线性定常系统的经典辨识

邢超

<LTI.1>

1 经典辨识的基本概念

经典辨识方法定义

由上述三种经典输入信号来获取系统数学模型的方法。

- 正弦输入－频率响应
- 阶跃输入－阶跃响应
- 脉冲输入－脉冲响应

本课程重点：由脉冲输入信号来求取系统数学模型的方法。 <LTI.2>

经典辨识的内容、目的及方法

- 经典辨识内容及目的：
  - 如何获取系统的脉冲响应？
  - 如何从系统的脉冲响应求取系统的传递函数和脉冲传递函数
- 解决方法：
  - 如何获取系统的脉冲响应,采用相关法；
  - 由脉冲响应求取系统的参数模型，采用纯解析法。

<LTI.3>

相关法求取系统的脉冲响应:系统模型

设SISO系统脉冲响应函数$g(\tau)$。依据线性系统的卷积定理有：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)x(t-\sigma)d\sigma$$

设$x(t)$为均值0的平稳随机过程，则$y(t)$亦为均值0的平稳随机过程。任取时刻t_2，当$t=t_2$时，上式为

$$y(t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)x(t_2-\sigma)d\sigma$$

用另一时刻的输入$x(t_1)$乘以上式，得：

$$x(t_1)y(t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)x(t_1)x(t_2-\sigma)d\sigma$$

<LTI.4>

相关法求取系统的脉冲响应:维纳-霍夫方程

两边取数学期望，得：

$$E[x(t_1)y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)E[x(t_1)x(t_2-\sigma)]d\sigma$$

可得维纳-霍夫方程：

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau)]d\sigma$$

其中：$\tau = t_2 - t_1$ 若方程中R_{xy}及R_x已知，则解上述方程可得$g(\tau)$ <LTI.5>

相关法求取系统的脉冲响应:维纳-霍夫方程求解

当$x(t)$为白噪声信号时，有$R_x(\tau) = K\delta(\tau)$，以及
$R_x(\tau-\sigma) = K\delta(\tau-\sigma)$

代入维纳霍夫方程后，可得

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)K\delta(\tau-\sigma)d\sigma \\ &= Kg(\tau) \\ g(\tau) &= \frac{R_{xy}(\tau)}{K} \end{aligned}$$

$g(\tau)$的求解，只需计算R_{xy}。若观测时间T_m充分大，则

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} x(t)y(t+\tau)dt \\ R_{xy}(k) &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i y_{i+k} \end{aligned}$$

其中x_i, y_{i+k}是记录的数据序列。 <LTI.6>

2 辨识常用输入信号

白噪声过程

如果随机过程$w(t)$的均值为0，自相关函数为：

$$R_w(t) = \sigma^2\delta(t)$$

则称该过程为白噪声过程。其中：

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

<LTI.7>

工程中的问题

- 脉冲输入得脉冲响应，工程上不可实现
- 白噪声在工程上人为不可产生；

因此，必须用工程中可重复产生的输入信号来辨识系统的脉冲响应序列。

- 伪随机噪声；
- 离散二位式白噪声序列；
- 伪随机离散二位式序列；(M序列)
- 二电平M序列；

<LTI.8>

伪随机噪声辨识脉冲响应

伪随机噪声由白噪声截断而来，是一个周期性信号。

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_x(\tau+T) \\ &= \delta(nT+\tau) \end{aligned}$$

其中$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ <LTI.9>

伪随机噪声辨识脉冲响应:计算R_{xy}

伪随机噪声信号作为输入信号，则有：

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma \\ &= \int_0^T g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma + \int_T^{2T} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma + \cdots \\ &= \int_0^T g(\sigma)K\delta(\tau-\sigma)d\sigma + \int_T^{2T} g(\sigma)K\delta(T+\tau-\sigma)d\sigma \\ &\quad +\cdots \\ &= Kg(\tau)+Kg(\tau+T)+Kg(\tau+2T)+\cdots \end{aligned}$$

<LTI.10>

伪随机噪声辨识脉冲响应:计算$g(\tau)$

选择适当的截断周期，使$g(\tau)$在$\tau<T$时已衰减至零。则：

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= Kg(\tau)+0 \\ &= Kg(\tau) \\ g(\tau) &= R_{xy}(\tau)/K \end{aligned}$$

得到了与白噪声作为输入的相同辨识结果。

<LTI.11>

计算$R_x(\tau),R_{xy}(\tau)$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT}\int_0^{nT} x(t)x(t+\tau)dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{nT}\int_0^{T} x(t)x(t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \\ R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau-\sigma)dt\right]d\sigma \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)x(t+\tau-\sigma)d\sigma\right]dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \end{aligned}$$

可见计算$R_{xy}(\tau)$只需计算一个周期即可。

<LTI.12>

离散白噪声

连续白噪声等间隔采样而成的随机序列。具有连续白噪声相同的统计特性，即

$$E(x_i x_j) = \begin{cases} \sigma^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

其中$i, j = 1, 2, 3, \cdots$

<LTI.13>

离散二位式白噪声

离散随机变量取值只有两种数值。序列中元素一般取为1和-1

例：某离散二位式噪声

1111-1-1-11-1-111-11-1・・・

主要性质:

- -1和1出现的次数相等;
- 总游程(状态“1”和“-1”连续出现的段叫游程)数为(N+1)/2,且-1和1出现的游程相等，最多相差1个。(N为序列长度)
- 其自相关函数为

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$$

<LTI.14>

M序列的特点

实际工程上，常用M序列来代替白噪声输入信号。来辨识系统的脉冲响应序列。M序列的特点：

- 伪随机二位式序列;
- M序列的数字特征与白噪声相似;
- 确定性序列;
- 工程上可以方便地重复产生。

<LTI.15>

M序列的产生方法及其性质

M序列：将离散二位式噪声序列截断后，构造出的伪随机序列。显著特点：

- M序列是一个确定性序列,可重复产生;
- M序列具有与离散二位式白噪声相似的性质。

产生方法：工程上产生M序列采用移位寄存器方法。

$$\begin{aligned} x_0(k+1) &= a_0 x_0(k) \oplus a_1 x_1(k) \oplus \cdots \oplus a_n x_n(k) \\ x_1(k+1) &= x_0(k) \\ &\cdots \\ x_n(k+1) &= x_{n-1}(k) \end{aligned}$$

产生伪随机序列条件：各寄存器初始状态不全为零。

<LTI.16>

M序列的产生方法及其性质

例：

$$
\begin{tikzcd}
x_0 \arrow[r, "z^{-1}"] & x_1 \arrow[r, "z^{-1}"] & x_2 \arrow[r, "z^{-1}"] \arrow[ll, bend left, "z^{-1}"] & x_3 \arrow[lll, bend left, "z^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
x_0(k+1) &= x_2(k) \oplus x_3(k) \\
x_1(k+1) &= x_0(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k) \\
x_3(k+1) &= x_2(k)
\end{aligned}
$$

<LTI.17>

M序列的产生方法及其性质

取初始状态全为1，则各寄存器状态为

```
x0: 100010011010111
x1: 110001001101011
x2: 111000100110101
x3: 111100010011010
```

输出序列为：111100010011010 (长度N=15)

<LTI.18>

M序列的产生方法及其性质

若寄存器个数为n，则有

- 周期长度$N = 2^n - 1$;
- 总游程=2^{n-1} ;
- “0”出现次数为(N-1)/2, “1”出现次数为(N+1)/2.相差1次。

<LTI.19>

二电平M序列及其性质

- 将M序列转变成电平信号，
  - “0”取为a，“1”取为-a。
  - 移位脉冲周期为Δ，则该二电平M序列的周期为$N\Delta$。
- 数字特征：在一个周期$N\Delta$内，其均值m_x为

$$
\begin{aligned}
m_x &= \frac{1}{N\Delta}\left(\frac{N-1}{2}a\Delta - \frac{N+1}{2}a\Delta\right) = -\frac{a}{N} \\
\lim_{N\to\infty} m_x &= 0
\end{aligned}
$$

<LTI.20>

自相关函数$R_x(\tau)$

$$
R_x\tau = \begin{cases} \dfrac{-a^2}{N} & (kN+1)\Delta<\tau<((k+1)N-1)\Delta \\ a^2\left[1 - \dfrac{(N+1)|\tau|}{N\Delta}\right] & (kN-1)\Delta<\tau<(kN+1)\Delta \end{cases}
$$

<LTI.21>

三角脉冲分量与直流分量

$$R_x(\tau)=R_x^1(\tau)+R_x^2(\tau)$$

其中：

$R_x^2(\tau)=\frac{-a^2}{N}$ 为直流分量
$R_x^1(\tau)=R_x(\tau)-R_x^2(\tau)$ 为三角脉冲分量

当Δ很小时，$R_x^1(\tau)$可认为是脉冲函数，则有 <LTI.22>

$$\begin{aligned}R_x^1(\tau) &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta\delta(\tau)\\ R_x(\tau) &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta\delta(\tau)-\frac{a^2}{N}\end{aligned}$$

因此，M序列具有白噪声序列的数字特性。

<LTI.23>

3 M序列辨识系统的脉冲响应

二电平M序列辨识系统的脉冲序列$g(\tau)$:作图法

二电平M序列辨识$g(\tau)$有两种方法：作图法和公式法。首先介绍作图法：

$$\begin{aligned}R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma\\ &= \int_{0^+}^{N\Delta^-}g(\sigma)R_x(\tau-\sigma)d\sigma\\ &= \int_{0^+}^{N\Delta^-}\left[\frac{N+1}{N}a^2\Delta\delta(\tau-\sigma)-\frac{a^2}{N}\right]g(\sigma)d\sigma\\ &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta g(\tau)-\int_{0^+}^{N\Delta^-}g(\sigma)d\sigma\\ &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta g(\tau)-A\end{aligned}$$

其中：

$$A=\int_{0^+}^{N\Delta^-}g(\sigma)d\sigma$$

$R_{xy}(\tau)$可根据输入输出数据序列计算： <LTI.24>

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}x(i)y(i+\tau)$$

只需将$R_{xy}(\tau)$曲线向上平移A，即可得$g(\tau)$。

<LTI.25>

公式法求$g(\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta g(\tau) - \frac{a^2}{N}\int_0^{N\Delta} g(\sigma)d\sigma \\
\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\tau)d\tau &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta\int_0^{N\Delta} g(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{a^2}{N}N\Delta\int_0^{N\Delta} g(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{\Delta a^2}{N}\int_0^{N\Delta} g(\tau)d\tau \\
R_{xy}(\tau) &= \frac{N+1}{N}a^2\Delta g(\tau) - \frac{1}{\Delta}\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\sigma)d\sigma \\
g(\tau) &= \frac{N}{(N+1)\Delta a^2}\left[R_{xy}(\tau) + \frac{1}{\Delta}\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\sigma)d\sigma\right]
\end{aligned}
$$

<LTI.26>

公式法求$g(\tau)$公式组

$$
\begin{aligned}
g(\tau) &= \frac{N}{(N+1)\Delta a^2}R_{xy}(\tau) + g_0 \\
g_0 &= \frac{N}{(N+1)\Delta^2 a^2}\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\tau)d\tau \\
\int_0^{N\Delta} R_{xy}(\tau)d\tau &\approx \Delta\sum_{i=0}^{N-1} R_{xy}(i) \\
R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(i+\tau)
\end{aligned}
$$

<LTI.27>

$g(\tau)$的矩阵表示

离散维纳-霍夫方程：

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(i\Delta) &= \sum_{k=0}^{N-1} \Delta g(k\Delta)R(i\Delta - k\Delta) \\
R_{xy} &= Rg\Delta \\
g &= \frac{R^{-1}R_{xy}}{\Delta}
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
g &= [g(0), g(1), \cdots, g(N-1)]^T \\
R_{xy} &= [R_{xy}(0), R_{xy}(1), \cdots, R_{xy}(N-1)]^T \\
R &= \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(-1) & \cdots & R_x(-N+1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x(-N+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

<LTI.28>

$g(\tau)$ 的矩阵表示:计算R^{-1}

$$\begin{aligned} R_x(k) &= \begin{cases} a^2 & k=0 \\ -\frac{a^2}{N} & 1 \le k \le N-1 \end{cases} \\ R &= a^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & 1 & \cdots & -\frac{1}{N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ R^{-1} &= \frac{N}{a^2(N+1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<LTI.29>

$g(\tau)$的矩阵表示:计算R_{xy}

$$\begin{aligned} R_{xy} &= [R_{xy}(0), R_{xy}(1), \cdots, R_{xy}(N-1)]^T \\ &= \frac{1}{rN} XY \\ X &= \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(rN-1) \\ x(-1) & x(0) & \cdots & x(rN-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(-N+1) & x(-N+2) & \cdots & x(rN-N) \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(rN-1) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

<LTI.30>

$g(\tau)$的递推算法(在线辨识)

递推算法：假设我们得到了$(m-1)$组观测数据时的辨识结果g_{m-1}，现在又得到了一组新的观测值(x_m, y_m)。现在讨论，就g_{m-1}与(x_m, y_m)数据来如何得到新的$g(\tau)$估计值g_m问题。

一般递推算法的计算公式形式如下：

$$g_m = K g_{m-1} + \tilde{g}_m$$

其中，$\tilde{g}_m$为从新得到的数据添加的信息。

<LTI.31>

R_{xy}递推公式

$$\begin{aligned} R_{xy}(i,m) &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} y(k)x(k-i) \\ &= \frac{1}{m+1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} y(k)x(k-i) + y(m)x(m-i) \right] \\ &= \frac{1}{m+1} [mR_{xy}(i,m-1) + y(m)x(m-i)] \\ R_{xy}(m) &= \frac{1}{m+1} [mR_{xy}(m-1) + y(m)X(m)] \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned} R_{xy}(m) &= [R_{xy}(0), R_{xy}(1), \cdots, R_{xy}(N-1)]^T \\ X(m) &= [x(m), x(m-1), \cdots, x(m-N+1)]^T \end{aligned}$$

<LTI.32>

$g(\tau)$递推公式

$$\begin{aligned} g_m &= \frac{R^{-1}R_{xy}(m)}{\Delta} \\ &= \frac{R^{-1}}{\Delta}\frac{1}{m+1}[mR_{xy}(m-1)+y(m)X(m)] \\ &= \frac{mR^{-1}R_{xy}(m-1)}{(m+1)\Delta}+\frac{R^{-1}}{(m+1)\Delta}y(m)X(m) \\ &= \frac{m}{m+1}g_{m-1}+\frac{R^{-1}}{(m+1)\Delta}y(m)X(m) \end{aligned}$$

<LTI.33>

4 脉冲响应序列求系统G(s)和G(z)

脉冲响应序列求G(z)

G(z)称为系统的脉冲传递函数，是系统的离散数学模型。

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} \\ &= \frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}} \end{aligned}$$

可得：

$$\begin{aligned} c_t+a_1c_{t-1}+\cdots+a_nc_{t-n} = b_0r_t+\cdots+b_nr_{t-n} \\ g(t)+a_1g(t-1)+\cdots+a_ng(t-n) = b_0\delta(t)+\cdots+b_n\delta(t-n) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(n) \end{bmatrix}$$

<LTI.34>

$$\begin{bmatrix} g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \\ g(2) & g(3) & \cdots & g(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(n) & g(n+1) & \cdots & g(2n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(n+1) \\ -g(n+2) \\ \vdots \\ -g(2n) \end{bmatrix}$$

<LTI.35>

脉冲响应序列求G(s)

G(s)称为系统的传递函数，是系统的连续数学模型。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

若系统具有n个两两互不相等的闭环极点$s_1,s_2,\cdots,s_n$. 则上式可分部因式为：

$$G(s)=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}$$

任务：已知$\{g(i)\}$及n,求$G(s)$中系数c_i和s_i.

<LTI.36>

求a_i

系统的脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_nz^n}{1+a_1z+\cdots+a_nz^n}$$

取$r(t)=\delta(t)$,则$c(t)=g(t)$。代入上式，写成差分方程为

$$g(k)+a_1g(k+1)+\cdots+a_ng(k+n)=0$$

可得：

$$\begin{aligned}a_1g(k+1)+\cdots+a_ng(k+n) &= -g(k)\\ &\cdots\\ a_1g(k+n)+\cdots+a_ng(k+2n-1) &= -g(k+n-1)\end{aligned}$$

解上述n元一次方程组，可得a_i.

<LTI.37>

求s_i

由$G(s)$进行拉氏反变换可得:

$$g(t)=c_1e^{s_1t}+c_2e^{s_2t}+...+c_ne^{s_nt}$$

所以：

$$\begin{aligned}g(t) &= c_1e^{s_1(t)}+c_2e^{s_2(t)}+...+c_ne^{s_n(t)}\\ g(t+\Delta) &= c_1e^{s_1(t+\Delta)}+c_2e^{s_2(t+\Delta)}+...+c_ne^{s_n(t+\Delta)}\\ \cdots &\quad \cdots\\ g(t+n\Delta) &= c_1e^{s_1(t+n\Delta)}+c_2e^{s_2(t+n\Delta)}+...+c_ne^{s_n(t+n\Delta)}\\ 0 &= c_1e^{s_1t}[1+a_1e^{s_1\Delta}+\cdots+a_ne^{s_1n\Delta}]\\ &\quad +c_2e^{s_2t}[1+a_1e^{s_2\Delta}+\cdots+a_ne^{s_2n\Delta}]+\cdots\\ &\quad +c_ne^{s_nt}[1+a_1e^{s_n\Delta}+\cdots+a_ne^{s_nn\Delta}]\end{aligned}$$

可得$e^{s_i\Delta}$需满足的一元n次方程：

$$1+a_1e^{s_i\Delta}+a_2[e^{s_i\Delta}]^2+\cdots+a_n[e^{s_i\Delta}]^n=0$$

其中$i=1,2,\cdots,n$

<LTI.38>

求c_i

$$g(t)=c_1e^{s_1t}+c_2e^{s_2t}+...+c_ne^{s_nt}$$

得：

$$\begin{aligned}g(0) &= c_1+c_2+\cdots c_n\\ g(1) &= c_1e^{s_1\Delta}+c_2e^{s_2\Delta}+\cdots+c_ne^{s_n\Delta}\\ &\cdots\\ g(n-1) &= c_1e^{s_1(n-1)\Delta}+c_2e^{s_2(n-1)\Delta}+\cdots+c_ne^{s_n(n-1)\Delta}\end{aligned}$$

<LTI.39>

求解公式

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} g(k+1) & \cdots & g(k+n) \\ g(k+2) & \cdots & g(k+n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g(k+n) & \cdots & g(k+2n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -g(k) \\ -g(k+1) \\ \vdots \\ -g(k+n-1) \end{bmatrix} \\
1+a_1x+\cdots a_nx^n &= 0 \\
s_i &= \frac{\ln x_i}{\Delta} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(n-1) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

<LTI.40>