线性系统时域分析法

线性定常系统的稳定性

Outline

1. 稳定性的概念
2. 古尔维茨判据及劳斯判据
3. 劳斯判据示例
4. 劳斯判据应用中的特殊情况
5. 劳斯判据求解系统参数
6. 相对稳定性

Topic

1 稳定性的概念

2 古尔维茨判据及劳斯判据

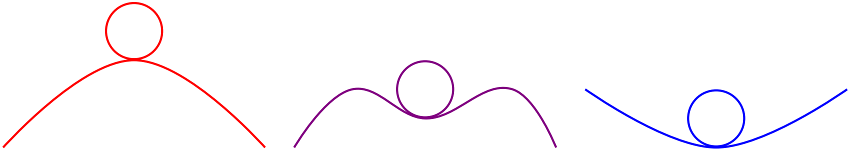
3 劳斯判据示例

4 劳斯判据应用中的特殊情况

5 劳斯判据求解系统参数

6 相对稳定性

稳定性



定义: 系统处于平衡状态时, 若有干扰使系统偏离平衡状态, 当扰动消除后, 系统仍能回到原来的平衡状态, 则称该系统是稳定的, 反之称为不稳定.

稳定的充要条件

- 系统的传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_g \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

- 设系统输入为单位脉冲信号: $r(t)=\delta(t), R(s)=1$

$$\begin{aligned} C(s) &= \Phi(s)R(s) = \frac{k_g \prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \\ &= k_g \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{s-p_j} \\ c(t) &= k_g \sum_{j=1}^{n} k_j e^{p_j t} \end{aligned}$$

- 当 $\Re(p_j)<0$ 时, 有 $\lim_{t\to\infty} c(t)=0$
- 稳定性充要条件: 系统的闭环极点均具有负实部

Topic

1. 稳定性的概念
2. 古尔维茨判据及劳斯判据
3. 劳斯判据示例
4. 劳斯判据应用中的特殊情况
5. 劳斯判据求解系统参数
6. 相对稳定性

特征多项式

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{M(s)}{N(s)} \\
M(s) &= b_o s^m + \cdots + b_n \\
N(s) &= a_0 s^n + \cdots + a_n
\end{aligned}
$$

其中:

- $N(s)$ 称为特征多项式
- $N(s) = 0$ 称为特征方程 (只与 $a_0, \cdots, a_n$ 有关)

古尔维茨判据 (代数判据):

- 稳定的必要条件: 特征多项式中各项系数大于零.
- 稳定的充要条件: 特征多项式中各项系数所构成的主行列式及顺序主子式全部大于零.
- 主行列式:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

- 顺序主子式有 n-1 个: $\Delta_1, \cdots, \Delta_{n-1}$
- 李纳德 -戚帕特判据: 若所有奇次古尔维茨行列式为正, 则偶次古尔维茨行列式必为正, 反之亦然

古尔维茨判据 (代数判据):

- 稳定的必要条件: 特征多项式中各项系数大于零.
- 稳定的充要条件: 特征多项式中各项系数所构成的主行列式及顺序主子式全部大于零.
- 主行列式:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

- 顺序主子式有 n-1 个: $\Delta_1, \cdots, \Delta_{n-1}$
- 李纳德 -戚帕特判据: 若所有奇次古尔维茨行列式为正, 则偶次古尔维茨行列式必为正, 反之亦然

古尔维茨判据 (代数判据):

- 稳定的必要条件: 特征多项式中各项系数大于零.
- 稳定的充要条件: 特征多项式中各项系数所构成的主行列式及顺序主子式全部大于零.
- 主行列式:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

- 顺序主子式有 n-1 个: $\Delta_1, \cdots, \Delta_{n-1}$
- 李纳德 -戚帕特判据: 若所有奇次古尔维茨行列式为正, 则偶次古尔维茨行列式必为正, 反之亦然

古尔维茨判据 (代数判据):

- 稳定的必要条件: 特征多项式中各项系数大于零.
- 稳定的充要条件: 特征多项式中各项系数所构成的主行列式及顺序主子式全部大于零.
- 主行列式:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

- 顺序主子式有 n-1 个: $\Delta_1, \cdots, \Delta_{n-1}$
- 李纳德 -戚帕特判据: 若所有奇次古尔维茨行列式为正, 则偶次古尔维茨行列式必为正, 反之亦然

古尔维茨判据 (代数判据):

- 稳定的必要条件: 特征多项式中各项系数大于零.
- 稳定的充要条件: 特征多项式中各项系数所构成的主行列式及顺序主子式全部大于零.
- 主行列式:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

- 顺序主子式有 n-1 个: $\Delta_1, \cdots, \Delta_{n-1}$
- 李纳德 -戚帕特判据: 若所有奇次古尔维茨行列式为正, 则偶次古尔维茨行列式必为正, 反之亦然

劳斯 -古尔维茨判据, 简称劳斯判据

- 构造劳斯表判断系统是否稳定

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & c_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & c_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & \cdots & \\
s^{n-3} & d_1 = \frac{c_1 a_3 - a_1 c_2}{c_1} & d_2 = \frac{c_1 a_5 - a_1 c_3}{c_1} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \cdots & \\
s^0 & a_n & & &
\end{array}
$$

- 劳斯判据:
  - 系统稳定的充要条件: 劳斯表中第一列元素均大于零
  - 若第一列元素有小于零的, 则系统不稳定, 且正实部根的个数等于第一列元素变号的次数.

劳斯 -古尔维茨判据，简称劳斯判据

- 构造劳斯表判断系统是否稳定

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & c_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & c_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & \cdots & \\
s^{n-3} & d_1 = \frac{c_1 a_3 - a_1 c_2}{c_1} & d_2 = \frac{c_1 a_5 - a_1 c_3}{c_1} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \cdots & \\
s^0 & a_n & & &
\end{array}
$$

- 劳斯判据:
  - 系统稳定的充要条件：劳斯表中第一列元素均大于零
  - 若第一列元素有小于零的，则系统不稳定，且正实部根的个数等于第一列元素变号的次数.

劳斯 -古尔维茨判据, 简称劳斯判据

- 构造劳斯表判断系统是否稳定

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & c_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} & c_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1} & \cdots & \\
s^{n-3} & d_1=\frac{c_1a_3-a_1c_2}{c_1} & d_2=\frac{c_1a_5-a_1c_3}{c_1} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \cdots & \\
s^0 & a_n & & &
\end{array}
$$

- 劳斯判据:
  - 系统稳定的充要条件: 劳斯表中第一列元素均大于零
  - 若第一列元素有小于零的, 则系统不稳定, 且正实部根的个数等于第一列元素变号的次数.

劳斯 -古尔维茨判据, 简称劳斯判据

- 构造劳斯表判断系统是否稳定

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & c_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & c_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & \cdots & \\
s^{n-3} & d_1 = \frac{c_1 a_3 - a_1 c_2}{c_1} & d_2 = \frac{c_1 a_5 - a_1 c_3}{c_1} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \cdots & \\
s^0 & a_n & & &
\end{array}
$$

- 劳斯判据:
  - 系统稳定的充要条件: 劳斯表中第一列元素均大于零
  - 若第一列元素有小于零的, 则系统不稳定, 且正实部根的个数等于第一列元素变号的次数.

劳斯 -古尔维茨判据, 简称劳斯判据

- 构造劳斯表判断系统是否稳定

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & c_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} & c_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1} & \cdots & \\
s^{n-3} & d_1=\frac{c_1a_3-a_1c_2}{c_1} & d_2=\frac{c_1a_5-a_1c_3}{c_1} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \cdots & \\
s^0 & a_n & & &
\end{array}
$$

- 劳斯判据:
  - 系统稳定的充要条件: 劳斯表中第一列元素均大于零
  - 若第一列元素有小于零的, 则系统不稳定, 且正实部根的个数等于第一列元素变号的次数.

劳斯表与多项式除法

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & c_1 = a_2 - \frac{a_0 a_3}{a_1} & c_2 = a_4 - \frac{a_0 a_5}{a_1} & \cdots & \\
s^{n-3} & d_1 = a_3 - \frac{a_1 c_2}{c_1} & d_2 = a_5 - \frac{a_1 c_3}{c_1} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & & \cdots & \\
s^0 & a_n & & &
\end{array}
$$

即：

$$a_0 s^n + a_2 s^{n-2} + \cdots = s\frac{a_0}{a_1}(a_1 s^{n-1} + a_3 s^{n-3} + \cdots) + c_1 s^{n-2} + c_2 s^{n-4} +$$

$$c_1 s^{n-2} + c_2 s^{n-4} + \cdots = s\frac{c_1}{d_1}(d_1 s^{n-3} + d_2 s^{n-5} + \cdots) + \cdots$$

Topic

1 稳定性的概念

2 古尔维茨判据及劳斯判据

3 劳斯判据示例

4 劳斯判据应用中的特殊情况

5 劳斯判据求解系统参数

6 相对稳定性

Routh 判据示例 1: $3s^4+10s^3+5s^2+s+2=0$

解:

劳斯表:

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 3 & 5 & 2 \\
s^3 & 10 & 1 & \\
s^2 & 4.7 & 2 & \\
s^1 & -\frac{15.3}{4.7} & & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

结论

系统不稳定, 有 2 个不稳定根.

Routh 判据示例 1: $3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$

解:

劳斯表:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 3 & 5 & 2 \\ s^3 & 10 & 1 & \\ s^2 & 4.7 & 2 & \\ s^1 & -\frac{15.3}{4.7} & & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

结论

系统不稳定, 有 2 个不稳定根.

Routh 判据示例 1: $3s^4+10s^3+5s^2+s+2=0$

解:

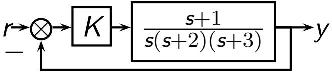
劳斯表:

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 3 & 5 & 2 \\
s^3 & 10 & 1 & \\
s^2 & 4.7 & 2 & \\
s^1 & -\frac{15.3}{4.7} & & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

结论

系统不稳定, 有 2 个不稳定根.

Routh 判据示例 2:



求使系统稳定的 K 的范围

传递函数

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$\Phi(s) = \frac{K(s+1)}{s^3+5s^2+(6+K)s+K}$$

劳斯表:

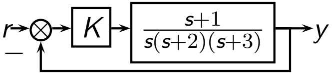
$$\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 6+K \\
s^2 & 5 & K \\
s^1 & \frac{30+4K}{5} & 0 \\
s^0 & K &
\end{array}$$

稳定条件:

$$\begin{aligned} 30+4K &> 0 \\ K &> 0 \end{aligned}$$

得: $K>0$

Routh 判据示例 2:



求使系统稳定的 K 的范围

传递函数

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \\
\Phi(s) &= \frac{K(s+1)}{s^3+5s^2+(6+K)s+K}
\end{aligned}
$$

劳斯表:

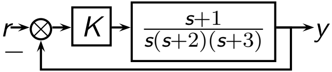
$$
\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 6+K \\
s^2 & 5 & K \\
s^1 & \frac{30+4K}{5} & 0 \\
s^0 & K &
\end{array}
$$

稳定条件:

$$
\begin{aligned}
30+4K &> 0 \\
K &> 0
\end{aligned}
$$

得: $K > 0$

Routh 判据示例 2:



求使系统稳定的 K 的范围

传递函数

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \\
\Phi(s) &= \frac{K(s+1)}{s^3+5s^2+(6+K)s+K}
\end{aligned}
$$

劳斯表:

$$
\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & 6+K \\
s^2 & 5 & K \\
s^1 & \frac{30+4K}{5} & 0 \\
s^0 & K &
\end{array}
$$

稳定条件:

$$
\begin{aligned}
30+4K &> 0 \\
K &> 0
\end{aligned}
$$

得: $K > 0$

Topic

1 稳定性的概念

2 古尔维茨判据及劳斯判据

3 劳斯判据示例

4 劳斯判据应用中的特殊情况

5 劳斯判据求解系统参数

6 相对稳定性

Routh 表特殊情况: 第一列元素有零元, 系统不稳定:

- 先用 ϵ 代替, 再令 $\epsilon \to 0$
- 系统升阶: $(s+a)D(s), a>0$

例:

系统特征方程: $D(s)=s^4+2s^3+s^2+2s+1=0$ 判断系统的稳定性, 求出正实部根的个数.

Roth 表:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 2 & 2 & \\ s^2 & 0(\epsilon) & 1 & \\ s^1 & \frac{2\epsilon-2}{\epsilon} & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

$(s+1)D(s)=s^5+3s^4+3s^3+3s^2+3s+1$

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 3 & 3 \\ s^4 & 3 & 3 & 1 \\ s^3 & 2 & \frac{8}{3} & \\ s^2 & -1 & 1 & \\ s^1 & \frac{14}{3} & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Routh 表特殊情况: 第一列元素有零元, 系统不稳定:

- 先用 ϵ 代替, 再令 $\epsilon \to 0$
- 系统升阶: $(s+a)D(s), a>0$

例:

系统特征方程: $D(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$ 判断系统的稳定性, 求出正实部根的个数.

Roth 表:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 2 & 2 & \\ s^2 & 0(\epsilon) & 1 & \\ s^1 & \frac{2\epsilon-2}{\epsilon} & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

$(s+1)D(s) = s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 3 & 3 \\ s^4 & 3 & 3 & 1 \\ s^3 & 2 & \frac{8}{3} & \\ s^2 & -1 & 1 & \\ s^1 & \frac{14}{3} & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Routh 表特殊情况: 第一列元素有零元, 系统不稳定:

- 先用 ϵ 代替, 再令 $\epsilon \to 0$
- 系统升阶: $(s+a)D(s), a>0$

例:

系统特征方程: $D(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$ 判断系统的稳定性, 求出正实部根的个数.

Roth 表:

s^4	1	1	1
s^3	2	2	
s^2	$0(\epsilon)$	1	
s^1	$\frac{2\epsilon-2}{\epsilon}$	0	
s^0	1		

$(s+1)D(s) = s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

s^5	1	3	3
s^4	3	3	1
s^3	2	$\frac{8}{3}$	
s^2	-1	1	
s^1	$\frac{14}{3}$	0	
s^0	1		

Routh 表特殊情况: 第一列元素有零元, 系统不稳定:

- 先用 ϵ 代替, 再令 $\epsilon \to 0$
- 系统升阶: $(s+a)D(s), a > 0$

例:

系统特征方程: $D(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$ 判断系统的稳定性, 求出正实部根的个数.

Roth 表:

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 2 & 2 & \\
s^2 & 0(\epsilon) & 1 & \\
s^1 & \frac{2\epsilon-2}{\epsilon} & 0 & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

$(s+1)D(s) = s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

$$
\begin{array}{cccc}
s^5 & 1 & 3 & 3 \\
s^4 & 3 & 3 & 1 \\
s^3 & 2 & \frac{8}{3} & \\
s^2 & -1 & 1 & \\
s^1 & \frac{14}{3} & 0 & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

特殊情况: 全行为零时:

- 全零行的数值由上一行求导代替
- 辅助方程: 全零行的上一行可构成辅助方程, 辅助方程的解全部为系统特征根

例:

$D(s) = s^4 + 5s^3 + 5s^2 - 5s - 6$ 求系统不稳定根的个数

Routh 表

s^4	1	5	-6
s^3	5	-5	
s^2	6	-6	
s^1	0(12)	0	
s^0	-6		

辅助方程

- 对 $6s^2 - 6$ 求导得 $12s$
- 辅助方程 $6s^2 - 6 = 0$, 得 $s_{1,2} = \pm 1$ 系统不稳定根为1

特殊情况: 全行为零时:

- 全零行的数值由上一行求导代替
- 辅助方程: 全零行的上一行可构成辅助方程, 辅助方程的解全部为系统特征根

例:

$D(s) = s^4 + 5s^3 + 5s^2 - 5s - 6$ 求系统不稳定根的个数

Routh 表

s^4	1	5	-6
s^3	5	-5	
s^2	6	-6	
s^1	0(12)	0	
s^0	-6		

辅助方程

- 对 $6s^2 - 6$ 求导得 $12s$
- 辅助方程 $6s^2 - 6 = 0$, 得 $s_{1,2} = \pm 1$ 系统不稳定根为1

特殊情况: 全行为零时:

- 全零行的数值由上一行求导代替
- 辅助方程: 全零行的上一行可构成辅助方程, 辅助方程的解全部为系统特征根

例:

$D(s) = s^4 + 5s^3 + 5s^2 - 5s - 6$ 求系统不稳定根的个数

Routh 表

s^4	1	5	-6
s^3	5	-5	
s^2	6	-6	
s^1	$0(12)$	0	
s^0	-6		

辅助方程

- 对 $6s^2 - 6$ 求导得 $12s$
- 辅助方程 $6s^2 - 6 = 0$, 得 $s_{1,2} = \pm 1$
  系统不稳定根为1

特殊情况: 全行为零时:

- 全零行的数值由上一行求导代替
- 辅助方程: 全零行的上一行可构成辅助方程, 辅助方程的解全部为系统特征根

例:

$D(s) = s^4 + 5s^3 + 5s^2 - 5s - 6$ 求系统不稳定根的个数

Routh 表

s^4	1	5	-6
s^3	5	-5	
s^2	6	-6	
s^1	0(12)	0	
s^0	-6		

辅助方程

- 对 $6s^2 - 6$ 求导得 $12s$
- 辅助方程 $6s^2 - 6 = 0$, 得 $s_{1,2} = \pm 1$ 系统不稳定根为1

Topic

1. 稳定性的概念
2. 古尔维茨判据及劳斯判据
3. 劳斯判据示例
4. 劳斯判据应用中的特殊情况
5. 劳斯判据求解系统参数
6. 相对稳定性

例: $D(s) = s^4 + 2s^3 + ks^2 + s + 2$ 求 K 值稳定范围

解:

Routh 表

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & K & 2 \\
s^3 & 2 & 1 & \\
s^2 & \frac{2K-1}{2} & 2 & \\
s^1 & 1-\frac{8}{2K-1} & 0 & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2K-1 &> 0 \\
1-\frac{8}{2K-1} &> 0
\end{aligned}
$$

得: $K > \frac{9}{2}$

当 $K = \frac{9}{2}$ 时:

Routh 表:

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 4.5 & 2 \\
s^3 & 2 & 1 & \\
s^2 & 4 & 2 & \\
s^1 & 0(8) & 0 & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

其中辅助方程为 $4s^2+2=0$，可解得 $s = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}j$

例: $D(s) = s^4 + 2s^3 + ks^2 + s + 2$ 求 K 值稳定范围

解:

Routh 表

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & K & 2 \\
s^3 & 2 & 1 & \\
s^2 & \frac{2K-1}{2} & 2 & \\
s^1 & 1 - \frac{8}{2K-1} & 0 & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2K-1 &> 0 \\
1 - \frac{8}{2K-1} &> 0
\end{aligned}
$$

得: $K > \frac{9}{2}$

当 $K = \frac{9}{2}$ 时:

Routh 表:

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 4.5 & 2 \\
s^3 & 2 & 1 & \\
s^2 & 4 & 2 & \\
s^1 & 0(8) & 0 & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

其中辅助方程为 $4s^2 + 2 = 0$, 可解得 $s = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}j$

例: $D(s) = s^4 + 2s^3 + ks^2 + s + 2$ 求 K 值稳定范围

解:

Routh 表

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & K & 2 \\ s^3 & 2 & 1 & \\ s^2 & \frac{2K-1}{2} & 2 & \\ s^1 & 1-\frac{8}{2K-1} & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2K-1 &> 0 \\ 1-\frac{8}{2K-1} &> 0 \end{aligned}$$

得: $K > \frac{9}{2}$

当 $K = \frac{9}{2}$ 时:

Routh 表:

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 4.5 & 2 \\ s^3 & 2 & 1 & \\ s^2 & 4 & 2 & \\ s^1 & 0(8) & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

其中辅助方程为 $4s^2 + 2 = 0$, 可解得 $s = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}j$

例: $D(s) = Ts^3 + s^2 + K = 0$

Routh 表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & T & 0 \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & -TK & \\ s^0 & K & \end{array}$$

无解

$$\begin{aligned} T &> 0 \\ K &> 0 \\ TK &< 0 \end{aligned}$$

例: $D(s) = Ts^3 + s^2 + K = 0$

Routh 表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & T & 0 \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & -TK & \\ s^0 & K & \end{array}$$

无解

$$\begin{array}{rcl} T & > & 0 \\ K & > & 0 \\ TK & < & 0 \end{array}$$

例: $D(s) = Ts^3 + s^2 + K = 0$

Routh 表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & T & 0 \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & -TK & \\ s^0 & K & \end{array}$$

无解

$$\begin{array}{rcl} T & > & 0 \\ K & > & 0 \\ TK & < & 0 \end{array}$$

Topic

1 稳定性的概念

2 古尔维茨判据及劳斯判据

3 劳斯判据示例

4 劳斯判据应用中的特殊情况

5 劳斯判据求解系统参数

6 相对稳定性

例:$D(s) = s^3 + 5.5s^2 + 8.5s + 3$

- 判断系统是否具有相对稳定性:$\sigma = 1$

解:

将 $s = z - \sigma$ 代入 $D(s)$ 中

得 $D(z) = z^3 + 2.5z^2 + 0.5z - 1$，不稳定.

Routh 表

$$\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 8.5 \\
s^2 & 5.5 & 3 \\
s^1 & 8.5 - \frac{3}{5.5} & 0 \\
s^0 & 3 &
\end{array}$$

Routh 表:

$$\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 0.5 \\
s^2 & 2.5 & -1 \\
s^1 & 0.5 + \frac{1}{2.5} & 0 \\
s^0 & -1 &
\end{array}$$

结论

有一个不稳定极点.

例:$D(s) = s^3 + 5.5s^2 + 8.5s + 3$

- 判断系统是否具有相对稳定性:$\sigma = 1$

解:

Routh 表

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 8.5 \\ s^2 & 5.5 & 3 \\ s^1 & 8.5 - \frac{3}{5.5} & 0 \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

将 $s = z - \sigma$ 代入 $D(s)$ 中

得 $D(z) = z^3 + 2.5z^2 + 0.5z - 1$，不稳定.

Routh 表:

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 0.5 \\ s^2 & 2.5 & -1 \\ s^1 & 0.5 + \frac{1}{2.5} & 0 \\ s^0 & -1 & \end{array}$$

结论

有一个不稳定极点.

例:$D(s) = s^3 + 5.5s^2 + 8.5s + 3$

- 判断系统是否具有相对稳定性:$\sigma = 1$

解:

将 $s = z - \sigma$ 代入 $D(s)$ 中

得 $D(z) = z^3 + 2.5z^2 + 0.5z - 1$，不稳定.

Routh 表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 8.5 \\ s^2 & 5.5 & 3 \\ s^1 & 8.5 - \frac{3}{5.5} & 0 \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

Routh 表:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 0.5 \\ s^2 & 2.5 & -1 \\ s^1 & 0.5 + \frac{1}{2.5} & 0 \\ s^0 & -1 & \end{array}$$

结论

有一个不稳定极点.

例:$D(s) = s^3 + 5.5s^2 + 8.5s + 3$

- 判断系统是否具有相对稳定性:$\sigma = 1$

解:

将 $s = z - \sigma$ 代入 $D(s)$ 中

得 $D(z) = z^3 + 2.5z^2 + 0.5z - 1$,不稳定.

Routh 表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 8.5 \\ s^2 & 5.5 & 3 \\ s^1 & 8.5 - \frac{3}{5.5} & 0 \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

Routh 表:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 0.5 \\ s^2 & 2.5 & -1 \\ s^1 & 0.5 + \frac{1}{2.5} & 0 \\ s^0 & -1 & \end{array}$$

结论

有一个不稳定极点.

例:$D(s) = s^3 + 5.5s^2 + 8.5s + 3$

- 判断系统是否具有相对稳定性:$\sigma = 1$

解:

将 $s = z - \sigma$ 代入 $D(s)$ 中

得 $D(z) = z^3 + 2.5z^2 + 0.5z - 1$，不稳定.

Routh 表

$$
\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 8.5 \\
s^2 & 5.5 & 3 \\
s^1 & 8.5 - \frac{3}{5.5} & 0 \\
s^0 & 3 &
\end{array}
$$

Routh 表:

$$
\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 0.5 \\
s^2 & 2.5 & -1 \\
s^1 & 0.5 + \frac{1}{2.5} & 0 \\
s^0 & -1 &
\end{array}
$$

结论

有一个不稳定极点.