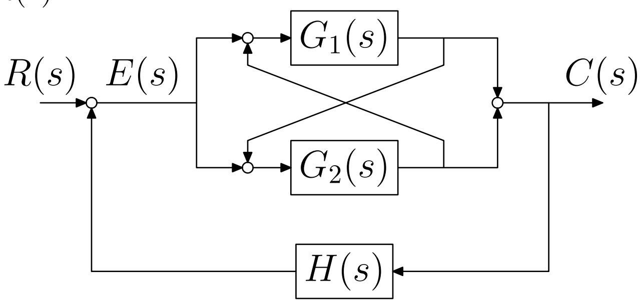
西北工业大学考试试题（卷）评分标准

2018 － 2019 学年秋学期

开课学院 航天学院　　课程 自动控制理论 1　　学时 48

考试日期________　　考试时间______ 小时　　考试形式 $\begin{pmatrix}\text{开}\\ \text{闭}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\text{A}\\ \text{B}\end{pmatrix}$ 卷

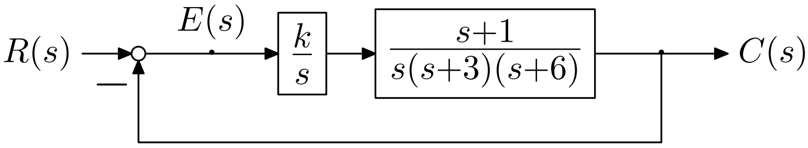
一、(20 分) 已知系统结构图如图所示。求解前向通道传递函数$\dfrac{C(s)}{E(s)}$ 与系统闭环传递函数$\dfrac{C(s)}{R(s)}$。



解：

$$
\begin{aligned}
\frac{C(s)}{E(s)} &= \frac{2G_1(s)G_2(s)+G_1(s)+G_2(s)}{1-G_1(s)G_2(s)}\\
\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}\\
&= \frac{2G_1(s)G_2(s)+G_1(s)+G_2(s)}{1-G_1(s)G_2(s)-H(s)[2G_1(s)G_2(s)+G_1(s)+G_2(s)]}
\end{aligned}
$$

二、(20 分) 已知某系统的结构图如图所示，分析是否可选取 $k\in\mathbb{R}$ 的值，使系统在 $r(t)=t^2$ 作用时，稳态误差 $e_{ss}<0.5$ 。若是，则给出 k 的取值范围。



解：

$$G(s) = \frac{k}{s}\cdot\frac{s+1}{s(s+3)(s+6)} \tag{1}$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \tag{2}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \tag{3}$$

首先考虑系统稳定性：

$$D(s)=S^2(s+3)(s+6)+k(s+1)=s^4+9s^3+18s^2+ks+k$$

Routh 表：

s^4:	1	18	k
s^3:	9	k	
s^2:	$18-\frac{k}{9}$	k	
s^1:	$k-\frac{9k}{18-\frac{k}{9}}$		
s^0:	k		

得：

$$0<k<81$$

然后考虑动态指标 $e_{ss}<0.5$：

因为：

$$R(s)=2\cdot\frac{1}{s^3}$$

所以：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}E(s)=\frac{36}{k}$$

由 $e_{ss}<0.5$ 得：

$$k>72$$

因此，k 的范围是:

$$72<k<81$$

三、(20 分) 单位负反馈系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*(s+3)}{s(s+2)}$$

求使系统闭环极点的实部均小于 -2 的 K^* 范围；证明系统非实轴上的根轨迹为圆，并求出其圆心与半径。

解：

系统闭环传递函数为：

$$\begin{aligned}\Phi(s)&=\frac{K^*(s+3)}{K^*(s+3)+s(s+2)}\\&=\frac{K^*(s+3)}{K^*(s+3)+s(s+2)}\end{aligned}$$

设 $s'=s+2$, 将 $s=s'-2$ 代入特征方程，

$$\begin{aligned}D(s')&=K^*(s'-2+3)+(s'-2)(s'-2+2)\\&=s'^2+(K^*-2)s'+K^*2\end{aligned}$$

利用 Routh 判据可知 $K^*>2$ 时，闭环极点实部小于 -2。

设 $s=x+yi$，代入特征方程，得：

$$K^*(x+yi+3)+(x+yi)(x+yi+1)=0$$

$$K^*(x+3)+x(x+1)-y^2+K^*yi+xyi+(x+1)yi=0$$

实部、虚部分别为 0, 得：

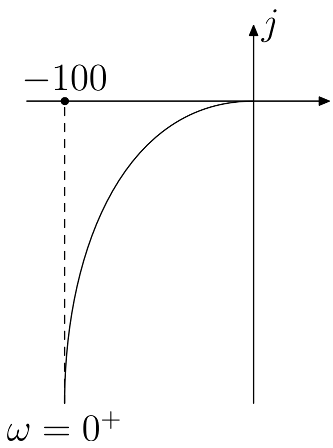
$$\begin{aligned} K^*(x+3)+x(x+1)-y^2=0 \\ K^*y+xy+(x+1)y=0 \end{aligned}$$

消去 K^* 得：

$$\begin{aligned} (2x+1)(x+3)-x(x+1)+y^2=0 \\ (x+3)^2+y^2=3 \end{aligned}$$

可知，根轨迹为圆，圆心 $(-3,0)$, 半径 $\sqrt{3}$。

四、(20 分) 设单位负反馈系统开环传递函数的 Nyquist 曲线如图所示，且当系统在输入 $r(t)=2t$ 下测得其稳态误差为 0.2。求解系统的闭环传递函数；求解系统的截止频率、幅值裕度。



解：

由图可知系统为 I 型系统，且当 $\omega\to\infty$ 时，$\angle(G(j\omega))=-180^0$; 可设系统开环传递函数为：$G(s)=\frac{k}{s(s+a)}$。

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+G(s)}=\frac{2a}{k}=0.2$$

由图知，当 $\omega\to 0$ 时，

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to 0}\Re[G(j\omega)] &= \lim_{\omega\to 0}\Re[\frac{k}{j\omega(j\omega+a)}] \\ &= \lim_{\omega\to 0}\Re[\frac{k(-\omega^2-ja\omega)}{\omega^4+a^2\omega^2}] \\ &= -\frac{k}{a^2} \\ &= -100 \end{aligned}$$

可得 $k=1, a=0.1$, 所以开环传递函数：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+0.1)}$$

闭环传递函数：

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)} \\ &= \frac{1}{s^2+0.1s+1}\end{aligned}$$

截止频率：

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\omega_c(\omega_c+0.1)}\right| &= 1 \\ \left|\frac{1}{\omega_c^2}\right| &\approx 1 \\ \omega_c &\approx 1\end{aligned}$$

由 Nyquist 图可知，幅值裕度：

$$h = \infty$$

五、(20 分) 已知控制系统模型如下：

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -3u(t) + ke(t) \\ \dot{c}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -3v(t) - 2c(t) + u(t) \\ e(t) &= r(t) - c(t)\end{aligned}$$

求系统闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$，其中 $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)], R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$ ；分析是否可改变 k 值使闭环系统稳定，若是，则给出 $k \in \mathbb{R}$ 的取值范围；分析是否可改变 k 的值使闭环系统阶跃响应超调量为 0，若是，则给出 $k \in \mathbb{R}$ 的取值范围。

答：由系统微分方程组可得：

$$\begin{aligned}sU(s) &= -3U(s) + kE(s) \\ sC(s) &= V(s) \\ sV(s) &= -3V(s) - 2C(s) + U(s) \\ E(s) &= R(s) - C(s)\end{aligned}$$

解得：

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{k}{(s+3)(s^2+3s+2)} \\ &= \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \Phi(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)} \\ &= \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+3)+k}\end{aligned}$$

系统闭环传递函数：

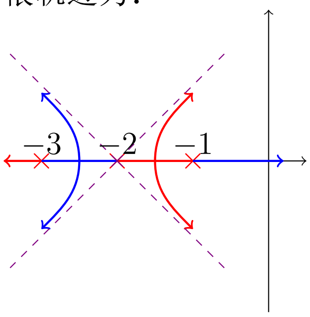
$$\Phi(s) = \frac{k}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + k}$$

Routh 表：

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6+k \\ s^1 & 10 - \frac{k}{6} & \\ s^0 & 6+k & \end{array}$$

可知，当 $-6 < k < 60$ 时，系统稳定。

根轨迹为：



计算分离点，由

$$\frac{d}{ds}(k + (s+1)(s+2)(s+3)) = 0$$

得

$$\lambda = -2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

分别将其代入特征方程，可得：

$$\begin{cases} k = \frac{2}{3\sqrt{3}} & (\lambda = -2 + \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ k = -\frac{2}{3\sqrt{3}} & (\lambda = -2 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases}$$

因此，当 $-\frac{2}{3\sqrt{3}} \leqslant k \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时，闭环系统根位于实轴负半轴，即系统超调量为 0。