线性系统的根轨迹法

Outline

Contents

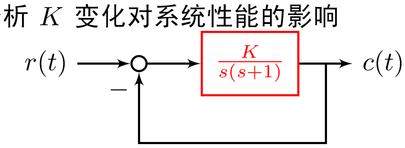
1 基本概念

1.1 零极点与根轨迹

根轨迹法

- 系统性能由闭环极点决定
- 目的: 分析系统参数变化对系统性能影响
- 根轨迹法: 根据系统开环零极点作出系统闭环极点随参数变动的轨迹

分析 K 变化对系统性能的影响

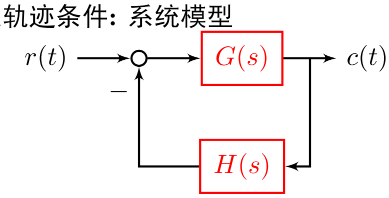


$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{K}{s^2+s+K} \\
D(s) &= s^2+s+K \\
D(s) &= 0 \\
s_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{1-4K}}{2}
\end{aligned}
$$

K	0	0.25	1	4	$\cdots$	∞
s_1	0	-0.5	-0.5+0.87j	-0.5+1.9j	$\cdots$	-0.5+ ∞ j
s_1	-1	-0.5	-0.5-0.87j	-0.5-1.9j	$\cdots$	-0.5- ∞ j

1.2 根轨迹的基本条件

根轨迹条件: 系统模型



- 开环传递函数 (零极点形式):

$$
G(s) = \frac{K_g\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}
$$

- 变动的参数: 根轨迹增益 K_g
- K_g 从 $0\to\infty$ 时, 闭环极点的运动轨迹
- 对于负反馈系统, 称为 180° 根轨迹.

根轨迹条件: 幅值条件与相角条件

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \\
D(s) &= 1+G(s)H(s)=0 \\
G(s)H(s) &= -1 \\
\frac{K_g\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} &= -1
\end{aligned}
$$

- 幅值条件: $\frac{K_g\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s-p_j|}=1$
- 相角条件: $\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi$

- 命题
  - 满足相角条件的点一定是根轨迹上的点
  - 根轨迹上的点何时成为系统闭环极点由 K_g 决定
- 结论: 绘制根轨迹只依据相角条件即可

2 绘制根轨迹图的基本原则

2.1 根轨迹图绘制法则

根轨迹图的绘制

- 前提条件:
  - 变动参数为开环传递函数的根轨迹增益 $K_g, (K^*)$
  - 系统为负反馈系统
- 目的:
  - 根据开环零极点分布绘制闭环极点的运动轨迹

根轨迹的起点, 终点及分支数

- 根轨迹起源于开环极点,
- 根轨迹终止于开环零点,
- 有 $\max(m, n)$ 条分支,
- 有 $n - m$ 条分支趋向无穷远处.

根轨迹的对称性

- 根轨迹对称于实轴

实轴上的根轨迹

- 实轴上某区域若其右边开环实数零极点个数之和为奇数, 则该区域为根轨迹区域
- 例:
$$G_o(s) = \frac{K_g(s+1)(s+3)}{s(s+2)}$$
  - 实轴上根轨迹区域:
$$[0, -1], [-2, -3]$$

渐近线

- $n > m$ 时, 渐近线与实轴交点为 σ_a , 夹角为 ϕ 则:

$$
\begin{aligned}
\sigma_a &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} \\
\phi &= \frac{(2k+1)\pi}{n-m}
\end{aligned}
$$

分离点与分离角

- 分离点: 两条或两条以上根轨迹分支在 s 平面上相交又立刻分开的点称为根轨迹的分离点 (会合点)
- 分离角: 相邻两条根轨迹分支的夹角
- 分离点计算:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K_g M(s)}{N(s)} \\
D(s) &= N(s) + K_g M(s) \\
D(s) &= 0 \\
N(s) &= -K_g M(s) \\
D'(s) &= 0 \\
N'(s) &= -K_g M'(s) \\
M'(s)N(s) &= M(s)N'(s) \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d-p_i} &= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{d-z_j}
\end{aligned}
$$

- 分离角计算: $\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \cdots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

根轨迹的起始角与终止角

- 起始角 (θ_{p_i}): 根轨迹从开环极点出发时, 其切线与正实轴的夹角 (出射角)
- 终止角 (ϕ_{z_j}): 根轨迹终止于开环零点时, 其切线与正实轴的夹角 (入射角)

根轨迹的起始角与终止角计算公式:

$$\begin{aligned}\theta_{p_i} &= 180^\circ + \left[\sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \angle(p_i - p_j)\right] \\ \phi_{z_j} &= 180^\circ - \left[\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m} \angle(z_j - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(z_j - p_i)\right]\end{aligned}$$

即:

- θ_{p_i} 等于: 180° +(所有零点指向极点 p_i 的角度之和 -所有其它极点指向极点 p_i 的角度之和)
- ϕ_{z_i} 等于: 180° -(所有其它零点指向零点 z_j 的角度之和 -所有极点指向零点 z_j 的角度之和)

根轨迹与虚轴交点

- 直接计算 将 $s = j\omega$ 代入 $D(s)$, 求出 K_g, ω , $(0, j\omega)$ 即为交点

$$\begin{aligned}D(s) &= K_g M(s) + N(s) \\ &= 0 \\ s &= j\omega \\ D(j\omega) &= 0 \\ \Re[D(j\omega)] &= 0 \\ \Im[D(j\omega)] &= 0\end{aligned}$$

- 利用 Routh 判据计算 例:

$$G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K_g$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K_g \\ s^1 & \frac{6-K_g}{3} & \\ s^0 & K_g & \end{array}$$

令 $\frac{6-K_g}{3} = 0$ 得 $K_g = 6$, 解辅助方程: $3s^2 + K_g = 0$ 得 $s = \pm j\sqrt{2}$

根之和

- $n - m \geq 2$ 时, 闭环极点之和等于开环极点之和

2.2 示例

根轨迹示例 1 $G_o(s) = \frac{K_g(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -1 , 开环极点: $0, -4, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-1, 0], [-\infty, -4]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{3}$
- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180° + (90° - 135° - 90° - \arctan\frac{1}{3}) = 27°$
  - $\theta_{p_2} = -27°$

根轨迹示例 1(续)

与虚轴交点 $D(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (8+K_g)s + K_g = 0$

- Routh 表如下

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 10 & K_g \\ s^3 & 6 & 8+K_g & \\ s^2 & \frac{52-K_g}{6} & K_g & \\ s^1 & 8+K_g-\frac{36K_g}{52-K_g} & & \\ s^0 & K_g & & \end{array}$$

根轨迹示例 1(续)

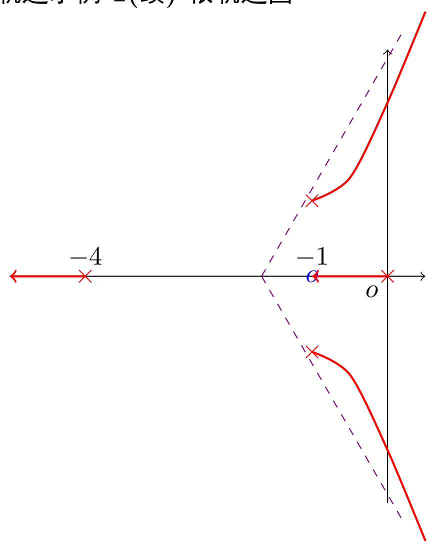
- 计算交点处 K_g

$$\begin{aligned} 8 + K_g - \frac{36K_g}{52-K_g} &= 0 \\ K_g^2 - 8K_g - 416 &= 0 \\ K_g &= 4 \pm 4\sqrt{27} \end{aligned}$$

- 取 $K_g = 4 + 4\sqrt{27}$ 代入辅助方程:

$$\begin{aligned} \frac{52-K_g}{6}s^2 + K_g &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j2.3 \end{aligned}$$

根轨迹示例 1(续) 根轨迹图



根轨迹示例 2 $G_o(s) = \frac{K_g}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: 无, 开环极点: $0, -3, -1 \pm j$
- 实轴上根轨迹: $[-3, 0]$
- 渐近线:
  - $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{5}{3}$
  - $\phi = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$
- 分离点:

$$\begin{aligned} M'(s)N(s) - M(s)N'(s) &= 0 \\ 4s^3 + 15s^2 + 16s + 6 &= 0 \\ s &= -2.3 \end{aligned}$$

- 起始角:
  - $\theta_{p_1} = 180^\circ + (-135^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{2}) = -71.6^\circ$
  - $\theta_{p_2} = 71.6^\circ$

根轨迹示例 2(续)

- 与虚轴交点
  $D(s) = s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K_g = 0$

- Routh 表如下

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 8 & K_g \\ s^3 & 5 & 6 & \\ s^2 & \frac{34}{5} & K_g & \\ s^1 & \frac{204-25K_g}{34} & & \\ s^0 & K_g & & \end{array}$$

根轨迹示例 2(续)

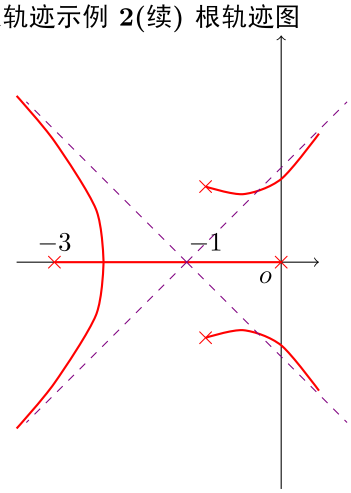
- 计算交点处 K_g

$$\begin{aligned} \frac{204-25K_g}{34} &= 0 \\ K_g &= 8.16 \end{aligned}$$

- 代入辅助方程:

$$\begin{aligned} \frac{34}{5}s^2 + K_g &= 0 \\ s_{1,2} &= \pm j1.1 \end{aligned}$$

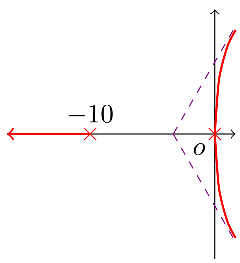
根轨迹示例 2(续) 根轨迹图



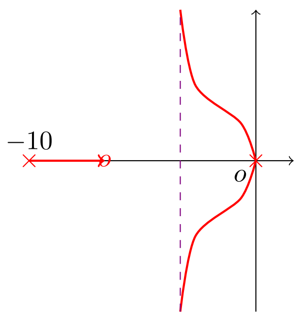
根轨迹示例 3 $G_o(s) = \frac{K_g}{s^2(s+10)}$

- 解:
  - 开环零点: 无, 开环极点: $0, 0, -10$
  - 实轴上根轨迹: $[-\infty, -10]$
  - 渐近线:

* $\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} = -\frac{10}{3}$
* $\phi = \pm\frac{\pi}{3}, \pi$



- 当 $G_o = \frac{K_g(s+z)}{s^2(s+10)}, 0 < z < 10$ 得: $\sigma_a = \frac{-10+z}{2}, \phi = \pm\frac{\pi}{2}$



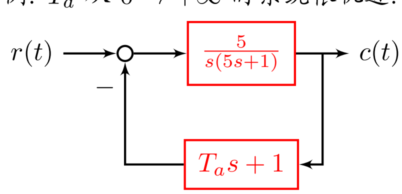
3 广义根轨迹与零度根轨迹

3.1 广义根轨迹

广义根轨迹

变化参数可以是系统任意参数

- 例: T_a 从 $0 \to +\infty$ 时系统根轨迹.



解:

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{5(T_a s + 1)}{s(5s+1)} \\ D(s) &= 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5 \end{aligned}$$

- 构造系统,

$$D(s) = 5s^2 + (5T_a + 1)s + 5$$

等效开环传递函数:

$$G_o'(s) = \frac{5T_a s}{5s^2 + s + 5}$$

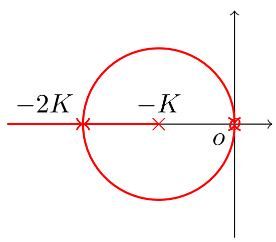
求其 180° 根轨迹即可.

广义根轨迹示例 1

某负反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, K > 0$ 求 T 从 $0 \to +\infty$ 时闭环极点的运动轨迹,并证明其根轨迹非实轴上的点构成一个圆,求出圆心和半径.

- 解: 构造等效开环传递函数 $G_o'(s)$

$$\begin{aligned} D(s) &= Ts^2 + s + K \\ G_o'(s) &= \frac{Ts^2}{s+K} \end{aligned}$$

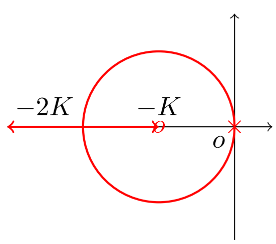


- 根轨迹图

广义根轨迹示例 1(续)

- 解法 2:

$$\begin{aligned} Ts^2 + s + K &= 0 \\ s^2 + \frac{1}{T}(s+K) &= 0 \\ G_o'(s) &= \frac{K_g(s+K)}{s^2} \\ \frac{1}{T} &= K_g \end{aligned}$$



- 根轨迹图

广义根轨迹示例 1(续) 证明其非实轴上的根轨迹为圆:

- 设根轨迹非实轴上的点为 $x+iy$, $D(s)=Ts^2+s+K=0$

$$
\begin{aligned}
T(x+iy)^2+x+iy+K &= 0\\
T(x^2-y^2)+x+K+i(y+2xyT) &= 0\\
Tx^2-Ty^2+x+K &= 0\\
y+2xyT &= 0
\end{aligned}
$$

广义根轨迹示例 1(续) 圆心与半径:

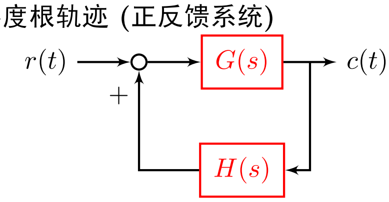
- 消去 T 后, 得:

$$
\begin{aligned}
\frac{-x}{2}+\frac{y^2}{2x}+x+K &= 0\\
\frac{x}{2}+\frac{y^2}{2x}+K &= 0\\
x^2+y^2+2xK &= 0\\
(x+K)^2+y^2=K^2
\end{aligned}
$$

- 圆心为 $(-K,0)$, 半径为 K

3.2 零度根轨迹

零度根轨迹 (正反馈系统)



$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{G(s)}{1-G(s)H(S)}\\
D(s) &= 1-G(s)H(s)
\end{aligned}
$$

- 幅值条件: $|G(s)H(s)|=1$
- 相角条件: $\angle G(s)H(s)=2k\pi$

零度根轨迹的八大法则

- 根轨迹的起点, 终点及分支数: 根轨迹起源于开环极点, 终止于开环零点, 有 $\max(m,n)$ 条分支数, 有 n-m 条趋向无穷远处.

- 根轨迹的对称性: 根轨迹对称于实轴
- 实轴上的根轨迹: 实轴上某区域若其右边开环实数零极点个数之和为偶数, 则该区域为根轨迹区域.
- 渐近线
  - $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$
  - $\phi = \frac{2k\pi}{n-m}$
- 分离点与分离角
  - 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$
  - 分离角: $\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \cdots, l-1$, 其中 l 为分离点处根轨迹的分支数

零度根轨迹的八大法则 (续)

- 根轨迹的起始角与终止角

$$\begin{aligned}
\theta_{p_i} &= \left[\sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \angle(p_i - p_j)\right] \\
\phi_{z_j} &= \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} \angle(z_j - z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(z_j - p_i)\right]
\end{aligned}$$

- 根轨迹与虚轴交点
  - 直接计算将 $s = j\omega$ 代入 $D(s)$, 求出 K_g, ω , $(0, j\omega)$ 即为交点
  - 利用 Routh 判据计算
- 根之和: $n - m \geq 2$ 时, 闭环极点之和等于开环极点之和

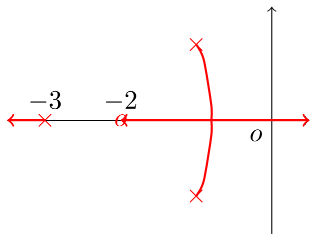
零度根轨迹示例 **1:**

某正反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K_g(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

解:

- 开环零点: -2, 开环极点: $-1 \pm j, -3$
- 分离点: $M'(s)N(s) - M(s)N'(s) = 0$ 得: $s = -0.8$

- 起始角: $\theta = \pm 71.6^{\circ}$



4 系统性能分析

4.1 性能估算

性能估算

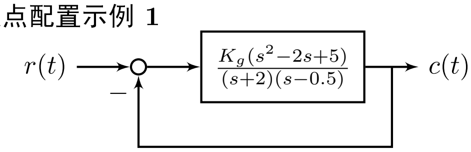
- 闭环零点: 加快响应速度 $t_p\downarrow, \sigma\%\uparrow, \xi\downarrow, t_s$ 不定
- 闭环非主导极点: 减缓响应速度 $t_p\uparrow, \sigma\%\downarrow, \xi\uparrow, t_s$ 不定

偶极子及其影响

- 偶极子: 一个闭环极点与闭环零点距离很近,(实数偶极子, 复数偶极子),
- 偶极子不影响主导极点的地位
- 判定: 零极点间距离小于其模的 10%

4.2 极点配置 (输出反馈)

极点配置示例 1



- 绘制 K_g 的根轨迹
- 确定使系统稳定的开环增益 K 范围
- 确定闭环传递函数具有欠阻尼的开环增益 K

解:

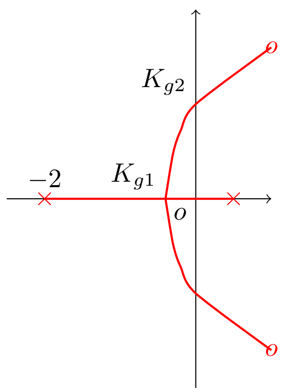
- 开环零点: $1 \pm 2j$, 开环极点: $-2, 0.5$
- 分离点:

$$
\begin{aligned}
M'(s)N(s) - N'(s)M(s) &= 0 \\
(2s-2)(s^2+1.5s-1) - (s^2-2s+5)(2s+1.5) &= 0 \\
s_1 &= 3.8(\text{舍去}) \\
s_2 &= -0.4
\end{aligned}
$$

极点配置示例 1(续)

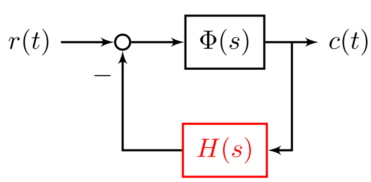
- 与虚轴交点
  - $D(s)=(1+K_g)s^2+(1.5-2K_g)s+(5K_g-1)=0$,
  - 令 $1.5-2K_g=0$ 得 $K_g=0.75$,
  - 由 $1.75s^2+2.75=0$ 得 $s_{1,2}=\pm j1.25$
- 入射角 (终止角) $\phi_{z_1}=180^\circ-(90^\circ-\arctan\frac{2}{3}-\arctan 4)=200^\circ$ 得: $\phi_{z_2}=-200^\circ$

极点配置示例 1 续



- 根轨迹图
- 确定 K
  - 由 $D(0)=0$ 解得 $K_g=0.2$ 所以系统稳定时 $0.2<K_g<0.75$,$K=\frac{5K_g}{2\times 0.5}=5K_g$, 所以 $1<K<3.75$
  - 由图可知 K_{g1},K_{g2} 分别为分离点以及与实轴交点对应的 K_g, $K_{g1}<K_g<K_{g2}$ 时, 系统为欠阻尼. 由分离点处 $D(-0.4)=0$ 得: $K_{g1}=0.24$, 所以 $0.24<K_g<0.75$, $1.2<K<3.75$

极点配置示例 2: $\Phi(s)=\frac{1}{(s+0.5)(s+1)(s+2)}, H(s)=K_1+K_2s+K_3s^2$
设计指标: $\sigma\%=4.3\%, t_s=4s$ 设计输出反馈控制器.



- 结构图

极点配置示例 2(续)

- 解:

$$
\begin{aligned}
\sigma\% &= 0.043 \\
\xi &= 0.707 \\
t_s &= \frac{3.5}{\xi\omega_n} \\
\omega_n &= 1.2376 \\
p_{1,2} &= -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\
&= -0.875 \pm j0.875
\end{aligned}
$$

- 期望特征多项式 取 $p_{1,2} = -1 \pm j$ 作为主导极点, $p_3 = -10$, 得期望特征多项式:

$$
\begin{aligned}
D_1(s) &= (s+1+j)(s+1-j)(s+10) \\
&= s^3 + 12s^2 + 12 + 10
\end{aligned}
$$

极点配置示例 2(续)

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{\Phi(s)}{1+H(s)\Phi(s)} \\
&= \frac{1}{(s+0.5)(s+1)(s+2)+K_1+K_2s+K_3s^2} \\
D(s) &= s^3 + (3.5+K_3)s^2 + (3.5+K_2)s + K_1 + 1
\end{aligned}
$$

令 $D(s) = D_1(s)$ 得

$$
\begin{aligned}
3.5 + K_3 &= 12 \\
K_3 &= 8.5 \\
3.5 + K_2 &= 12 \\
K_2 &= 8.5 \\
K_1 + 1 &= 20 \\
K_1 &= 19
\end{aligned}
$$