自动控制系统的数学模型

用微分方程描述的数学模型

Outline

Topic

数学模型分类

- 数学模型：描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类：
  - 时域 (t)：微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域 (s)：传递函数、结构图
  - 频域 (w)：频率特性

数学模型分类

- 数学模型：描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类：
  - 时域 (t)：微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域 (s)：传递函数、结构图
  - 频域 (w)：频率特性

数学模型分类

- 数学模型：描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类：
  - 时域 (t)：微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域 (s)：传递函数、结构图
  - 频域 (w)：频率特性

数学模型分类

- 数学模型：描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类：
  - 时域 (t)：微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域 (s)：传递函数、结构图
  - 频域 (w)：频率特性

数学模型分类

- 数学模型：描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类：
  - 时域 (t)：微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域 (s)：传递函数、结构图
  - 频域 (w)：频率特性

数学模型分类

- 数学模型：描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类：
  - 时域 (t)：微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域 (s)：传递函数、结构图
  - 频域 (w)：频率特性

建模步骤

1. 列出系统的输入变量、输出变量
2. 列写系统的原始方程
3. 对原始方程进行线性化
4. 消去中间变量，得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

1. 列出系统的输入变量、输出变量
2. 列写系统的原始方程
3. 对原始方程进行线性化
4. 消去中间变量，得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

1. 列出系统的输入变量、输出变量
2. 列写系统的原始方程
3. 对原始方程进行线性化
4. 消去中间变量，得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

1. 列出系统的输入变量、输出变量
2. 列写系统的原始方程
3. 对原始方程进行线性化
4. 消去中间变量，得到仅有输入/输出变量的微分方程

建模步骤

1. 列出系统的输入变量、输出变量
2. 列写系统的原始方程
3. 对原始方程进行线性化
4. 消去中间变量，得到仅有输入/输出变量的微分方程

线性化原理与方法

原理：在系统工作点处，将非线性函数展开成泰勒级数，忽略高次项，得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y - y_0$
  - $dX = x - x_0$
  - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理：在系统工作点处，将非线性函数展开成泰勒级数，忽略高次项，得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y - y_0$
  - $dX = x - x_0$
  - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理：在系统工作点处，将非线性函数展开成泰勒级数，忽略高次项，得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y - y_0$
  - $dX = x - x_0$
  - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理：在系统工作点处，将非线性函数展开成泰勒级数，忽略高次项，得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y - y_0$
  - $dX = x - x_0$
  - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理：在系统工作点处，将非线性函数展开成泰勒级数，忽略高次项，得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y - y_0$
  - $dX = x - x_0$
  - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理：在系统工作点处，将非线性函数展开成泰勒级数，忽略高次项，得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y - y_0$
  - $dX = x - x_0$
  - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理：在系统工作点处，将非线性函数展开成泰勒级数，忽略高次项，得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y - y_0$
  - $dX = x - x_0$
  - $dY = KdX$

线性化原理与方法

原理：在系统工作点处，将非线性函数展开成泰勒级数，忽略高次项，得到线性化方程

- $y = f(x)$ 在 x_0 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x - x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$ 在 (x_{10}, x_{20}) 处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y - y_0$
  - $dX = x - x_0$
  - $dY = KdX$

Topic

线性微分方程的解

解＝特解＋通解

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程：$a_0x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=b$
  - 特征方程：$a_0s^2+a_1s+a_2=0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 时, 通解为 $y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+...+c_ne^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, 则 $y(t)=c_1te^{\lambda t}+c_2e^{\lambda t}+...+c_ne^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解＝特解＋通解

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程：$a_0x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=b$
  - 特征方程：$a_0s^2+a_1s+a_2=0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 时, 通解为 $y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+...+c_ne^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, 则 $y(t)=c_1te^{\lambda t}+c_2e^{\lambda t}+...+c_ne^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解＝特解＋通解

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程：$a_0x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=b$
  - 特征方程：$a_0s^2+a_1s+a_2=0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 时, 通解为 $y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+...+c_ne^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, 则 $y(t)=c_1te^{\lambda t}+c_2e^{\lambda t}+...+c_ne^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解＝特解＋通解

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程：$a_0x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = b$
  - 特征方程：$a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 时, 通解为 $y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + ... + c_ne^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1te^{\lambda t} + c_2e^{\lambda t} + ... + c_ne^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解＝特解＋通解

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程：$a_0x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = b$
  - 特征方程：$a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 时, 通解为 $y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + ... + c_ne^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 则 $y(t) = c_1te^{\lambda t} + c_2e^{\lambda t} + ... + c_ne^{\lambda_n t}$

线性微分方程的解

解＝特解＋通解

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程：$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
  - 特征方程：$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 时，通解为 $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- 若有重根 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$，则 $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$

线性系统的定义与特点

- 条件:
  - 可加性：若 $r_1(t)->c_1(t)$, $r_2(t)->c_2(t)$ 则：$r_1(t)+r_2(t)->c_1(t)+c_2(t)$
  - 齐次性：$r_1(t)->c_1(t)$ 则：$ar_1(t)->ac_1(t)$
- 微积分特性: $r_1(t)\rightarrow c_1(t)$ 则 $\int r_1(t)\rightarrow\int c_1(t), r_1(t)'\rightarrow c_1(t)'$

线性系统的定义与特点

- 条件:
  - 可加性：若 $r_1(t)->c_1(t)$, $r_2(t)->c_2(t)$ 则：$r_1(t)+r_2(t)->c_1(t)+c_2(t)$
  - 齐次性：$r_1(t)->c_1(t)$ 则：$ar_1(t)->ac_1(t)$
- 微积分特性: $r_1(t) \rightarrow c_1(t)$ 则 $\int r_1(t) \rightarrow \int c_1(t), r_1(t)' \rightarrow c_1(t)'$

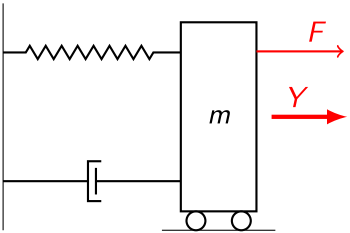
线性系统的定义与特点

- 条件:
  - 可加性：若 $r_1(t)->c_1(t)$, $r_2(t)->c_2(t)$ 则：$r_1(t)+r_2(t)->c_1(t)+c_2(t)$
  - 齐次性：$r_1(t)->c_1(t)$ 则：$ar_1(t)->ac_1(t)$
- 微积分特性: $r_1(t) \to c_1(t)$ 则 $\int r_1(t) \to \int c_1(t), r_1(t)' \to c_1(t)'$

Topic

机械系统示例 1

弹簧 -质量 -阻尼系统

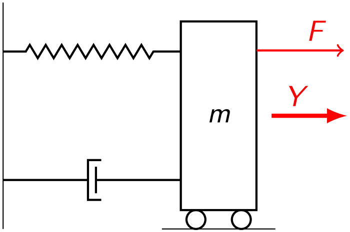


解:

- 输入：$F(t)$，输出：$Y(t)$
- 原始方程：
  $F - kY(t) - fv = ma$
- 消去中间变量：
  - $v = Y'(t)$
  - $a = v'$
  - $mY'' + fY' + kY = F$

机械系统示例 1

弹簧 -质量 -阻尼系统



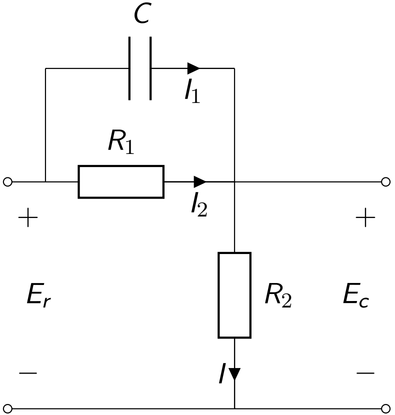
解:

- 输入：$F(t)$，输出：$Y(t)$
- 原始方程：
  $F - kY(t) - fv = ma$
- 消去中间变量：
  - $v = Y'(t)$
  - $a = v'$
  - $mY'' + fY' + kY = F$

Topic

电气及机电系统示例 1

电阻、电容网络

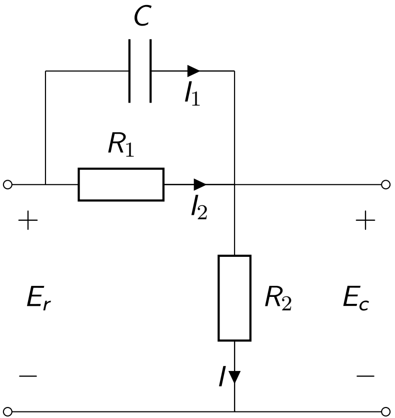


解：

- 输入：E_r，输出 E_c
- 原始方程：
  - $I = I_1 + I_2$
  - $E_c = R_2 I$
  - $E_r = R_1 I_2 + E_c$
  - $C(E_r - E_c)' = I_1$
- 消去 I,I_1,I_2 得：
  - $R_1 C E_c' + (R_1 + R_2)/R_2 E_c = R_1 E_r' + E_r$

电气及机电系统示例 1

电阻、电容网络

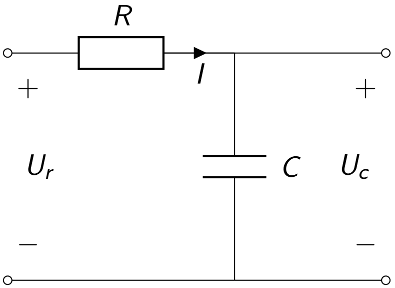


解：

- 输入：E_r，输出 E_c
- 原始方程：
  - $I = I_1 + I_2$
  - $E_c = R_2 I$
  - $E_r = R_1 I_2 + E_c$
  - $C(E_r - E_c)' = I_1$
- 消去 I,I_1,I_2 得：
  - $R_1 C E_c' + (R_1 + R_2)/R_2 E_c = R_1 E_r' + E_r$

电气及机电系统示例 2

电阻、电容网络

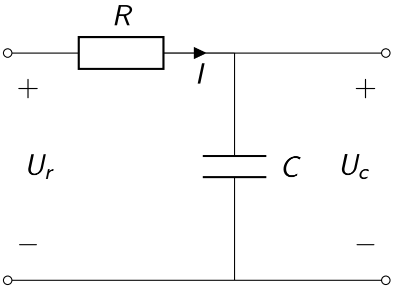


解：

- 输入：U_r，输出：U_c
- $U_r = RI + U_c$，$CU_c' = I$
- 消去 I，$RCU_c' + U_c = U_r$

电气及机电系统示例 2

电阻、电容网络



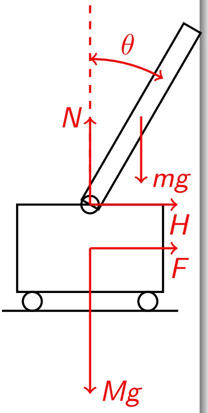
解:

- 输入: U_r , 输出: U_c
- $U_r = RI + U_c$, $CU_c' = I$
- 消去 I , $RCU_c' + U_c = U_r$

Topic

倒立摆系统线性化模型

倒立摆

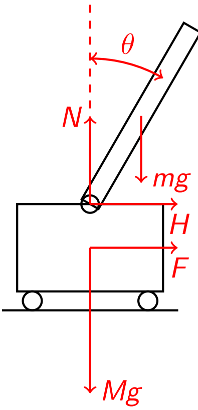


解：

- 输入 F, 输出 θ, r
- 原始方程：
  - 小车水平方向：$Mr'' = F - H$
  - 杆水平方向：$m(r + l\sin(\theta))'' = H$
  - 杆竖直方向：$m(l\cos(\theta))'' = N - mg$
  - 杆转动：$J(\theta)'' = Nl\sin(\theta) - Hl\cos(\theta)$
- 整理后：
  - $(M+m)r'' + ml\cos(\theta)\theta'' - ml\sin(\theta)(\theta')^2 = F$
  - $ml\cos(\theta)r'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\sin(\theta)$
- 线性化 ($\theta \to 0, \sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1$)
  - $(M+m)r'' + ml\theta'' = F$
  - $mlr'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\theta$

倒立摆系统线性化模型

倒立摆



解:

- 输入 F, 输出 θ, r
- 原始方程:
  - 小车水平方向: $Mr'' = F - H$
  - 杆水平方向: $m(r + l\sin(\theta))'' = H$
  - 杆竖直方向: $m(l\cos(\theta))'' = N - mg$
  - 杆转动: $J(\theta)'' = Nl\sin(\theta) - Hl\cos(\theta)$
- 整理后:
  - $(M+m)r'' + ml\cos(\theta)\theta'' - ml\sin(\theta)(\theta')^2 = F$
  - $ml\cos(\theta)r'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\sin(\theta)$
- 线性化 ($\theta \to 0, \sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1$)
  - $(M+m)r'' + ml\theta'' = F$
  - $mlr'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\theta$