^2U_c(s) \\
U_r(s) &= (Rcs + LCs^2 + 1)U_c(s) \\
\frac{U_c(s)}{U_r(s)} &= \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}
\end{aligned}
$$

二阶振荡环节标准形式

- 标准形式:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}
\end{aligned}
$$

其中 $T\omega_n = 1$

- 术语:
  - ω_n : 无阻尼振荡频率或自然频率
  - ξ : 阻尼比或阻尼系数
  - T : 时间常数

二阶振荡环节标准形式

- 标准形式:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}
\end{aligned}
$$

其中 $T\omega_n = 1$

- 术语:
  - ω_n：无阻尼振荡频率或自然频率
  - ξ：阻尼比或阻尼系数
  - T：时间常数

二阶振荡环节标准形式

- 标准形式:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}
\end{aligned}
$$

  其中 $T\omega_n = 1$
- 术语:
  - ω_n : 无阻尼振荡频率或自然频率
  - ξ : 阻尼比或阻尼系数
  - T : 时间常数

二阶微分环节

$$G(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1$$

延迟环节

$$
\begin{aligned}
c(t) &= r(t-\tau) \\
C(s) &= R(s)e^{-\tau s} \\
G(s) &= e^{-\tau s}
\end{aligned}
$$