自控原理体会

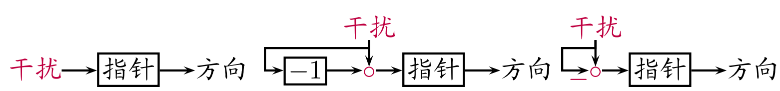
Outline

Contents

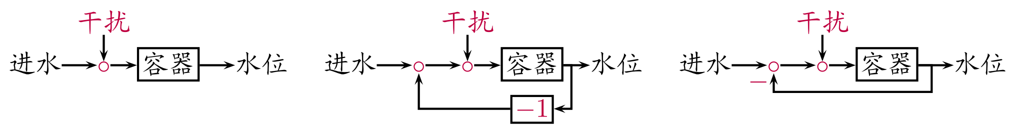
1 自动控制的一般概念

1.1 开环与闭环

指南车

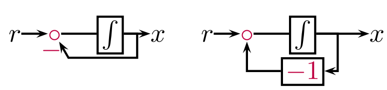


水位控制



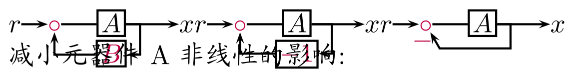
1.2 正反馈与负反馈

力 -速度模型



$$
\begin{aligned}
x &= \int_0^t v dt \\
v &= r - x
\end{aligned}
$$

$AB < 0$



减小元器件 A 非线性的影响:

$$
\begin{aligned}
c &= A(x + Bc) \\
&= \frac{Ax}{1 - AB} \\
&\approx \frac{x}{-B} \\
\frac{dc}{dA} &= \frac{x(1 - AB) - Ax(-B)}{(1 - AB)^2} \\
&= \frac{x}{(1 - AB)^2}
\end{aligned}
$$

2 二阶系统时域分析

2.1 利用单个复根分析二阶欠阻尼系统

典型二阶系统传递函数:

$$
\begin{aligned}
\phi(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= \frac{a^2 + b^2}{s^2 + 2as + a^2 + b^2} \\
&= \frac{a^2 + b^2}{(s + a + bi)(s + a - bi)} \\
\omega_n &= a^2 + b^2 \\
\xi &= \cos\beta \\
a &= \omega_n \cos\beta \\
b &= \omega_n \sin\beta
\end{aligned}
$$

分解成两个复一阶系统并联

$$
\begin{aligned}
\phi(s) &= \frac{a^2+b^2}{(s+a+bi)(-a-bi+a-bi)} + \frac{a^2+b^2}{(-a+bi+a+bi)(s+a-bi)} \\
&= \frac{a^2+b^2}{-2bi(s+a+bi)} + \frac{a^2+b^2}{2bi(s+a-bi)}
\end{aligned}
$$

输入为单位阶跃信号，输出为：

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \frac{a^2+b^2}{s(-2bi)(s+a+bi)} + \frac{a^2+b^2}{s(2bi)(s+a-bi)} \\
&= \frac{a^2+b^2}{s(-2bi)(0+a+bi)} + \frac{a^2+b^2}{(-a-bi)(-2bi)(s+a+bi)} + \frac{a^2+b^2}{s(2bi)(0+a-bi)} + \frac{a^2+b^2}{(-a+bi)(2bi)(s+a-bi)} \\
&= \frac{a-bi}{s(-2bi)} + \frac{a-bi}{(2bi)(s+a+bi)} + \frac{a+bi}{s(2bi)} + \frac{-a-bi}{(2bi)(s+a-bi)} \\
&= \frac{b+ai}{s(2b)} + \frac{-b-ai}{(2b)(s+a+bi)} + \frac{b-ai}{s(2b)} + \frac{-b+ai}{(2b)(s+a-bi)} \\
&= \frac{1}{s} + \frac{-b-ai}{(2b)(s+a+bi)} + \frac{-b+ai}{(2b)(s+a-bi)} \\
&= \frac{1}{s} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b}e^{(-\frac{\pi}{2}-\beta)i} \cdot \frac{1}{s+a+bi} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b}e^{(\frac{\pi}{2}+\beta)i} \cdot \frac{1}{(s+a-bi)} \\
&= \frac{1}{s} + \frac{\omega_n}{2b}e^{(-\frac{\pi}{2}-\beta)i} \cdot \frac{1}{s+a+bi} + \frac{\omega_n}{2b}e^{(\frac{\pi}{2}+\beta)i} \cdot \frac{1}{s+a-bi} \\
c(t) &= 1 + \frac{\omega_n}{2b}e^{(-\frac{\pi}{2}-\beta)i}e^{(-a-bi)t} + \frac{\omega_n}{2b}e^{(\frac{\pi}{2}+\beta)i}e^{(-a+bi)t} \\
&= 1 + \frac{\omega_n}{2b}e^{-at}e^{(-bt-\frac{\pi}{2}-\beta)i} + \frac{\omega_n}{2b}e^{-at}e^{(bt+\frac{\pi}{2}+\beta)i} \\
&= 1 + \frac{\omega_n}{b}e^{-at}\cos(bt+\frac{\pi}{2}+\beta) \\
&= 1 - \frac{\omega_n}{b}e^{-at}\sin(bt+\beta)
\end{aligned}
$$

两个复一阶系统的输出分别为：

$$
\begin{aligned}
C_1(s) &= \frac{a^2+b^2}{s(-2bi)(s+a+bi)} \\
&= \frac{a^2+b^2}{s(-2bi)(0+a+bi)} + \frac{a^2+b^2}{(-a-bi)(-2bi)(s+a+bi)} \\
&= \frac{a-bi}{s(-2bi)} + \frac{a-bi}{(2bi)(s+a+bi)} \\
&= \frac{b+ai}{2bs} + \frac{-b-ai}{2b(s+a+bi)} \\
&= \frac{b+ai}{2bs} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b} e^{(-\frac{\pi}{2}-\beta)i} \cdot \frac{1}{s+a+bi} \\
&= \frac{b+ai}{2bs} + \frac{\omega_n}{2b} e^{(-\frac{\pi}{2}-\beta)i} \cdot \frac{1}{s+a+bi} \\
c_1(t) &= \frac{1}{2} + \frac{ai}{2b} + \frac{\omega_n}{2b} e^{(-\frac{\pi}{2}-\beta)i} e^{(-a-bi)t} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{ai}{2b} + \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} e^{(-bt-\frac{\pi}{2}-\beta)i} \\
\Re[c_1(t)] &= \frac{1}{2} + \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} \cos(bt+\frac{\pi}{2}+\beta) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} \sin(bt+\beta) \\
&= \frac{c(t)}{2} \\
\Im[c_1(t)] &= \frac{ai}{2b} + \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} \sin(-bt-\frac{\pi}{2}-\beta) \\
&= \frac{ai}{2b} - \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} \cos(bt+\beta)
\end{aligned}
$$

与

$$
\begin{aligned}
C_2(s) &= \frac{a^2+b^2}{s(2bi)(s+a-bi)} \\
&= \frac{a^2+b^2}{s(2bi)(0+a-bi)} + \frac{a^2+b^2}{(-a+bi)(2bi)(s+a-bi)} \\
&= \frac{a+bi}{s(2bi)} + \frac{-a-bi}{(2bi)(s+a-bi)} \\
&= \frac{b-ai}{2bs)} + \frac{-b+ai}{2b(s+a-bi)} \\
&= \frac{b-ai}{2bs)} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b} e^{(\frac{\pi}{2}+\beta)i} \cdot \frac{1}{(s+a-bi)} \\
&= \frac{b-ai}{2bs)} + \frac{\omega_n}{2b} e^{(\frac{\pi}{2}+\beta)i} \cdot \frac{1}{s+a-bi} \\
c_2(t) &= \frac{1}{2} + \frac{-ai}{2b} + \frac{\omega_n}{2b} e^{(\frac{\pi}{2}+\beta)i} e^{(-a+bi)t} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{-ai}{2b} + \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} e^{(bt+\frac{\pi}{2}+\beta)i} \\
\Re[c_2(t)] &= \frac{1}{2} + \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} \cos(bt+\frac{\pi}{2}+\beta) \\
&= 1 - \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} \sin(bt+\beta) \\
&= \Re[c_1](t) \\
\Im[c_2(t)] &= \frac{-ai}{2b} + \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} \sin(bt+\frac{\pi}{2}+\beta) \\
&= \frac{-ai}{2b} + \frac{\omega_n}{2b} e^{-at} \cos(bt+\beta) \\
&= -\Im[c_2(t)] \\
c_2(t) &= c_1^*(t)
\end{aligned}
$$

因此, 在单位阶跃输入的情况下, 复一阶系统输出信号的实部与典型二阶系统的输出相等.

正如简谐振动是圆周运动的投影. 正弦函数也可以看作复数的投影. 欠阻尼二阶系统中的振荡特性, 可以看作是复平面曲线运动的投影.

结果演示

```
t=[0:0.01:10];
a=1;
b=1;
omega=sqrt(a^2+b^2);
be=asin(b/omega);
y1=omega/2/b*exp(-a*t).*exp((-b*t-be-pi/2)*i);
y2=omega/2/b*exp(-a*t).*exp((b*t+be+pi/2)*i);
```

```
figure( 1, "visible", "on" );
subplot(2,2,1);plot3(t,1+y1)
subplot(2,2,2);plot(t,real(1+y1));
subplot(2,2,3);plot(t,imag(1+y1));
subplot(2,2,4);plot(1+y1);
print -dpng chart.png -S500,500;
ans="chart.png";
```

3 传递函数模型

3.1 能控能观性

单输入多状态

$$
\begin{aligned}
X_1(s) &= \frac{1}{s+1}U(s) + \frac{1}{s+1}x_1(0) \\
X_2(s) &= \frac{2}{s+1}U(s) + \frac{1}{s+1}x_2(0)
\end{aligned}
$$

极点相同，两个状态变量无法同时满足任意初始条件下达到给定值. 例如，当初始值为 0 时，始终有: $x_2(t) = x_2(t)$

$$
\begin{aligned}
X_1(s) &= \frac{1}{s+1}U(s) + \frac{1}{s+1}x_1(0) \\
X_2(s) &= \frac{1}{s+2}U(s) + \frac{1}{s+2}x_2(0)
\end{aligned}
$$

极点不同，任意初始条件下，两个状态变量可同时达到给定值. 如: 设 $u(t) = \begin{cases} a & 0 < t < 1 \\ b & 1 < t < 2 \end{cases}$，代入式中可求得 a,b.

多状态单输

$$
Y(s) = \frac{2}{s+1}X_1(0) + \frac{1}{s+1}x_2(0)
$$

极点相同，根据输出，无法计算出两个状态的各自的值. 例如，以最小二乘法进行计算，无法得到两个状态的初始值.

$$
Y(s) = \frac{2}{s+2}X_1(0) + \frac{1}{s+1}x_2(0)
$$

极点不同，根据输出，可以计算两个状态变量各自的值，例如，可以使用最小二乘法通过输出序列计算出两个状态的初始值.

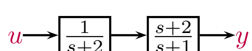
零极点相消

存在零极点相消时，导致传递函数中对应的状态变量消失，以致出现不能控或不能观的状态变量.

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

能控不能观:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s+2} \cdot \frac{s+2}{s+1} \\ X_1(s) &= \frac{1}{s+2} U(s) \\ X_2(s) &= \frac{1}{s+1} X_1(s) \\ Y(s) &= X_1(s) + X_2(s) \\ &= \frac{1}{s+1} U(s) \end{aligned}$$



能观不能控:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \\ Y(s) &= X_2(s) \\ X_2(s) &= \frac{1}{s+2}(X_1(S) + U(s)) \\ &= \frac{1}{s+1} U(s) \\ X_1(s) &= \frac{1}{s+1} U(s) \end{aligned}$$

$$u \to \boxed{\frac{s+2}{s+1}} \to \boxed{\frac{1}{s+2}} \to y$$

3.2 极点配置与状态观测器

利用状态反馈任意配置极点

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{M(s)}{N(s)}U(s) \\
&= M(s)X(s) \\
X(s) &= \frac{U(s)}{N(s)} \\
N(s) &= s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \\
N(s)X(s) &= s^n X(s) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i X(s) \\
&= U(s) \\
U(s) &= R(s) + \sum_{i=0}^{n-1} k_i s^i X(s) \\
N'(s)X(s) &= R(s) \\
N'(s) &= s^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + k_i) s^i \\
Y(s) &= \frac{M(s)}{N'(s)} R(s)
\end{aligned}
$$

其中 $s^i X(s)$ 为状态变量, k_i 为状态反馈系数, 可任意配置传递函数极点

利用矩阵推导状态观测器

将状态变量初值看作扰动

$$
\begin{aligned}
sX(s) &= AX(s) + BU(s) + F \qquad ,F = X_0 \\
Y(s) &= CX(s) \\
s\hat{X}(s) &= A\hat{X}(s) + BU(s) + KC(X(s) - \hat{X}(s)) \\
\hat{Y}(s) &= C\hat{X}(s) \\
E(s) &= X(s) - \hat{X}(s) \\
sE(s) &= AE(s) + F - KCE(s) \\
sE(s) &= (A - KC)E(s) + F \\
E(s) &= (sI - A + KC)^{-1}F
\end{aligned}
$$

对于不稳定的被控对象, 利用观测到的状态构建状态反馈即可实现稳定性. 已知:

$$
\begin{aligned}
(sI - A)X(s) &= BU(s) + F \qquad ,F = X_0 \\
(sI - A + KC)E(s) &= F
\end{aligned}
$$

引入观测状态作为反馈:

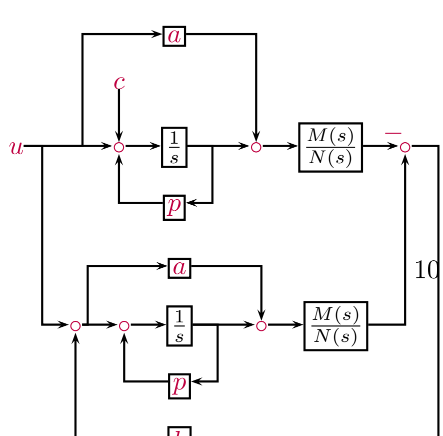
$$
\begin{aligned}
(sI - A)X(s) &= BK_f\hat{X}(s) + F \\
(sI - A)X(s) &= BK_f(X(s) - E(s)) + F \\
(sI - A - BK_f)X(s) &= BK_fE(s) + F
\end{aligned}
$$

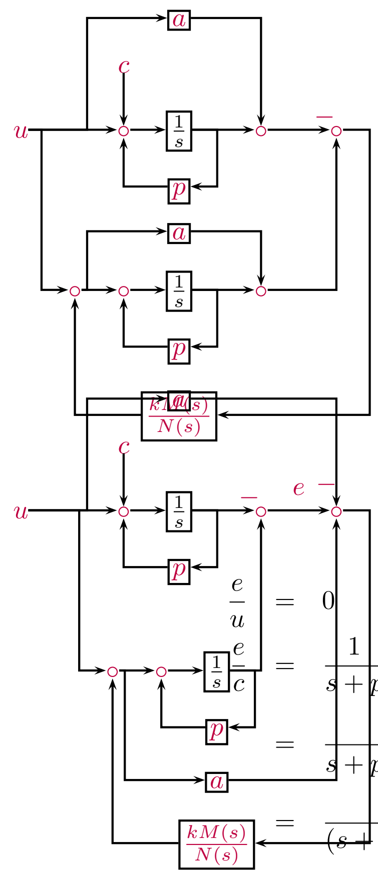
可得新的等效系统模型:

$$
\begin{aligned}
(sI - A - BK_f)X(s) &= BK_fE(s) + F \\
(sI - A + KC)E(s) &= F
\end{aligned}
$$

合理选择 K, K_f 即可实现状态观测与状态反馈.

利用传递函数推导



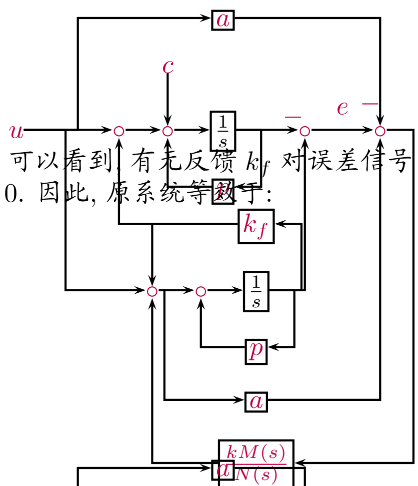


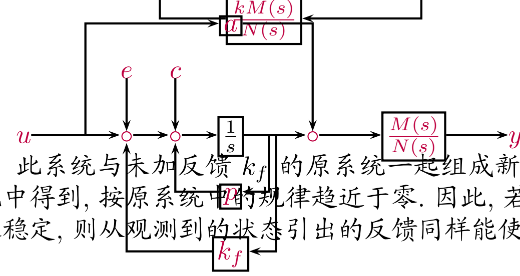
$$
\begin{aligned}
\frac{e}{u} &= 0 \\
\frac{e}{c} &= \frac{1}{s+p}\frac{1}{1+\frac{1}{s+p}\frac{KM}{N+KMa}} \\
&= \frac{1}{s+p+\frac{KM}{N+KMa}} \\
&= \frac{N+KMa}{(s+p)(N+KMa)+KM}
\end{aligned}
$$

只需合理选取 k, 使系统稳定, 则可以准确获取状态.(系统极点与反馈 K 单独作用于被控对象时相同)

系统不稳定时, 可以根据观测到的状态构建状态反馈.

可以看到, 有无反馈 k_f 对误差信号 e 无任何影响. 即 e 仍按原来的规律趋近于 0. 因此, 原系统等效于:





此系统与未加反馈 k_f 的原系统一起组成新的等效系统. 其中信号 e 从原系统中得到, 按原系统中的规律趋近于零. 因此, 若选取的状态反馈 k_f 能使被控对象稳定, 则从观测到的状态引出的反馈同样能使系统稳定.

4 泰勒级数计算

4.1 有理分式展开为泰勒级数

自动控制原理教材提到动态误差系数计算以及 Z 反变换计算, 本质上都是计算泰勒级数的系数.

有理分式 $G(s)=\frac{M(s)}{N(s)}$, 其中 $M(s)$ 与 $N(s)$ 均为 s 的多项式, 当极点均不为零时, 可在 $s=0$ 处展开为泰勒级数.

$$\frac{M(s)}{N(s)} = c_0+c_1s+c_2s^2+\cdots+c_ns^n+\cdots \tag{1}$$

(2)

利用部分分式表示形式, 可以得到各项系数 c_n . 当 $N(s)$ 无重根时:

$$
\begin{aligned}
\frac{M(s)}{N(s)} &= \sum_{i=1}^{I} \frac{a_i}{s-p_i} && (3)\\
\frac{a_i}{s-p_i} &= \frac{a_i}{s-p_i} && (4)\\
&= \frac{-a_i/p_i}{1-s/p_i} && (5)\\
&= \frac{-a_i}{p_i} + \cdots + \frac{-a_i}{p_i}(\frac{s}{p_i})^n + \cdots && (6)\\
\sum_{i=1}^{I} \frac{a_i}{s-p_i} &= \sum_{i=1}^{I} \frac{-a_i}{p_i} + \cdots + \sum_{i=1}^{I} \frac{-a_i}{p_i}(\frac{s}{p_i})^n + \cdots && (7)
\end{aligned}
$$

当 $N(s)$ 有重根时, 需要针对重根作进一步的推导, 设 λ 为 J 重根, 则:

$$
\begin{aligned}
\frac{M(s)}{N(s)} &= \sum_{i=1}^{I} \frac{a_i}{s-p_i} + \sum_{j=1}^{J} \frac{b_j}{(s-\lambda)^j} && (8)\\
\frac{b_j}{(s-\lambda)^j} &= \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \cdot \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}(\frac{b_j}{s-\lambda}) && (9)\\
\frac{b_j}{s-\lambda} &= \frac{-b_j/\lambda}{1-s/\lambda} && (10)\\
&= \frac{-b_j}{\lambda} + \cdots + \frac{-b_j}{\lambda}(\frac{s}{\lambda})^n + \cdots && (11)\\
\frac{b_j}{(s-\lambda)^j} &= \cdots + \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \frac{-b_j}{\lambda^{n+1}} \frac{d^j s^n}{ds^j} + \cdots && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}
$$

4.2 利用留数计算

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{t}\\
\frac{M(s)}{N(s)} &= \frac{M(1/t)}{N(1/t)}\\
\frac{M(1/t)}{N(1/t)} &= c_0 + c_1 t^{-1} + \cdots + c_n t^{-n} + \cdots
\end{aligned}
$$

计算 $\frac{M(1/t)}{N(1/t)} t^{n-1}$ 的留数可得 c_n

5 正弦输入时的稳态误差消除

5.1 使用前馈

$$\begin{aligned}
R(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\
G(s) &= \frac{1}{s+1} \\
G_r(s) &= \frac{2s}{s+1} \\
\Phi_e(s) &= \frac{1-GG_r}{1+G} \\
&= \frac{s^2+1}{s+2} \\
\Phi_e(s)R(s) &= \frac{1}{s+2} \\
\lim_{t\to\infty} e_{ss}(t) &= \lim_{s\to 0} \Phi_e(s)R(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

5.2 内模控制

$$\begin{aligned}
R(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\
G(s) &= \frac{1}{s+1} \\
G_c(s) &= \frac{1+2s}{s^2+1} \\
\Phi_e(s) &= \frac{1}{1+G_cG} \\
&= \frac{(s^2+1)(s+1)}{(1+s)(s^2+1)+2s+1} \\
\Phi_e(s)R(s) &= \frac{s+1}{(1+s)(s^2+1)+2s+1} \\
\lim_{t\to\infty} e_{ss}(t) &= \lim_{s\to 0} \Phi_e(s)R(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$