

西北工业大学考试试题（卷）评分标准

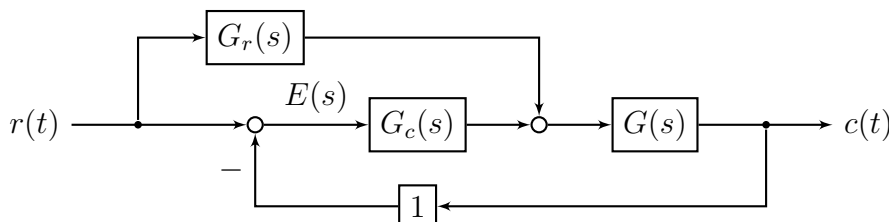
2015 — 2016 学年第 1 学期

开课学院 航天学院
考试日期

课程 自动控制理论 II
考试时间 小时

学时 32
考试形式 (闭) (B) 卷

一、(20 分) 已知控制系统结构图如下所示, 已知 $G(s) = \frac{1}{s+1}$, $G_c(s) = 1$ 。若 $G_r(s) = \frac{k_1 s + k_2}{s+1}$, $r(t) = t, (t > 0)$, 是否存在 k_1, k_2 使稳态误差为零? 若 $G_r(s) = Ae^{-\theta s}$, $r(t) = \sin(t), (t > 0)$ 是否存在 $A, \theta, (\theta \in (0, 2\pi))$ 使系统稳态输出 $c(t) = \sin(t)$?



答: 当 $G_r(s) = \frac{k_1 s + k_2}{s+1}$, $r(t) = t, (t > 0)$ 时, 得:

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{(1 - k_1 s + k_2)}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s+1}} \\ &= \frac{(s+1)^2 - (k_1 s + k_2)}{(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{s^2 + (2 - k_1)s + (1 - k_2)}{(s+2)(s+1)} \end{aligned}$$

所以, 当 $k_1 = 2, k_2 = 1$ 时,

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{s^2 + (2 - k_1)s + (1 - k_2)}{(s+2)(s+1)} \cdot R(s) \\ &= \frac{s^2}{(s+2)(s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

当 $G_r(s) = Ae^{-\theta s}$, $r(t) = \sin(t), (t > 0)$ 时:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega + 1} \\ G_r(j\omega) &= Ae^{-j\theta\omega} \\ \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} &= \frac{G(j\omega) + G_r(j\omega)G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 + Ae^{-j\theta\omega}}{2 + j\omega}$$

稳态时，

$$\begin{aligned} \left. \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right|_{\omega=1} &= \left. \frac{1 + Ae^{-j\theta\omega}}{2 + j\omega} \right|_{\omega=1} \\ &= \frac{1 + Ae^{-j\theta}}{2 + j} \\ &= 1 \end{aligned}$$

得：

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2} \\ \theta &= 2n\pi - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

二、(20 分) 单位负反馈控制系统开环传递函数，

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+5)}$$

串联校正网络：

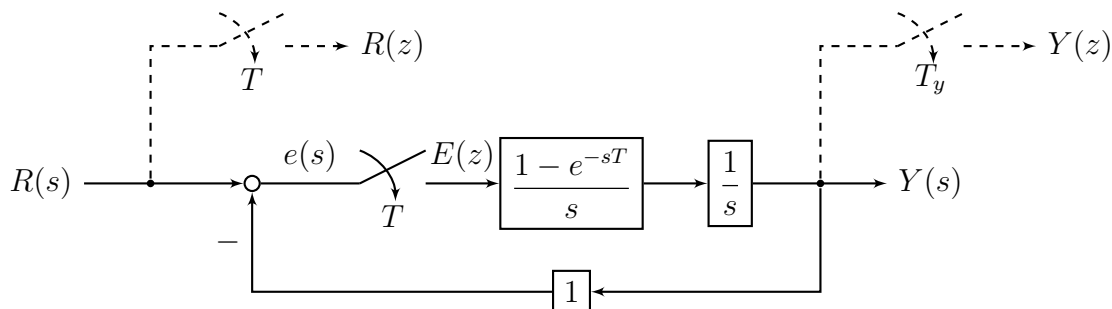
$$G_c(s) = k \cdot \frac{aT_a s + 1}{T_a s + 1}$$

能否调整 k, a, T_a 使校正后系统截止频率保持不变，同时使相角裕度提高 60° 。

答：

$$\begin{aligned} \phi_m &= \arcsin \frac{a-1}{a+1} \\ &= 60^\circ \\ a &= \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ \omega_c &= 2 = \omega_m \\ &= \frac{1}{T_a \sqrt{a}} \\ T_a &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \\ k &= \frac{1}{\sqrt{a}} \\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

三、(20 分) 已知控制系统结构图如下所示。当 $T_y = T, r(t) = t, (t > 0)$ 时求系统稳态误差；当 $T_y = \frac{T}{2}, R(z) = 1$ 时，求 $Y(z)$ 。



常见 Z 变换表：

$f(t)$	$F(s)$	$F(Z)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$1(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$

答：当 $r(t) = t, (t > 0)$ 时：

$$\begin{aligned}
 \frac{E^*(s)}{R^*(s)} &= \frac{1}{1 + \left[\frac{1-e^{-sT}}{s^2} \right]^*} \\
 \frac{E(z)}{R(z)} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{Tz^{-2}}{(1-z^{-1})^2} \right)} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{Tz^{-1}(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^2}} \\
 &= \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1} + Tz^{-1}} \\
 E(z) &= \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1} + Tz^{-1}} \cdot \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} \\
 &= \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})(1+(T-1)z^{-1})}
 \end{aligned}$$

系统极点为 $z = 1 - T$ 。当 $T \in (0, 2)$ 时，系统稳定。稳态误差为：

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = 1$$

当 $R(z) = 1, T_y = \frac{T}{2}$ 时，利用修正 Z 变换方法可计算 $Y(z)$ ：

$$\begin{aligned}
 Y^*(s) &= \left[E^*(s) \cdot \frac{1 - e^{-sT}}{s^2} \right]^*_{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-2} + Tz^{-2}} \cdot \left(\frac{\frac{T}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{\frac{T}{2}z^{-3}}{(1-z^{-1})^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-2} + Tz^{-2}} \cdot \frac{\frac{T}{2}z^{-1}(1 - z^{-2})}{(1 - z^{-1})^2} \\
&= \frac{\frac{T}{2}z^{-1}(1 + z^{-1})^2}{1 - z^{-2} + Tz^{-2}}
\end{aligned}$$

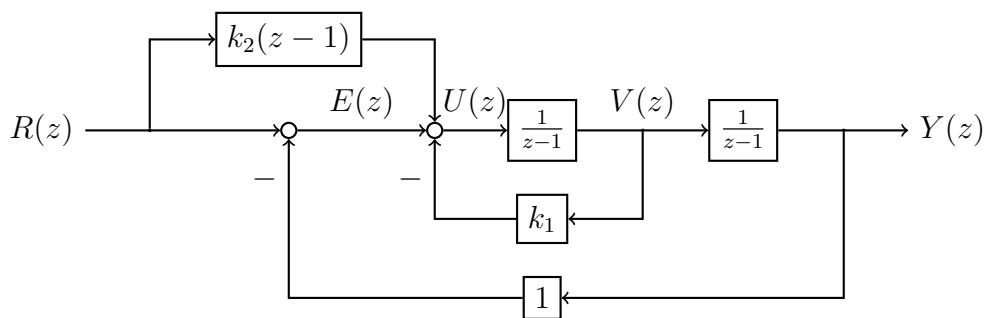
四、(20 分) 已知控制系统模型如下：

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= y(n) + v(n) \\
v(n+1) &= v(n) + u(n) \\
u(n) &= e(n) - k_1v(n) + k_2(r(n+1) - r(n)) \\
e(n) &= r(n) - y(n)
\end{aligned}$$

求脉冲传递函数 $G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$ ，其中 $Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)]$, $R(z) = \mathcal{Z}[r(n)]$ ；零初始条件下， $k_2 = 0, r(n) = 1, (n \geq 0)$ 时，为使系统超调量 $\sigma\% = 0$ ，且调节时间尽可能小， k_1 应取何值？零初始条件下， $r(n) = n, (t > 0)$ 时， k_1, k_2 取何值可使 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = 0$ ？

答：

系统结构图：



由梅森公式，得：

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\frac{k_2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}}{1 + \frac{k_1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}} \\
&= \frac{1 + k_2(z-1)}{(z-1)^2 + (z-1)k_1 + 1} \\
&= \frac{k_2z - k_2 + 1}{z^2 + (k_1 - 2)z - k_1 + 2}
\end{aligned}$$

当系统极点为实数时，满足 $\sigma\% = 0$ ，其中具有重极点时调节时间最小，因此

$$\begin{aligned}
(k_1 - 2)^2 &= 4(2 - k_1) \\
k_1 &= \pm 2
\end{aligned}$$

舍去 $k_1 = -2$ (不稳定)，得： $k_1 = 2$ 。

零初始条件下， $r(n) = n, R(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ 时，

$$E(s) = R(s) - G(s)R(s)$$

$$= \frac{(z-1)^2 + (z-1)k_1 - (z-1)k_2}{k_2 z - k_2 + 1} \cdot \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

判断稳定性:

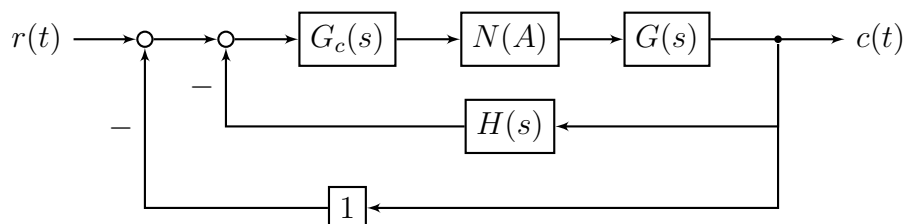
$$\begin{aligned} \frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + \frac{(w+1)(k_1-2)}{w-1} - k_1 + 2 &= 0 \\ (w+1)^2 + (w+1)(w-1)(k_1-2) - (k_1-2)(w-1)^2 &= 0 \\ w^2 + 2(k_1-1)w - 2k_1 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

当 $1 < k_1 < \frac{5}{2}$ 时系统稳定, 且有:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e(n) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) \\ &= k_1 - k_2 \end{aligned}$$

因此, 当 $1 < k_1 < \frac{5}{2}, k_1 = k_2$ 时可使 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = 0$

五、(20 分) 已知控制系统结构图如下所示, 已知 $G_c(s) = 1, H(s) = s, G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}, N(A) = \frac{1}{A+k}$, 求使系统稳定、无自振的 k 的范围。



答: 系统等效开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

计算 Nyquist 曲线与虚轴交点:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 1 \\ G(\omega_x) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nyquist 曲线不包围负倒描述函数或与其相交:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N(A)} &< -\frac{1}{2}, A \in (0, \infty) \\ -A - k &< -\frac{1}{2} \\ k &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$