

线性离散系统分析

Z 变换

Outline

① Z 变换

② Z 反变换

Topic

1 Z 变换

2 Z 反变换

Z 变换定义

- 采样信号 $e^*(t)$ 的 Laplace 变换

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nsT}$$

- 令 $Z = e^{sT}$, 则

$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$

- 得:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)Z^{-n}$$

- 记作

$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换定义

- 采样信号 $e^*(t)$ 的 Laplace 变换

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nsT}$$

- 令 $Z = e^{sT}$, 则

$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$

- 得:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)Z^{-n}$$

- 记作

$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换定义

- 采样信号 $e^*(t)$ 的 Laplace 变换

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nsT}$$

- 令 $Z = e^{sT}$, 则

$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$

- 得:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) Z^{-n}$$

- 记作

$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换计算

- 级数求和法
 - 按照 Z 变换的定义求解
- 部分分式法:
 - 先求出 $e(t)$ 的 Laplace 变换 $E(s)$, 将其展开成部分分式之和, 使每部分对应的 Z 变换是已知的.

级数求和法示例: $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

● 解:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ e(nT) &= 1 \\ E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

● $1(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 对应的 Z 变换相同.

级数求和法示例: $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

● 解:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ e(nT) &= 1 \\ E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

● $1(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 对应的 Z 变换相同.

级数求和法示例: $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

● 解:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ e(nT) &= 1 \\ E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

● $1(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 对应的 Z 变换相同.

级数求和法示例: 单位阶跃信号 $1(t)$

● 解:

$$\begin{aligned}e(nT) &= 1, \\E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\&= \frac{1}{z - 1}\end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

级数求和法示例: 单位阶跃信号 $1(t)$

● 解:

$$\begin{aligned}e(nT) &= 1, \\E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\&= \frac{1}{z - 1}\end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

部分分式法示例: $E(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

● 解:

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$e(t) = 1 - e^{-at}$$

$$E(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}$$

● Z 变换表:

$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$

部分分式法示例: $E(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

● 解:

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$e(t) = 1 - e^{-at}$$

$$E(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}$$

● Z 变换表:

$\delta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$1(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
t	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$

部分分式法示例: $E(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

● 解:

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$e(t) = 1 - e^{-at}$$

$$E(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}$$

● Z 变换表:

$\delta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$1(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
t	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t + kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$.
($x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T)$)

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t + kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at} e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$.
($x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T)$)

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t + kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at} e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$.
($x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T)$)

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t + kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at} e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$.
($x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T)$)

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t + kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at} e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$.
($x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T)$)

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t + kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at} e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$.
($x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T)$)

Topic

1 Z 变换

2 Z 反变换

Z 反变换

$$e(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[E(z)]$$

- 幂级数展开法
- 部分分式法
 - 展开成部分分式后查表
- 反演积分法

幂级数展开法

$$\begin{aligned}E(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \\&= c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta(t - nT) \\e(nT) &= c_n\end{aligned}$$

反演积分法

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} \\ &= e(0) + e(T)z^{-1} + \cdots + e(nT)z^{-n} + \cdots \\ E(z)z^{n-1} &= e(0)z^{n-1} + e(T)z^{n-2} + \cdots + e(nT)z^{-1} + \cdots \\ e(nT) &= \text{Res}(E(z)z^{n-1}) \end{aligned}$$

反演积分法示例: $E(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$ 求 $e(nT)$

● 解:

$$\begin{aligned} E(z)z^{n-1} &= \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\ Res_1 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\ &= 2 \\ Res_2 &= \lim_{z \rightarrow 0.5} \frac{(z-0.5)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\ &= -0.5^n \\ e(nT) &= Res_1 + Res_2 \\ &= 2 - 0.5^n \end{aligned}$$

反演积分法示例: $E(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$ 求 $e(nT)$

● 解:

$$\begin{aligned} E(z)z^{n-1} &= \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\ Res_1 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\ &= 2 \\ Res_2 &= \lim_{z \rightarrow 0.5} \frac{(z-0.5)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\ &= -0.5^n \\ e(nT) &= Res_1 + Res_2 \\ &= 2 - 0.5^n \end{aligned}$$