线性离散系统分析

Outline

Contents

1 离散系统基本概念

1.1 特点

离散系统与离散信号

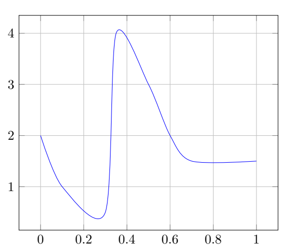
离散信号只在离散的时刻有值，通常也把只在离散时刻有非零值的脉冲序列称为离散信号。

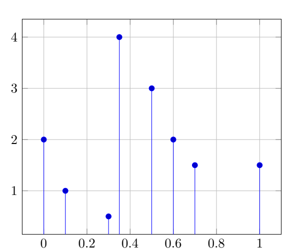
- 离散信号: 脉冲或数字信号。
- 离散系统: 控制系统中有一处或几处信号是脉冲或数字信号

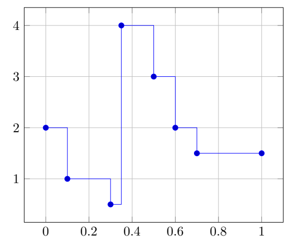
1.2 采样控制系统

采样控制系统

通常被控对象是连续系统，采用离散系统作为控制器时需要将连续信号采样，得到离散信号供控制器使用，还需要将控制器的输出复现为连续信号输入到被控对象。

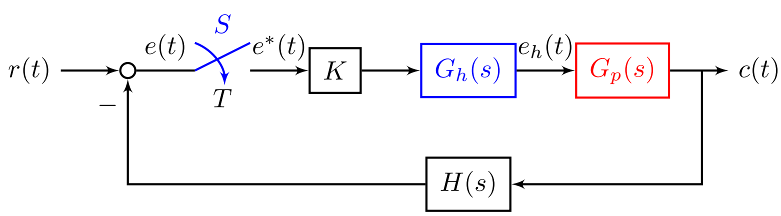
- 采样: 连续信号转变为离散脉冲序列的过程
  - 周期采样: 离散信号的获取是周期性的
  - 非周期采样: 离散信号的获取是非周期的
- 复现: 把脉冲序列转变为连续信号的过程
- 连续信号 

- 采样: 

- 复现: 

采样器与保持器

- 典型采样控制系统中既有连续的模拟信号，又有离散的脉冲信号，因此需要:
  - 采样器: 模拟信号转换为脉冲信号
  - 保持器: 脉冲信号转换为模拟信号



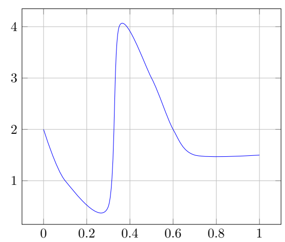
- $e^*(t)$: 采样信号
- $G_h(s)$: 保持器
- $e_h(t)$: 复现信号
- S : 理想采样开关
- T : 采样周期

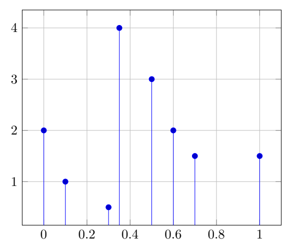
1.3 数字控制系统

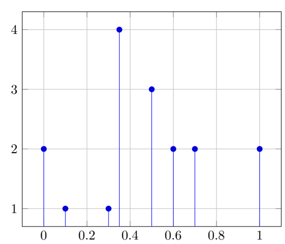
数字控制系统

- 以数字计算机作为控制器控制连续对象
- 系统中既有连续信号，又有数字信号，实现两种信号之间的转换装置为A/D,D/A.

模数转换器 (A/D)

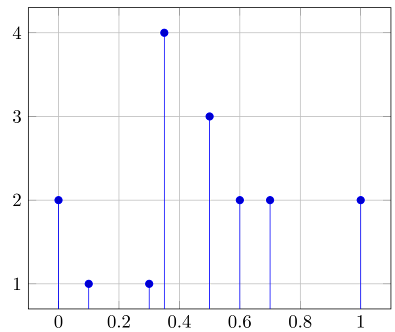
- 将连续信号转换为数字信号.
- 工作过程:
  - 采样过程: $e(t) \to e^*(t)$
  - 量化过程: $e^*(t) \to \bar{e}^*(t)$
- 连续信号 

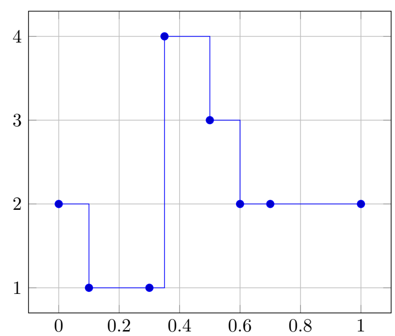
- 采样: 

- 量化: 

数模转换器 (D/A)

- 将离散的数字信号转换为连续模拟信号
- 工作过程:
  - 解码过程: 将离散数字信号转换为离散模拟信号
  - 复现过程: 将离散的模拟信号转换为连续的模拟信号

- 数字信号 

- 复现: 

量化方法

- 只舍不入: 只取量化单位 q 的整数部分

$$\begin{aligned} E(e) &= \frac{q}{2} \\ \sigma^2 &= \frac{q^2}{3} \end{aligned}$$

- 有舍有入: 类似四舍五入

$$\begin{aligned} E(e) &= 0 \\ \sigma^2 &= \frac{q^2}{12} \end{aligned}$$

减小量化误差方法

- 减小 q , 即增大字长 i :

$$q = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^i}$$

1.4 离散系统研究方法

离散系统研究方法

- 连续系统: Laplacian 变换
- 离散系统: Z 变换
- 离散系统学习要点
  - 离散数学模型, 离散系统与连续系统对比
  - 离散系统的稳定性, 稳态性能与动态性能分析

2 信号的采样与保持

2.1 信号的采样

采样信号

- 理想采样的结果是脉冲信号，其强度为连续信号在采样时刻的值

  若采样开关为理想采样开关, 则有:

  $$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

  其中 $\delta_T(t)$ 为理想单位脉冲序列:

  $$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 将单位脉冲序列乘以连续信号即可完成采样，将连续信号转换成采样信号（加权脉冲序列）。

  得:

  $$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t)\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) \end{aligned}$$

采样信号的 Laplace 变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^*(t)) &= \mathcal{L}(\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\mathcal{L}(\delta(t-nT)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs} \end{aligned}$$

直接计算离散信号的 Laplace 变换时会发现，时域信号可由一系列有延迟的脉冲信号构成。根据 Laplace 变换的性质，时域延迟会导致复域出现 s 的指数函数，而不是关于 s 的有理分式，难以分析。为了能够方便地分析离散信号，需要学习一种新的数学工具 — Z 变换

采样信号的频谱分析

为了得到采样信号的频谱，可用另一种思路计算离散信号的 Laplace 变换

- 将 $\delta_T(t)$ 以 Fourier 级数表示, 得:

$$\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \\
C_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t)e^{-jn\omega_s t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)dt \\
&= \frac{1}{T} \\
\omega_s &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}$$

采样信号的频谱分析 (续)

通过 Laplace 变换或 Fourier 变换对比分析连续信号与采样信号的频率特性，可以看到采样过程的频域描述：将连续信号的频谱平移后再叠加。

- 采样

$$\begin{aligned}
\delta_T(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\
e^*(t) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t)e^{jn\omega_s t} \\
E^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s+jn\omega_s) \\
E^*(j\omega) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega+n\omega_s))
\end{aligned}$$

- $e^*(t)$ 的频谱为以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和.
- 设 $e(t)$ 带宽有限, 最高角频率为 ω_h , 则当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时, $e^*(t)$ 频谱的各部分不会相互重叠.

Nyquist-Shannon sampling theorem

- 若采样器的输入信号 $e(t)$ 只有有限带宽, 且其最高频率分量为 ω_h ,
- 当采样周期满足
$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$
则信号 $e(t)$ 可以完全从 $e^*(t)$ 中恢复出来.

这是连续信号能完全从离散信号复现的保证，即：连续信号转换为离散信号时没有丢失任何信息。

工程中 T 的选取

为了满足控制系统的性能指标，需要采样频率尽可能大一些。但采样频率过大或过小都有不足之处。

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
  - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
  - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

2.2 采样函数 Laplace 变换性质

采样函数 Laplace 变换性质:$G^*(s) = G^*(s + jk\omega_s)$

这个性质表明采样信号的 Laplace 变换是周期函数。

- 证明:

$$\begin{aligned}
G^*(s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\
G^*(s + jk\omega_s) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + j(n+k)\omega_s) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\
&= G^*(s)
\end{aligned}$$

采样函数 Laplace 变换性质:$[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$

这个性质表明：当一个连续系统的输入信号为采样信号时，如何得到输出信号的采样。

- 证明

$$\begin{aligned}
[G(s)E^*(s)]^* &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G(s+jn\omega_s)E^*(s+jn\omega_s)] \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G(s+jn\omega_s)E^*(s)] \\
&= (\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(s+jn\omega_s))E^*(s) \\
&= G^*(s)E^*(s)
\end{aligned}$$

2.3 信号的保持

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT+\Delta t) = a_0 + a_1\Delta t + a_2(\Delta t)^2 + \cdots + a_m(\Delta t)^m$$

  式中 $a_0, \cdots, a_m$ 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i = 0, \cdots, m)$ 惟一确定.
- $m = 0$ 时称为零阶保持器,
- $m = 1$ 时称为一阶保持器.

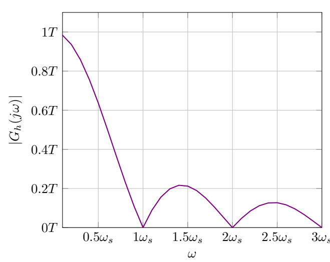
零阶保持器

- $e(nT+\Delta t) = a_0$ ，当 $\Delta t = 0$ 时, 有 $e(nT) = a_0$ ，即: 按常值外推, $e(t) = e(nT), t \in [nT, (n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为 $r^*(t) = \delta(t)$ ，则输出为 $e(t) = 1, t \in [nT, (n+1)T)$

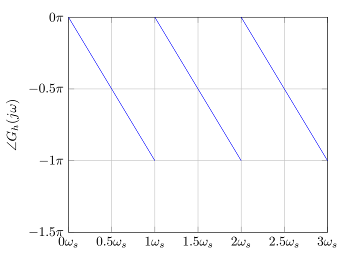
因此

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(r^*) &= 1 \\
\mathcal{L}(e) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \\
G_h(s) &= \frac{E(s)}{R^*(s)} = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \\
G_h(j\omega) &= \frac{1-e^{-jT\omega}}{j\omega} = \frac{e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2})}{j\omega} \\
&= \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-j\omega T/2} \\
&= \frac{2\sin\frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\omega} e^{-j\pi\omega/\omega_s}
\end{aligned}
$$

零阶保持器频率特性



- Bode 图



- 零阶保持器特性
  - 低通滤波
  - 相角迟后
  - 时间延迟

一阶保持器

$$\begin{aligned}
e(nT+\Delta t) &= a_0 + a_1\Delta t, \qquad (0 \le \Delta t < T) \\
a_0 &= e(nT) \\
a_1 &= \frac{e(nT)-e((n-1)T)}{T} \\
G_h(s) &= T(1+s)\left(\frac{1-e^{-Ts}}{Ts}\right)^2 \\
G_h(j\omega) &= \sqrt{1+(\omega T)^2}\left(\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}\right)^2 e^{-j(\omega T-\arctan\omega T)}
\end{aligned}$$

- 高频噪声增大
- 因此一般只用零阶保持器.

3 Z 变换

3.1 Z 变换

Z 变换定义

- 采样信号 $e^*(t)$ 的 Laplace 变换
$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nsT}$$
- 令 $Z = e^{sT}$, 则
$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$
- 得:
$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)Z^{-n}$$
- 记作
$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换计算

- 级数求和法
  - 按照 Z 变换的定义求解
- 部分分式法:
  - 先求出 $e(t)$ 的 Laplace 变换 $E(s)$, 将其展开成部分分式之和, 使每部分对应的 Z 变换是已知的.

级数求和法示例: $\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$

- 解:

$$\begin{aligned}
e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \\
e(nT) &= 1 \\
E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{z}{z-1}
\end{aligned}$$

其中 $\quad |z^{-1}|<1$

- $1(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 对应的 Z 变换相同.

级数求和法示例:单位阶跃信号 $1(t)$

- 解:

$$\begin{aligned}
e(nT) &= 1, \\
E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{1}{z-1}
\end{aligned}$$

其中 $\quad |z^{-1}|<1$

部分分式法示例: $E(s)=\frac{a}{s(s+a)}$

- 解:

$$\begin{aligned}
E(s) &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s+a} \\
e(t) &= 1-e^{-at} \\
E(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}
\end{aligned}$$

- Z 变换表:

$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t)+\beta e_2(t)] = \alpha E_1(z)+\beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t+kT)] = z^k[E(z)-\sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n\to\infty} e(nT) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$. $(x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T))$

3.2 Z 反变换

Z 反变换

$$e(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[E(z)]$$

- 幂级数展开法
- 部分分式法
  - 展开成部分分式后查表
- 反演积分法

幂级数展开法

$$\begin{aligned}
E(z) &= \frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}} \\
&= c_0+c_1z^{-1}+\cdots+c_nz^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_nz^{-n} \\
e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\delta(t-nT) \\
e(nT) &= c_n
\end{aligned}$$

反演积分法

$$
\begin{aligned}
E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} \\
&= e(0) + e(T)z^{-1} + \cdots + e(nT)z^{-n} + \cdots \\
E(z)z^{n-1} &= e(0)z^{n-1} + e(T)z^{n-2} + \cdots + e(nT)z^{-1} + \cdots \\
e(nT) &= Res(E(z)z^{n-1})
\end{aligned}
$$

反演积分法示例: $E(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$ 求 $e(nT)$

- 解:

$$
\begin{aligned}
E(z)z^{n-1} &= \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
Res_1 &= \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
&= 2 \\
Res_2 &= \lim_{z\to 0.5} \frac{(z-0.5)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
&= -0.5^n \\
e(nT) &= Res_1 + Res_2 \\
&= 2 - 0.5^n
\end{aligned}
$$

4 离散系统数学模型

4.1 差分方程

差分方程模型

- n 阶后向差分方程

$$
\begin{aligned}
& c(k) + a_1 c(k-1) + \cdots + a_n c(k-n) \\
= \; & b_0 r(k) + b_1 r(k-1) + \cdots + b_m r(k-m)
\end{aligned}
$$

  即 k 时刻的输出 $c(k)$ 与 k 时刻前 n 个时刻输出及前 m 个输入, 当前时刻输入有关.

- n 阶前向差分方程

$$
\begin{aligned}
& c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \cdots + a_n c(k) \\
= \; & b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \cdots + b_m r(k)
\end{aligned}
$$

差分方程解法：迭代法

- 利用差分方程的递推关系, 逐步计算 $c(k)$ 的值
- 例: $c(k) = r(k) + 5c(k-1) - 6c(k-2)$ 输入 $r(k) = 1$, 初始条件: $c(0) = 0, c(1) = 1$
- 解:

$$\begin{aligned} c(2) &= 6 \\ c(3) &= 25 \\ c(4) &= 90 \end{aligned}$$

z 变换法

- 将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.
- 例: 差分方程 $c(t+2T) + 3c(t+T) + 2c(t) = 0$ 初始条件 $c(0) = 0, c(1) = 1$
- 解:

$$\begin{aligned} & z^2(c(z) - c(0) - c(1)z^{-1}) + 3z(c(z) - c(0)) + 2c(z) = 0 \\ & (z^2 + 3z + 2)c(z) = z \\ & c(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} = \frac{1}{1+z^{-1}} - \frac{1}{1+2z^{-1}} \\ & c(k) = (-1)^k - (-2)^k \end{aligned}$$

  其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$

4.2 脉冲传递函数

脉冲传递函数定义

- 连续系统: 传递函数 (s 域)
- 离散系统: 脉冲传递函数 (z 域)
- 定义: 输出 $c^*(t)$ 的 Z 变换与输入 $r^*(t)$ 的 Z 变换之比 (零初始条件下) 叫做系统的脉冲传递函数. 记为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

脉冲传递函数意义

- 加权序列：输入 $r^*(t)=\delta(t)$ 的输出序列称为加权序列，记为 $k^*(t)$
- 脉冲传递函数:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\
&= \mathcal{Z}[k^*(t)] \\
&= k(z)
\end{aligned}
$$

- 脉冲传递函数为加权序列 $k^*(t)$ 的 Z 变换

两种模型之间的变换关系:

$$
\begin{aligned}
c(nT)+\sum_{k=1}^{n} a_k c((n-k)T) &= \sum_{k=0}^{m} b_k r((n-k)T) \\
G(z) &= \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}
\end{aligned}
$$

- 差分方程在零初始条件下进行 Z 变换，得脉冲传递函数.

脉冲传递函数计算

- 差分方程 Z 变换: $G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数 $G(s)$ 求解 (部分分式法)
- 例: $c(nT)=r[(n-k)T]$
- 解:

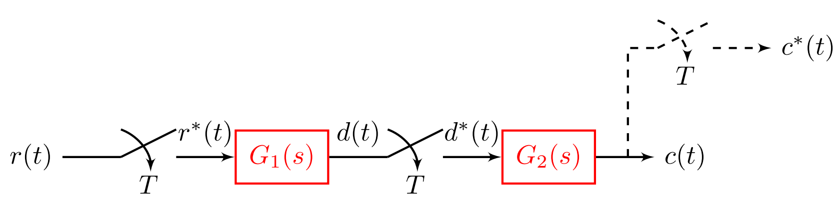
$$
\begin{aligned}
C(z) &= z^{-k}R(z) \\
G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} \\
&= z^{-k}
\end{aligned}
$$

4.3 开环系统的脉冲传递函数

开环系统脉冲传递函数

按定义求，即: $G(z)=\frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$

- 结构图

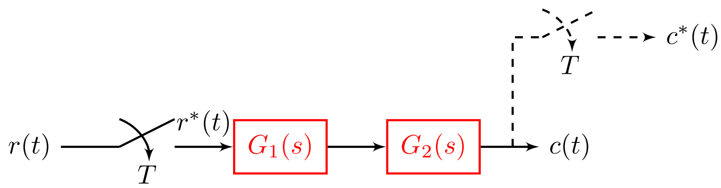


- 推导

$$
\begin{aligned}
D(z) &= R(z)G_1(z) \\
C(z) &= D(z)G_2(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \\
G(z) &= G_1(z)G_2(z)
\end{aligned}
$$

开环系统脉冲传递函数 (续)

- 结构图

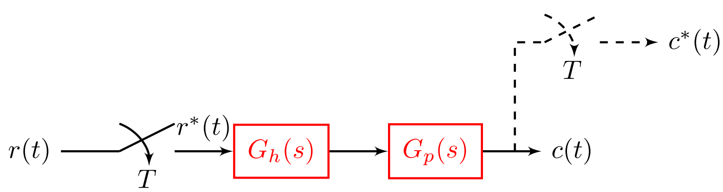


- 推导

$$
\begin{aligned}
C^*(s) &= [R^*(s)G_1(s)G_2(s)]^* = R^*(s)[G_1(s)G_2(s)]^* \\
C(z) &= R(z)G_1G_2(z) \\
G(z) &= G_1G_2(z)
\end{aligned}
$$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:

- 结构图



- 推导
  - $C^*(s) = [R^*(s) \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^*$
  - $C^*(s) = R^*(s)[(1-e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
  - $C^*(s) = R^*(s)[\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^*$
  - $C(z) = R(z)\mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{s}] - z^{-1}\mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{s}]$
  - $G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{s}]$

开环系统脉冲传递函数示例: $G_p(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

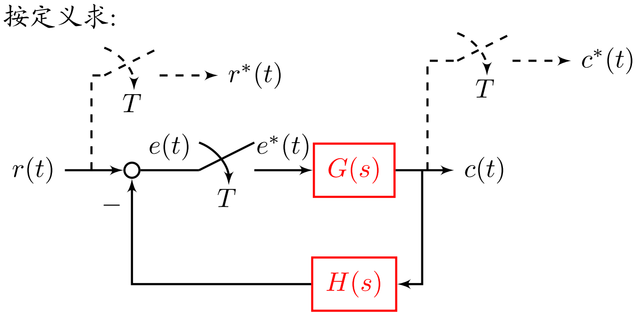
- 解:

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{a}{s^2(s+a)}] \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{a}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a})] \\ &= (1-z^{-1})\left[\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{a}(\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}})\right] \end{aligned}$$

4.4 闭环系统的脉冲传递函数

闭环系统的脉冲传递函数

按定义求:



- 脉冲传递函数

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\ \Phi_e(z) &= \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[e^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \end{aligned}$$

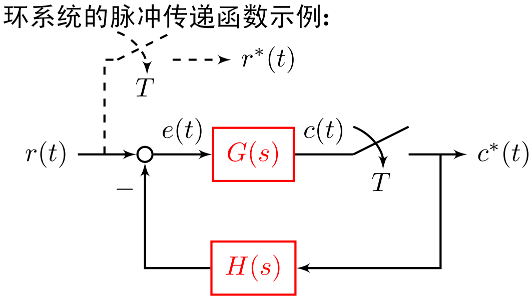
- 解:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E^*(s) \\ E(s) &= R(s)-H(s)C(s) \\ &= R(s)-H(s)G(s)E^*(s) \end{aligned}$$

闭环系统的脉冲传递函数 (续)

$$
\begin{aligned}
E^*(s) &= R^*(s) - HG^*(s)E^*(s) \\
&= \frac{R^*(s)}{1+HG^*(s)} \\
\Phi_e(z) &= \frac{1}{1+HG(z)} \\
C^*(s) &= G^*(s)E^*(s) \\
&= \frac{G^*(s)R^*(s)}{1+HG^*(s)} \\
\Phi(z) &= \frac{G(z)}{1+HG(z)}
\end{aligned}
$$

闭环系统的脉冲传递函数示例:



- 解:

$$
\begin{aligned}
E(s) &= R(s) - H(s)C^*(s) \\
C(s) &= G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s) \\
C^*(s) &= GR^*(s) - GH^*(s)C^*(s) = \frac{GR^*(s)}{1+GH^*(s)}
\end{aligned}
$$

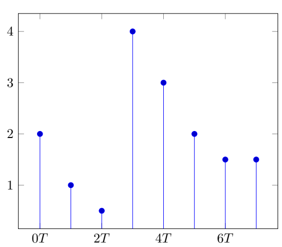
- 没有闭环脉冲传递函数

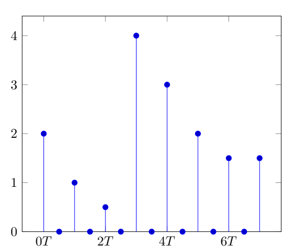
4.5 修正 Z 变换

$c^*(t)$ 与 $c(t)$

- 采样间隔 τ 要远小于系统最小时间常数
- c(nT) 不能反映采样间隔中的信息
- G(s) 要满足: $n \geq m+2$，否则 $c^*(t)$ 与 $c(t)$ 差别较大.

修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
  - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得: $R'(z) = R(z^n)$
  - 计算在采样周期 $\frac{T}{n}$ 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
  - 原输入信号 Z 变换为 $R(z)$, 将 z 替换为: z^n .
  - 以 $\frac{T}{n}$ 重新计算系统脉冲传递函数.
- $R(z)$ 

- $R(z^2)$,$(T' = \frac{T}{2})$ 

修正 Z 变换示例:

$$G(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$T = 1$, $r(t) = 1(t)$, 要求每采样周期中间插入两点.

- 解:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z}{z - e^{-1/3}} \\
r(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
r'(z) &= r(z^3) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-3}} \\
c'(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-1/3}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-3}}
\end{aligned}$$

5 离散系统稳定性

5.1 稳定性

S 域到 Z 域的映射

- $S \leftrightarrow Z$

$$
\begin{aligned}
z &= e^{sT} \\
s &= \sigma + j\omega \\
z &= e^{\sigma T} e^{j\omega T} \\
|z| &= e^{\sigma T} \\
\angle z &= \omega T
\end{aligned}
$$

  - 当 $\sigma = 0$ 时, 对应到 z 平面的单位圆, 此时, ω 从 $-\infty \to \infty$ 时, z 平面上的点已绕单位圆运动了无数圈, 称 $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ 为主要带.

- 主要映射关系:
  - 等 σ 线: 单位圆: $|z| = e^{\sigma T}$
  - 等 ω 线: 过原点射线: $\angle z = \omega T$
  - 等 ξ 线 (S 平面过原点射线): 对数螺线

离散系统的稳定性

- 稳定性定义: 离散系统在有界输入序列下, 输出序列也有界.
- 连续系统中: 闭环系统的特征根实部 σ 小于 0.
- 离散系统中: $|z| < 1$,($|z| = e^{\sigma}$)
  - 差分方程: 特征根的模均小于 1
  - 闭环脉冲传递函数: 离散系统闭环特征根在 Z 平面的单位圆内 ($|z_i| < 1$)

5.2 稳定性判据

解特征方程, 根据 $|z_i| < 1$ 判断

W 域的劳斯判据

- Z 域变换到 W 域:

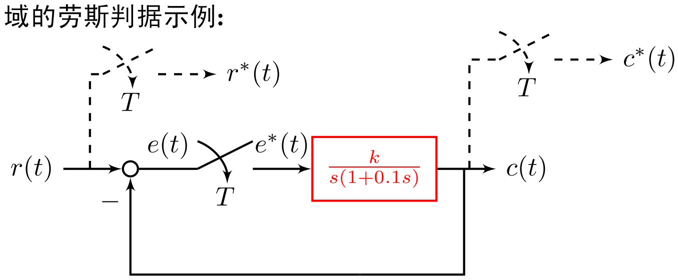
$$
\begin{aligned}
z &= x + jy \\
w &= u + jv \\
z &= \frac{w+1}{w-1} \\
w &= \frac{z+1}{z-1}
\end{aligned}
$$

- 等价关系:

$$
\begin{aligned}
u + jv &= \frac{x^2 + y^2 - 1 - 2yj}{(x-1)^2 + y^2} \\
|z| < 1 &\Leftrightarrow u < 0
\end{aligned}
$$

- 可在 W 域中使用 Routh 判据.

W 域的劳斯判据示例:



分有无采样开关 ($T = 0.1s$) 两种情况分析使系统稳定的 k 需要满足的条件.

- 解: 无采样开关时:

$$D(s) = 0.1s^2 + s + k$$

得: $k > 0$

W 域的劳斯判据示例 (续): 有采样开关时:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \mathcal{Z}[\frac{k}{s(1+0.1s)}] = \frac{0.632kz}{z^2 - 1.368z + 0.368} \\
\Phi(z) &= \frac{G(z)}{1 + G(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(z) &= z^2 + (0.632k - 1.368)z + 0.368 \\
z &= \frac{w+1}{w-1} \\
D(w) &= 0.632Kw^2 + 1.264w + (2.736 - 0.632k)
\end{aligned}
$$

W 域的劳斯判据示例 (续): 有采样开关时:

- Routh 表:

$$
\begin{array}{ccc}
w^2 & 0.632k & 2.7360 - 0.632k \\
w^1 & 1.264 & 0 \\
w^0 & 2.736 - 0.632k &
\end{array}
$$

- 得:

$$\begin{aligned} 0.632k &> 0 \\ 2.736 - 0.632k &> 0 \end{aligned}$$

- 得:

$$0 < k < 4.33$$

- 采样开关对稳定性有很大影响.

5.3 离散系统稳定性影响因素

离散系统稳定性影响因素

- 系统开环增益
  - $k \uparrow$ 则离散系统稳定性下降
  - $k \downarrow$ 则离散系统稳定性提高
- 采样周期
  - $T \uparrow$ 则离散系统稳定性下降
  - $T \downarrow$ 则离散系统稳定性提高

6 离散系统稳态误差

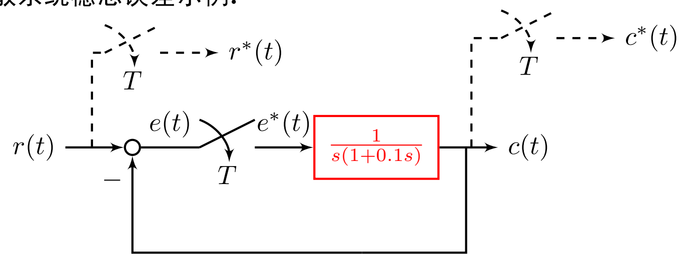
6.1 离散系统稳态误差

离散系统稳态误差

- 连续系统稳定误差:
  - Laplacian 变换的终值定理
  - 静态误差系数
  - 动态误差系数
- 离散系统稳态误差
  - Z 变换终值定理

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} e^*(t) &= \lim_{z \to 1} (z-1)E(z) \\ &= \lim_{z \to 1} (z-1)\Phi_e(z)R(z) \end{aligned}$$

离散系统稳态误差示例:



其中 $T = 0.1, r_1(t) = 1(t), r_2(t) = t$ 求离散系统相应的稳态误差

- 解:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{z(1-0.368)}{(z-1)(z-0.368)} \\
\Phi_e(z) &= \frac{1}{1+G(z)} = \frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}
\end{aligned}
$$

离散系统稳态误差示例 (续)

- $r_1(t) = 1(t)$ 时

$$
\begin{aligned}
R_1(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\
\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\Phi_e(z)R(z) &= 0
\end{aligned}
$$

- $r_2(t) = t(t)$ 时

$$
\begin{aligned}
R_1(z) &= \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \\
\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\Phi_e(z)R(z) &= \lim_{z\to 1}\frac{T(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368} \\
&= T \\
&= 0.1
\end{aligned}
$$

6.2 离散系统型别与静态误差系数

离散系统型别

- 连续系统型别:

$$G_o(s) = \frac{M(s)}{s^\nu N(s)}$$

若 $\nu = 0, 1, 2$ 则分别称为 0 型,I 型,II 型系统.

- 离散系统型别:

$$G_o(z) = \frac{M(z)}{(z-1)^\nu N(z)}$$

若 $\nu = 0, 1, 2$ 则分别称为 0 型,I 型,II 型系统. ($G_o(z)$ 为单位负反馈开环脉冲传递函数)

静态误差系数:0 型系统:

- 连续系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s\to 0} G_o(s) \\ r(t) &= 1 \\ e_{ss} &= \frac{1}{1+K_p} \end{aligned}$$

- 离散系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z\to 1}(1+G_o(z)) \\ r(t) &= 1(t) \\ e_{ss} &= \frac{1}{K_p} \end{aligned}$$

静态误差系数:I 型系统:

- 连续系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s\to 0} sG_o(s) \\ r(t) &= t \\ e_{ss} &= \frac{1}{K_v} \end{aligned}$$

- 离散系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z\to 1}(z-1)G_o(z) \\ r(t) &= t \\ e_{ss} &= \frac{T}{K_v} \end{aligned}$$

静态误差系数:II 型系统:

- 连续系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s\to 0} s^2G_o(s) \\ r(t) &= \frac{t^2}{2} \\ e_{ss} &= \frac{1}{K_a} \end{aligned}$$

- 离散系统

$$
\begin{aligned}
K_p &= \lim_{z\to 0}(z-1)^2 G_o(s) \\
r(t) &= \frac{t^2}{2} \\
e_{ss} &= \frac{T^2}{K_a}
\end{aligned}
$$

7 离散系统动态性能分析

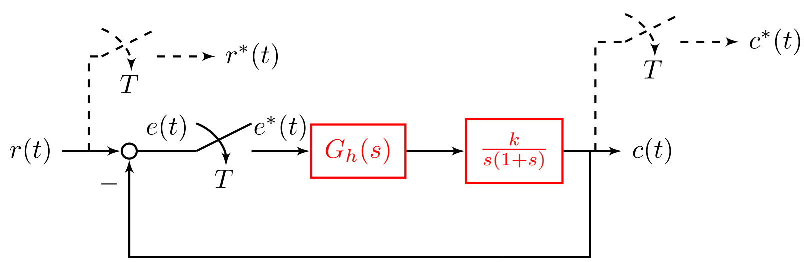
连续系统: 时域分析, 根轨迹法, 频域法, 离散系统也有类似方法, 这里只讨论时域响应

7.1 离散系统时间响应

离散系统时间响应计算

- 求 $\Phi(z)$ 计算 $C(z)=\Phi(z)R(z)$,Z 反变换求出 $C^*(t)$
- 不存在 $\Phi(z)$ 时, 直接计算 $C(z)$, Z 反变换求出 $C^*(t)$

离散系统时间响应计算示例:



- 结构图

  其中 $r(t)=1(t), T=1s, k=1$ 求系统动态性能指标.

- 解:

  $G_o(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2(s+1)}]=\frac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)}$

  $\Phi(z)=\frac{G_o(z)}{1+G_o(z)}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$

  $C(z)=\Phi(z)R(z)=\frac{0.368z^{-1}+0.264z^{-2}}{1-2z^{-1}+1.632z^{-2}-0.632z^{-3}}$

  $C(z)=0.368z^{-1}+z^{-2}+1.4z^{-3}+1.4z^{-4}+1.147z^{-5}+0.895z^{-6}+0.802z^{-7}+0.868z^{-8}+\cdots$

  $t_r=2s, t_s=12s, \sigma\%=40\%$

7.2 采样器, 保持器对系统动态性能的影响

采样器, 保持器对系统动态性能的影响

- 定性说明:
  - 采样器: 使系统稳定性下降, 使 $\sigma\% \uparrow, t_r \downarrow, t_s \downarrow$
  - 保持器: 使系统稳定性下降, 使 $\sigma\% \uparrow, t_r \uparrow, t_s \uparrow$
- 对大迟延系统, 无上述定性结论

7.3 闭环极点与动态响应的关系

闭环极点与动态响应的关系

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \\ &= e^{\sigma T} e^{j\omega T} \end{aligned}$$

- 若闭环极点 $|z| > 1$, 则有 $\sigma > 0$, 系统不稳定.
- 若闭环极点 $|z| = 1$, 则有 $\sigma = 0$, 等幅振荡.
- 若闭环极点 $|z| < 1$, 则有 $\sigma < 0$, 系统稳定.
  - 闭环极点为正实数: 单调收敛
  - 闭环极点为负实数: 振荡收敛
  - 闭环极点为具有正实部的复数: 低频振荡收敛
  - 闭环极点为具有负实部的复数: 高频振荡收敛
  - 若 $|z| \to 0$, $\sigma \to -\infty$, 收敛极快
  - 系统期望的闭环极点在 Z 平面单位圆的右半圆内