线性系统的根轨迹法

广义根轨迹与零度根轨迹

Outline

Topic

广义根轨迹

变化参数可以是系统任意参数

例:

T_a 从 $0 \to +\infty$ 时系统根轨迹.

解:

$$G_o(s) = \frac{5(T_a s + 1)}{s(5s+1)}$$

$$D(s) = 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5$$

构造系统,

$$D(s) = 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5$$

等效开环传递函数:

$$G_o'(s) = \frac{5T_a s}{5s^2 + s + 5}$$

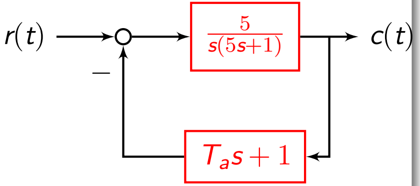
求其 180° 根轨迹即可.

广义根轨迹

变化参数可以是系统任意参数

例:

T_a 从 $0 \to +\infty$ 时系统根轨迹.



解:

$$G_o(s) = \frac{5(T_a s + 1)}{s(5s+1)}$$

$$D(s) = 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5$$

构造系统,

$$D(s) = 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5$$

等效开环传递函数:

$$G'_o(s) = \frac{5T_a s}{5s^2 + s + 5}$$

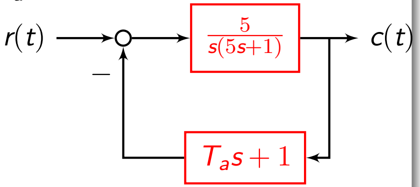
求其 180° 根轨迹即可.

广义根轨迹

变化参数可以是系统任意参数

例:

T_a 从 $0 \to +\infty$ 时系统根轨迹.



解:

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{5(T_a s + 1)}{s(5s+1)} \\ D(s) &= 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5 \end{aligned}$$

构造系统,

$$D(s) = 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5$$

等效开环传递函数:

$$G_o'(s) = \frac{5T_a s}{5s^2 + s + 5}$$

求其 $180°$ 根轨迹即可.

广义根轨迹示例 1

某负反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, K > 0$ 求 T 从 $0 \to +\infty$ 时闭环极点的运动轨迹，并证明其根轨迹非实轴上的点构成一个圆，求出圆心和半径.

解:

构造等效开环传递函数 $G_o'(s)$

$$
\begin{aligned}
D(s) &= Ts^2 + s + K \\
G_o'(s) &= \frac{Ts^2}{s+K}
\end{aligned}
$$

根轨迹图

广义根轨迹示例 1

某负反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, K > 0$ 求 T 从 $0 \to +\infty$ 时闭环极点的运动轨迹，并证明其根轨迹非实轴上的点构成一个圆，求出圆心和半径.

解:

构造等效开环传递函数 $G'_o(s)$

$$D(s) = Ts^2 + s + K$$

$$G'_o(s) = \frac{Ts^2}{s+K}$$

根轨迹图

广义根轨迹示例 1

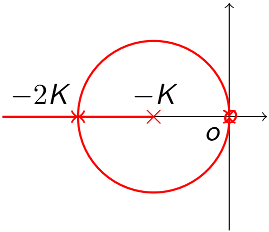
某负反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$, $K > 0$ 求 T 从 $0 \to +\infty$ 时闭环极点的运动轨迹，并证明其根轨迹非实轴上的点构成一个圆，求出圆心和半径.

解:

构造等效开环传递函数 $G'_o(s)$

$$\begin{aligned} D(s) &= Ts^2 + s + K \\ G'_o(s) &= \frac{Ts^2}{s+K} \end{aligned}$$

根轨迹图



广义根轨迹示例 1(续)

解法 2:

$$
\begin{aligned}
Ts^2+s+K &= 0\\
s^2+\frac{1}{T}(s+K) &= 0\\
G_o'(s) &= \frac{K_g(s+K)}{s^2}\\
\frac{1}{T} &= K_g
\end{aligned}
$$

根轨迹图

广义根轨迹示例 1(续)

解法 2:

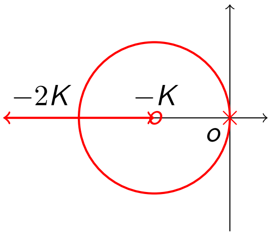
$$
\begin{aligned}
Ts^2 + s + K &= 0 \\
s^2 + \frac{1}{T}(s+K) &= 0 \\
G_o'(s) &= \frac{K_g(s+K)}{s^2} \\
\frac{1}{T} &= K_g
\end{aligned}
$$

广义根轨迹示例 1(续)

解法 2:

$$
\begin{aligned}
Ts^2+s+K &= 0\\
s^2+\frac{1}{T}(s+K) &= 0\\
G_o'(s) &= \frac{K_g(s+K)}{s^2}\\
\frac{1}{T} &= K_g
\end{aligned}
$$

根轨迹图



广义根轨迹示例 1(续) 证明其非实轴上的根轨迹为圆:

- 设根轨迹非实轴上的点为 $x+iy$, $D(s)=Ts^2+s+K=0$

$$
\begin{aligned}
T(x+iy)^2+x+iy+K &= 0 \\
T(x^2-y^2)+x+K+i(y+2xyT) &= 0 \\
Tx^2-Ty^2+x+K &= 0 \\
y+2xyT &= 0
\end{aligned}
$$

广义根轨迹示例 1(续) 圆心与半径:

- 消去 T 后, 得:

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2} + \frac{y^2}{2x} + x + K &= 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2x} + K &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2xK &= 0 \end{aligned}$$

$$(x+K)^2 + y^2 = K^2$$

- 圆心为 $(-K, 0)$, 半径为 K

广义根轨迹示例 1(续) 圆心与半径:

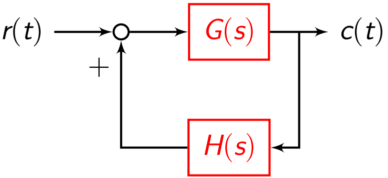
- 消去 T 后, 得:

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{2}+\frac{y^2}{2x}+x+K &= 0\\
\frac{x}{2}+\frac{y^2}{2x}+K &= 0\\
x^2+y^2+2xK &= 0
\end{aligned}$$
$$(x+K)^2+y^2=K^2$$

- 圆心为 $(-K,0)$, 半径为 K

Topic

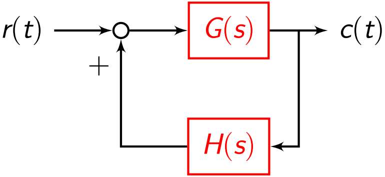
零度根轨迹 (正反馈系统)



$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(S)}$$
$$D(s) = 1 - G(s)H(s)$$

- 幅值条件: $|G(s)H(s)| = 1$
- 相角条件: $\angle G(s)H(s) = 2k\pi$

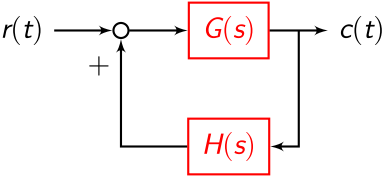
零度根轨迹 (正反馈系统)



$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(S)}$$
$$D(s) = 1 - G(s)H(s)$$

- 幅值条件: $|G(s)H(s)| = 1$
- 相角条件: $\angle G(s)H(s) = 2k\pi$

零度根轨迹 (正反馈系统)



$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(S)}$$
$$D(s) = 1 - G(s)H(s)$$

- 幅值条件: $|G(s)H(s)| = 1$
- 相角条件: $\angle G(s)H(s) = 2k\pi$

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点
- 终止于开环零点
- 有 $\max(m, n)$ 条分支数, 有 n-m 条趋向无穷远处.

根轨迹的对称性

根轨迹对称于实轴

实轴上的根轨迹

实轴上某区域若其右边开环实数零极点个数之和为偶数, 则该区域为根轨迹区域.

渐近线

- $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$
- $\phi = \frac{2k\pi}{n-m}$

> 分离点与分离角

- 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$
- 分离角: $\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \cdots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

根轨迹的起始角与终止角

$$
\begin{aligned}
\theta_{p_i} &= \frac{2k\pi}{l} + \frac{1}{l}\left[\sum_{j=1}^{m}\angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ p_j \neq p_i}}^{n}\angle(p_i - p_j)\right] \\
\phi_{z_j} &= \frac{2k\pi}{J} - \frac{1}{J}\left[\sum_{\substack{i=1 \\ z_i \neq z_j}}^{m}\angle(z_j - z_i) - \sum_{i=1}^{n}\angle(z_j - p_i)\right]
\end{aligned}
$$

根轨迹与虚轴交点

- 直接计算将 $s = j\omega$ 代入 $D(s)$，求出 K_g, ω，$(0, j\omega)$ 即为交点
- 利用 Routh 判据计算

根之和: $n - m \geq 2$ 时, 闭环极点之和等于开环极点之和

零度根轨迹示例 1:

某正反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K_g(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -2, 开环极点: $-1 \pm j, -3$
- 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$ 得: $s = -0.8$
- 起始角: $\theta = \pm 71.6°$

零度根轨迹示例 1:

某正反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K_g(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -2, 开环极点: $-1 \pm j, -3$
- 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$ 得: $s = -0.8$
- 起始角: $\theta = \pm 71.6^\circ$

零度根轨迹示例 1:

某正反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K_g(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -2, 开环极点: $-1 \pm j, -3$
- 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$ 得: $s = -0.8$
- 起始角: $\theta = \pm 71.6^\circ$

零度根轨迹示例 1:

某正反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K_g(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -2, 开环极点: $-1 \pm j, -3$
- 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$ 得: $s = -0.8$
- 起始角: $\theta = \pm 71.6°$