线性系统的频域分析法

频域稳定性判据

Outline

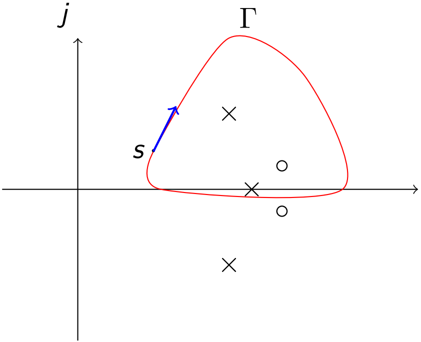
Topic

辐角原理

- 设 s 为复变量, $F(s)$ 为 s 的有理分式函数. 对于 s 平面上任意一点 s , 通过复变函数 $F(s)$ 的映射关系, 可以确定 s 的象.
- 在 s 平面上任选一条闭合曲线 Γ , 且不通过 $F(s)$ 任一零点和极点, s 沿闭合曲线 Γ 运动一周, 则相应地 $F(s)$ 形成一条闭合曲线 Γ_F .

辐角原理 (续):

设 s 平面闭合曲线 Γ 包围 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点，则 s 沿 Γ 顺时针运动一周时，在 $F(s)$ 平面上，$F(s)$ 沿闭合曲线 Γ_F 逆时针包围原点的圈数为 $R = P - Z$.

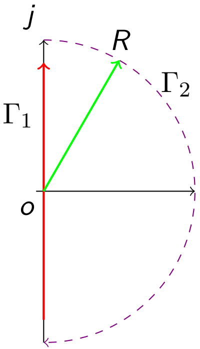


辐角原理的应用

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \\
&= \frac{G(s)}{1+G_o(s)} \\
&= \frac{G(s)}{F(s)} \\
F(s) &= 1+G_o(s)
\end{aligned}
$$

- $F(s)$ 的极点是系统开环极点,
- $F(s)$ 的零点是系统的闭环极点.

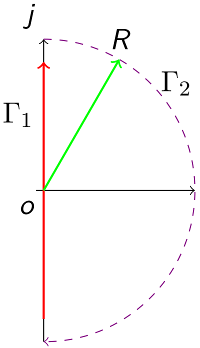
辐角原理的应用 (续)



将 Γ 分为两段:

- Γ_1 : $s = j\omega, \omega \in [-\infty, \infty]$
- Γ_2 : $s = \lim_{R\to\infty} Re^{j\theta}$, θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 $-\frac{\pi}{2}$
- 可得对应的 $G_o(s)$ 曲线.
  - s 在 Γ_1 上时, 与 Nyquist 图对应.($\omega \in [0, \infty]$)
  - s 在 Γ_1 上时,
    $F(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \lim_{R\to\infty} Re^{j\theta} G_o(s) = 1$
- Nyquist 判据
  - 对于开环稳定系统 ($P = 0$), 若 Nyquist 曲线不包含 $(-1, 0)$ 点, 则系统稳定.
  - 对于开环稳定系统 ($P > 0$), 若 Nyquist 曲线逆时针包围 $(-1, 0)$ 点的次数为 $\frac{P}{2}$, 则系统稳定.

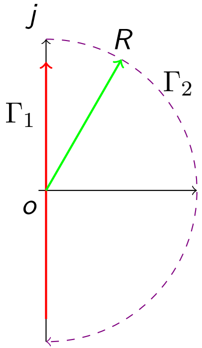
辐角原理的应用 (续)



将 Γ 分为两段:

- Γ_1 : $s = j\omega, \omega \in [-\infty, \infty]$
- Γ_2 : $s = \lim_{R\to\infty} Re^{j\theta}$, θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 $-\frac{\pi}{2}$
- 可得对应的 $G_o(s)$ 曲线.
  - s 在 Γ_1 上时, 与 Nyquist 图对应.($\omega \in [0, \infty]$)
  - s 在 Γ_1 上时,
    $F(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \lim_{R\to\infty} Re^{j\theta} G_o(s) = 1$
- Nyquist 判据
  - 对于开环稳定系统 ($P = 0$), 若 Nyquist 曲线不包含 $(-1, 0)$ 点, 则系统稳定.
  - 对于开环稳定系统 ($P > 0$), 若 Nyquist 曲线逆时针包围 $(-1, 0)$ 点的次数为 $\frac{P}{2}$, 则系统稳定.

辐角原理的应用 (续)



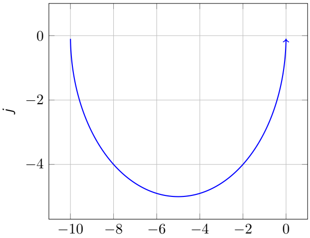
将 Γ 分为两段:

- Γ_1 : $s = j\omega, \omega \in [-\infty, \infty]$
- Γ_2 : $s = \lim_{R\to\infty} Re^{j\theta}$, θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 $-\frac{\pi}{2}$
- 可得对应的 $G_o(s)$ 曲线.
  - s 在 Γ_1 上时, 与 Nyquist 图对应.($\omega \in [0, \infty]$)
  - s 在 Γ_1 上时,
    $F(s) = 1 + G_o(s) = 1 + \lim_{R\to\infty} Re^{j\theta} G_o(s) = 1$
- Nyquist 判据
  - 对于开环稳定系统 ($P = 0$), 若 Nyquist 曲线不包含 $(-1, 0)$ 点, 则系统稳定.
  - 对于开环稳定系统 ($P > 0$), 若 Nyquist 曲线逆时针包围 $(-1, 0)$ 点的次数为 $\frac{P}{2}$, 则系统稳定.

Nyquist 判据，例 1:

某负反馈开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{10}{s-1}$ ，用 Nyquist 判据判断系统稳定性.

Nyquist 图



稳定性判断

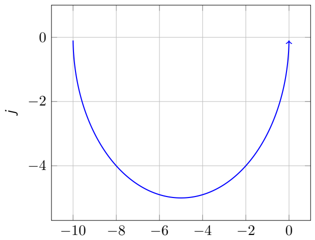
$$
\begin{aligned}
P &= 1 \\
N &= \frac{1}{2} \\
P - Z &= 2N \\
Z &= P - 2N \\
&= 0
\end{aligned}
$$

系统稳定.

Nyquist 判据，例 1:

某负反馈开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{10}{s-1}$，用 Nyquist 判据判断系统稳定性.

Nyquist 图



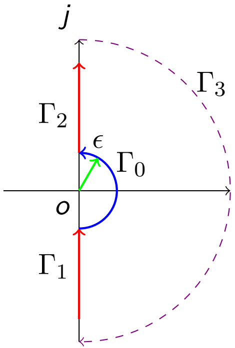
稳定性判断

$$
\begin{aligned}
P &= 1 \\
N &= \frac{1}{2} \\
P - Z &= 2N \\
Z &= P - 2N \\
&= 0
\end{aligned}
$$

系统稳定.

虚轴上有极点时

- 零型系统 $F(s)$ 沿 Γ 解析且不为 0.
- I 型及以上系统 $F(s)$ 在 $s=0$ 处不解析，不满足辐角原理条件.

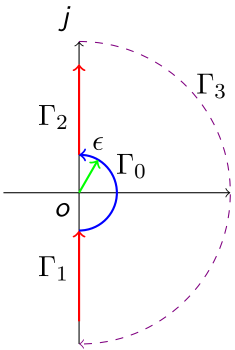


将 Γ 分为四段:

- Γ_1 : $s=j\omega, \omega \in [-\infty, 0^-]$
- Γ_2 : $s=j\omega, \omega \in [0^+, \infty]$
- Γ_3 : $s=\lim_{R\to\infty} Re^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Γ_0 : $s=\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- 对增补后的 Nyquist 图可使用 Nyquist 判据.

虚轴上有极点时

- 零型系统 $F(s)$ 沿 Γ 解析且不为 0.
- I 型及以上系统 $F(s)$ 在 $s=0$ 处不解析，不满足辐角原理条件.

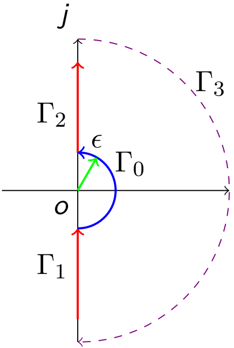


将 Γ 分为四段:

- Γ_1 : $s=j\omega, \omega \in [-\infty, 0^-]$
- Γ_2 : $s=j\omega, \omega \in [0^+, \infty]$
- Γ_3 : $s=\lim_{R\to\infty} Re^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Γ_0 : $s=\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon e^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- 对增补后的 Nyquist 图可使用 Nyquist 判据.

虚轴上有极点时

- 零型系统 $F(s)$ 沿 Γ 解析且不为 0.
- I 型及以上系统 $F(s)$ 在 $s=0$ 处不解析, 不满足辐角原理条件.

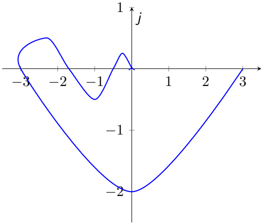


将 Γ 分为四段:

- Γ_1 : $s=j\omega, \omega \in [-\infty, 0^-]$
- Γ_2 : $s=j\omega, \omega \in [0^+, \infty]$
- Γ_3 : $s=\lim_{R\to\infty} Re^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Γ_0 : $s=\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{j\theta}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- 对增补后的 Nyquist 图可使用 Nyquist 判据.

穿越次数

Nyquist 图



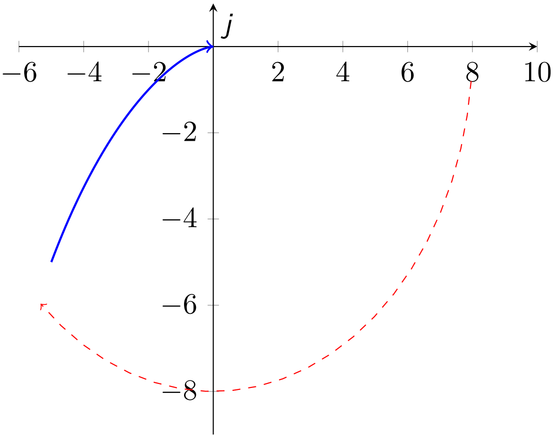
穿越次数

- 根据增补后的 Nyquist 曲线穿越 $(-1,0)$ 点左侧的次数可得 Γ_F 包围原点的圈数

$$\begin{aligned} R &= 2N \\ &= 2(N_+ - N_-) \end{aligned}$$

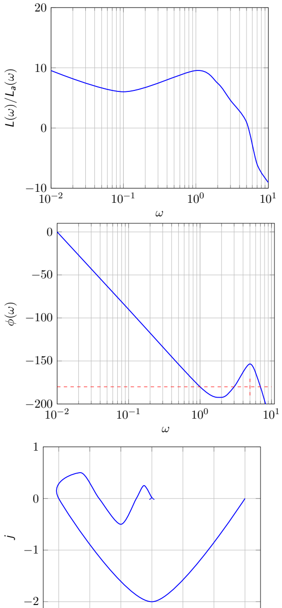
其中,
  - N_+ 为正穿越 (自上向下) 次数
  - N_- 为负穿越 (自下向上) 次数

例: $G_o(s) = \frac{10}{s(s+1)}$



Topic

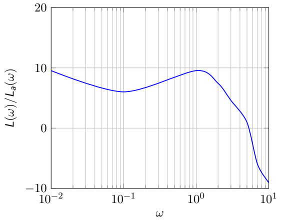
Bode 稳定性判据

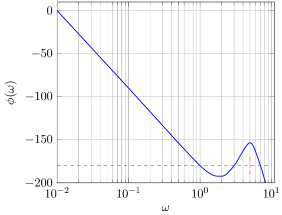


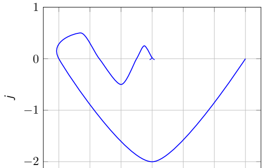
稳定性判断

- 截止频率 ω_c : $A(\omega_c) = 0$
- 穿越频率 ω_x : $\phi(\omega_x) = (2k+1)\pi$
- Bode 判据:
  - 最小相位系统，若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = 0$ ，则系统稳定
  - 非最小相位系统，若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = \frac{P}{2}$ ，则系统稳定

Bode 稳定性判据



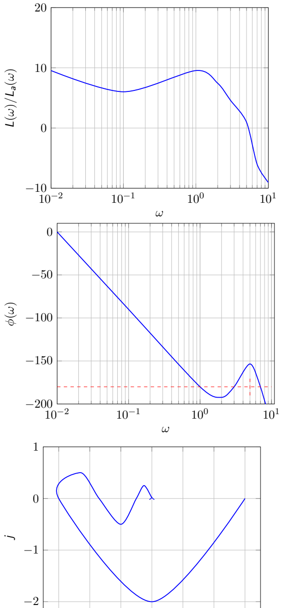




稳定性判断

- 截止频率 ω_c : $A(\omega_c) = 0$
- 穿越频率 ω_x : $\phi(\omega_x) = (2k+1)\pi$
- Bode 判据:
  - 最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = 0$, 则系统稳定
  - 非最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = \frac{P}{2}$, 则系统稳定

Bode 稳定性判据



稳定性判断

- 截止频率 ω_c : $A(\omega_c) = 0$
- 穿越频率 ω_x : $\phi(\omega_x) = (2k+1)\pi$
- Bode 判据:
  - 最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = 0$, 则系统稳定
  - 非最小相位系统, 若在 $\omega < \omega_c$ 前 $N_+ - N_- = \frac{P}{2}$, 则系统稳定