

线性系统校正方法

Outline

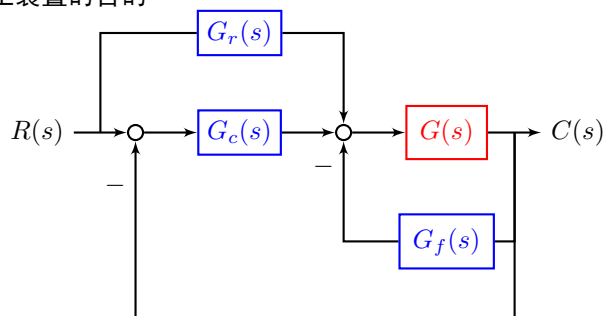
Contents

1	系统的设计与校正	2
1.1	校正装置的目的	2
1.2	设计指标的转换	2
2	串联超前校正	2
2.1	串联超前校正原理与方法	2
2.2	超前校正示例	5
3	串联滞后校正	9
3.1	串联滞后校正原理与方法	9
3.2	滞后校正示例	10
4	串联滞后-超前校正	12
4.1	串联滞后-超前校正原理与方法	12
4.2	串联滞后-超前校正示例	13
5	串联综合法校正	17
5.1	串联综合法校正原理与方法	17
5.2	串联综合法示例	19
6	反馈校正	21
6.1	校正原理	21
6.2	反馈校正的特点	21
6.3	反馈校正的设计方法	22
7	复合校正	24
7.1	复合校正特点	24
7.2	按扰动补偿的复合校正	25
7.3	按输入补偿的复合校正	26

1 系统的设计与校正

1.1 校正装置的目的

校正装置的目的



- 改善系统稳定性
- 改善系统的稳态性能
- 改善系统的动态品质

1.2 设计指标的转换

设计指标的转换

- 二阶系统的时域与频域指标有明确的转换公式
- 高阶系统的时域与频域指标有近似转换公式
- 校正后系统的要求
 - 低频段: 积分环节, K 尽量大, 以减小稳态误差
 - 中频段: 以斜率 $-20dB/dec$ 穿越 $0dB$ 线, 使 ω_c 足够大, 提高动态性能
 - 高频段: 抗干扰要求, 增益下降要快

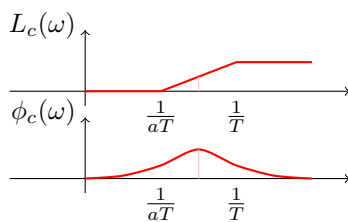
2 串联超前校正

2.1 串联超前校正原理与方法

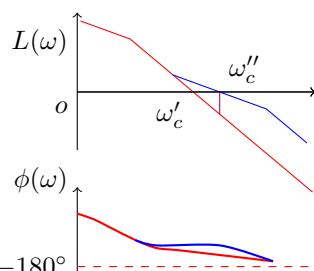
串联超前校正原理

利用超前校正网络的相角超前特性来提升系统的相角裕度 γ

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, a > 1$$
$$\phi_c(\omega) = \arctan(aT\omega) - \arctan(T\omega)$$



- 校正网络 Bode 图



- 超前校正示意图: -180°

超前校正网络分析

- 最大超前角:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega} &= 0 \\ \omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\ \phi_c(\omega_m) &= 2 \arctan \sqrt{a} - \frac{\pi}{2} \\ &= \arcsin \frac{a-1}{a+1}\end{aligned}$$

工程中一般 $\phi_m \leq 60^\circ, a < 20$

- 幅值

$$\begin{aligned}\lg \omega_m &= \frac{1}{2} \left(\lg \frac{1}{T} + \lg \frac{1}{aT} \right) \\ L_c(\omega) &= 20 \lg \omega_m - 20 \lg \frac{1}{aT} \\ &= 10 \lg a\end{aligned}$$

- ω_m 位于 $\frac{1}{aT}$ 与 $\frac{1}{T}$ 的几何中心
- 超前网络设计使得设计后的 $\omega_c \approx \omega_m$, 以获得最大相角提升

适用范围

- 超前校正适用范围:

- 原系统稳定, γ 不够
- 希望的截止频率比原系统大, 主要用于提高系统的瞬态性能 (动态品质)

设计步骤 (设计参数 K, a, T)

1. 根据 e_{ss} 的指标要求, 确定开环增益 K
2. 计算未校正系统的 ω'_c, γ'
3. 转换时域指标到频域指标, 得到希望的 ω''_c, γ''
4. 设计超前校正网络的参数 a, T

- 确定 a :

$$L(\omega''_c) = -10 \lg a$$

- 确定 T :

$$\omega''_c = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

5. 检验校正后系统的 ω_c, γ .

设计步骤 (设计参数 K, a, T)

1. 根据 e_{ss} 的指标要求, 确定开环增益 K
2. 计算未校正系统的 ω'_c, γ'
3. 转换时域指标到频域指标, 得到希望的 γ''
4. 设计超前校正网络的参数 a, T

- 确定 a :

$$\phi_m = \gamma'' - \gamma' + \epsilon$$

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

- 确定 T :

$$L(\omega''_c) = -10 \lg a$$

$$\omega''_c = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

5. 检验校正后系统的 γ .

2.2 超前校正示例

超前校正示例 1

单位负反馈开环传递函数 $G(s) = \frac{200}{s(0.1s+1)}$, 设计校正网络, 使已校正系统相角裕度 $\gamma'' \geq 45^\circ$, 截止频率 $\omega_c'' \geq 50 \text{ rad/s}$.

• 解:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \begin{cases} 20 \lg \frac{200}{\omega} & \omega < 10 \\ 20 \lg \frac{200}{0.1\omega^2} & \omega \geq 10 \end{cases} \\ \omega_c' &= 44.7 \\ &< \omega_c'' \\ \gamma' &= 12.6^\circ \\ &< \gamma'' \end{aligned}$$

选择超前校正网络.

超前校正示例 1(续) 求 a

• 先根据 ϕ_m 尝试确定参数 a

$$\begin{aligned} \phi_m &= \gamma'' - \gamma' + \epsilon \\ \epsilon &= 10^\circ \\ \phi_m &= 45^\circ - 12.6^\circ + 10^\circ \\ &= 42.4^\circ \\ a &= \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \\ &= 5.1 \end{aligned}$$

其中 ϵ 是因为估算有误差而留的余量.

超前校正示例 1(续) 求 T

• 求解 T

$$\begin{aligned} L(\omega_c'') + 10 \lg a &= 0 \\ 20 \lg \frac{2000}{(\omega_c'')^2} + 20 \lg \sqrt{a} &= 0 \\ \frac{2000\sqrt{5}}{(\omega_c'')^2} &= 1 \\ \omega_c'' &= 66.9 \\ \omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\ \omega_c'' &= \omega_m \\ T &= 0.0066 \end{aligned}$$

- 计算此时的相角裕度:

$$\begin{aligned}\gamma'' &= 180^\circ + 42.4^\circ - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c'') \\ &= 50.9^\circ\end{aligned}$$

- 满足要求的超前校正网络为 $G(s) = \frac{1+0.034s}{1+0.0066s}$

超前校正示例 2

$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$, 设计校正网络使 $\gamma'' \geq 45^\circ$, 单位斜坡作用下 $e_{ss} \leq \frac{1}{15}$

- 解: 根据稳态误差要求, 得:

$$\begin{aligned}e_{ss} &= \frac{1}{K} \leq \frac{1}{15} \\ K &\geq 15\end{aligned}$$

取 $K = 15$.

$$\begin{aligned}L(\omega) &= \begin{cases} 20 \lg \frac{15}{\omega} & \omega < 1 \\ 20 \lg \frac{15}{\omega^2} & \omega \geq 1 \end{cases} \\ \omega_c' &= 3.9 \\ \gamma' &= 14.5^\circ < 45^\circ\end{aligned}$$

选择超前校正网络.

超前校正示例 2(续) 求 a

- 先根据 ϕ_m 确定 a

$$\begin{aligned}\phi_m &= \gamma'' - \gamma' + \epsilon \\ \epsilon &= 10^\circ \\ \phi_m &= 40.5^\circ \\ a &= \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} \\ &= 4.7\end{aligned}$$

其中 ϵ 是因为估算有误差而留的余量.

超前校正示例 2(续) 求 T

- 然后求解 T

$$\begin{aligned}
 L(\omega_c'') + 10 \lg a &= 0 \\
 20 \lg \frac{15}{(\omega_c'')^2} + 20 \lg \sqrt{a} &= 0 \\
 \frac{15\sqrt{4.7}}{(\omega_c'')^2} &= 1 \\
 \omega_c'' &= 5.7 \\
 \omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
 \omega_c'' &= \omega_m \\
 T &= 0.08
 \end{aligned}$$

- 计算此时的相角裕度:

$$\begin{aligned}
 \gamma'' &= 180^\circ + 40.5^\circ - 90^\circ - \arctan(\omega_c'') \\
 &= 50.5^\circ
 \end{aligned}$$

- 满足要求的超前校正网络为 $G(s) = \frac{1+0.38s}{1+0.08s}$

超前校正示例 3

单位负反馈 $G(s) = \frac{K}{s(0.05s+1)(0.2s+1)}$, 设计超前校正网络使 $K_v \geq 5, \sigma\% \leq 25\%, t_s \leq 1s$

- 解: 由性能指标知:

$$\begin{aligned}
 K &= 5 \\
 \sigma\% &= 0.16 + 0.4(M_r - 1) \\
 0.25 &= 0.16 + 0.4(M_r - 1) \\
 M_r &= 1.225 \\
 t_s &= \frac{K_0\pi}{\omega_c''} \\
 K_0 &= 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 = 2.5 \\
 \omega_c'' &= 7.7 \\
 \gamma'' &= \arcsin \frac{1}{M_r} = 55^\circ
 \end{aligned}$$

超前校正示例 3(续) 频率特性分析

$$\begin{aligned}
L(\omega) &= \begin{cases} 20 \lg \frac{5}{\omega} & \omega < 5 \\ 20 \lg \frac{5}{0.2\omega^2} & 5 \leq \omega < 20 \\ 20 \lg \frac{5}{0.01\omega^3} & \omega \geq 20 \end{cases} \\
\omega'_c &= 5 \\
\gamma' &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2\omega'_c - \arctan 0.05\omega'_c \\
&= 31.0^\circ
\end{aligned}$$

选择超前校正网络.

超前校正示例 3(续): 计算 a

$$\begin{aligned}
\omega''_c &= 7.7 \\
L(\omega''_c) + 10 \lg a &= 0 \\
20 \lg \frac{5}{0.2(\omega''_c)^2} + 20 \lg \sqrt{a} &= 0 \\
\frac{5\sqrt{a}}{0.2(\omega''_c)^2} &= 1 \\
a &= 5.6
\end{aligned}$$

超前校正示例 3(续): 根据截止频率计算 T

- 计算 T

$$\begin{aligned}
\omega_m &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \\
\omega''_c &= \omega_m \\
T &= 0.055 \\
\phi_m &= \arcsin \frac{a-1}{a+1} \\
&= 44^\circ
\end{aligned}$$

- 计算此时的相角裕度:

$$\begin{aligned}
\gamma'' &= 180^\circ + 44^\circ - 90^\circ - \arctan(0.05\omega''_c) - \arctan(0.2\omega''_c) \\
&= 56^\circ
\end{aligned}$$

- 满足要求的超前校正网络为 $G(s) = \frac{1+0.3s}{1+0.055s}$

3 串联滞后校正

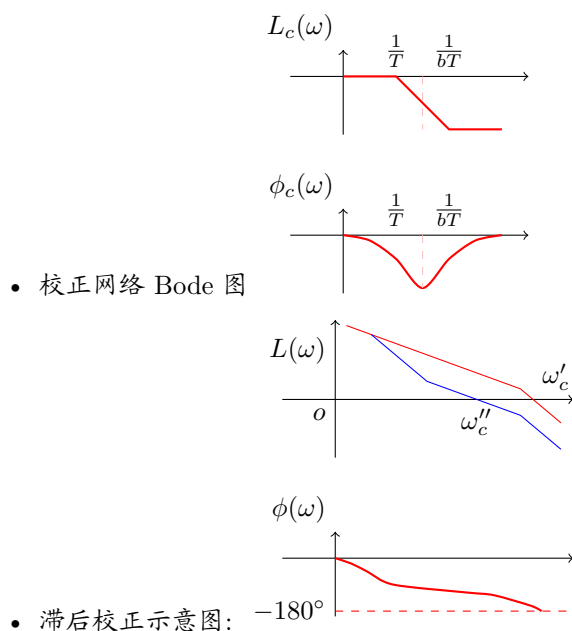
3.1 串联滞后校正原理与方法

串联滞后校正原理

利用滞后网络的幅值衰减特性, 使校正后的 ω_c 前移, 从而达到提升 γ 的目的.

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}$$

其中: $b < 1$



滞后校正网络分析

- 根据期望相角裕度 γ'' , 求解

$$\gamma'' = 180^\circ + \phi(\omega_c'') + \phi_c(\omega_c'')$$

- 得到期望截止频率 ω_c'' , 其中 $\phi_c(\omega_c'')$ 可取为 -6° .
- 为了实现新的截止频率, 需要:

$$20 \lg b = L(\omega_c'')$$

- 为了减轻对相频特性的影响, 需要:

$$\omega_c'' = \frac{10}{bT}$$

适用泛围

- 主要用于提高系统稳定程度
- 期望截止频率小于未校正系统截止频率, 即: $\omega_c'' < \omega_c'$

设计步聚

设计步聚

- 由 e_{ss} 确定开环增益 K
- 画未校正系统 Bode 图
- 由设计指标确定 γ'' , 求解: $\gamma'' - 180^\circ = \phi(\omega_c'') - 6^\circ$ 确定 ω_c''
- 计算 b, T ,

$$20 \lg b = L(\omega_c''), \frac{1}{bT} = 0.1\omega_c''$$

3.2 滞后校正示例

滞后校正示例 1

设单位负反馈系统 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.2s+1)}$ 设计串联校正装置, 满足 $K_v = 8, \gamma'' \geq 40^\circ$

解:

- 根据稳态性能指标得

$$K_v = 8$$

$$K_v = K$$

$$K = 8$$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{8}{\omega} & \omega < 1 \\ 20 \lg \frac{8}{\omega^2} & 1 \leq \omega < 5 \\ 20 \lg \frac{8}{0.2\omega^3} & \omega \geq 5 \end{cases}$$

$$\omega_c' = 2.8$$

$$\gamma' = -10^\circ$$

滞后校正示例 1: 参数求解

根据 γ'' 计算 ω_c''

$$\begin{aligned}
 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c'' - \arctan 0.2\omega_c'' &= 40^\circ + \epsilon \\
 \epsilon &= 6^\circ \\
 \omega_c'' &\approx 0.7 \\
 L(\omega_c'') + 20 \lg b &= 0 \\
 b &= 0.09 \\
 \frac{1}{bT} &= 0.1\omega_c'' \\
 T &= 158.7
 \end{aligned}$$

滞后校正网络为: $G_c = \frac{14.3s+1}{158.7s+1}$

滞后校正示例 2

设单位负反馈系统 $G(s) = \frac{5}{s(s+1)(0.5s+1)}$, 设计串联校正装置, 使校正后系统满足 $\gamma'' \geq 40^\circ, h'' \geq 10dB$

• 解:

$$\begin{aligned}
 L(\omega) &= \begin{cases} 20 \lg \frac{5}{\omega} & \omega < 1 \\ 20 \lg \frac{5}{\omega^2} & 1 < \omega < 2 \\ 20 \lg \frac{5}{0.5\omega^3} & \omega \geq 2 \end{cases} \\
 \omega_c' &= 2.15 \\
 \gamma' &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c' - \arctan 0.5\omega_c' \\
 &= -22^\circ
 \end{aligned}$$

滞后校正示例 2(续) 选用滞后校正, 根据 γ'' 计算 ω_c''

$$\begin{aligned}
 180^\circ + \phi(\omega_c'') &= 40^\circ + \epsilon \\
 \epsilon &= 6^\circ \\
 \omega_c'' &\approx 0.5 \\
 L(\omega_c'') + 20 \lg b &= 0 \\
 20 \lg \frac{5}{\omega_c''} + 20 \lg b &= 0 \\
 b &= 0.1 \\
 \frac{1}{bT} &= 0.1\omega_c'' \\
 T &= 200
 \end{aligned}$$

滞后校正示例 2(续) 验证幅值裕度

$$\begin{aligned}
 \phi(\omega_x) &= -180^\circ \\
 \angle \omega_x j(\omega_x j + 1)(0.5\omega_x j + 1) &= 180^\circ \\
 \angle (\omega_x j + 1)(0.5\omega_x j + 1) &= 90^\circ \\
 \angle (-0.5\omega_x^2 + 1 + 1.5\omega_x j) &= 90^\circ \\
 -0.5\omega_x^2 + 1 &= 0 \\
 \omega_x &= \sqrt{2} \\
 L(\omega_x) &= -20 \lg \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 0.5\sqrt{2}} \\
 &\approx -11 \\
 h'' &= 11 > 10
 \end{aligned}$$

滞后校正示例 2(续) 另一种方式验证幅值裕度:

- 当校正后的幅值裕度 h'' 难以计算时, 可结合幅频特性验证。

$$\begin{aligned}
 L(\omega_x) + L_c(\omega_x) &= -10 \\
 20 \lg \frac{5b}{\omega_x^2} &= -10, \quad 1 < \omega_x < 2 \\
 \omega_x &\approx 1.36 \\
 \phi(\omega_x) &= -178^\circ \\
 \omega_x'' &> \omega_x \\
 L(\omega_x'') + L_c(\omega_x'') &< -10 \\
 h'' &> 10dB
 \end{aligned}$$

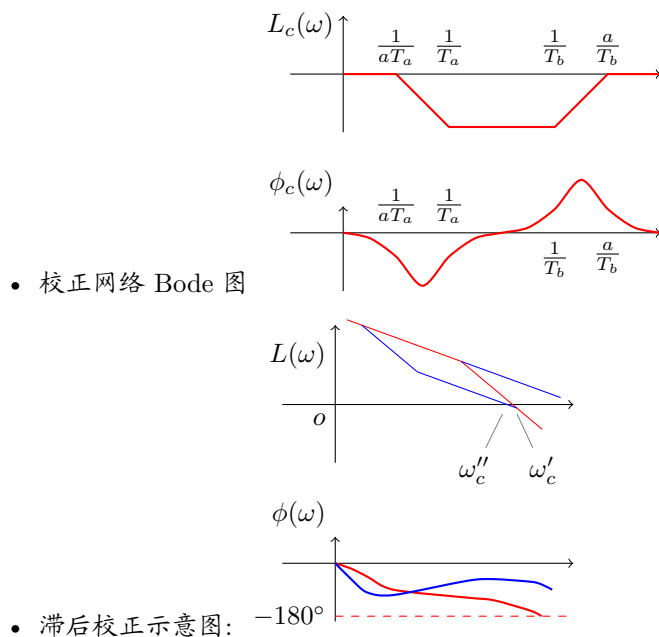
4 串联滞后 -超前校正

4.1 串联滞后 -超前校正原理与方法

串联滞后 -超前校正原理

- 滞后部分的幅值衰减特性, 提高系统的稳定程度
- 超前部分的相角超前特性, 提高系统的动态性能

$$G_c = \frac{(1+T_a s)(1+T_b s)}{(1+aT_a s)(1+\frac{T_b}{a}s)} \quad \text{其中 } a > 1$$



适用泛围

- 系统不稳定, 且要求的稳态性能与动态性能较高时

设计步骤

- 由 e_{ss} 要求确定开环增益
- 绘制未校正系统 Bode 图, 计算 ω'_c, γ', h'
- 选择 $\frac{1}{T_b}$ 为 $L(\omega)$ 上斜率由 -20dB/dec 至 -40dB/dec 的交接频率 (校正后截止频率处斜率为 -20dB/dec , 且有一定宽度)
- 计算期望的截止频率 ω''_c , 求解 $L(\omega''_c) + 20\lg T_b \omega''_c - 20\lg a = 0$ 得 a
- 计算期望相角裕度 γ'' , 求解: $180^\circ + \phi_c(\omega''_c) + \phi(\omega''_c) = \gamma''$, 得 T_a

4.2 串联滞后-超前校正示例

串联滞后-超前校正示例 1

单位负反馈系统 $G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$ 设计校正网络, 满足 $K_v \geq 100, \gamma' > 40, \omega''_c \approx 20$

解:

- 由稳态性能指标得: $K = 100$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{100}{\omega} & \omega < 10 \\ 20 \lg \frac{100}{0.1\omega^2} & 10 \leq \omega < 100 \\ 20 \lg \frac{100}{0.001\omega^3} & \omega \geq 100 \end{cases}$$

$$\omega'_c = 31.6$$

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega'_c - \arctan 0.01\omega'_c$$

$$= 0$$

串联滞后 -超前校正示例 1(续): 选用滞后 -超前校正

$$G_c = \frac{(1 + T_a s)(1 + T_b s)}{(1 + a T_a s)(1 + \frac{T_b}{a} s)}$$

根据截止频率 ω''_c 确定 T_b, a

$$T_b = 0.1$$

$$L(\omega''_c) + 20 \lg 0.1\omega''_c = 20 \lg \frac{100}{\omega''_c}$$

$$= 20 \lg 5$$

$$20 \lg a = 20 \lg 5$$

$$a = 5$$

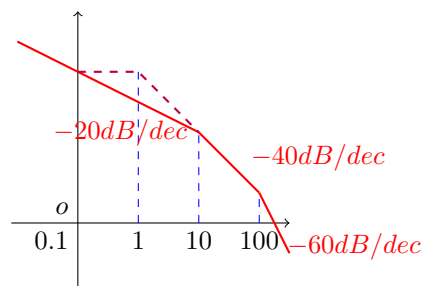
串联滞后 -超前校正示例 1(续): 验证相角裕度, 确定 T_a

- 原系统: $\phi(\omega''_c) = -90^\circ - \arctan 0.1\omega''_c - \arctan 0.01\omega''_c = -165^\circ$
- 超前校正后: $180^\circ + \phi(\omega''_c) + \arctan 0.1\omega''_c - \arctan(\frac{T_b}{a}\omega''_c) = 57^\circ \geq \epsilon + \gamma'', (\epsilon = 6^\circ)$
- 参数确定: $\frac{1}{T_a} = 0.1\omega''_c, T_a = 0.5$
- 校正网络: $G_c = \frac{(1+0.5s)(1+0.1s)}{(1+2.5s)(1+0.02s)}$

串联滞后 -超前校正示例 2

单位负反馈系统开环对数幅频特性曲线如图所示, 其中虚线表示校正前的实线表示校正后的. 要求

1. 确定校正装置类型, 写出传递函数
2. 确定校正后系统稳定时的开环增益
3. 当开环增益 $k = 1$ 时, 求校正后系统的相位裕度 γ , 幅值裕度 h



• Bode 图

• 解: 由图得

– 采用了串联滞后 -超前校正

– 校正前传递函数: $G_1(s) = \frac{K(10s+1)}{s(s+1)^2(0.01s+1)}$

– 校正后传递函数: $G_2(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$

– 校正装置传递函数: $G_2(s) = \frac{(s+1)^2}{(0.1s+1)(10s+1)}$

串联滞后 -超前校正示例 2(续): 确定开环增益

校正前系统闭环特征方程:

$$D(s) = s(0.1s + 1)(0.01s + 1) + K$$

Routh 表

s^3	1	1000
s^2	110	$1000K$
s^1	$\frac{110000-1000K}{110}$	0
s^0	$1000K$	

得: $1 < K < 110$

串联滞后 -超前校正示例 2(续): 稳定裕度计算

当 $K = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 G_2(s) &= \frac{1}{s(0.1s+1)(0.01s+1)} \\
 L(\omega) &= \begin{cases} 20 \lg \frac{1}{\omega} & \omega < 10 \\ 20 \lg \frac{1}{0.1\omega^2} & 10 \leq \omega < 100 \\ 20 \lg \frac{1}{0.001\omega^3} & \omega \geq 100 \end{cases} \\
 \omega_c &= 1 \\
 \gamma &= 180^\circ + \phi(\omega_c) \\
 &= 83.7^\circ \\
 \phi(\omega_x) &= -\pi \\
 \omega_x &= 31.6 \\
 h &= -20 \lg \frac{1}{0.1\omega_x^2} \\
 &= 10dB
 \end{aligned}$$

串联滞后 -超前校正示例 3

设待校正系统开环传递函数为: $G_o(s) = \frac{K}{s(\frac{1}{6}s+1)(\frac{1}{2}s+1)}$, 设计校正装置满足以下指标:

- 最大指令速度 $180^\circ/s$ 时, 位置滞后误差不超过 1°
- 相角裕度为 $45^\circ \pm 3^\circ$
- 幅值裕度不低于 10dB
- 动态过程调节时间不超过 3s

解:

- 由稳态性能指标得: $K = 180$

$$\begin{aligned}
 \omega'_c &= 12.6 \\
 \gamma' &= -55.5^\circ \\
 h' &= -30dB
 \end{aligned}$$

串联滞后 -超前校正示例 3 (续)

- $G_c(j\omega) = \frac{(1+jT_a\omega)(1+jT_b\omega)}{(1+jaT_a\omega)(1+jT_b\omega/a)}$
- 分析 -20dB/dec 与 -40dB/dec 转折点, 得 $T_b = \frac{1}{2}$
- 由 t_s, γ'' 指标与 -20dB/dec 的范围, 得: $\omega''_c \in [3.2, 6]$ 取 $\omega'_c \approx 3.5$
- $L'(\omega''_c) + 20 \lg T_b \omega''_c - 20 \lg a = 0 \rightarrow a = 50$

- $\gamma'' : 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c''}{6} + \arctan T_a \omega_c'' - \arctan 50 T_a \omega_c'' - \arctan \frac{\omega_c''}{100} \rightarrow T_a \approx 0.78$
- $G_c(S) = \frac{(1+1.28s)(1+0.5s)}{(1+64s)(1+0.01s)}$, 验证: $\gamma'' = 45.5^\circ, h'' = 27dB$, 满足要求。

5 串联综合法校正

5.1 串联综合法校正原理与方法

串联综合法校正原理

- 将性能指标要求转化为期望对数幅频特性,
- 再与待校正系统的开环对数幅频特性比较, 从而确定校正装置的形式和参数.
- 该方法适用于最小相位系统.
- 设开环系统期望频率特性为 $G(j\omega)$, 待求校正装置频率特性为 $G_c(j\omega)$, 原系统频率特性为 $G_0(j\omega)$.

$$\begin{aligned} G(s) &= G_c(s)G_0(s) \\ 20 \lg |G_c(j\omega)| &= 20 \lg |G(j\omega)| - 20 \lg |G_0(j\omega)| \end{aligned}$$

期望频率特性

- 期望对数幅率渐近特性的一般形状为:
 - 低频段斜率: $-40dB/dec$
 - 中频段斜率: $-20dB/dec$
 - 高频段斜率: $-40dB/dec$
- 对应的传递函数: $G(s) = \frac{K(1+\frac{s}{\omega_2})}{s^2(1+\frac{s}{\omega_3})}$, 其中 $\omega_2 < \omega_3$

期望频率特性分析 $G(s) = \frac{K(1+\frac{s}{\omega_2})}{s^2(1+\frac{s}{\omega_3})}$

- 相频特性:

$$\begin{aligned} \phi_\omega &= -180^\circ + \arctan \frac{\omega}{\omega_2} - \arctan \frac{\omega}{\omega_3} \\ \gamma(\omega) &= \arctan \frac{\omega}{\omega_2} - \arctan \frac{\omega}{\omega_3} \end{aligned}$$

– 令 $\frac{d\gamma}{d\omega} = 0$ 得 $\omega_m = \sqrt{\omega_2 \omega_3}$.

- 定义中频段宽度: $H = \frac{\omega_3}{\omega_2}$, 则:

$$\gamma(\omega_m) = \arcsin \frac{H-1}{H+1}$$

确定参数 $\omega_2, \omega_3, (\omega_m \approx \omega_c)$

$$\begin{aligned}\omega_c &\approx \omega_m \\ &= \sqrt{\omega_2 \omega_3} \\ \sqrt{H} &= \sqrt{\frac{\omega_3}{\omega_2}} \\ \omega_2 &= \frac{\omega_c}{\sqrt{H}} \\ \omega_3 &= \sqrt{H} \omega_c\end{aligned}$$

当给出设计指标 ω_c, H 时, 选取

$$\begin{aligned}\omega_2 &\leq \frac{\omega_c}{\sqrt{H}} \\ \omega_3 &\geq \sqrt{H} \omega_c\end{aligned}$$

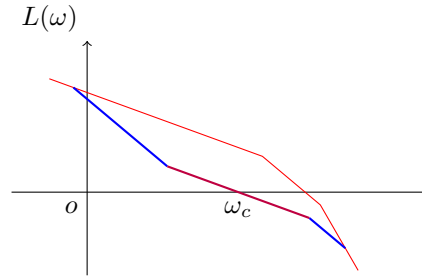
确定参数 $\omega_2, \omega_3, (\omega_m \approx \omega_r)$

$$\begin{aligned}\omega_r &= \omega_m \\ M_r &= \frac{1}{\sin \gamma(\omega_r)} && \approx \frac{1}{\sin \gamma} \\ H &= \frac{M_r + 1}{M_r - 1} \\ \frac{\omega_c}{\omega_r} &= |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\cos \gamma(\omega_r)} \\ \omega_c &= 0.5(\omega_2 + \omega_3) \\ \omega_2 &\leq \frac{\omega_c(M_r - 1)}{M_r} \\ \omega_3 &\geq \frac{\omega_c(M_r + 1)}{M_r}\end{aligned}$$

设计步骤

- 设计步骤
 - 由 e_{ss} 确定开环增益 K
 - 由设计指标确定系统期望 M_r, ω_c
 - 按要求选取 ω_2, ω_3

- 在 ω_2 处做 $-40dB/dec$ 线与原系统 $L(\omega)$ 低频段相交
- 在 ω_3 处做 $-40dB/dec$ 线与原系统 $L(\omega)$ 高频段相交
- 写出期望开环传递函数 $G(s)$
- $G_c(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)}$



• 示意图:

5.2 串联综合法示例

串联综合法示例 1

单位负反馈系统开环传递函数 $G_o(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.02s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)}$ 设计校正装置满足以下指标:

- 动态误差系数 $C_0 = 0, C_1 = 1/200$
- 单位阶跃响应超调量 $\sigma\% \leq 30\%$
- 单位阶跃响应调节时间 $t_s \leq 0.7s$
- 幅值裕度 $h \geq 6dB$

解:

- 期望特性低频段: $K = 1/C_1 = 200$, 斜率 $-20dB/dec$
- 期望特性中频段: 指标转换 $\sigma\%, t_s \rightarrow \gamma > 47.8^\circ, M_r = 1.35, \omega_c > 12.7$ 取 $\omega_c = 13, \omega_2 = 1.3 < 3.37, \omega_3 = 50 > 22.6$
- 期望特性低、中频衔接段: $\omega_1 = 0.13$
- 期望特性中、高频衔接段: $\omega_4 = 100$
- 验算

串联综合法示例 1(续)

$$\begin{aligned}
 G_o(s) &= \frac{200}{s(0.1s+1)(0.02s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)} \\
 G_E(s) &= \frac{1}{1+\frac{2000}{13^2}s} \frac{200(s/1.3+1)}{s(s/50+1)} \\
 \frac{G_E(s)}{G_o(s)} &= \frac{(s/1.3+1)(0.1s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)}{(1+\frac{2000}{13^2}s)} \\
 G_c(s) &\approx \frac{(s/1.3+1)(0.1s+1)}{(1+\frac{2000}{13^2}s)} \\
 &\approx \frac{(s/1.3+1)(0.1s+1)}{(1+\frac{2000}{13^2}s)(0.005s+1)}
 \end{aligned}$$

串联综合法示例 1(续)

解法 2:

$$\begin{aligned}
 G_E(s) &= \frac{13^2}{10} \frac{(s/1.3+1)}{s^2(s/50+1)} \\
 \frac{G_E(s)}{G_o(s)} &= \frac{(s/1.3+1)(0.1s+1)(0.01s+1)(0.005s+1)}{\frac{2000}{13^2}s} \\
 G_c(s) &\approx \frac{(s/1.3+1)(0.1s+1)}{\frac{2000}{13^2}s} \\
 &\approx \frac{(s/1.3+1)(0.1s+1)}{\frac{2000}{13^2}s(0.005s+1)} \\
 &\approx \frac{(s/1.3+1)(0.1s+1)}{(1+\frac{2000}{13^2}s)(0.005s+1)}
 \end{aligned}$$

串联综合法示例 2

设单位反馈系统开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{K}{s(1+0.12s)(1+0.02s)}$ 设计校正装置满足 $K_v \geq 70, t_s \leq 1s, \sigma\% \leq 40\%$

解:

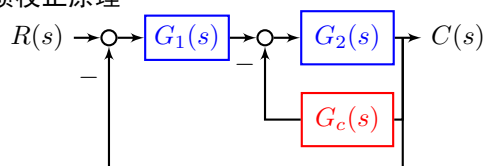
- $K = 70$
- 期望特性中频段: $M_r = 1.6, \omega_c = 13, \omega_2 \leq 4.8, \omega_3 \leq 21.13$ 取 $\omega_2 = 4, \omega_3 = 45$
- 衔接段: $\omega_1 = 0.75, \omega_4 = 50$
- $G_E(s) = \frac{70(0.25s+1)}{s(1.33s+1)(0.022s+1)}$

- $G_c(s) = \frac{(1+0.25s)(1+0.12s)(1+0.02s)}{(1+1.33s)(1+0.022s)} \approx \frac{(1+0.25s)(1+0.12s)}{(1+1.33s)(1+0.022s)}$
- 验算: $\omega_c = 13, \gamma = 45.6^\circ, M_r = 1.4, \sigma\% = 32\%, t_s = 0.73s$ 符合要求。

6 反馈校正

6.1 校正原理

反馈校正原理



- 系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_c(s)}$$

其中 G_c 为反馈校正传递函数。

反馈校正原理 (续)

- 若在系统工作频段内 (动态性能起主要影响的频段内) 有: $|G_2(s)G_c(s)| \gg 1$ 成立, 则

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_c(s)} \\ &\approx \frac{G_1(s)G_2(s)}{G_2(s)G_c(s)} \\ &= \frac{G_1(s)}{G_c} \end{aligned}$$

- 表明校正后的系统特性几乎与被反馈校正装置包围的环节无关。

基本原理: 用反馈校正装置包围未校正系统中对动态性能改善有重大妨碍作用的某些环节, 在满足 $|G_2G_c| \gg 1$ 的条件下, 局部反馈回路的特性主要取决于反馈校正装置, 而与包围部分无关。

6.2 反馈校正的特点

反馈校正的特点

- 削弱非线性的影响
- 减小系统的时间常数
- 降低系统对参数变化的敏感性
- 抑制系统噪声

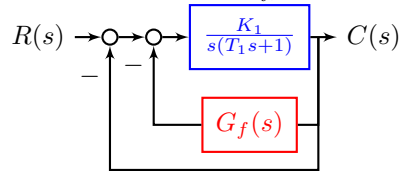
6.3 反馈校正的设计方法

转化为串联校正设计

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_1(s)}{G_c(s)} \\ G_f(s) &= \frac{1}{G_c(s)} \\ G(s) &= G_1(s)G_f(s) \end{aligned}$$

反馈校正示例 1

测速-相角超前反馈校正系统如下图所示, $G_f(s) = \frac{T_2 s}{T_2 s + 1} K'_t s$, $K_1 = 440, T_1 = 0.025$ 要求校正后 $\gamma'' \geq 50^\circ, \omega_c'' \geq 40$ 并具有一定的抑制噪声能力, 求解测速反馈系数 K'_t , 超前网络时间常数 T_2



反馈校正示例 1 求解

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_1}{s(T_1 s + 1)} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T' s + 1)(T'' s + 1)} \\ T' &= \frac{T_2}{T''} T_1 \\ T'' &= T_1 + (1 + K_1 K'_t) T_2 - T' \end{aligned}$$

可看作滞后-超前校正, 取 $\omega_c'' = 42$ 得 $T'/T_1 = T_2/T'' = 0.1, T' = 0.0025, \gamma'' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan T' \omega_c'' + \arctan T_2 \omega_c'' - \arctan T'' \omega_c'' > 50^\circ$ 取 $T_2 = 0.1, T'' = 1$ 得 $\gamma'' = 72^\circ, K'_t \approx 0.02$

综合法设计反馈校正网络: 原理

- 校正后系统开环传递函数 $G(s) \approx \frac{G_1(s)}{G_c(s)}$
- 按综合法设计系统期望传递函数 $G(s)$, 则 $G_c(s) \approx \frac{G_0(s)}{G(s)}$

- 使用条件:

$$\begin{aligned}
 |G_2 G_c| &> 1 \\
 G_0 &= G_1 G_2 \\
 G &= \frac{G_1}{G_c} \\
 &= \frac{G_0}{G_2 G_c} \\
 |G| &< |G_0| \\
 20 \lg |G_0| &> 20 \lg |G|
 \end{aligned}$$

综合法设计反馈校正网络: 设计步骤

- 按 e_{ss} 要求, 确定开环增益 K , 并画出确定了 K 的 $20 \lg |G_0(s)|$
- 按综合法设计期望开环对数幅频特性 $20 \lg |G(s)|$
- 按 $20 \lg |G_2 G_c| = 20 \lg |G_0(s)| - 20 \lg |G(s)|$ 求解 $G_2(s)G_c(s)$
- 检查局部反馈回路稳定性, 以及是否满足:

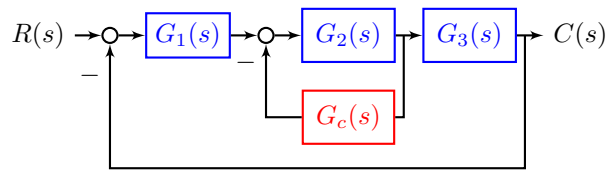
$$|G_2(j\omega_c)G_c(j\omega_c)| \gg 1$$

- 由 $G_2 G_c$ 求解 G_c
- 检验校正后的系统是否满足设计要求

综合法反馈校正示例 1

设系统结构图如下, 其中 $G_1(s) = \frac{K_1}{0.014s+1}$, $G_2(s) = \frac{12}{(0.1s+1)(0.02s+1)}$, $G_3(s) = \frac{0.0025}{s}$, $0 < K_1 < 6000$ 。设计反馈校正装置 $G_c(s)$ 满足以下指标:

- 静态速度误差系数 $K_v \geq 150$
- 单位阶跃输入下的超调量 $\sigma\% \leq 40\%$
- 单位阶跃输入下的调节时间 $t_s \leq 1s$



综合法反馈校正示例 1 求解

- $K_1 = 150/0.0025 = 5000$, $G_o(s) = \frac{150}{s(0.014s+1)(0.02s+1)(0.1s+1)}$, $\omega'_c = 38.7$
- 期望特性中频段: $M_r = 1.6, \omega_c = 13, \omega_3 = 1/0.014 = 71.3, \omega_2 = 4, \gamma = 63.3^\circ$
- 低频段: $\omega_1 = 0.35$
- 高频段: $\omega_4 = 75$
- 期望特性 $G_E(s) = \frac{150(0.25s+1)}{2.86s^2(0.013s+1)}$
- $G_2G_c \approx 1 + G_2G_c = G_o/G_E$ 得
 - $G_2G_c \approx \frac{2.86s(0.013s+1)}{(0.25s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)(0.014s+1)}$
 - $G_2G_c \approx \frac{2.86s}{(0.25s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)}$

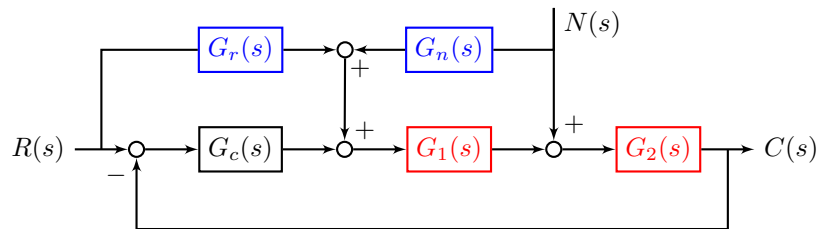
综合法反馈校正示例 1 求解 (续)

- $\gamma(G_2G_c) = 44.3^\circ$ 内环稳定
- $20\lg(|G_2(j\omega_c)G_c(j\omega_c)|) = 18.9$ 满足 $|G_2G_c| \gg 1$
- $G_c = \frac{0.238s}{0.25s+1}$
- 验算: $K_v = 150, \gamma = 54.3^\circ, M_r = 1.23, \sigma\% = 25.2\%, t_s = 0.6s$ 符合要求

7 复合校正

7.1 复合校正特点

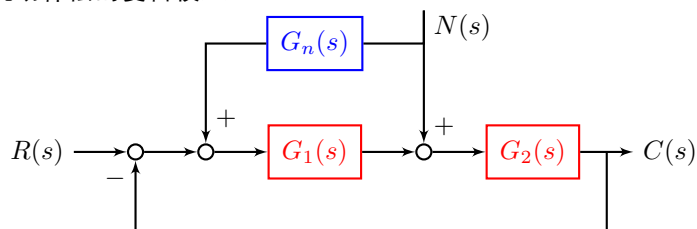
复合校正特点



- 应用场合: 系统中存在可测量的扰动, 或者对系统的稳态精度和响应速度要求很高
- 校正方式:
 - 按扰动补偿
 - 按输入补偿

7.2 按扰动补偿的复合校正

按扰动补偿的复合校正



- 目的: 使扰动不对系统的输出产生任何影响: $\Phi_N(s) = 0$
- 条件: 扰动可测

按扰动补偿的复合校正: 设计 $G_n(s)$

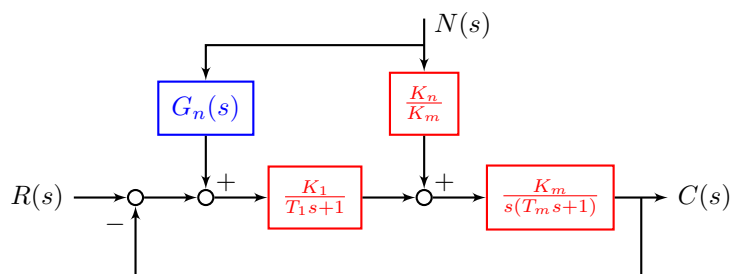
- 对扰动的误差全补偿条件:

$$\begin{aligned}\Phi_N(s) &= 0 \\ \frac{G_2 + G_n G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} &= 0 \\ G_2 + G_n G_1 G_2 &= 0 \\ G_n &= \frac{-1}{G_1}\end{aligned}$$

- 全补偿时, $G_n(s)$ 的分子阶次大于分母阶次, 物理上不可实现.
- 部分补偿
 - 在系统性能起主要影响的频段内近似补偿 ($n \geq m$),
 - 稳态补偿 ($\lim_{s \rightarrow 0} G_n(s)$)

按扰动补偿的复合校正示例 1

某伺服控制系统结构图如下:



- 设计对 $N(s)$ 的全补偿校正网络 $G_n(s)$,
- 近似全补偿校正网络 $G_{n1}(s)$,
- 稳态全补偿网络 $G_{n2}(s)$

按扰动补偿的复合校正示例 1: 解:

- 全补偿:

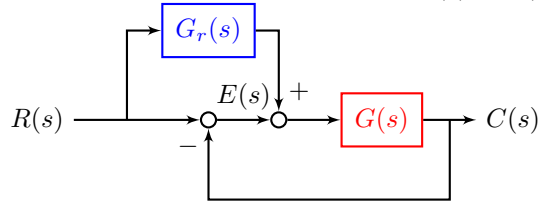
$$\begin{aligned}\Phi_N(s) &= 0 \\ \frac{C(s)}{N(s)} &= 0 \\ \frac{K_n}{K_m} + G_n(s) \cdot \frac{K_1}{T_1 s + 1} &= 0 \\ G_n(s) &= -\frac{K_n(T_1 s + 1)}{K_1 K_m}\end{aligned}$$

- 近似全补偿: $G_{n1}(s) = -\frac{K_n}{K_1 K_m} \cdot \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$. 其中 $T_1 \gg T_2$.
- 稳态全补偿: $G_{n1}(s) = -\frac{K_n}{K_1 K_m}$

7.3 按输入补偿的复合校正

按输入补偿的复合校正

目的: 使输出完全跟踪输入信号, 即 $C(s) = R(s)$



$$\begin{aligned}C(s) &= (E(s) + G_r(s)R(s))G(s) \\ E(s) &= R(s) - C(s) \\ E(s) &= \frac{1 - G_r(s)G(s)}{1 + G(s)}R(s)\end{aligned}$$

$G_r(s)$ 为按输入补偿的复合校正装置 (前馈装置) 传递函数.

按输入补偿的复合校正分析

对输入信号的误差全补偿条件:

$$\begin{aligned}E(s) &= R(s) - C(s) \\ &= \frac{1 - G_r(s)G(s)}{1 + G(s)}R(s) \\ &= 0 \\ G_r(s) &= \frac{1}{G(s)}\end{aligned}$$

按输入补偿的复合校正：部分补偿：

- 采用满足跟踪精度要求的部分补偿条件，在对系统性能起主要影响的频段内实现补偿，使 $G_r(s)$ 可物理实现。
- 设反馈系统开环传递函数： $G(s)$ ，取 $G_r(s) = \lambda_1 s$ 得：

$$G(s) = \frac{K_v}{s(a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_1)}$$

$$\Phi_e(s) = \frac{1 - G(s)G_r(s)}{1 + G(s)}$$

$$= \frac{s(a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_1) - K_v \lambda_1 s}{s(a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_1) + K_v}$$

按输入补偿的复合校正：部分补偿（续）：

- 若取 $\lambda_1 = \frac{a_1}{K_v}$ 则有：

$$\Phi_e(s) = \frac{s(a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_2 s)}{s(a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_1) + K_v}$$

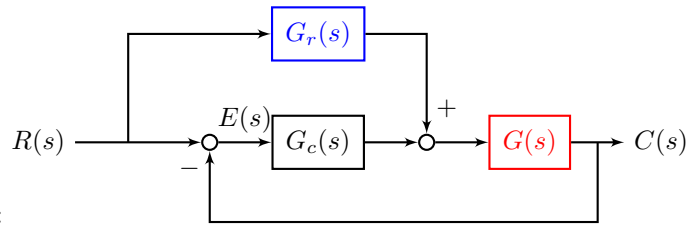
系统为 II 型系统。

- 同理，取 $G_r(s) = \lambda_1 s + \lambda_2 s^2$, $\lambda_1 = \frac{a_1}{K_v}$, $\lambda_2 = \frac{a_2}{K_v}$ ，则

$$\Phi_e(s) = \frac{s(a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_3 s^2)}{s(a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_1) + K_v}$$

系统为 III 型系统。

前馈系统分析



- 前馈系统：
- 误差全补偿，分析方法类似，

$$C(s) = R(s)$$

$$C(s) = R(s)G_r(s)G(s) + E(s)G_c(s)G(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s) = 0$$

$$G_r(s)G(s) = 1$$

前馈系统部分补偿:

$$\Phi_e^{(0)}(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \quad \Phi_e(s) = \frac{1 - G(s)G_r(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

- 设:

$$G(s)G_r(s) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 s + \lambda_2 s^2 + \cdots + \lambda_n s^n}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}$$

- 得:

$$\Phi_e(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n - (\lambda_0 + \lambda_1 s + \cdots + \lambda_n s^n)}{(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n)(1 + G_c(s)G(s))}$$

- 将 $\Phi_e(s)$ 与 $\Phi_e^{(0)}(s)$ 比较可知, 当

$$\begin{cases} \lambda_i = a_i & i = 1, 2, \cdots, k \\ \lambda_i = 0 & i = k + 1, \cdots, n \end{cases}$$

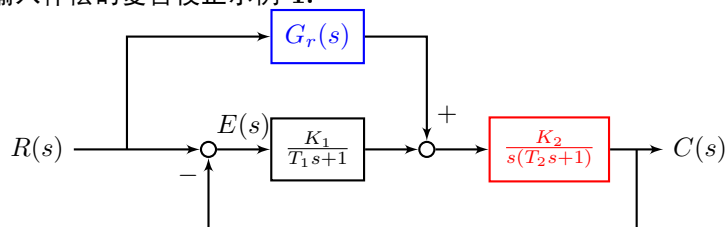
时, 系统类型可提高 k

前馈系统分析 (续) 稳定性分析

$$\begin{aligned} \Phi_0(s) &= \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} \\ \Phi(s) &= \frac{(G_c(s) + G_r(s))G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} \end{aligned}$$

- 当 $G_r(s)$ 极点实部小于 0 时, 校正后系统稳定性不变。

按输入补偿的复合校正示例 1:



设计 $G_r(s)$

- 实现完全补偿
- 使系统等效为 II 型系统
- 使系统等效为 III 型系统

按输入补偿的复合校正示例 1(续):

- 取 $G_r(s) = \lambda_1 s + \lambda_2 s^2$, 得:

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \frac{1 - G_r(s) \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}} \\ &= \frac{s(T_2 s + 1) - G_r(s) K_2}{s(T_2 s + 1)(1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)})} \\ &= \frac{s(T_2 s + 1) - (\lambda_1 s + \lambda_2 s^2) K_2}{s(T_2 s + 1)(1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)})}\end{aligned}$$

- 取 $\lambda_1 = \frac{1}{K_2}, \lambda_2 = 0$ 则系统为 II 型系统,
- 取 $\lambda_1 = \frac{1}{K_2}, \lambda_2 = \frac{T_2}{K_2}$ 则能实现完全补偿.

按输入补偿的复合校正示例 1(续):

- 取 $G_r(s) = \frac{\lambda_1 s + \lambda_2 s^2}{T s + 1}$, 得:

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \frac{1 - G_r(s) \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}} \\ &= \frac{s(T_2 s + 1)(T s + 1) - (\lambda_1 s + \lambda_2 s^2) K_2}{s(T s + 1)(T_2 s + 1)(1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)})} \\ &= \frac{T T_2 s^3 + (T + T_2) s^2 + s - (\lambda_1 s + \lambda_2 s^2) K_2}{s(T s + 1)(T_2 s + 1)(1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)})}\end{aligned}$$

- 取 $\lambda_1 = \frac{1}{K_2}, \lambda_2 = \frac{T_2 + T}{K_2}$ 则系统为 III 型系统.

按输入补偿的复合校正示例 1(续):

- 取 $G_r(s) = \frac{\lambda_1 s + \lambda_2 s^2}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$, 得:

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \frac{1 - G_r(s) \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}} \\ &= \frac{s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1) - (\lambda_1 s + \lambda_2 s^2) K_2}{s(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)(T_2 s + 1)(1 + \frac{K_1}{T_1 s + 1} \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)})}\end{aligned}$$

- 取 $\lambda_1 = \frac{1}{K_2}, \lambda_2 = \frac{T_2 + T_3 + T_4}{K_2}$ 则系统为 III 型系统.