线性系统时域分析法 线性系统动态性能分析

Outline

- 1 一阶系统动态性能
- ② 二阶系统时域分析
- ③ 二阶系统阶跃响应指标计算
- 4 二阶系统单位斜坡响应
- 5 高阶系统时域分析 (3 阶及以上系统)

Topic

- 1 一阶系统动态性能
- 2 二阶系统时域分析
- 3 二阶系统阶跃响应指标计算
- 4 二阶系统单位斜坡响应
- 5 高阶系统时域分析(3 阶及以上系统)

一阶系统单位阶跃响应

$$R(s) \xrightarrow{R} \underbrace{\frac{1}{Ts}} C(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s)$$

$$= \frac{-T}{Ts+1} + \frac{e^{-t/T}}{Ts+1}$$

一阶系统单位脉冲响应

$$R(s) = 1$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s)$$

$$= \Phi(s)$$

$$= \frac{1}{Ts+1}$$

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$$

一阶系统单位斜坡响应

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s)$$

$$= \frac{1}{(Ts+1)s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

$$c(t) = (t-T) + Te^{-t/T}$$

一阶系统单位加速度响应

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s)$$

$$= \frac{1}{(Ts+1)s^3}$$

$$= \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^3}{sT+1}$$

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-t/T})$$

Topic

- 1 一阶系统动态性能
- ② 二阶系统时域分析
- 3 二阶系统阶跃响应指标计算
- 4 二阶系统单位斜坡响应
- 5 高阶系统时域分析(3 阶及以上系统)

传递函数

$$R(s)$$
 \Longrightarrow $C(s)$ $C(s)$ $C(s)$ $C(s)$ $C(s)$

• ωn: 自然频率, 无阻尼振荡频率

$$r(t) = 1$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\xi \leq 0$$

- $\xi < 0$ 时有正实根, 不稳定
- $\xi = 0$ 时有两个纯虚根, 无阻尼, 临界稳定, 等幅振荡, 频率为 ω_n ,

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$
$$= \frac{-s}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{1}{s}$$
$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

$$\xi \leq 0$$

• $\xi < 0$ 时有正实根, 不稳定

• $\xi = 0$ 时有两个纯虚根, 无阻尼, 临界稳定, 等幅振荡, 频率为 ω_n ,

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$
$$= \frac{-s}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{1}{s}$$
$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

$$\xi \leq 0$$

- $\xi < 0$ 时有正实根, 不稳定
- $\xi = 0$ 时有两个纯虚根, 无阻尼, 临界稳定, 等幅振荡, 频率为 ω_{n} ,

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$
$$= \frac{-s}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{1}{s}$$
$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

$$\xi > 1$$

系统闭环极点为两个不同的实根. 过阻尼, 相当于两个一阶系统并联. σ % = 0

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{(s - p_1)(s - p_2)}
= \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2}
c(t) = 1 - \frac{e^{p_1 t}}{1 - \frac{p_1}{p_2}} - \frac{e^{p_2 t}}{1 - \frac{p_2}{p_2}}$$

$$\xi = 1$$

• 闭环极点有两个相同的负实根 $p_{1,2} = -\xi \omega_n = -\omega_n$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

• 且有:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \omega_n e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) - \omega_n e^{-\omega_n t} = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} > 0$$

$$c(0) = 0$$

$$c(\infty) = 1$$

$$\sigma\% = 0$$

$$t_s = 4.75T$$

$$T = \frac{1}{-\omega_n t} = 0$$

$$\xi = 1$$

• 闭环极点有两个相同的负实根 $p_{1,2} = -\xi \omega_n = -\omega_n$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

• 且有:

$$\begin{split} \frac{dc(t)}{dt} &= \omega_n e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) - \omega_n e^{-\omega_n t} = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} > 0 \\ c(0) &= 0 \\ c(\infty) &= 1 \\ \sigma\% &= 0 \\ t_s &= 4.75 T \\ T &= \frac{1}{\omega_n} \end{split}$$

$$0 < \xi < 1$$

系统有一对实部小于零的共轭复根, $p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{p_2}{(p_1 - p_2)(s - p_1)} + \frac{p_1}{(p_2 - p_1)(s - p_2)}$$

$0 < \xi < 1$

$$c(t) = 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} e^{\rho_1 t} + \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} e^{\rho_2 t}$$

$$= 1 + 2\Re \left[\frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} e^{\rho_1 t} \right]$$

$$= 1 + 2\Re \left[\frac{-\omega_n e^{j\beta}}{2j\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} e^{j\omega_d t} \right]$$

$$= 1 - e^{-\xi \omega_n t} \Re \left[\frac{\omega_n}{j\omega_d} e^{j(\omega_d t + \beta)} \right]$$

$$= 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \qquad \omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n$$

Topic

- 1 一阶系统动态性能
- 2 二阶系统时域分析
- ③ 二阶系统阶跃响应指标计算
- 4 二阶系统单位斜坡响应
- 5 高阶系统时域分析(3 阶及以上系统)

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

- 欠阻尼. ω_d 称为有阻尼振荡频率. 最佳阻尼比 $\xi=0.707$
- 指标: σ%, t_s, t_p, t_r 等

上升时间 tr

- 100% 的 t_r : c(t) 首次达到 $c(\infty)$ 的时间
- 90% 的 t_r : c(t) 首次达到 $90\%c(\infty)$ 的时间
- 70% 的 t_r : c(t) 首次达到 $70\%c(\infty)$ 的时间

$$c(t) = c(\infty)$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) = 1$$

$$\sin(\omega_d t + \beta) = 0$$

$$\omega_d t + \beta = k\pi$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d t}$$

峰值时间 to

$$\frac{dc(t)}{dt} = 0$$

$$-\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) + e^{-\xi \omega_n t} \omega_d \cos(\omega_d t + \beta) = 0$$

$$\omega_d \cos(\omega_d t + \beta) = \xi \omega_n \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$\tan(\omega_d t + \beta) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

$$\tan(\omega_d t + \beta) = \tan \beta$$

$$\omega_d t = k\pi$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d t}$$

$$\sigma\% = \frac{c_{max} - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi \omega_n \pi}{\omega_d}} \sin(\pi + \beta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \sin(\beta)$$

$$= e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \times 100\%$$

- · σ% 只与 ε 有关, 两者成反比关系
- 工程上一般取 ε ∈ [0.4.0.8
- 最佳阻尼比 $\varepsilon = 0.707, \sigma\% = 4.3\%$

$$\begin{split} \sigma\% &= \frac{c_{\max} - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi\omega_n \pi}{\omega_d}} \sin(\pi + \beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \sin(\beta) \\ &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \times 100\% \end{split}$$

- σ % 只与 ε 有关, 两者成反比关系
- 工程上一般取 € ∈ [0.4, 0.8]
- 最佳阻尼比 $\varepsilon = 0.707, \sigma\% = 4.3\%$

$$\begin{split} \sigma\% &= \frac{c_{\max} - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi\omega_n \pi}{\omega_d}} \sin(\pi + \beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \sin(\beta) \\ &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \times 100\% \end{split}$$

- σ % 只与 ε 有关, 两者成反比关系
- 工程上一般取 ξ ∈ [0.4, 0.8]
- 最佳阻尼比 $\xi = 0.707, \sigma\% = 4.3\%$

$$\begin{split} \sigma\% &= \frac{c_{\max} - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi \omega_n \pi}{\omega_d}} \sin(\pi + \beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \sin(\beta) \\ &= e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \times 100\% \end{split}$$

- σ % 只与 ε 有关, 两者成反比关系
- 工程上一般取 ξ ∈ [0.4, 0.8]
- 最佳阻尼比 $\xi = 0.707, \sigma\% = 4.3\%$

调节时间 ts

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$\approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t}$$

$$e(t) = c(\infty) - c(t)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t}$$

•
$$t_s$$
 与 ω_n , ξ 有关: 通常取 $\xi \omega_n t_s = 3.5$, $t_s = \frac{3.5}{\xi \omega_n}$

调节时间 ts

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$\approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t}$$

$$e(t) = c(\infty) - c(t)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t}$$

•
$$t_s$$
与 ω_n , ξ 有关: 通常取 $\xi \omega_n t_s = 3.5$, $t_s = \frac{3.5}{\xi \omega}$

- $\sigma\% = 0$
- $\xi = 1$ 时,

$$t_s = \frac{4.75}{\omega_n}$$

• $\xi > 1, |p_1| ≪ |p_2|$ 时, 系统降阶, 去掉极点 p_2

$$t_s = \frac{3}{|p_1|}$$

- $\xi = 1$ 时,

$$t_s = \frac{4.75}{\omega_n}$$

• $\xi > 1, |p_1| \ll |p_2|$ 时, 系统降阶, 去掉极点 p_2

$$t_s = \frac{3}{|p_1|}$$

- $\sigma\% = 0$
- $\xi = 1$ 时,

$$t_s = \frac{4.75}{\omega_n}$$

● $\xi > 1$, $|p_1| \ll |p_2|$ 时, 系统降阶, 去掉极点 p_2

$$t_s = \frac{3}{|p_1|}$$

•
$$\sigma\% = 0$$

•
$$\xi = 1$$
 时,

$$t_s = \frac{4.75}{\omega_n}$$

• $\xi > 1, |p_1| \ll |p_2|$ 时, 系统降阶, 去掉极点 p_2 ,

$$t_s = \frac{3}{|p_1|}$$

Topic

- 1 一阶系统动态性能
- 2 二阶系统时域分析
- 3 二阶系统阶跃响应指标计算
- 4 二阶系统单位斜坡响应
- 5 高阶系统时域分析(3 阶及以上系统)

欠阻尼单位斜坡响应

$$C(s) = \frac{\omega_{n}^{2}}{s^{2}(s^{2} + 2\xi\omega_{n}s + \omega_{n}^{2})}$$

$$= \frac{1}{s^{2}} - \frac{2\xi}{\omega_{n}s} + \frac{2\xi(s + \xi\omega_{n}) + \omega_{n}(2\xi^{2} - 1)}{\omega_{n}(s^{2} + 2\xi\omega_{n}s + \omega_{n}^{2})}$$

$$c(t) = t - \frac{2\xi}{\omega_{n}} + \frac{1}{\omega_{n}\sqrt{1 - \xi^{2}}} e^{-\xi\omega_{n}t} \sin(\omega_{d}t + 2\beta)$$

$$e(t) = \frac{2\xi}{\omega_{n}} \left[1 - \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^{2}}} e^{-\xi\omega_{n}t} \sin(\omega_{d}t + 2\beta) \right]$$

临界阻尼单位斜坡响应

$$c(t) = t - \frac{2}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n} (1 + \frac{1}{2}\omega_n t) e^{-\omega_n t}$$

$$e(t) = \frac{2}{\omega_n} \left[1 - (1 + \frac{1}{2}\omega_n t) e^{-\omega_n t} \right]$$

过阻尼单位斜坡响应

$$C(s) = \frac{1}{s^{2}} - \frac{2\xi}{\omega_{n}s} + \frac{2\xi(s + \xi\omega_{n}) + \omega_{n}(2\xi^{2} - 1)}{\omega_{n}(s - \rho_{1})(s - \rho_{2})}$$

$$p_{1} = -\omega_{n}\xi + \omega_{n}\sqrt{\xi^{2} - 1}$$

$$p_{2} = -\omega_{n}\xi - \omega_{n}\sqrt{\xi^{2} - 1}$$

$$c(t) = t - \frac{2\xi}{\omega_{n}} + \frac{2\xi^{2} - 1 + 2\xi\sqrt{\xi^{2} - 1}}{2\omega_{n}\sqrt{\xi^{2} - 1}}e^{\rho_{1}t}$$

$$-\frac{2\xi^{2} - 1 - 2\xi\sqrt{\xi^{2} - 1}}{2\omega_{n}\sqrt{\xi^{2} - 1}}e^{\rho_{2}t}$$

Topic

- 1 一阶系统动态性能
- 2 二阶系统时域分析
- ③ 二阶系统阶跃响应指标计算
- 4 二阶系统单位斜坡响应
- 5 高阶系统时域分析(3 阶及以上系统)

- 根的几种情况
 - 3 个负实根 p₁, p₂, p₂
 - ○1个负实根,一对共轭复根

$$-s_0, -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, (0<\xi<1)$$

• 根的几种情况

- 3 个负实根 p₁, p₂, p₃
- 1 个负实根, 一对共轭复根

$$-s_0, -\xi \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}, (0<\xi<1)$$

- 根的几种情况
 - 3 个负实根 p₁, p₂, p₃
 - 1个负实根,一对共轭复根

$$-s_0, -\xi \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}, (0 < \xi < 1)$$

- 根的几种情况
 - 3 个负实根 p₁, p₂, p₃
 - 1 个负实根, 一对共轭复根

$$-s_0, -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, (0<\xi<1)$$

- 根的几种情况
 - 3 个负实根 p₁, p₂, p₃
 - 1 个负实根, 一对共轭复根

$$-s_0, -\xi \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}, (0 < \xi < 1)$$

三阶系统 $(\Phi(s))$ 单位阶跃响应 (C(s))

$$\Phi(s) = \frac{s_0 \omega_n^2}{(s+s_0)(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$C(s) = \frac{s_0 \omega_n^2}{s(s+s_0)(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-s_0 t}}{b\xi^2(b-2) + 1} - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{b\xi^2(b-2) + 1}$$

$$\left(b\xi^2(b-2)\cos \omega_d t + \frac{b\xi(\xi^2(b-2) + 1)}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin \omega_d t\right)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$b = \frac{s_0}{\xi \omega_n}$$

一阶系统动态性能 二阶系统时域分析 二阶系统阶跃响应指标计算 二阶系统单位斜坡响应 高阶系统时域分析 (3 阶及以上系统)

b 对 c(t) 的影响

$$c(t) \approx 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$\approx 1 - e^{-s_0}$$

$$c(t) \approx 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{1 - \xi^2} (1 + \xi \sin(\omega_d t - \beta))$$

b 对 c(t) 的影响

• 复根比实根离虚轴近得多

$$c(t) \approx 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t \right)$$

近似看作2阶欠阻尼系统.

• 实根比复根离虚轴近得多

$$c(t) \approx 1 - e^{-s_0 t}$$

近似看作1阶系统

• 实根与复根与虚轴距离同

$$c(t) \approx 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{1 - \xi^2} (1 + \xi \sin(\omega_d t - \beta))$$

b对 c(t) 的影响

• 复根比实根离虚轴近得多

$$c(t) \approx 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t \right)$$

近似看作2阶欠阻尼系统.

• 实根比复根离虚轴近得多

$$c(t) \approx 0$$

$$c(t) \approx 1 - e^{-s_0 t}$$

近似看作 1 阶系统

• 实根与复根与虚轴距离同

$$b \approx 1$$
 $c(t) \approx 1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{1 - \xi^2} (1 + \xi \sin(\omega_d t - \beta))$

b对 c(t) 的影响

复根比实根离虚轴近得多

$$c(t) \approx 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t \right)$$

近似看作2阶欠阻尼系统.

• 实根比复根离虚轴近得多

$$c(t) \approx 0$$

$$c(t) \approx 1 - e^{-s_0 t}$$

近似看作 1 阶系统

实根与复根与虚轴距离同

$$\begin{array}{ll} b & \approx & 1 \\ c(t) & \approx & 1 - \frac{e^{-\xi\omega_nt}}{1-\xi^2} \left(1 + \xi \sin(\omega_d t - \beta)\right) \end{array}$$

- 目的: 分析高阶系统的性能
- 内容:系统有多个极点,其中某些极点决定了整个系统的性能,对系统起主导作用,称这些极点为主导极点.
- 确定方法: 主导极点离虚轴距离为 a, 其它极点离虚轴距离 > 5a

- 目的: 分析高阶系统的性能
- 内容:系统有多个极点,其中某些极点决定了整个系统的性能,对系统起主导作用,称这些极点为主导极点.
- 确定方法: 主导极点离虚轴距离为 a, 其它极点离虚轴距离 > 5a

- 目的: 分析高阶系统的性能
- 内容:系统有多个极点,其中某些极点决定了整个系统的性能,对系统起主导作用,称这些极点为主导极点.
- 确定方法: 主导极点离虚轴距离为 a, 其它极点离虚轴距离 ≥5a

- 目的: 分析高阶系统的性能
- 内容:系统有多个极点,其中某些极点决定了整个系统的性能,对系统起主导作用,称这些极点为主导极点.
- 确定方法: 主导极点离虚轴距离为 a, 其它极点离虚轴距离 ≥5a