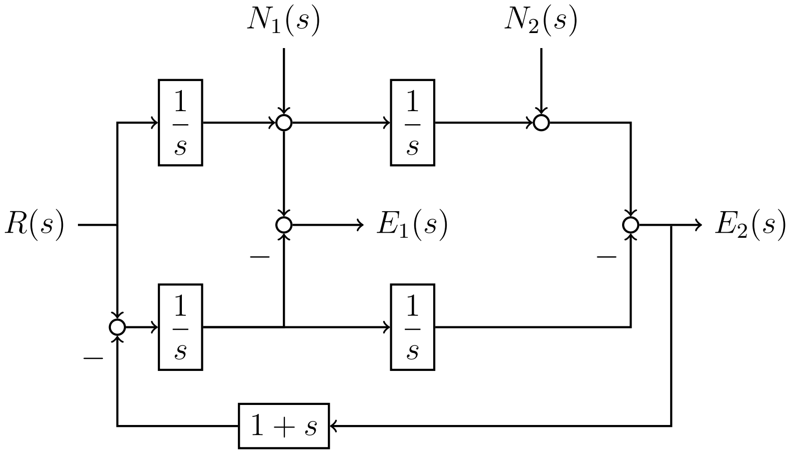
西北工业大学考试试题（卷）评分标准

2015 － 2016 学年第 1 学期

开课学院 航天学院　　课程 自动控制理论 1　　学时 48

考试日期＿＿＿＿＿　考试时间＿＿＿＿ 小时　考试形式（ 闭 ）（ A ）卷

一、（20 分）已知控制系统结构图如下所示，求 $\frac{E_1(s)}{R(s)}, \frac{E_2(s)}{R(s)}, E_1(s), E_2(s)$



答：

$$E_1(s) = N_1(s) + \frac{R(s)}{s} - \frac{R(s)-(1+s)E_2(s)}{s}$$
$$E_2(s) = N_2(s) + \frac{R(s)}{s^2} + \frac{N_1(s)}{s} - \frac{R(s)-(1+s)E_2(s)}{s^2}$$

化简得：

$$E_1(s) = N_1(s) + \frac{(1+s)E_2(s)}{s}$$
$$E_2(s) = N_2(s) + \frac{N_1(s)}{s} + \frac{(1+s)E_2(s)}{s^2}$$

可得：

$$\frac{E_1(s)}{R(s)} = 0$$
$$\frac{E_2(s)}{R(s)} = 0$$
$$E_2(s)(1-\frac{1+s}{s^2}) = N_2(s) + \frac{N_1(s)}{s}$$
$$E_2(s) = \frac{N_2(s)+\frac{N_1(s)}{s}}{1-\frac{1+s}{s^2}}$$
$$= \frac{N_2(s)s^2 + N_1(s)s}{s^2-s-1}$$
$$E_1(s) = N_1(s) + \frac{(1+s)E_2(s)}{s}$$

$$= \frac{N_1(s)s^2 + (1+s)sN_2(s)}{s^2 - s - 1}$$

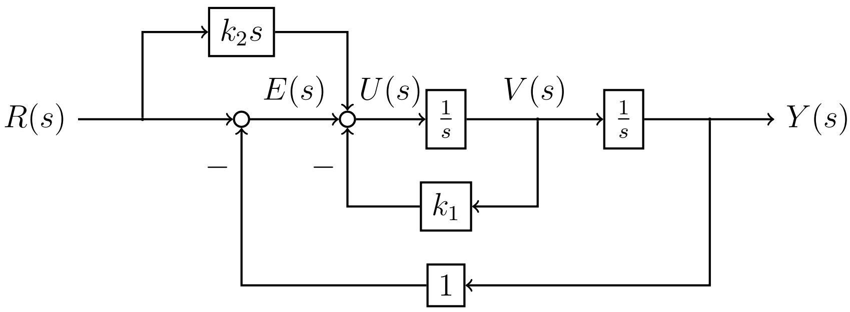
二、（20 分）已知控制系统模型如下：

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= u(t) \\ u(t) &= e(t) - k_1 v(t) + k_2 \dot{r}(t) \\ e(t) &= r(t) - y(t) \end{aligned}$$

求传递函数 $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$，其中 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)], R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$ ；零初始条件下，$k_2 = 0, r(t) = 1, (t > 0)$ 时, 为使系统超调量 $\sigma\% = 0$, 且调节时间尽可能小, k_1 应取何值? 零初始条件下，$r(t) = t, (t > 0)$ 时，k_1, k_2 取何值可使 $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$?

答：

系统结构图：



由梅森公式，得：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\frac{k_2}{s} + \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{k_1}{s} + \frac{1}{s^2}} \\ &= \frac{1 + k_2 s}{s^2 + sk_1 + 1} \end{aligned}$$

当系统为临界阻尼与过阻尼时, 满足 $\sigma\% = 0$, 临界阻尼调节时间小于过阻尼, 因此

$$k_1 = 2\zeta\omega_n = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

零初始条件下，$r(t) = t, R(s) = \frac{1}{s^2}$ 时，

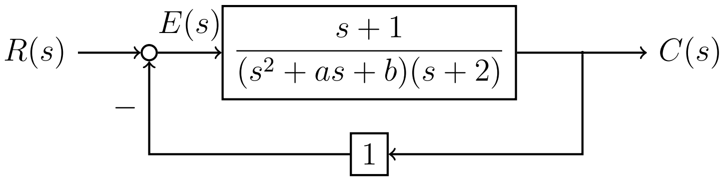
$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - G(s)R(s) \\ &= \frac{s^2 + k_1 s - k_2 s}{s^2 + k_1 s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

当 $k_1 > 0$ 时系统稳定，且有：

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= k_1 - k_2 \end{aligned}$$

因此，当 $k_1 > 0, k_1 = k_2$ 时可使 $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

三、（20 分）控制系统结构图如下：



已知 $a \geq 0, b \geq 0$，当 $R(s) = \frac{1}{s}$ 时系统的稳态误差是多少？是否可通过改变 a, b 的值使得 $R(s) = \frac{1}{s^2+1}$ 时稳态误差等于零？

答：系统特征方程：

$$s^3 + (a+2)s^2 + (b+2a+1)s + 2b + 1 = 0$$

劳斯表：

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & b+2a+1 \\
s^2 & (a+2) & 2b+1 \\
s^1 & b+2a+1-\frac{(2b+1)}{a+2} & \\
s^0 & 2b+1 &
\end{array}$$

当 $a \geq 0, b \geq 0$ 时，

$$\begin{aligned}
b+2a+1-\frac{(2b+1)}{a+2} &= \frac{(a+2)*(b+2a+1)-(2b+1)}{a+2} \\
&= \frac{ab+2a^2+5a+1}{a+2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

系统稳定，可得：

$$\begin{aligned}
E(s) &= \frac{(s^2+as+b)(s+2)}{(s^2+as+b)(s+2)+s+1} \cdot R(s) \\
\lim_{s\to 0} sE(s) &= \frac{2b}{2b+1}
\end{aligned}$$

当 $R(s) = \frac{1}{s^2+1}$ 时

$$\begin{aligned}
E(s) &= \frac{(s^2+as+b)(s+2)}{(s^2+as+b)(s+2)+s+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \\
&= \frac{s+2}{(s^2+as+b)(s+2)+s+1} \cdot \frac{s^2+as+b}{s^2+1}
\end{aligned}$$

当 $a = 0, b = 1$ 时，

$$\begin{aligned}
E(s) &= \frac{s+2}{(s^2+as+b)(s+2)+s+1} \\
\lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

四、(20 分) 单位负反馈系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)^3}$$

绘制 $k\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 的系统根轨迹，并分析系统稳定时 k 的取值范围。

答：系统开环极点：$(-1+0j),0$, 渐近线中心：$\frac{-1-1-1}{4}=\frac{-3}{4}+0j$, 分离点：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s(s+1)^3+k)=0$$
$$(s+1)^3+3s(s+1)^2=0$$
$$(s+1)^2(s+1+3s)=0$$

因此分离点为 $-1,(\frac{-1}{4}+0j)$ 。利用劳斯判据求根轨迹与虚轴交点：

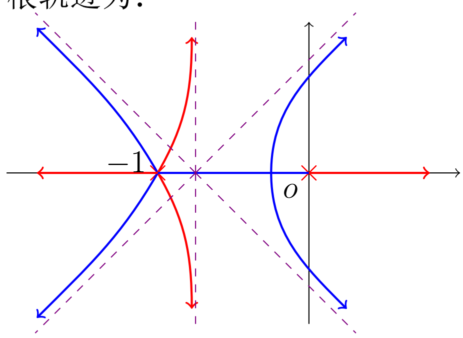
$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & k \\ s^3 & 3 & 1 & \\ s^2 & \frac{8}{3} & k & \end{array}$$

$k=\frac{8}{9}$ 时可得辅助方程：$\frac{8}{3}s^2+k=0$ ，解得：$s=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}j$ 。

$k\in(0,\infty)$ 时，实轴上的根轨迹为 $[-1,0)$, (-1+0j) 处起始角: $\theta=\frac{(2k+1)\pi-\pi}{3}=\frac{2k\pi}{3}=\{0,\pm\frac{2\pi}{3}\}$ 渐近线方向：$\phi=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\{\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4}\}$

$k\in(-\infty,0)$ 时，实轴上的根轨迹为 $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$, (-1+0j) 处起始角: $\theta=\frac{2k\pi-\pi}{3}=\frac{(2k-1)\pi}{3}=\{\pi,\pm\frac{\pi}{3}\}$ 渐近线方向：$\phi=\frac{2k\pi}{4}=\{0,\pi,\pm\frac{\pi}{2}\}$

根轨迹为：



由根轨迹可知,$k\in(0,\frac{8}{9})$ 时, 系统稳定.

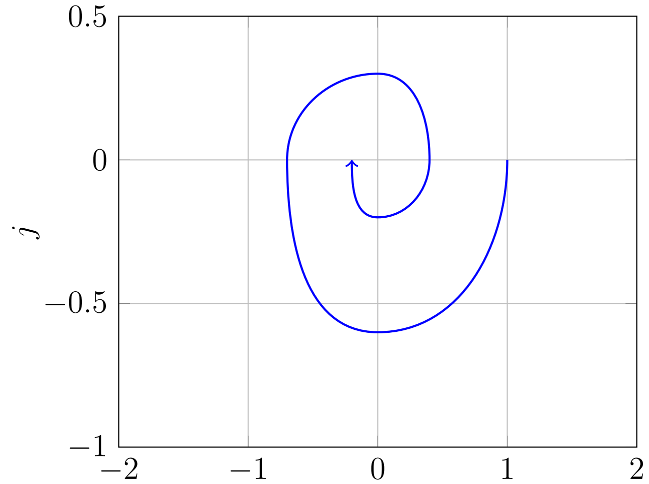
五、（20 分）单位负反馈系统开环传递函数：

$$G(s)=\frac{k}{s+1}\cdot e^{\frac{-3\pi}{4}s}$$

当 $k=1$ 时系统的稳定性如何？相角裕度是多少？若要使系统稳定，实数 k 的范围是什么？

答：

$|G(j\omega)|$ 是 ω 的单调减函数，当 $k=1,\omega=0$ 时，$|G(j\omega)|=1$，Nyquist 曲线不包围 (-1+0j)，闭环系统稳定。此时 $\angle G(j\omega)=0$, 因此相角裕度 $\gamma=180°$。



当 $k>0, \omega=1$ 时, $\angle G(j\omega)=-\pi$，$|G(s)|=\frac{k}{\sqrt{2}}$，因此，当 $0<k<\sqrt{2}$ 时，系统稳定。

当 $-1<k<0$ 时，Nyquist 曲线不包围 (-1+0j)，系统稳定。当 $k<-1$ 时，Nyquist 曲线包围 (-1+0j)，系统不稳定。因此，当 $-1<k<\sqrt{2}$ 时，闭环系统稳定。