频域滤波

Outline

Topic

傅里叶与傅里叶变换

- 法国数学家傅里叶 (生于 1768 年) 在 1822 年出版的《热分析理论》一书中指出: 任何周期函数都可以表达为不同频率的正弦和或余弦和的形式, 即傅立叶级数。
- 20 世纪 50 年代后期, 快速傅立叶变换算法出现, 得到了广泛的应用。

Joseph Fourier

函数表示

- $f(x)$
- $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots$

Topic

连续傅里叶变换

- 连续函数 f(x) 的傅立叶变换 F(u):

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

- 傅立叶变换 F(u) 的反变换:

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

离散傅里叶变换

- 离散函数 $f(x)$ (其中 $x, u = 0, 1, 2, \cdots, M-1$) 的傅里叶变换:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{\frac{-j2\pi ux}{M}}$$

- 反变换

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\frac{-j2\pi ux}{M}}$$

频谱

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\phi(u)}$$

- 频率谱

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

- 相位谱

$$\phi(u) = \arctan \frac{I(u)}{R(u)}$$

- 功率谱

$$P(u) = R^2(u) + I^2(u)$$

Topic

二维离散傅里叶变换与反变换

- 一个图像尺寸为 $M \times N$ 的函数 $f(x, y)$ 的离散傅立叶变换 $F(u, v)$：

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

- 反变换:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

频谱

$$F(u,v) = |F(u,v)|e^{-j\phi(u,v)}$$

- 频率谱

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

- 相位谱

$$\phi(u,v) = \arctan\frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

- 功率谱

$$P(u,v) = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

Topic

线性

$$af_1(x,y) + bf_2(x,y) \Leftrightarrow aF_1(u,v) + bF_2(u,v)$$

平移特性

$$f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}$$

当 $u_0=\frac{M}{2}, v_0=\frac{N}{2}$ 时，

$$\begin{aligned} f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} &= f(x,y)e^{-j\pi(x+y)} \\ &= f(x,y)(-1)^{x+y} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[f(x,y)(-1)^{x+y}] = F(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2})$$

共轭对称性

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$
$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

比例

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(\frac{u}{a}, \frac{v}{b})$$

微分

$$\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (ju)^n F(u,v)$$

$$(-jx)^n f(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial^n F(x,y)}{\partial x^n}$$

拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Leftrightarrow -(u^2+v^2)F(u,v)$$

卷积

$$f(x,y)*h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$$

$$\mathcal{F}[f(x,y)*h(x,y)]=F(u,v)H(u,v)$$

$$f(x,y)h(x,y)=\mathcal{F}^{-1}[F(u,v)*H(u,v)]$$

Topic

频率域的基本性质

- 低频对应图像中变化平缓的区域
- 高频对应图像中变化剧烈的区域（噪声、边缘等）

频域滤波步骤

- 计算图像的 DFT $F(u,v) = \mathcal{F}[f(u,v)]$
- 滤波, 滤波器为 $H(u,v)$

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$$

- 反变换 $g(u,v) = \mathcal{F}^{-1}[G(u,v)]$

基本滤波器性质

- 低通滤波器：通低频阻高频，用于图像平滑，消除高频噪声
- 高通滤波器：通高频阻低频，用于图像锐化，检测边缘

空间域滤波与频率域滤波关系

- 在频域指定滤波器
- 反变换
- 在空域执行卷积完成滤波

Topic

高斯函数低通滤波器

- 高斯滤波器函数 (低通):

$$H(u) = Ae^{\frac{-u^2}{2\delta^2}}$$

- 对应的空间域函数：

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\delta Ae^{-2\pi^2\delta^2 x^2}$$

高斯滤波器特性

- 频域和空域高斯滤波器都是实函数
- 高斯曲线直观，易于操作
- 高斯滤波器参数：δ 增大，则 $H(u)$ 变宽 $h(x)$ 变窄

$$\lim_{\delta\to\infty} H(u) = A$$

$$\lim_{\delta\to\infty} h(x) = \infty$$

Topic

理想低通滤波器

- 理想低通滤波器函数

$$H(u,v)=\begin{cases}1, & D(u,v)\le D_0\\ 0, & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

- 振铃现象示例：

```
f(x)=[1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
h(x)=[1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1]
g(x)=[0.89,0.89,0.23,0.17,0.0,0.11,
      0.06,0.06,0.11,0.0,0.17,0.23]
```

Topic

理想高通滤波器

- 理想高通滤波器函数

$$H(u,v)=\begin{cases}0, & D(u,v)\le D_0\\ 1, & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

陷波滤波器

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & (u,v) = (0,0) \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$$