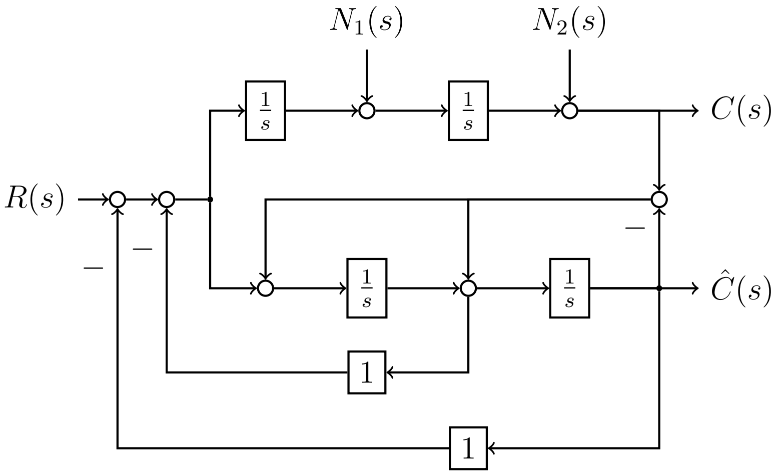
西北工业大学考试试题（卷）评分标准

2015 － 2016 学年第 1 学期

开课学院 航天学院　　课程 自动控制理论 1　　学时 48
考试日期＿＿＿＿　　考试时间＿＿＿＿ 小时　　考试形式（ 闭 ）（ A ）卷

一、（20 分）已知控制系统结构图如下所示，求 $C(s), \hat{C}(s)$



答：设 $E(s) = C(s) - \hat{C}(s)$, 得：

$$
\begin{aligned}
s\hat{C}(s) &= \frac{R(S) - \hat{C}(s) - s\hat{C}(s) + E(s)}{s} + E(s) \\
s\hat{C}(s) + \hat{C}(s) + \frac{\hat{C}(s)}{s} &= \frac{R(s) + sE(s) + E(s)}{s} \\
(s^2 + s + 1)\hat{C}(s) &= R(s) + (s+1)E(s) \\
\hat{C}(s) &= \frac{R(s) + (s+1)E(s)}{s^2 + s + 1}
\end{aligned}
$$

及：

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \frac{R(S) - \hat{C}(s) - s\hat{C}(s)}{s^2} + \frac{N_1(s)}{s} + N_2(s) \\
s^2C(s) &= R(s) - (s+1)\hat{C}(s) + sN_1(s) + s^2N_2(s) \\
s^2C(s) &= R(s) - (s+1)(C(s) - E(s)) + sN_1(s) + s^2N_2(s) \\
(s^2 + s + 1)C(s) &= R(s) + (s+1)E(s) + sN_1(s) + s^2N_2(s) \\
C(s) &= \frac{R(s) + (s+1)E(s) + sN_1(s) + s^2N_2(s)}{s^2 + s + 1}
\end{aligned}
$$

得：

$$
\begin{aligned}
\hat{C}(s) &= \frac{R(s) + (s+1)E(s)}{s^2 + s + 1} \\
C(s) &= \frac{R(s) + (s+1)E(s) + sN_1(s) + s^2N_2(s)}{s^2 + s + 1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(s) &= \frac{sN_1(s)+s^2N_2(s)}{s^2+s+1} \\
\hat{C}(s) &= \frac{R(s)}{s^2+s+1} + \frac{(s+1)(sN_1(s)+s^2N_2(s))}{(s^2+s+1)^2} \\
C(s) &= \frac{R(s)+sN_1(s)+s^2N_2(s)}{s^2+s+1} + \frac{(s+1)(sN_1(s)+s^2N_2(s))}{(s^2+s+1)^2}
\end{aligned}
$$

另一种方法：

$$
\begin{aligned}
(s^2+s+1)\hat{C}(s) &= R(s)+(s+1)(C(s)-\hat{C}(s)) \\
(s^2+2s+2)\hat{C}(s) &= R(s)+(s+1)C(s)
\end{aligned}
$$

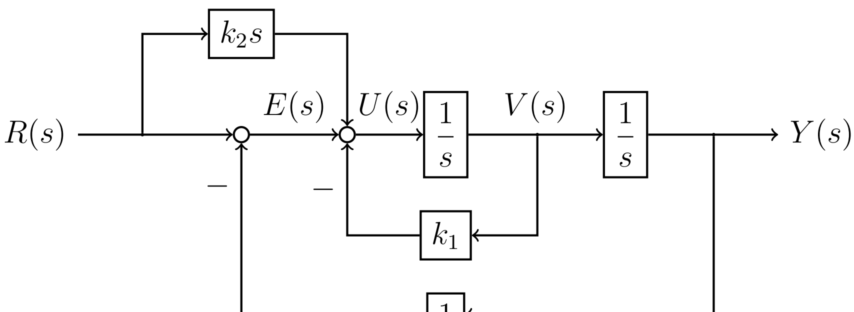
及：

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \frac{R(S)-\hat{C}(s)-s\hat{C}(s)}{s^2} + \frac{N_1(s)}{s} + N_2(s) \\
s^2C(s) &= R(s)-(s+1)\hat{C}(s)+sN_1(s)+s^2N_2(s)
\end{aligned}
$$

求解：

$$
\begin{aligned}
s^2(s^2+2s+2)\hat{C}(s) &= s^2R(s)+s^2(s+1)C(s) \\
(s+1)s^2C(s) &= (s+1)R(s)-(s+1)^2\hat{C}(s)+(s+1)sN_1(s)+(s+1)s^2N_2(s) \\
s^2(s^2+2s+2)\hat{C}(s) &= (s^2+s+1)R(s)-(s+1)^2\hat{C}(s)+(s+1)sN_1(s)+(s+1)s^2N_2(s) \\
(s^4+2s^3+2s^2+(s+1)^2)\hat{C}(s) &= (s^2+s+1)R(s)+(s+1)sN_1(s)+(s+1)s^2N_2(s) \\
\hat{C}(s) &= \frac{(s^2+s+1)R(s)+(s+1)sN_1(s)+(s+1)s^2N_2(s)}{s^4+2s^3+3s^2+2s+1}
\end{aligned}
$$

二、（20 分）已知系统结构图如下：



写出微分方程组；求解当 $v(0)=1, y(0)=1, r(t)=t$ 时的稳态误差；分析当 k_1 取何值时系统为临界阻尼系统。

答：系统微分方程组：

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= v(t) \\
\dot{v}(t) &= k_2\dot{r}(t)+r(t)-y(t)+k_1v(t)
\end{aligned}
$$

考虑到初始条件，进行 Laplace 变换，得：

$$\begin{aligned}
sY(s) - y(0) &= V(s) \\
sY(s) - 1 &= V(s) \\
sV(s) - v(0) &= k_2 sR(s) + R(s) - Y(s) - k_1 V(s) \\
(s+k_1)V(s) - 1 &= k_2 sR(s) + R(s) - Y(s) \\
s(s+k_1)Y(s) - (s+k_1) - 1 &= k_2 sR(s) + R(s) - Y(s) \\
Y(s) &= \frac{k_2 sR(s) + R(s) + s + k_1 + 1}{s(s+k_1)+1} \\
E(s) &= R(s) - Y(s) \\
&= \frac{s(s+k_1)R(s) - k_2 sR(s) - s - k_1 - 1}{s(s+k_1)+1}
\end{aligned}$$

当 $k_1 > 0$ 时，系统稳定。当 $k_1 = 2$ 时为临界阻尼系统。$r(t) = t$ 时：

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} sE(s) &= \frac{(s+k_1) - k_2 - s^2 - k_1 s - s}{s(s+k_1)+1} \\
&= k_1 - k_2
\end{aligned}$$

三、（20 分）已知单位负反馈系统开环传递函数：

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 1}$$

分析闭环系统稳定性与稳定裕度。

答：系统闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + s + 2}$$

Routh 表：

$$\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 3 & 2 \\
s^1 & \frac{1}{3} & 0 \\
s^0 & 2 &
\end{array}$$

可知闭环系统稳定。

计算相角裕度：

$$\begin{aligned}
|G(j\omega_c)| &= 1 \\
\omega_c &= 0 \\
\gamma &= 180^\circ
\end{aligned}$$

原系统穿越频率 ω_x 与开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + s + 1}$$

的系统相同。当选取合适的 k 使 Nyquist 曲线穿过 (-1+0j) 时，此时闭环系统

$$\Phi'(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+s+1+k}$$

存在纯虚根，可通过 Routh 判据计算出此时的 ω_x。Routh 表：

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 3 & 1+k \\ s^1 & 1-\frac{1+k}{3} & 0 \end{array}$$

令 $k=2$, 则出现全零行，构建辅助方程 $3s^2+3=0$，得：

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm 1j \\ \omega_x &= 1 \\ |G(j\omega_x)| &= \frac{1}{|-1j-3+1j+1|} \\ &= \frac{1}{2} \\ h &= 2 \end{aligned}$$

四、（20 分）单位负反馈系统开环传递函数：

$$G(s) = \frac{k(s^2+a)}{(s+b)^2}$$

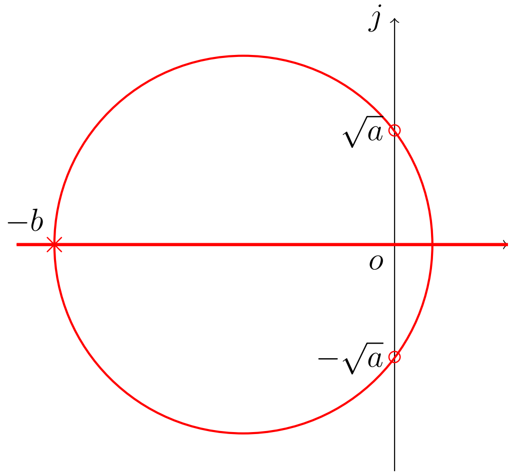
a, b 均为实数且 $b \neq 0$。绘制 $k \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 时系统的根轨迹并分析其形状。

答：若 s 闭环系统极点，则有 $1+G(s)=0$，可知 $G(s)$ 的虚部为零。

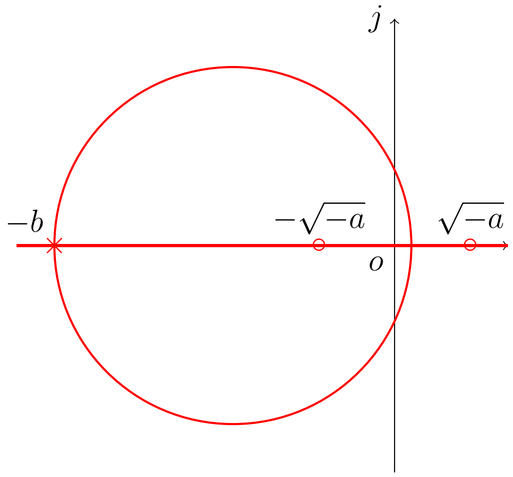
$$\begin{aligned} 0 &= \Im[G(s)] \\ &= \Im\left[\frac{k((x+iy)^2+a)}{((x+iy)+b)^2}\right] \\ &= \frac{k(2xy((x+b)^2-y^2)-2(x+b)y(-y^2+x^2+a))}{(y^2+(x+b)^2)^2} \\ 0 &= (2xy((x+b)^2-y^2)-2(x+b)y(-y^2+x^2+a)) \\ &= y(by^2+bx^2+b^2x-ax-ab) \\ &= y\left(y^2+(x+\frac{b^2-a}{2b})^2-\frac{(b^2-a)^2}{4b^2}-a\right) \\ &= y\left(y^2+(x+\frac{b^2-a}{2b})^2-\frac{(b^2+a)^2}{4b^2}\right) \end{aligned}$$

因此，根轨迹在实轴上或者在圆心：$(-\frac{b^2-a}{2b}+0i)$、半径：$|\frac{b^2+a}{2b}|$ 的圆上。

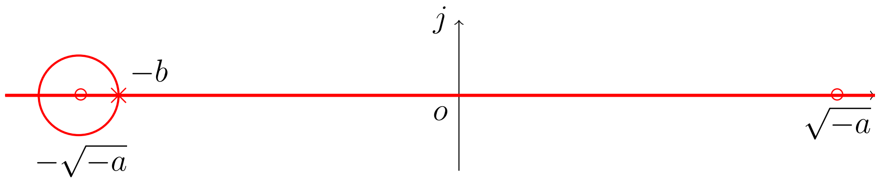
$a>0, b>0$ 时，根轨迹如下：



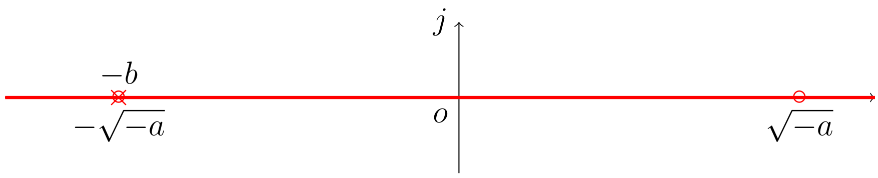
$-b^2 < a < 0, b > 0$ 时，根轨迹如下：



$a < -b^2, b > 0$ 时，根轨迹如下：



$a = -b^2, b > 0$ 时，根轨迹如下：



同理可得 $b < 0$ 时的根轨迹。

五、（20 分）已知单位负反馈系统开环传递函数：

$$G(s) = \frac{k}{s} \cdot e^{-s}$$

求解使系统稳定的 k 取值范围 (已知 $k > 0$)。

答：

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{k}{j\omega} \cdot e^{j\omega} \\ \omega_c &= k \\ \omega_x &= \frac{\pi}{2} \\ \gamma &= \frac{\pi}{2} - k \end{aligned}$$

因此，$k < \frac{\pi}{2}$ 时，系统稳定。