线性系统的根轨迹法

根轨迹绘制基本法则

邢超

<.1>

1 根轨迹分支数、对称性和连续性

根轨迹分支数、对称性和连续性

- 根轨迹分支数等于开环零点数与开环极点数中的较大者，即 $\max(m,n)$(多项式的阶数为 $\max(m,n)$)
- 根轨迹关于实轴对称 (实系数多项式的根为实数或共轭复数)
- 根轨迹是连续的 (参考隐函数存在定理)

<.2>

2 根轨迹的起点和终点

开环零极点数相等时

$$K^*\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = -1 \tag{1}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K^*\prod_{j=1}^{m}(s-z_j) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{K^*}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+\prod_{j=1}^{m}(s-z_j) = 0 \tag{3}$$

- 起点：开环极点
- 终点：开环零点

此时根轨迹只存在于有限区域内。

<.3>

开环极点数大于零点数

$$K^* = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{m}|s-z_j|} \tag{4}$$

$$K^* = \frac{|s|^{n-m}\prod_{i=1}^{n}|1-\frac{p_i}{s}|}{\prod_{j=1}^{m}|1-\frac{z_j}{s}|} \tag{5}$$

此时根轨迹随 K^* 的增大而趋于无穷远，且远处的根轨迹趋近于 $\frac{K^*}{(s-c)^{n-m}}$。 <.4>

3 根轨迹的渐近线

当 $n > m$ 时，根轨迹随 K^* 的增大趋于无穷远，且远处的根轨迹趋近于 $\frac{K^*}{(s-c)^{n-m}}$。此时，$\frac{K^*}{(s-c)^{n-m}}$ 的根轨迹可看作渐近线。

根轨迹的渐近线

$$
\begin{aligned}
K^* \frac{1}{(s-c)^{n-m}} &\approx -1 && (6)\\
K^* \frac{\prod_{j=1}^{m}(1-\frac{z_j}{s})}{s^{n-m}\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{p_i}{s})} &\approx \frac{K^*}{s^{n-m}(1-\frac{c}{s})^{n-m}} && (7)\\
(1-\frac{c}{s})^{n-m}\prod_{j=1}^{m}(1-\frac{z_j}{s}) &\approx \prod_{i=1}^{n}(1-\frac{p_i}{s}) && (8)
\end{aligned}
$$

<.5>

根轨迹的渐近线

$$
\begin{aligned}
(1-\frac{c}{s})^{n-m} &= 1-\frac{(n-m)c}{s}+\cdots && (9)\\
\prod_{j=1}^{m}(1-\frac{z_j}{s}) &= 1-\frac{\sum_{j=1}^{m} z_j}{s}+\cdots && (10)\\
\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{p_i}{s}) &= 1-\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{s}+\cdots && (11)
\end{aligned}
$$

<.6>

根轨迹的渐近线

$$
\begin{aligned}
(1-\frac{(n-m)c}{s}+\cdots)(1-\frac{\sum_{j=1}^{m} z_j}{s}+\cdots) &= 1-\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{s}+\cdots && (12)\\
1-\frac{(n-m)c}{s}-\frac{\sum_{j=1}^{m} z_j}{s}+\cdots &\approx 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}}{s}+\cdots\\
-(n-m)c-\sum_{j=1}^{m} z_j &= \sum_{i=1}^{n} p_i && (13)\\
c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i-\sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} && (14)
\end{aligned}
$$

<.7>

4 根轨迹在实轴上的分布

根轨迹在实轴上的分布 $s \in R$(开环零极点全为实数)

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = -1 \tag{15}$$

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^{m}\rho_j}{\prod_{i=1}^{n}A_i} = -1 \tag{16}$$

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^{m}|\rho_j|}{\prod_{i=1}^{n}|A_i|} \frac{j=1(-1)^q}{(-1)^r} = -1 \tag{17}$$

实轴上某区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹。 <.8>

根轨迹在实轴上的分布 $s \in R$(开环零极点存在共轭复数)

$$K^* G_q(s)(s-z_q)(s-\bar{z}_q) = -1 \tag{18}$$

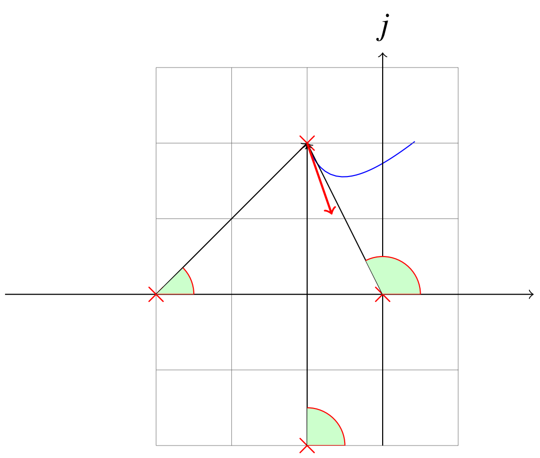
$$K^* G_i(s)(s-a-jb_q)(s-a+jb_q) = -1 \tag{19}$$

$$K^* G_i(s)((s-a)^2+b_q^2) = -1 \tag{20}$$

实轴上某区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹。 <.9>

5 根轨迹的起始角与终止角

根轨迹的起始角与终止角



<.10>

起始角

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m}\angle(s-z_l)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) &= (2k+1)\pi \\
s &= p_q+\delta r e^{j\theta} \\
\sum_{l=1}^{m}\angle(p_q+\delta r e^{j\theta}-z_l)-\sum_{i=1}^{n}\angle(p_q+\delta r e^{j\theta}-p_i) &= (2k+1)\pi \\
\lim_{\delta r\to 0}\sum_{l=1}^{m}\angle(p_q+\delta r e^{j\theta}-z_l)-\sum_{i=1}^{n}\angle(p_q+\delta r e^{j\theta}-p_i) &= (2k+1)\pi \\
\sum_{l=1}^{m}\angle(p_q-z_l)-\sum_{p_q=p_i}\theta-\sum_{p_q\neq p_i}\angle(p_q-p_i) &= (2k+1)\pi
\end{aligned}
$$

<.11>

终止角

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m}\angle(s-z_l)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i) &= (2k+1)\pi \\
s &= z_q+\delta r e^{j\theta} \\
\sum_{l=1}^{m}\angle(z_q+\delta r e^{j\theta}-z_l)-\sum_{i=1}^{n}\angle(z_q+\delta r e^{j\theta}-p_i) &= (2k+1)\pi \\
\lim_{\delta r\to 0}\sum_{l=1}^{m}\angle(z_q+\delta r e^{j\theta}-z_l)-\sum_{i=1}^{n}\angle(z_q+\delta r e^{j\theta}-p_i) &= (2k+1)\pi \\
\sum_{z_q\neq z_l}\angle(z_q-z_l)+\sum_{z_q=z_l}\theta-\sum_{i=1}^{n}\angle(z_q-p_i) &= (2k+1)\pi
\end{aligned}
$$

<.12>

6 根轨迹的分离点与分离角

分离点与分离角

- 分离点: 两条或两条以上根轨迹分支在 S 平面上相交后又分开的点称为根轨迹的分离点。
- 分离角: 根轨迹进入分离点的切线方向与离开分离点的切线方向之间的夹角

<.13>

分离点计算

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{K^*M(s)}{N(s)} & & \\
D(s) &= N(s)+K^*M(s) & & \\
N(s) &= -K^*M(s) & \qquad D(s) &= 0 \\
N'(s) &= -K^*M'(s) & \qquad D'(s) &= 0 \\
\frac{N'(s)}{N(s)} &= \frac{M'(s)}{M(s)} & & \\
\frac{\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} &= \frac{\frac{d}{ds}\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)} & & \\
\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i} &= \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s-z_j} & &
\end{aligned}
$$

<.14>

分离角计算:

设 $K^* = K_0$ 时有重极点。可将原特征方程变换

$$
\begin{aligned}
D(s) &= N(s) + K^* M(S) \\
D(s) &= N(s) + (K' + K_0) M(S) \\
D(s) &= N(s) + K_0 M(S) + K' M(s) \\
D'(s) &= N'(s) + K' M(s)
\end{aligned}
$$

新系统 $\frac{M(s)}{N'(s)}$ 的开环极点（N'(S)=0 的根）与 $K^* = K_0$ 时原系统闭环特征方程的根相同。可得：

- 原系统的分离点等于新系统的起始点
- 分离角等于 180° 根轨迹与 0 度根轨迹起始角之差
  - 180° 根轨迹起始角：θ_1
  - 0 度根轨迹起始角：θ_2
  - 其它零（极）点到分离点的辐角之和（差）：θ_2

$$
\begin{aligned}
L\theta_1 &= \theta_0 + (2k_1 + 1)\pi \\
L\theta_2 &= \theta_0 + 2k_2\pi \\
L\Delta\theta &= (2(k_1 - k_2) + 1)\pi \\
\Delta\theta &= \frac{(2k+1)\pi}{L}
\end{aligned}
$$

<.15>

7 根轨迹与虚轴的交点

根轨迹与虚轴的交点

$$
\begin{aligned}
1 + G(s)H(s) &= 0 \\
s &= j\omega \\
1 + G(j\omega)H(j\omega) &= 0
\end{aligned}
$$

<.16>

8 根之和 $(n-1>m)$

根之和 $(n-1>m)$

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K^* \prod_{j=1}^{m}(s-z_j) &= 0 \\
\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) &= s^n + \sum_{i=1}^{n}(-p_i)s^{n-1} + \cdots \\
\prod_{j=1}^{m}(s-z_j) &= s^m + \sum_{j=1}^{m}(-z_j)s^{m-1} + \cdots \\
\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K^* \prod_{j=1}^{m}(s-z_j) &= s^n + \sum_{i=1}^{n}(-p_i)s^{n-1} + \cdots
\end{aligned}
$$

<.17>

根之和 $(n-1>m)$

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K^*\prod_{j=1}^{m}(s-z_j) &= s^n+\sum_{i=1}^{n}(-p_i)s^{n-1}+\cdots \\
\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K^*\prod_{j=1}^{m}(s-z_j) &= \prod_{i=1}^{n}(s-s_i) \\
\prod_{i=1}^{n}(s-s_i) &= s^n+\sum_{i=1}^{n}(-s_i)s^{n-1}+\cdots \\
\sum_{i=1}^{n}(-p_i)s^{n-1} &= \sum_{i=1}^{n}(-s_i)s^{n-1} \\
\sum_{i=1}^{n}(-p_i) &= \sum_{i=1}^{n}(-s_i) \\
\sum_{i=1}^{n}p_i &= \sum_{i=1}^{n}s_i
\end{aligned}
$$

<.18>