线性离散系统分析

离散系统数学模型

Outline

Topic

1. 差分方程
2. 脉冲传递函数
3. 开环系统的脉冲传递函数
4. 闭环系统的脉冲传递函数
5. 修正 Z 变换

差分方程模型

- n 阶后向差分方程

$$\begin{aligned} & c(k)+a_1c(k-1)+\cdots+a_nc(k-n) \\ = \ & b_0r(k)+b_1r(k-1)+\cdots+b_mr(k-m) \end{aligned}$$

即 k 时刻的输出 $c(k)$ 与 k 时刻前 n 个时刻输出及前 m 个输入，当前时刻输入有关.

- n 阶前向差分方程

$$\begin{aligned} & c(k+n)+a_1c(k+n-1)+\cdots+a_nc(k) \\ = \ & b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\cdots+b_mr(k) \end{aligned}$$

差分方程模型

- n 阶后向差分方程

$$
\begin{aligned}
& c(k)+a_1c(k-1)+\cdots+a_nc(k-n) \\
= \; & b_0r(k)+b_1r(k-1)+\cdots+b_mr(k-m)
\end{aligned}
$$

即 k 时刻的输出 $c(k)$ 与 k 时刻前 n 个时刻输出及前 m 个输入，当前时刻输入有关.

- n 阶前向差分方程

$$
\begin{aligned}
& c(k+n)+a_1c(k+n-1)+\cdots+a_nc(k) \\
= \; & b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\cdots+b_mr(k)
\end{aligned}
$$

差分方程模型

- n 阶后向差分方程

$$
\begin{aligned}
& c(k)+a_1c(k-1)+\cdots+a_nc(k-n) \\
= \quad & b_0r(k)+b_1r(k-1)+\cdots+b_mr(k-m)
\end{aligned}
$$

即 k 时刻的输出 $c(k)$ 与 k 时刻前 n 个时刻输出及前 m 个输入, 当前时刻输入有关.

- n 阶前向差分方程

$$
\begin{aligned}
& c(k+n)+a_1c(k+n-1)+\cdots+a_nc(k) \\
= \quad & b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\cdots+b_mr(k)
\end{aligned}
$$

差分方程解法: 迭代法

- 利用差分方程的递推关系, 逐步计算 $c(k)$ 的值
- 例: $c(k) = r(k) + 5c(k-1) - 6c(k-2)$ 输入 $r(k) = 1$，初始条件: $c(0) = 0, c(1) = 1$
- 解:

$$
\begin{aligned}
c(2) &= 6 \\
c(3) &= 25 \\
c(4) &= 90
\end{aligned}
$$

差分方程解法: 迭代法

- 利用差分方程的递推关系, 逐步计算 $c(k)$ 的值
- 例: $c(k) = r(k) + 5c(k-1) - 6c(k-2)$ 输入 $r(k) = 1$, 初始条件: $c(0) = 0, c(1) = 1$
- 解:

$$
\begin{aligned}
c(2) &= 6 \\
c(3) &= 25 \\
c(4) &= 90
\end{aligned}
$$

差分方程解法: 迭代法

- 利用差分方程的递推关系, 逐步计算 $c(k)$ 的值
- 例: $c(k) = r(k) + 5c(k-1) - 6c(k-2)$ 输入 $r(k) = 1$, 初始条件: $c(0) = 0, c(1) = 1$
- 解:

$$
\begin{aligned}
c(2) &= 6 \\
c(3) &= 25 \\
c(4) &= 90
\end{aligned}
$$

z 变换法

- 将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.
- 例: 差分方程 $c(t+2T)+3c(t+T)+2c(t)=0$ 初始条件 $c(0)=0, c(1)=1$
- 解:

$$z^2(c(z)-c(0)-c(1)z^{-1})+3z(c(z)-c(0))+2c(z)=0$$

$$(z^2+3z+2)c(z)=z$$

$$c(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}=\frac{1}{1+z^{-1}}-\frac{1}{1+2z^{-1}}$$

$$c(k)=(-1)^k-(-2)^k$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$

z 变换法

- 将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.
- 例: 差分方程 $c(t+2T)+3c(t+T)+2c(t)=0$ 初始条件 $c(0)=0, c(1)=1$
- 解:

$$z^2(c(z)-c(0)-c(1)z^{-1})+3z(c(z)-c(0))+2c(z)=0$$

$$(z^2+3z+2)c(z)=z$$

$$c(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}=\frac{1}{1+z^{-1}}-\frac{1}{1+2z^{-1}}$$

$$c(k)=(-1)^k-(-2)^k$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$

z 变换法

- 将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.
- 例: 差分方程 $c(t+2T)+3c(t+T)+2c(t)=0$ 初始条件 $c(0)=0, c(1)=1$
- 解:

$$z^2(c(z)-c(0)-c(1)z^{-1})+3z(c(z)-c(0))+2c(z)=0$$
$$(z^2+3z+2)c(z)=z$$
$$c(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}=\frac{1}{1+z^{-1}}-\frac{1}{1+2z^{-1}}$$
$$c(k)=(-1)^k-(-2)^k$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$

Topic

脉冲传递函数定义

- 连续系统: 传递函数 (s 域)
- 离散系统: 脉冲传递函数 (z 域)
- 定义: 输出 $c^*(t)$ 的 Z 变换与输入 $r^*(t)$ 的 Z 变换之比 (零初始条件下) 叫做系统的脉冲传递函数. 记为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

脉冲传递函数定义

- 连续系统: 传递函数 (s 域)
- 离散系统: 脉冲传递函数 (z 域)
- 定义: 输出 $c^*(t)$ 的 Z 变换与输入 $r^*(t)$ 的 Z 变换之比 (零初始条件下) 叫做系统的脉冲传递函数. 记为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

脉冲传递函数意义

- 加权序列: 输入 $r^*(t)=\delta(t)$ 的输出序列称为加权序列, 记为 $k^*(t)$
- 脉冲传递函数:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\
&= \mathcal{Z}[k^*(t)] \\
&= k(z)
\end{aligned}
$$

- 脉冲传递函数为加权序列 $k^*(t)$ 的 Z 变换

脉冲传递函数意义

- 加权序列：输入 $r^*(t)=\delta(t)$ 的输出序列称为加权序列，记为 $k^*(t)$
- 脉冲传递函数:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\ &= \mathcal{Z}[k^*(t)] \\ &= k(z) \end{aligned}$$

- 脉冲传递函数为加权序列 $k^*(t)$ 的 Z 变换

脉冲传递函数意义

- 加权序列: 输入 $r^*(t) = \delta(t)$ 的输出序列称为加权序列, 记为 $k^*(t)$
- 脉冲传递函数:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\
&= \mathcal{Z}[k^*(t)] \\
&= k(z)
\end{aligned}
$$

- 脉冲传递函数为加权序列 $k^*(t)$ 的 Z 变换

两种模型之间的变换关系:

$$
\begin{aligned}
c(nT)+\sum_{k=1}^{n} a_k c((n-k)T) &= \sum_{k=0}^{m} b_k r((n-k)T) \\
G(z) &= \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}
\end{aligned}
$$

- 差分方程在零初始条件下进行 Z 变换, 得脉冲传递函数.

两种模型之间的变换关系:

$$
\begin{aligned}
c(nT) + \sum_{k=1}^{n} a_k c((n-k)T) &= \sum_{k=0}^{m} b_k r((n-k)T) \\
G(z) &= \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}
\end{aligned}
$$

- 差分方程在零初始条件下进行 Z 变换, 得脉冲传递函数.

脉冲传递函数计算

- 差分方程 Z 变换: $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数 $G(s)$ 求解 (部分分式法)
- 例: $c(nT) = r[(n-k)T]$
- 解:

$$
\begin{aligned}
C(z) &= z^{-k}R(z) \\
G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} \\
&= z^{-k}
\end{aligned}
$$

脉冲传递函数计算

- 差分方程 Z 变换: $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数 $G(s)$ 求解 (部分分式法)
- 例: $c(nT) = r[(n-k)T]$
- 解:

$$
\begin{aligned}
C(z) &= z^{-k}R(z) \\
G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} \\
&= z^{-k}
\end{aligned}
$$

脉冲传递函数计算

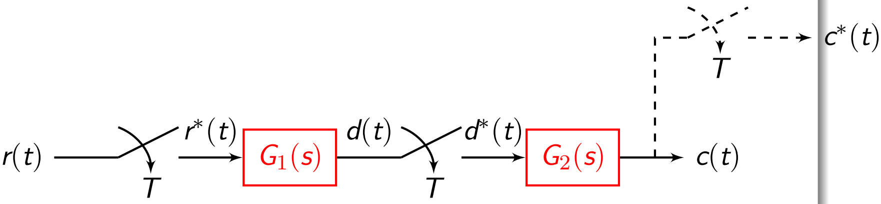
- 差分方程 Z 变换: $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数 $G(s)$ 求解 (部分分式法)
- 例: $c(nT) = r[(n-k)T]$
- 解:

$$\begin{aligned} C(z) &= z^{-k}R(z) \\ G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} \\ &= z^{-k} \end{aligned}$$

Topic

开环系统脉冲传递函数

结构图

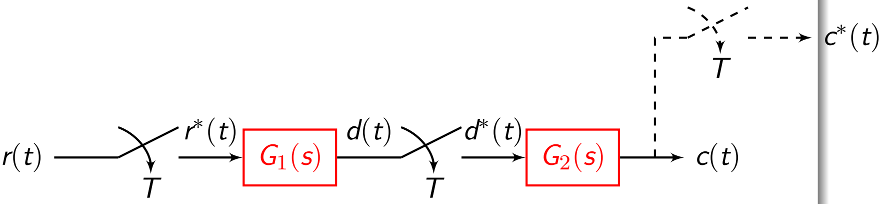


推导

$$
\begin{aligned}
D(z) &= R(z)G_1(z) \\
C(z) &= D(z)G_2(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \\
G(z) &= G_1(z)G_2(z)
\end{aligned}
$$

开环系统脉冲传递函数

结构图

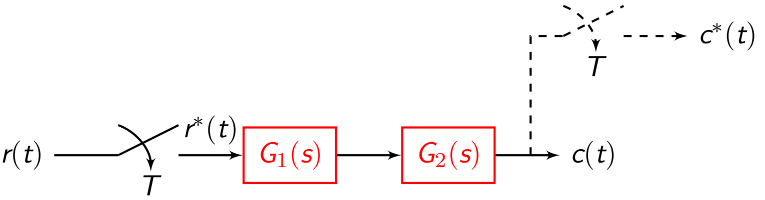


推导

$$
\begin{aligned}
D(z) &= R(z)G_1(z) \\
C(z) &= D(z)G_2(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \\
G(z) &= G_1(z)G_2(z)
\end{aligned}
$$

开环系统脉冲传递函数 (续)

结构图

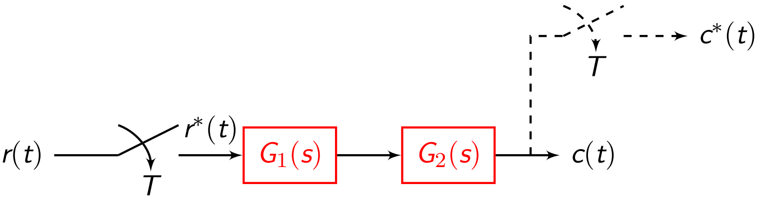


推导

$$
\begin{aligned}
C^*(s) &= [R^*(s)G_1(s)G_2(s)]^* = R^*(s)[G_1(s)G_2(s)]^* \\
C(z) &= R(z)G_1G_2(z) \\
G(z) &= G_1G_2(z)
\end{aligned}
$$

开环系统脉冲传递函数 (续)

结构图

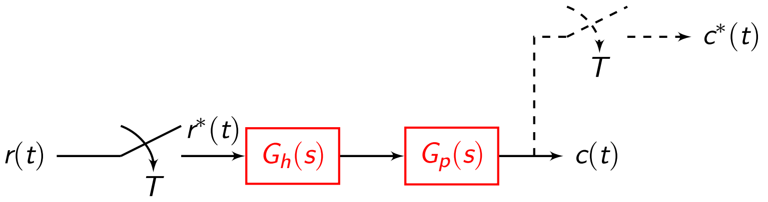


推导

$$
\begin{aligned}
C^*(s) &= [R^*(s)G_1(s)G_2(s)]^* = R^*(s)[G_1(s)G_2(s)]^* \\
C(z) &= R(z)G_1G_2(z) \\
G(z) &= G_1G_2(z)
\end{aligned}
$$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:

结构图

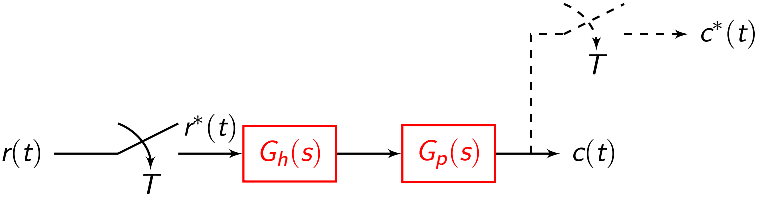


推导

- $C^*(s) = [R^*(s)\cdot\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot G_p(s)]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[(1-e^{-Ts})\cdot\frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts}\cdot\frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C(z) = R(z)\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] - z^{-1}\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$
- $G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:

结构图

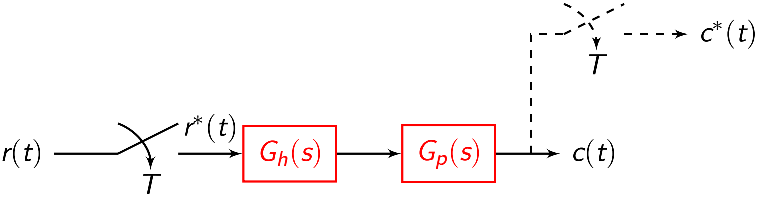


推导

- $C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C(z) = R(z)\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] - z^{-1}\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$
- $G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:

结构图

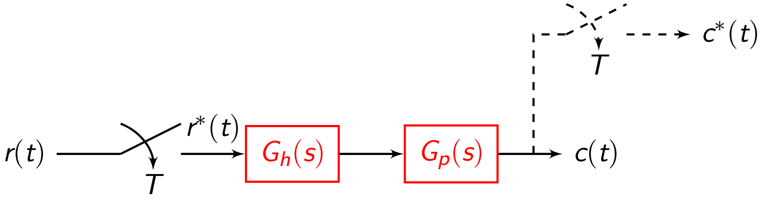


推导

- $C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C(z) = R(z)\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] - z^{-1}\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$
- $G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:

结构图

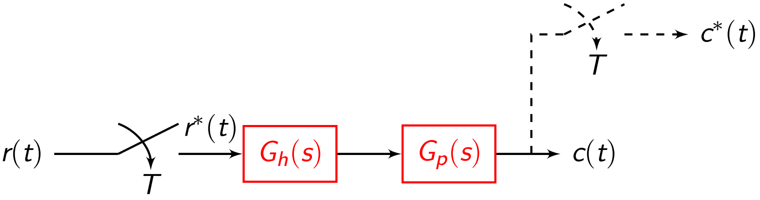


推导

- $C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[(1 - e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C(z) = R(z)\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] - z^{-1}\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$
- $G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:

结构图

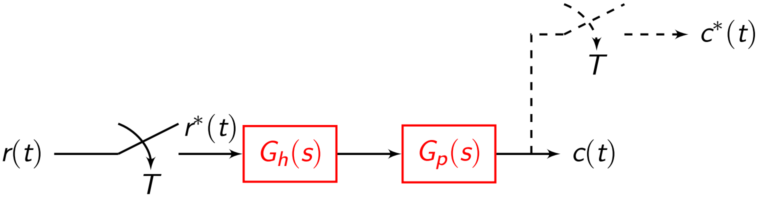


推导

- $C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[(1-e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C(z) = R(z)\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] - z^{-1}\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$
- $G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:

结构图



推导

- $C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[(1-e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
- $C(z) = R(z)\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}] - z^{-1}\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$
- $G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{G_p(s)}{s}]$

开环系统脉冲传递函数示例: $G_p(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

- 解:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{a}{s^2(s+a)}] \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a})] \\
&= (1-z^{-1})\left[\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{a}(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}})\right]
\end{aligned}
$$

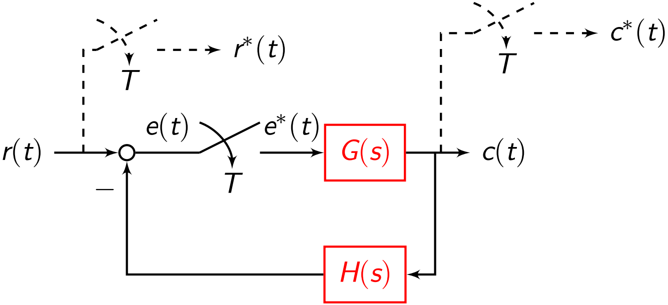
开环系统脉冲传递函数示例: $G_p(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

- 解:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{a}{s^2(s+a)}] \\
&= (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a})] \\
&= (1-z^{-1})\left[\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{a}(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}})\right]
\end{aligned}
$$

Topic

闭环系统的脉冲传递函数



脉冲传递函数

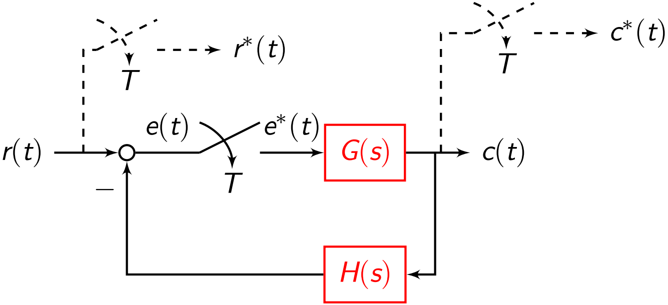
$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[e^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

解:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E^*(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)C(s) \\ &= R(s) - H(s)G(s)E^*(s) \end{aligned}$$

闭环系统的脉冲传递函数



脉冲传递函数

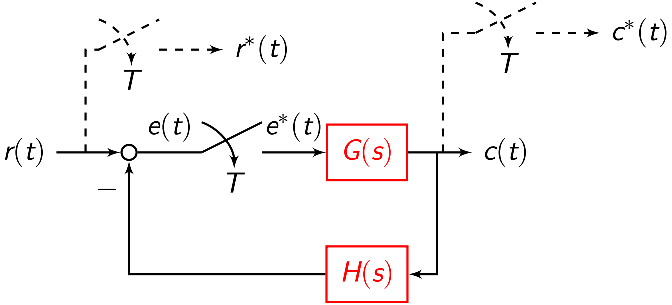
$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[e^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

解:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E^*(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)C(s) \\ &= R(s) - H(s)G(s)E^*(s) \end{aligned}$$

闭环系统的脉冲传递函数



脉冲传递函数

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[e^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$$

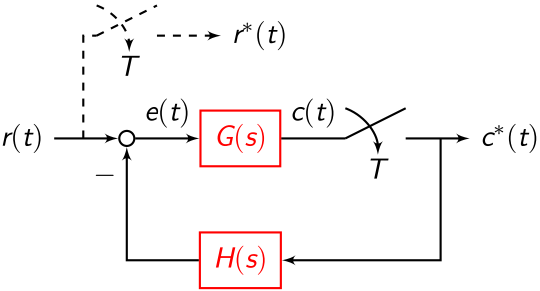
解:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E^*(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)C(s) \\ &= R(s) - H(s)G(s)E^*(s) \end{aligned}$$

闭环系统的脉冲传递函数 (续)

$$
\begin{aligned}
E^*(s) &= R^*(s) - HG^*(s)E^*(s) \\
&= \frac{R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \\
\Phi_e(z) &= \frac{1}{1 + HG(z)} \\
C^*(s) &= G^*(s)E^*(s) \\
&= \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \\
\Phi(z) &= \frac{G(z)}{1 + HG(z)}
\end{aligned}
$$

闭环系统的脉冲传递函数示例:

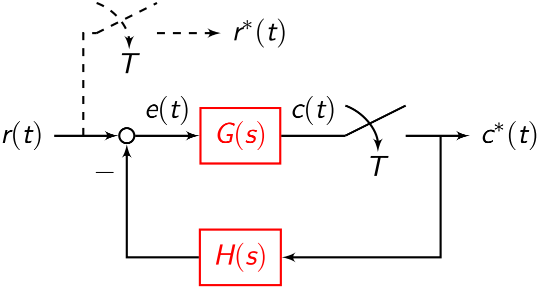


- 解:

$$
\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - H(s)C^*(s) \\
C(s) &= G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s) \\
C^*(s) &= GR^*(s) - GH^*(s)C^*(s) = \frac{GR^*(s)}{1 + GH^*(s)}
\end{aligned}
$$

- 没有闭环脉冲传递函数

闭环系统的脉冲传递函数示例:

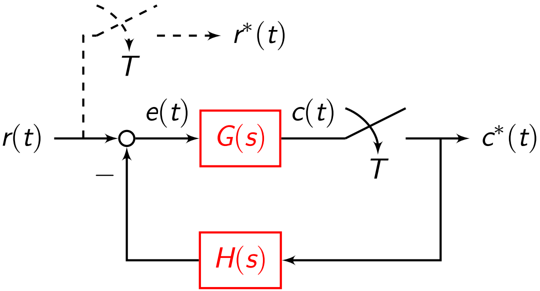


- 解:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - H(s)C^*(s) \\ C(s) &= G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s) \\ C^*(s) &= GR^*(s) - GH^*(s)C^*(s) = \frac{GR^*(s)}{1+GH^*(s)} \end{aligned}$$

- 没有闭环脉冲传递函数

闭环系统的脉冲传递函数示例:



- 解:

$$
\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - H(s)C^*(s) \\
C(s) &= G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s) \\
C^*(s) &= GR^*(s) - GH^*(s)C^*(s) = \frac{GR^*(s)}{1 + GH^*(s)}
\end{aligned}
$$

- 没有闭环脉冲传递函数

Topic

$c^*(t)$ 与 $c(t)$

- 采样间隔 τ 要远小于系统最小时间常数
- c(nT) 不能反映采样间隔中的信息
- G(s) 要满足: $n \geq m+2$, 否则 $c^*(t)$ 与 $c(t)$ 差别较大.

$c^*(t)$ 与 $c(t)$

- 采样间隔 τ 要远小于系统最小时间常数
- c(nT) 不能反映采样间隔中的信息
- G(s) 要满足: $n \geq m+2$, 否则 $c^*(t)$ 与 $c(t)$ 差别较大.

$c^*(t)$ 与 $c(t)$

- 采样间隔 τ 要远小于系统最小时间常数
- c(nT) 不能反映采样间隔中的信息
- G(s) 要满足: $n \geq m+2$, 否则 $c^*(t)$ 与 $c(t)$ 差别较大.

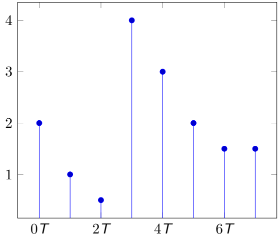
$c^*(t)$ 与 $c(t)$

- 采样间隔 τ 要远小于系统最小时间常数
- c(nT) 不能反映采样间隔中的信息
- G(s) 要满足: $n \geq m + 2$, 否则 $c^*(t)$ 与 $c(t)$ 差别较大.

修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
  - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
  - 计算在采样周期 $\frac{T}{n}$ 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
  - 原输入信号 Z 变换为 $R(z)$, 将 z 替换为: z^n .
  - 以 $\frac{T}{n}$ 重新计算系统脉冲传递函数.

$R(z)$

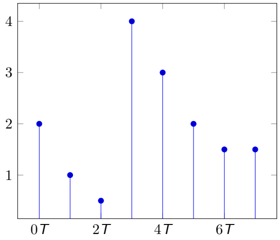


$R(z^2),(T' = \frac{T}{2})$

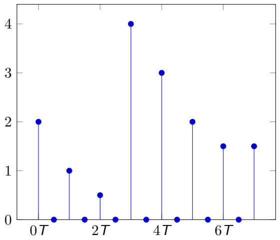
修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
  - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
  - 计算在采样周期 $\frac{T}{n}$ 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
  - 原输入信号 Z 变换为 $R(z)$, 将 z 替换为: z^n .
  - 以 $\frac{T}{n}$ 重新计算系统脉冲传递函数.

$R(z)$



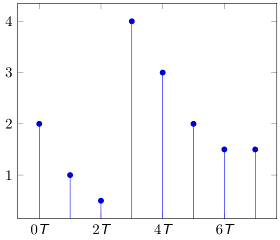
$R(z^2),(T' = \frac{T}{2})$



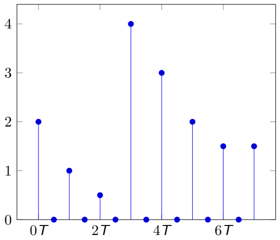
修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
  - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
  - 计算在采样周期 $\frac{T}{n}$ 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
  - 原输入信号 Z 变换为 $R(z)$, 将 z 替换为: z^n .
  - 以 $\frac{T}{n}$ 重新计算系统脉冲传递函数.

$R(z)$



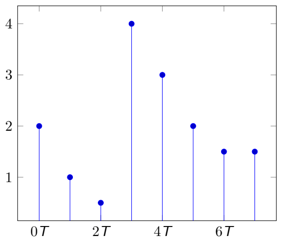
$R(z^2),(T' = \frac{T}{2})$



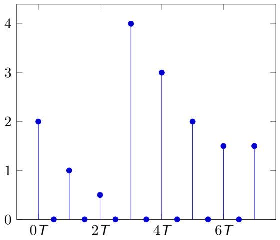
修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
  - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
  - 计算在采样周期 $\frac{T}{n}$ 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
  - 原输入信号 Z 变换为 $R(z)$, 将 z 替换为: z^n .
  - 以 $\frac{T}{n}$ 重新计算系统脉冲传递函数.

$R(z)$



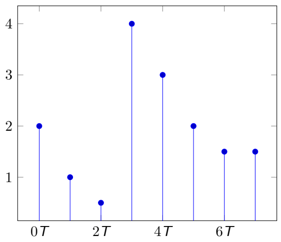
$R(z^2),(T' = \frac{T}{2})$



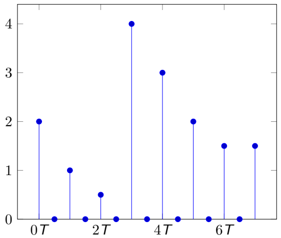
修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
  - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
  - 计算在采样周期 $\frac{T}{n}$ 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
  - 原输入信号 Z 变换为 $R(z)$, 将 z 替换为: z^n .
  - 以 $\frac{T}{n}$ 重新计算系统脉冲传递函数.

$R(z)$



$R(z^2), (T' = \frac{T}{2})$



修正 Z 变换示例:

$$G(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$T = 1$, $r(t) = 1(t)$, 要求每采样周期中间插入两点.

- 解:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z}{z - e^{-1/3}} \\ r(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ r'(z) &= r(z^3) \\ &= \frac{1}{1 - z^{-3}} \\ c'(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-1/3}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-3}} \end{aligned}$$