

补充例子

Outline

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

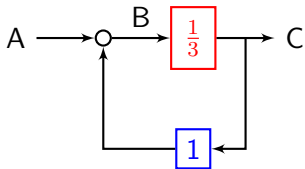
Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

反馈与方程（静态）



$$C = \frac{B}{3} \quad (1)$$

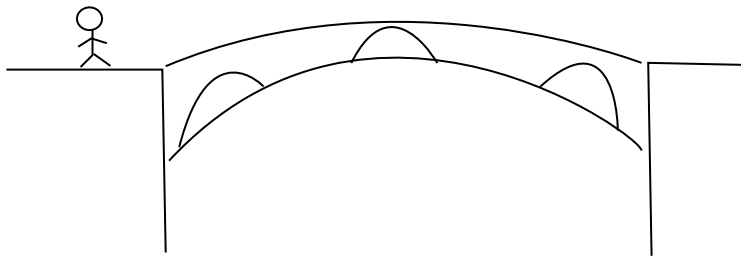
$$A + C = B \quad (2)$$

$$A = 10 \quad (3)$$

$$C = ? \quad (4)$$

笑话：过桥

路人甲要过桥，发现桥很长，问桥边路人乙桥长多少，乙说：50米。甲走上桥后不一会儿，乙追了上来，说，桥长100米，你要是过了50米就转弯，就掉下去了。

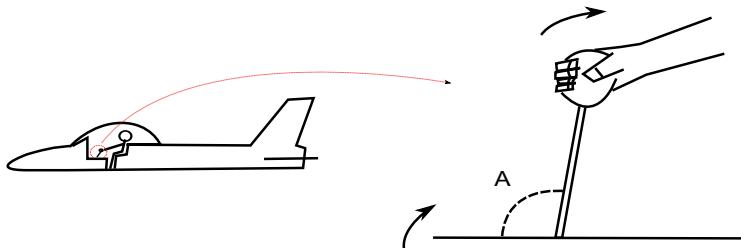


开环控制：笑话：不听话的儿子

开环控制：声东击西

操纵杆

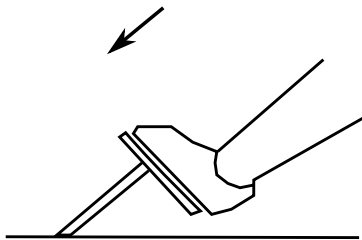
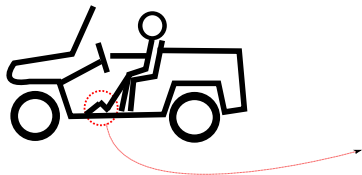
飞行员拉动操纵杆，飞机机头上扬，结果减弱了拉动操纵杆的效果，即：拉杆 \rightarrow A 增大 \rightarrow 机头上扬 \rightarrow A 减小



油门、刹车

司机踩刹车，汽车减速，司机因为惯性会有前冲的趋势，易导致踩刹车的力度变大。

司机踩油门，汽车加速，司机因为惯性会有后仰的趋势，易导致踩油门的力度变小。



Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

几个例子

$$c = u$$

$$c = u + 1$$

$$c = 1$$

$$c = 0$$

$$c = \sqrt[3]{u} \quad u = x^3$$

$$c + c^2 = u \quad u = r + c^2$$

定常/时变 $r_\tau(t) = r(t - \tau) \rightarrow c_\tau(t) \begin{cases} = c(t - \tau) \\ \neq c(t - \tau) \end{cases}$

积分限 $c(t) = \int_{-\infty}^t r(x) dx$

区间 $c(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 6 \\ r(t) & t > 6 \end{cases}$

$$\begin{aligned} c_\tau(t) &= \int_{-\infty}^t r_\tau(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^t r(x - \tau) dx \\ &= \int_{-\infty}^t r(x - \tau) d(x - \tau) \\ &= \int_{-\infty}^{t-\tau} r(z) dz \quad (z = x - \tau) \\ &= c(t - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_\tau(t) &= \begin{cases} 0 & t \leq 6 \\ r_\tau(t) & t > 6 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t \leq 6 \\ r(t - \tau) & t > 6 \end{cases} \\ c(t - \tau) &= \begin{cases} 0 & t - \tau \leq 6 \\ r(t - \tau) & t - \tau > 6 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t \leq 6 + \tau \\ r(t - \tau) & t > 6 + \tau \end{cases} \end{aligned}$$

$x' + 1 = u$ 线性化

方法 1

变量代换，为方程右边与输出变量无关的部分指定另一个变量。

$$x' + 1 = u$$

$$w = u - 1$$

$$x' = w$$

方法 2

将方程右边与输出变量无关的部分用泰勒级数展开。

$$x' = u - 1$$

$$u - 1 = (u - 1)|_{u=1} + \Delta u$$

$$x' = \Delta u$$

$cc' = u$ 线性化

在 $c_0 = 1, c'_0 = 1$ 处线性化

$$(1 + \Delta c)(1 + \Delta c') = u$$

$$1 + \Delta c + \Delta c' + \Delta c \Delta c' = u$$

$$\Delta c + \Delta c' = \Delta u$$

$\Delta u = 0, u = 1$ 时, $cc' = 1$ 。接着随着 c 增大, c' 会减小。

变量代换

$$c = t + \Delta c, c' = 1 + \Delta c'$$

$$(t + \Delta c)(1 + \Delta c') = u$$

$$t + \Delta c + t\Delta c' + \Delta c \Delta c' = u$$

$$\Delta c + t\Delta c' + \Delta c \Delta c' = u - t$$

$$\Delta c + t\Delta c' = \Delta u$$

$\Delta u = 0, u = t$ 时, $cc' = t$ 。接着随着 c 增大, c' 不变。

Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

稳定性与平衡点

$$\dot{x}(t) - x(t) = r(t)$$

$$r = 1$$

$$x(0) = -1$$

$$x(t) = -1$$

- ▶ 通解: $x_1(t) = a_0 e^t$
- ▶ 特解: $x_2(t) = -1$
- ▶ $x_1(0) + x_2(0) = x(0)$ 得 $a_0 = 0$

信号、系统、零极点相消

考虑两种情况：

▶ $G(s) = \frac{s-1}{s+1}, R(s) = \frac{1}{s-1}$

▶ $G(s) = \frac{1}{s-1}, R(s) = \frac{s-1}{s+1}$

系统初始值为 0 时，可得： $C(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{s+1}$ 当系统存在初始值 y_0 时，则分别变为

▶ $C(s) = \frac{y_0}{s+1} + \frac{1}{s+1}$

▶ $C(s) = \frac{y_0}{s-1} + \frac{1}{s+1}$

终值定理、稳态响应、直流分量

终值定理计算的是瞬态响应消失后稳态响应中的直流分量，可以结合 Fourier 变换分析。

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)R(s)$$
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} C(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)R(j\omega)$$

从终值定理的证明过程 (用到微分性质 $\mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0)$, 两边对 $s \rightarrow 0$ 取极限) 也可以看出, 对于 $f(t) = e^{\lambda t}$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda}{s - \lambda} = \begin{cases} -f(0) & \lambda \neq 0 \\ 0 & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \begin{cases} 0 & \lambda \neq 0 \\ f(0) & \lambda = 0 \end{cases}$$

即: 对于 $e^{\lambda t}$, ($\lambda \neq 0$) 的分量, 无论 $\lambda > 0, \lambda < 0$ 利用终值定理计算时均为 0。

正反馈与离散系统稳定性

$$\begin{aligned}x(n+1) - kx(n) &= r(n) \\ r(n) &= 0 \\ x(n) &= x(0)k^n\end{aligned}$$

正反馈与延迟系统稳定性

$$x(t + a) - kx(t) = r(t)$$

$$r(t) = 0$$

$$x(na) = x(0)k^n$$

Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

卷积与脉冲响应

► 卷积

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- 脉冲响应设线性时不变 (Linear Time Invariant, LTI) 系统脉冲响应为 $h(t)$:

$$h(t) = LTI[\delta(t)]$$

$$h(t-\tau) = LTI[\delta(t-\tau)]$$

卷积与系统响应

设输入信号为 $x(t)$ 时，输出为 $y(t)$ ：

$$\begin{aligned}y(t) &= LTI[x(t)] \\&= LTI\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} LTI[x(\tau)\delta(t-\tau)]d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)LTI[\delta(t-\tau)]d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\&= x(t) * h(t)\end{aligned}$$

Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

阶跃输入

$$m\dot{v} = f$$

$$m\dot{v} = r - v$$

$$m\dot{v} = 1 - v$$

$$m\frac{d}{dt}(v - 1) = 1 - v$$

$$m\frac{d}{dt}(1 - v) = -(1 - v)$$

$$m\dot{E} = -E$$

$$E = e^{-\frac{t}{m}}$$

斜坡输入

$$m\dot{v} = f$$

$$m\dot{v} = r - v$$

$$m\dot{v} = t - v$$

$$m\frac{d}{dt}(v - t) + m = t - v$$

$$m\frac{d}{dt}(t - v) = -(t - v) + m$$

$$m\dot{E} = -E + m$$

$$E = (1 - m)e^{-\frac{t}{m}} + m$$

Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

Fourier 级数 (三角形式)

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

其中：

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin(n\omega t) dt$$

Fourier 级数 (复指数形式)

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}$$

Fourier 积分

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = f(t)$$

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} \Delta\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

Fourier 变换定义

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$$

常用函数的 Fourier 变换

- ▶ 单位脉冲函数 $f(t) = \delta(t) \rightarrow F(j\omega) = 1$
- ▶ 阶跃函数 $f(t) = A, (t \geq 0) \rightarrow F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
- ▶ 指数函数 $f(t) = e^{at}, (t \geq 0) \rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{j\omega - a}$
- ▶ 正弦函数 $f(t) = \sin(\omega_0 t) \rightarrow F(j\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

性质

- ▶ 线性: $f(t) = af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow F(j\omega) = aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$, 其中 a, b 为常数
- ▶ 时移: $g(t) = f(t \pm a) \rightarrow G(j\omega) = F(j\omega)e^{\pm j\omega a}$
- ▶ 频移: $\mathcal{F}[e^{\pm j\omega_0 t} f(t)] = F(j(\omega \mp \omega_0))$
- ▶ 时域微分: $g(t) = f(t)' \rightarrow G(j\omega) = j\omega F(j\omega)$
- ▶ 频域微分: $\mathcal{F}[tf(t)] = j\frac{dF(j\omega)}{d\omega}$
- ▶ 时域积分: $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \rightarrow G(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
- ▶ 卷积: $\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{F}[f_1(t)]\mathcal{F}[f_2(t)]$

Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

基本信号 $e^{j\omega t}$ 通过线性系统

$$\begin{aligned}f(t) &= e^{j\omega t}, \quad -\infty < t < \infty \\H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \\&= |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \\y_f(t) &= e^{j\omega t} * h(t) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\&= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\&= H(j\omega) e^{j\omega t} \\&= |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \phi(\omega))}\end{aligned}$$

正弦（余弦）信号通过线性系统

$$\begin{aligned}f(t) &= A \cos \omega t, & -\infty < t < \infty \\&= \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\y_f(t) &= \frac{A}{2}(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}) \\&= \frac{A}{2}|H(j\omega)|(e^{j\omega t + \phi(\omega)} + e^{-j\omega t - \phi(\omega)}) \\&= A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \phi(\omega))\end{aligned}$$

非正弦周期信号通过线性系统

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$= |F_n| e^{j\theta(n\omega)}$$

$$y_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega) e^{jn\omega t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n| |H(jn\omega)| e^{jn\omega t + \phi(n\omega) + \theta(n\omega)}$$

$$= F_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2|F_n| |H(jn\omega)| \cos(jn\omega t + \phi(n\omega) + \theta(n\omega))$$

系统对非周期信号的响应

$$\begin{aligned}y(t) &= f(t) * h(t) \\Y(j\omega) &= F(j\omega)H(j\omega) \\y(t) &= \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] \\H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}\end{aligned}$$

利用 Fourier 变换计算零状态响应

某线性时不变系统的脉冲响应 $h(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})U(t)$ ，求输入信号 $f(t) = e^{-t}U(t)$ 时系统的零状态响应。其中 $U(t)$ 为单位阶跃函数。

解：

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 3} = \frac{1}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

$$Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

$$= \frac{1/2}{j\omega + 1} + \frac{-1}{j\omega + 2} + \frac{1/2}{j\omega + 3}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)U(t)$$

Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

$C(n+2) - 6C(n+1) + 8C(n) = U(n)$ 零状态阶跃响应

部分分式分解方法有两种, 求和限不同, 但结果相同。

$$(z^2 - 6z + 8)C(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$C(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-4)}$$

$$C(z) = \frac{1}{3(z-1)} - \frac{1}{z-2} + \frac{2}{3(z-4)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3} z^{-n} - \frac{1}{2} 2^n z^{-n} + \frac{1}{6} 4^n z^{-n} \right]$$

$$C(z) = \frac{z}{3(z-1)} - \frac{z}{2(z-2)} + \frac{z}{6(z-4)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3} z^{-n} - \frac{1}{2} 2^n z^{-n} + \frac{1}{6} 4^n z^{-n} \right]$$

$C_{n+2} + 3C_{n+1} + 2C_n = 0$ 求 $C(0) = 0, C(1) = 1$ 时的响应

部分分式分解有两种，可以看到，第一种分解计算时，如果 n 的取值范围没有限定好，会出现错误。（如：求和时设定 n 从 1 开始。）

$$z^2 C(z) - z^2 + 3(zC(z) - z) + 2C(z) = 0$$

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{2}{z+2} - \frac{2}{z+1} + 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [-(-2)^n z^{-n}] + \sum_{n=1}^{\infty} [2(-1)^n z^{-n}] + 1 \\ &= 1 + 0z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{2z}{z+1} - \frac{z}{z+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n z^{-n}] - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n z^{-n} \end{aligned}$$

$$C(n) = 2(-1)^n - (-2)^n$$

两种部分分式分解之间的关系

从上面的例子可以看出，两种部分分式都可以求解出差分方程的解，但一个能够直接利用 z 反变换求解出时域函数，另一个要用到 z 变换的性质 $\mathcal{Z}[e(t-T)] = E(z)z^{-1}$ 。因此，解的范围不同，一个是 $n \geq 0$ ，一个是 $n \geq 1$ 。这两个解中包含共同的项（对应于差分方程的特征根），它们在 $n \leq 1$ 时是一致的。由于第一种方法的解从 $n=1$ 开始求和，因此它们只是在 $n=0$ 时相差一个常数。而分析第二种方法的解，可以从其它部分推导出来。对于 n 阶差分方程，知道通解、特解与初始条件即可惟一确定其解。而初始条件可以替换为任意 n 个时刻的值。当两个函数满足通解与特解条件，并且在两个时刻的值相等时，可以断定这两个函数相等，都是方程的解。

Topic

关于反馈

定常/时变/线性/非线性

稳定性

卷积

误差

Fourier 变换

连续系统频域分析

部分分式分解求解差分方程

最少拍控制

最小拍

为使误差信号在有限拍内变为 0，设 $X(z)$ 为关于 z^{-1} 的有限多项式：

$$\frac{1}{1 + D(z)G(z)} \cdot \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} = A(z)X(z)$$

$$\frac{1}{1 + D(z)G(z)} = X(z)(1 - z^{-1})^m$$

$$D(z)G(z) = \frac{1}{X(z)(1 - z^{-1})^m} - 1$$

$$D(z) = \frac{1 - X(z)(1 - z^{-1})^m}{X(z)(1 - z^{-1})^m G(z)}$$

无纹波最少拍

为使误差信号在有限拍内变为 0，且控制器 $D(z)$ 的输出在有限拍内为常值，设 $X(z)$ 为关于 z^{-1} 的有限多项式， $Y(z)$ 为关于 z^{-1} 的有限多项式，或有一个极点 $z = 1$

$$\frac{1}{1 + D(z)G(z)} \cdot \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} = A(z)X(z)$$

$$\frac{D(z)}{1 + D(z)G(z)} \cdot \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} = A(z)Y(z)$$

$$D(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$(1 + \frac{Y(z)}{X(z)}G(z))(1 - z^{-1})^m = \frac{1}{X(z)}$$

$$(X(z) + Y(z)G(z))(1 - z^{-1})^m = 1$$

无纹波最少拍示例

$$G(z) = \frac{3.68z^{-1}(1 + 0.717z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.368z^{-1})}$$

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$X(z) = 1 + cz^{-1}$$

$$Y(z) = \frac{(1 - 0.368z^{-1})(a + bz^{-1})}{1 - z^{-1}}$$

$$b = -0.22435314655638$$

$$c = -0.59196923837781$$

$$a = 0.38261705478864$$

```
e:3.68*z*(1+0.717*z)*(a+b*z)+(1-c*z)*(1-z)^2;  
m:map(lambda([i],coeff((taylor(e,z,0,3)),z,i)),[1,2,3]);  
float(solve(m));
```