线性系统校正方法

串联超前校正

Outline

Topic

串联超前校正原理

利用超前校正网络的相角超前特性来提升系统的相角裕度 γ

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \frac{1+aTs}{1+Ts}, a>1 \\
\phi_c(\omega) &= \arctan(aT\omega) - \arctan(T\omega)
\end{aligned}
$$

校正网络 Bode 图

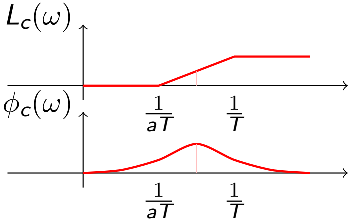
超前校正示意图:

串联超前校正原理

利用超前校正网络的相角超前特性来提升系统的相角裕度 γ

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \frac{1+aTs}{1+Ts}, a>1 \\
\phi_c(\omega) &= \arctan(aT\omega) - \arctan(T\omega)
\end{aligned}
$$

校正网络 Bode 图



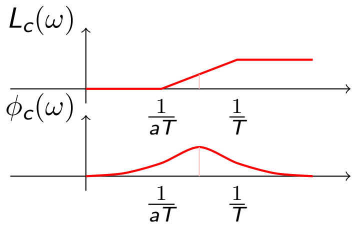
超前校正示意图:

串联超前校正原理

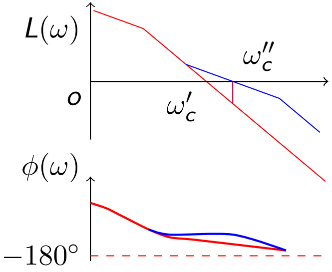
利用超前校正网络的相角超前特性来提升系统的相角裕度 γ

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \frac{1+aTs}{1+Ts}, a>1 \\
\phi_c(\omega) &= \arctan(aT\omega) - \arctan(T\omega)
\end{aligned}
$$

校正网络 Bode 图



超前校正示意图:



超前校正网络分析

最大超前角:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega} &= 0\\ \omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}}\\ \phi_c(\omega_m) &= 2\arctan\sqrt{a}-\frac{\pi}{2}\\ &= \arcsin\frac{a-1}{a+1}\end{aligned}$$

工程中一般 $\phi_m \le 60^\circ, a < 20$

幅值

$$\begin{aligned}\lg\omega_m &= \frac{1}{2}(\lg\frac{1}{T}+\lg\frac{1}{aT})\\ L_c(\omega) &= 20\lg\omega_m - 20\lg\frac{1}{aT}\\ &= 10\lg a\end{aligned}$$

- ω_m 位于 $\frac{1}{aT}$ 与 $\frac{1}{T}$ 的几何中心
- 超前网络设计使得设计后的 $\omega_c \approx \omega_m$，以获得最大相角提升

超前校正网络分析

最大超前角:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega} &= 0 \\
\omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
\phi_c(\omega_m) &= 2\arctan\sqrt{a} - \frac{\pi}{2} \\
&= \arcsin\frac{a-1}{a+1}
\end{aligned}
$$

工程中一般 $\phi_m \leq 60^\circ, a < 20$

幅值

$$
\begin{aligned}
\lg\omega_m &= \frac{1}{2}(\lg\frac{1}{T} + \lg\frac{1}{aT}) \\
L_c(\omega) &= 20\lg\omega_m - 20\lg\frac{1}{aT} \\
&= 10\lg a
\end{aligned}
$$

- ω_m 位于 $\frac{1}{aT}$ 与 $\frac{1}{T}$ 的几何中心
- 超前网络设计使得设计后的 $\omega_c \approx \omega_m$，以获得最大相角提升

超前校正网络分析

最大超前角:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega} &= 0\\ \omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}}\\ \phi_c(\omega_m) &= 2\arctan\sqrt{a}-\frac{\pi}{2}\\ &= \arcsin\frac{a-1}{a+1}\end{aligned}$$

工程中一般 $\phi_m \leq 60^\circ, a < 20$

幅值

$$\begin{aligned}\lg\omega_m &= \frac{1}{2}(\lg\frac{1}{T}+\lg\frac{1}{aT})\\ L_c(\omega) &= 20\lg\omega_m - 20\lg\frac{1}{aT}\\ &= 10\lg a\end{aligned}$$

- ω_m 位于 $\frac{1}{aT}$ 与 $\frac{1}{T}$ 的几何中心
- 超前网络设计使得设计后的 $\omega_c \approx \omega_m$，以获得最大相角提升

超前校正网络分析

最大超前角:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega} &= 0\\ \omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}}\\ \phi_c(\omega_m) &= 2\arctan\sqrt{a}-\frac{\pi}{2}\\ &= \arcsin\frac{a-1}{a+1}\end{aligned}$$

工程中一般 $\phi_m \leq 60^\circ, a < 20$

幅值

$$\begin{aligned}\lg\omega_m &= \frac{1}{2}(\lg\frac{1}{T}+\lg\frac{1}{aT})\\ L_c(\omega) &= 20\lg\omega_m - 20\lg\frac{1}{aT}\\ &= 10\lg a\end{aligned}$$

- ω_m 位于 $\frac{1}{aT}$ 与 $\frac{1}{T}$ 的几何中心
- 超前网络设计使得设计后的 $\omega_c \approx \omega_m$，以获得最大相角提升

超前校正网络分析

最大超前角:

$$\frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega} = 0$$

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

$$\phi_c(\omega_m) = 2\arctan\sqrt{a} - \frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{a-1}{a+1}$$

工程中一般 $\phi_m \leq 60°, a < 20$

幅值

$$\lg\omega_m = \frac{1}{2}(\lg\frac{1}{T} + \lg\frac{1}{aT})$$

$$L_c(\omega) = 20\lg\omega_m - 20\lg\frac{1}{aT} = 10\lg a$$

- ω_m 位于 $\frac{1}{aT}$ 与 $\frac{1}{T}$ 的几何中心
- 超前网络设计使得设计后的 $\omega_c \approx \omega_m$,以获得最大相角提升

适用范围

- 超前校正适用范围:
  - 原系统稳定, γ 不够
  - 希望的截止频率比原系统大, 主要用于提高系统的瞬态性能(动态品质)

适用范围

- 超前校正适用范围:
  - 原系统稳定, γ 不够
  - 希望的截止频率比原系统大, 主要用于提高系统的瞬态性能(动态品质)

适用范围

- 超前校正适用范围:
  - 原系统稳定, γ 不够
  - 希望的截止频率比原系统大, 主要用于提高系统的瞬态性能(动态品质)

设计步聚 (设计参数 K, a, T)

1. 根据 e_{ss} 的指标要求, 确定开环增益 K
2. 计算未校正系统的 ω_c', γ'
3. 转换时域指标到频域指标, 得到希望的 ω_c'', γ''
4. 设计超前校正网络的参数 a, T
   - 确定 a :
   $$L(\omega_c'') = -10\lg a$$
   - 确定 T :
   $$\omega_c'' = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$
5. 检验校正后系统的 ω_c, γ .

设计步聚 (设计参数 K, a, T)

1. 根据 e_{ss} 的指标要求, 确定开环增益 K
2. 计算未校正系统的 ω_c', γ'
3. 转换时域指标到频域指标, 得到希望的 ω_c'', γ''
4. 设计超前校正网络的参数 a, T
   - 确定 a :
   $$L(\omega_c'') = -10 \lg a$$
   - 确定 T :
   $$\omega_c'' = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$
5. 检验校正后系统的 ω_c, γ .

设计步聚 (设计参数 K, a, T)

1. 根据 e_{ss} 的指标要求, 确定开环增益 K
2. 计算未校正系统的 ω_c', γ'
3. 转换时域指标到频域指标, 得到希望的 ω_c'', γ''
4. 设计超前校正网络的参数 a, T
   - 确定 a :
   $$L(\omega_c'') = -10\lg a$$
   - 确定 T :
   $$\omega_c'' = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$
5. 检验校正后系统的 ω_c, γ .

设计步聚 (设计参数 K, a, T)

1. 根据 e_{ss} 的指标要求, 确定开环增益 K
2. 计算未校正系统的 ω_c', γ'
3. 转换时域指标到频域指标, 得到希望的 γ''
4. 设计超前校正网络的参数 a, T
   - 确定 a :

$$\phi_m = \gamma'' - \gamma' + \epsilon$$

$$a = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m}$$

   - 确定 T :

$$L(\omega_c'') = -10\lg a$$

$$\omega_c'' = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

5. 检验校正后系统的 γ .

设计步聚 (设计参数 K, a, T)

1. 根据 e_{ss} 的指标要求, 确定开环增益 K
2. 计算未校正系统的 ω_c', γ'
3. 转换时域指标到频域指标, 得到希望的 γ''
4. 设计超前校正网络的参数 a, T
   - 确定 a :

$$\phi_m = \gamma'' - \gamma' + \epsilon$$
$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

   - 确定 T :

$$L(\omega_c'') = -10 \lg a$$
$$\omega_c'' = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

5. 检验校正后系统的 γ .

设计步聚 (设计参数 K, a, T)

1. 根据 e_{ss} 的指标要求, 确定开环增益 K
2. 计算未校正系统的 ω'_c, γ'
3. 转换时域指标到频域指标, 得到希望的 γ''
4. 设计超前校正网络的参数 a, T
   - 确定 a :
   $$\phi_m = \gamma'' - \gamma' + \epsilon$$
   $$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$
   - 确定 T :
   $$L(\omega''_c) = -10 \lg a$$
   $$\omega''_c = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$
5. 检验校正后系统的 γ .

Topic

超前校正示例 1

单位负反馈开环传递函数 $G(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)}$ ，设计校正网络，使已校正系统相角裕度 $\gamma'' \geq 45^\circ$ ，截止频率 $\omega_c'' \geq 50 rad/s$.

- 解:

$$
\begin{aligned}
L(\omega) &= \begin{cases} 20\lg\frac{200}{\omega} & \omega < 10 \\ 20\lg\frac{200}{0.1\omega^2} & \omega \geq 10 \end{cases} \\
\omega_c' &= 44.7 \\
&< \omega_c'' \\
\gamma' &= 12.6^\circ \\
&< \gamma''
\end{aligned}
$$

选择超前校正网络.

超前校正示例 1

单位负反馈开环传递函数 $G(s)=\frac{200}{s(0.1s+1)}$，设计校正网络, 使已校正系统相角裕度 $\gamma''\geq 45^\circ$，截止频率 $\omega_c''\geq 50rad/s$.

- 解:

$$\begin{aligned}
L(\omega) &= \begin{cases} 20\lg\frac{200}{\omega} & \omega<10 \\ 20\lg\frac{200}{0.1\omega^2} & \omega\geq 10 \end{cases} \\
\omega_c' &= 44.7 \\
&< \omega_c'' \\
\gamma' &= 12.6^\circ \\
&< \gamma''
\end{aligned}$$

选择超前校正网络.

超前校正示例 1(续) 求 a

- 先根据 ϕ_m 尝试确定参数 a

$$
\begin{aligned}
\phi_m &= \gamma'' - \gamma' + \epsilon \\
\epsilon &= 10^\circ \\
\phi_m &= 45^\circ - 12.6^\circ + 10^\circ \\
&= 42.4^\circ \\
a &= \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m} \\
&= 5.1
\end{aligned}
$$

其中 ϵ 是因为估算有误差而留的余量.

超前校正示例 1(续) 求 T

- 求解 T

$$
\begin{aligned}
L(\omega_c'') + 10\lg a &= 0 \\
20\lg\frac{2000}{(\omega_c'')^2} + 20\lg\sqrt{a} &= 0 \\
\frac{2000\sqrt{5}}{(\omega_c'')^2} &= 1 \\
\omega_c'' &= 66.9 \\
\omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
\omega_c'' &= \omega_m \\
T &= 0.0066
\end{aligned}
$$

- 计算此时的相角裕度:

$$
\begin{aligned}
\gamma'' &= 180^\circ + 42.4^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c'') \\
&= 50.9^\circ
\end{aligned}
$$

超前校正示例 1(续) 求 T

- 求解 T

$$
\begin{aligned}
L(\omega_c'') + 10\lg a &= 0 \\
20\lg\frac{2000}{(\omega_c'')^2} + 20\lg\sqrt{a} &= 0 \\
\frac{2000\sqrt{5}}{(\omega_c'')^2} &= 1 \\
\omega_c'' &= 66.9 \\
\omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
\omega_c'' &= \omega_m \\
T &= 0.0066
\end{aligned}
$$

- 计算此时的相角裕度:

$$
\begin{aligned}
\gamma'' &= 180^\circ + 42.4^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c'') \\
&= 50.9^\circ
\end{aligned}
$$

超前校正示例 2

$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ ，设计校正网络使 $\gamma'' \geq 45°$ ，单位斜坡作用下 $e_{ss} \leq \frac{1}{15}$

- 解: 根据稳态误差要求, 得:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \frac{1}{K} \leq \frac{1}{15} \\ K &\geq 15 \end{aligned}$$

取 $K = 15$.

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \begin{cases} 20\lg\frac{15}{\omega} & \omega < 1 \\ 20\lg\frac{15}{\omega^2} & \omega \geq 1 \end{cases} \\ \omega_c' &= 3.9 \\ \gamma' &= 14.5° < 45° \end{aligned}$$

选择超前校正网络.

超前校正示例 2

$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$，设计校正网络使 $\gamma'' \geq 45^\circ$，单位斜坡作用下 $e_{ss} \leq \frac{1}{15}$

- 解: 根据稳态误差要求, 得:

$$
\begin{aligned}
e_{ss} &= \frac{1}{K} \leq \frac{1}{15} \\
K &\geq 15
\end{aligned}
$$

取 $K = 15$.

$$
\begin{aligned}
L(\omega) &= \begin{cases} 20\lg\frac{15}{\omega} & \omega < 1 \\ 20\lg\frac{15}{\omega^2} & \omega \geq 1 \end{cases} \\
\omega_c' &= 3.9 \\
\gamma' &= 14.5^\circ < 45^\circ
\end{aligned}
$$

选择超前校正网络.

超前校正示例 2(续) 求 a

- 先根据 ϕ_m 确定 a

$$
\begin{aligned}
\phi_m &= \gamma'' - \gamma' + \epsilon \\
\epsilon &= 10^\circ \\
\phi_m &= 40.5^\circ \\
a &= \frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m} \\
&= 4.7
\end{aligned}
$$

其中 ϵ 是因为估算有误差而留的余量.

超前校正示例 2(续) 求 T

- 然后求解 T

$$
\begin{aligned}
L(\omega_c'') + 10\lg a &= 0 \\
20\lg \frac{15}{(\omega_c'')^2} + 20\lg\sqrt{a} &= 0 \\
\frac{15\sqrt{4.7}}{(\omega_c'')^2} &= 1 \\
\omega_c'' &= 5.7 \\
\omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
\omega_c'' &= \omega_m \\
T &= 0.08
\end{aligned}
$$

- 计算此时的相角裕度:

$$
\begin{aligned}
\gamma'' &= 180^\circ + 40.5^\circ - 90^\circ - \arctan(\omega_c'') \\
&= 50.5^\circ
\end{aligned}
$$

超前校正示例 2(续) 求 T

- 然后求解 T

$$
\begin{aligned}
L(\omega_c'') + 10\lg a &= 0 \\
20\lg\frac{15}{(\omega_c'')^2} + 20\lg\sqrt{a} &= 0 \\
\frac{15\sqrt{4.7}}{(\omega_c'')^2} &= 1 \\
\omega_c'' &= 5.7 \\
\omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
\omega_c'' &= \omega_m \\
T &= 0.08
\end{aligned}
$$

- 计算此时的相角裕度:

$$
\begin{aligned}
\gamma'' &= 180^\circ + 40.5^\circ - 90^\circ - \arctan(\omega_c'') \\
&= 50.5^\circ
\end{aligned}
$$

超前校正示例 3

单位负反馈 $G(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)(0.2s+1)}$，设计超前校正网络使 $K_v \geq 5, \sigma\% \leq 25\%, t_s \leq 1s$

- 解：由性能指标知：

$$
\begin{aligned}
K &= 5 \\
\sigma\% &= 0.16+0.4(M_r-1) \\
0.25 &= 0.16+0.4(M_r-1) \\
M_r &= 1.225 \\
t_s &= \frac{K_0\pi}{\omega_c''} \\
K_0 &= 2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2 = 2.5 \\
\omega_c'' &= 7.7 \\
\gamma'' &= \arcsin\frac{1}{M_r} = 55^\circ
\end{aligned}
$$

超前校正示例 3

单位负反馈 $G(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)(0.2s+1)}$，设计超前校正网络使 $K_v \geq 5, \sigma\% \leq 25\%, t_s \leq 1s$

- 解: 由性能指标知:

$$\begin{aligned}
K &= 5 \\
\sigma\% &= 0.16+0.4(M_r-1) \\
0.25 &= 0.16+0.4(M_r-1) \\
M_r &= 1.225 \\
t_s &= \frac{K_0\pi}{\omega_c''} \\
K_0 &= 2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2=2.5 \\
\omega_c'' &= 7.7 \\
\gamma'' &= \arcsin\frac{1}{M_r}=55^\circ
\end{aligned}$$

超前校正示例 3(续) 频率特性分析

$$
\begin{aligned}
L(\omega) &= \begin{cases} 20\lg\frac{5}{\omega} & \omega < 5 \\ 20\lg\frac{5}{0.2\omega^2} & 5 \le \omega < 20 \\ 20\lg\frac{5}{0.01\omega^3} & \omega \ge 20 \end{cases} \\
\omega_c' &= 5 \\
\gamma' &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2\omega_c' - \arctan 0.05\omega_c' \\
&= 31.0^\circ
\end{aligned}
$$

选择超前校正网络.

超前校正示例 3(续): 计算 a

$$
\begin{aligned}
\omega_c'' &= 7.7 \\
L(\omega_c'') + 10\lg a &= 0 \\
20\lg\frac{5}{0.2(\omega_c'')^2} + 20\lg\sqrt{a} &= 0 \\
\frac{5\sqrt{a}}{0.2(\omega_c'')^2} &= 1 \\
a &= 5.6
\end{aligned}
$$

超前校正示例 3(续): 根据截止频率计算 T

- 计算 T

$$
\begin{aligned}
\omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
\omega_c'' &= \omega_m \\
T &= 0.055 \\
\phi_m &= \arcsin\frac{a-1}{a+1} \\
&= 44^\circ
\end{aligned}
$$

- 计算此时的相角裕度:

$$
\begin{aligned}
\gamma'' &= 180^\circ + 44^\circ - 90^\circ - \arctan(0.05\omega_c'') - \arctan(0.2\omega_c'') \\
&= 56^\circ
\end{aligned}
$$

- 满足要求的超前校正网络为 $G(s) = \frac{1+0.3s}{1+0.055s}$

超前校正示例 3(续): 根据截止频率计算 T

- 计算 T

$$
\begin{aligned}
\omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
\omega_c'' &= \omega_m \\
T &= 0.055 \\
\phi_m &= \arcsin\frac{a-1}{a+1} \\
&= 44^\circ
\end{aligned}
$$

- 计算此时的相角裕度:

$$
\begin{aligned}
\gamma'' &= 180^\circ + 44^\circ - 90^\circ - \arctan(0.05\omega_c'') - \arctan(0.2\omega_c'') \\
&= 56^\circ
\end{aligned}
$$

- 满足要求的超前校正网络为 $G(s) = \frac{1+0.3s}{1+0.055s}$