系统结构辨识

邢超

<.1>

1 简介

模型阶的确定

1. 按残差方差定阶
2. AIC 准则
3. 按残差白色定阶
4. 零点—极点消去检验定阶
5. 利用行列式比定阶
6. 利用 Hankel 矩阵定阶

<.2>

2 按残差方差定阶

按残差方差定阶

计算不同阶次 n 辨识结果的估计误差方差，按估计误差方差最小或最显著变化原则来确定模型阶次 n。

1. 按估计误差方差最小定阶
2. F 检验法

<.3>

按估计误差方差最小定阶

$$
\begin{aligned}
a(z^{-1})y_k &= b(z^{-1})u_k + \varepsilon_k \\
Y &= \Phi\theta + \varepsilon \\
e &= Y - \Phi\hat{\theta} \\
\hat{\theta} &= (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y \\
J &= e^T e = \sum_{k=n+1}^{N} e_k^2
\end{aligned}
$$

<.4>

F 检验法

$$\begin{aligned}
t(n_i,n_{i+1}) &= \frac{J_i-J_{i+1}}{J_{i+1}}\frac{N-2n_{i+1}}{2(n_{i+1}-n_i)} \\
&\sim F(2n_{i+1}-2n_i,N-2n_{i+1}) \\
t(n,n+1) &= \frac{J_n-J_{n+1}}{J_{n+1}}\frac{N-2n-2}{2} \\
&= \sim F(2,N-2n-2)
\end{aligned}$$

<.5>

3 AIC 信息准则

AIC 信息准则（akaike）

$$AIC = -2\ln L+2p$$

其中：

L 模型的似然函数；
p 模型中的参数个数。

<.6>

计算公式：白噪声情况

$$\begin{aligned}
Y &= \Phi\theta+\varepsilon \\
L(Y|\theta) &= (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-N/2}exp\left[-\frac{(Y-\Phi\theta)^T(Y-\Phi\theta)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \\
\ln L(Y|\theta) &= -\frac{N}{2}\ln 2\pi-\frac{N}{2}\ln\sigma_\varepsilon^2-\frac{(Y-\Phi\theta)^T(Y-\Phi\theta)}{2\sigma_\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\ln L}{\partial\theta} &= 0 \\
\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma_\varepsilon^2} &= 0
\end{aligned}$$

得：

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y \\
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{(Y-\Phi\hat{\theta})^T(Y-\Phi\hat{\theta})}{N}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\ln L &= -\frac{N}{2}\ln\hat{\sigma}_\varepsilon^2+const \\
AIC &= N\ln\hat{\sigma}_\varepsilon^2+2(n_1+n_2)
\end{aligned}$$

<.7>

有色噪声情况

$$
\begin{aligned}
Y &= \Phi_a\theta_a + \Phi_b\theta_b + \Phi_c\theta_c + \varepsilon \\
AIC &= N\ln\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + 2(n_a + n_b + n_c) \\
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{n+N}\hat{\varepsilon}^2(k) \\
\hat{\varepsilon}(k) &= y_k + \sum_{i=1}^{n_a}\hat{a}_i y_{k-i} - \sum_{i=0}^{n_b}\hat{b}_i u_{k-i} - \sum_{i=1}^{n_c}\hat{c}_i\hat{\varepsilon}_{k-i}
\end{aligned}
$$

<.8>

4 按残差白色定阶

按残差白色定阶

若阶次 n 设计合适，则残差近似为白噪声。因此可利用计算残差 e(k) 的自相关函数来检查白色性。

$$
\begin{aligned}
\hat{R}(i) &= \frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{n+N} e(k)e(k+1) \\
\hat{r}(i) &= \frac{\hat{R}(i)}{\hat{R}(0)}
\end{aligned}
$$

<.9>

5 零点—极点消去检验

零点—极点消去检验

$$
\begin{aligned}
a(z^{-1})y(k) &= b(z^{-1})u(k) + \varepsilon(k) \\
G(z) &= \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})}
\end{aligned}
$$

根据 $G(z)$ 中是否存在零极点对消确定系统阶数。 <.10>

6 行列式比定阶

行列式比定阶

$$
\begin{aligned}
Y &= \Phi\theta \\
Q &= \frac{\Phi^T\Phi}{N} \\
DR(n) &= \frac{\det Q(n)}{\det Q(n+1)}
\end{aligned}
$$

<.11>

7 Hankel 矩阵定阶

Hankel 矩阵定阶

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{\sum \det H(n,k)}{\sum \det H(n+1),k)} \\
H(n,k) &= \begin{bmatrix} g_k & g_{k+1} & \cdots & g_{k+n-1} \\ g_{k+1} & g_{k+2} & \cdots & g_{k+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k+n-1} & g_{k+n} & \cdots & g_{k+2n-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

还可以将 g_k 替换为 ρ_k：

$$
\begin{aligned}
\rho_k &= \frac{\hat{R}(k)}{\hat{R}(0)} \\
\hat{R}(k) &= \frac{1}{N} \sum_{i=n+1}^{N} g_i g_{k-i}
\end{aligned}
$$

<.12>