线性系统时域分析法

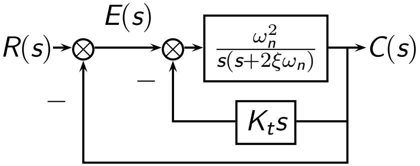
示例

Outline

Topic

1. 速度反馈
2. 比例 -微分控制
3. 比例 -积分控制

速度反馈分析

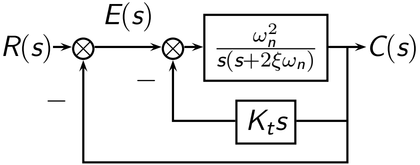


分析:

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi_t\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\xi_t = \xi + \frac{1}{2}K_t\omega_n$$

速度反馈分析

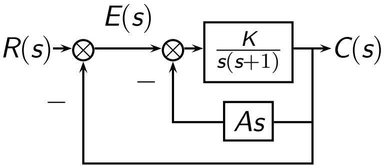


分析:

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi_t\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\xi_t = \xi + \frac{1}{2}K_t\omega_n$$

速度反馈示例



As 为系统的速度反馈，求解:

- $A=\{0.8,0\}$ 时系统稳态误差及动态品质指标（$K=1$，求 e_{ss} 时 $R(s)=\frac{1}{s^2}$）
- 若要求系统的 $\sigma\%=20\%$，$t_s\le 1s$，确定 A,K 的值

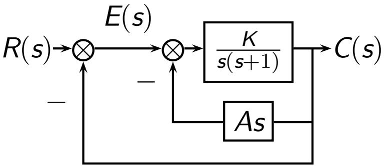
解:

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)+KAs}=\frac{K}{s^2+(KA+1)s}$$

$$\Phi(s)=\frac{K}{s^2+(KA+1)s+K}$$

系统稳定，为 I 型系统.

速度反馈示例



As 为系统的速度反馈, 求解:

- $A=\{0.8,0\}$ 时系统稳态误差及动态品质指标（$K=1$，求 e_{ss} 时 $R(s)=\frac{1}{s^2}$）
- 若要求系统的 $\sigma\%=20\%$，$t_s\le 1s$，确定 A,K 的值

解:

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)+KAs}=\frac{K}{s^2+(KA+1)s}$$

$$\Phi(s)=\frac{K}{s^2+(KA+1)s+K}$$

系统稳定, 为 I 型系统.

（续）计算稳态误差:

$R(s) = \frac{1}{s^2}$ 时,

$$
\begin{aligned}
e_{ss} &= \frac{1}{Kv} \\
K_v &= \lim_{s\to 0} sG(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{K}{s + KA + 1} \\
&= \frac{K}{KA + 1}
\end{aligned}
$$

- $K = 1, A = 0.8$ 时, $e_{ss} = \frac{KA+1}{K} = 1.8$
- $K = 1, A = 0$ 时, $e_{ss} = \frac{KA+1}{K} = 1$

（续）：计算动态品质:

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \\
&= \frac{K}{s^2+(KA+1)s+K} \\
\sigma\% &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
t_s &= \frac{3.5}{\xi\omega_n}
\end{aligned}
$$

- $K=1, A=0$ 时, $\omega_n=1, \xi=0.5, \sigma\%=16.3\%, t_s=7$
- $K=1, A=0.8$ 时, $\omega_n=1, \xi=0.9, \sigma\%=0.15\%, t_s=3.89$

（续）：计算动态品质:

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \\
&= \frac{K}{s^2+(KA+1)s+K} \\
\sigma\% &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
t_s &= \frac{3.5}{\xi\omega_n}
\end{aligned}
$$

- $K=1, A=0$ 时, $\omega_n=1, \xi=0.5, \sigma\%=16.3\%, t_s=7$
- $K=1, A=0.8$ 时, $\omega_n=1, \xi=0.9, \sigma\%=0.15\%, t_s=3.89$

（续）：计算动态品质:

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \\
&= \frac{K}{s^2+(KA+1)s+K} \\
\sigma\% &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\
t_s &= \frac{3.5}{\xi\omega_n}
\end{aligned}$$

- $K=1, A=0$ 时, $\omega_n=1, \xi=0.5, \sigma\%=16.3\%, t_s=7$
- $K=1, A=0.8$ 时, $\omega_n=1, \xi=0.9, \sigma\%=0.15\%, t_s=3.89$

（续）确定 A, K 值

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} &= 20\% \\
\frac{3.5}{\xi\omega_n} &= 1
\end{aligned}
$$

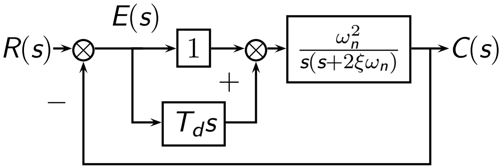
得: $\xi = 0.456, \omega_n = 7.68$

$$
\begin{aligned}
2\xi\omega_n &= AK + 1 \\
K &= \omega_n^2
\end{aligned}
$$

得: $A = 0.102, K = 58.9$

Topic

传递函数



比较原系统与 PD 控制系统的稳态性能与动态性能

解:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1+T_ds)}{s^2+2\xi\omega_n s}$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(1+T_ds)}{s^2+(2\xi+T_d\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2}$$

稳态误差

系统稳定, 为 I 型系统.

$$
\begin{aligned}
e_{ss} &= \frac{1}{K_v} \\
K_v &= \lim_{s\to 0} sG(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s+2\xi\omega_n} \\
&= \frac{\omega_n}{2\xi}
\end{aligned}
$$

e_{ss} 与 T_d 无关.

动态性能分析

考虑如下三个系统:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\
\Phi_2(s) &= \frac{\omega_n^2(1 + T_d s)}{s^2 + (2\xi + T_d\omega_n)\omega_n s + \omega_n^2} \\
\Phi_3(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\xi + T_d\omega_n)\omega_n s + \omega_n^2}
\end{aligned}
$$

- 与系统 1 相比, 系统 3 的阻尼比较大, 两者的自然频率相同.
- 因为:

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(s) &= (1 + T_d s)\Phi_3(s) \\
c_2(t) &= c_3(t) + T_d \frac{dc_3(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

由于存在微分作用, 因此对高频噪声有放大作用.

动态性能分析

考虑如下三个系统:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\\
\Phi_2(s) &= \frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s^2+(2\xi+T_d\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2}\\
\Phi_3(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+(2\xi+T_d\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2}
\end{aligned}
$$

- 与系统 1 相比, 系统 3 的阻尼比较大, 两者的自然频率相同.
- 因为:

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(s) &= (1+T_d s)\Phi_3(s)\\
c_2(t) &= c_3(t)+T_d\frac{dc_3(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

由于存在微分作用, 因此对高频噪声有放大作用.

动态性能分析

考虑如下三个系统:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \\
\Phi_2(s) &= \frac{\omega_n^2(1+T_d s)}{s^2+(2\xi+T_d\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2} \\
\Phi_3(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+(2\xi+T_d\omega_n)\omega_n s+\omega_n^2}
\end{aligned}
$$

- 与系统 1 相比, 系统 3 的阻尼比较大, 两者的自然频率相同.
- 因为:

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(s) &= (1+T_d s)\Phi_3(s) \\
c_2(t) &= c_3(t)+T_d\frac{dc_3(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

由于存在微分作用, 因此对高频噪声有放大作用.

动态性能计算：阶跃响应

$$\Phi = \frac{\omega_n^2}{z}\left(\frac{s+z}{s^2+2\xi_d\omega_n s+\omega_n^2}\right) \qquad (\xi_d = \xi + \frac{\omega_n}{2z}, z = \frac{1}{T_d})$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi_d\omega_n s+\omega_n^2)} + \frac{1}{z}\frac{s\omega_n^2}{s(s^2+2\xi_d\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$$h(t) = 1 + re^{-\xi_d\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}t+\psi)$$

$$r = \frac{\sqrt{z^2-2\xi_d\omega_n z+\omega_n^2}}{z\sqrt{1-\xi_d^2}}$$

$$\psi = -\pi + \arctan\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}}{z-\xi_d\omega_n} + \arctan\frac{\sqrt{1-\xi_d^2}}{\xi_d}$$

动态性能计算：峰值时间

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\tan(\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}t_p+\psi) &= \frac{\sqrt{1-\xi_d^2}}{\xi_d} \\
t_p &= \frac{\beta_d-\psi}{\omega_n\sqrt{1-\xi_d^2}} \qquad \left(\beta_d = \arctan\frac{\sqrt{1-\xi_d^2}}{\xi_d}\right)
\end{aligned}
$$

动态性能计算：超调量

$$
\begin{aligned}
h(t_p) &= 1 + re^{-\xi_d \omega_n t_p} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi_d^2} t_p + \psi) \\
&= 1 + re^{-\xi_d \omega_n t_p} \sin(\beta_d) \\
\sigma\% &= r\sqrt{1-\xi_d^2} e^{-\xi_d \omega_n t_p} \times 100\%
\end{aligned}
$$

动态性能计算：调节时间

$$
\begin{aligned}
\Delta &= |h(t) - h(\infty)| \\
&= |re^{-\xi_d \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi_d^2} t + \psi)| \\
&\leqslant re^{-\xi_d \omega_n t} \\
t_s &= \frac{3 + \ln r}{\xi_d \omega_n} \qquad (\Delta = 0.05)
\end{aligned}
$$

比例 -微分控制示例

设单位反馈系统开环传递函数：$G(s)=\frac{K(T_d s+1)}{s(1.67s+1)}$ 若要求单位斜坡函数输入时 $e_{ss}\le 0.2, \xi_d=0.5$ 求 K, T_d 的值，并估算系统在阶跃函数作用下的动态性能。

解：

求 K：

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \frac{1}{K}\le 0.2 \\ K &= 5 \end{aligned}$$

$T_d=0$

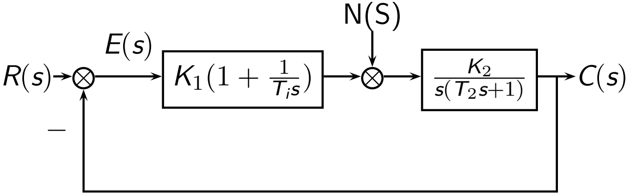
$$\begin{aligned} s^2+0.6s+3 &= 0 \\ \xi &= 0.173 \\ \omega_n &= 1.732 \\ t_p &= 1.84s \\ \sigma\% &= 57.6\% \\ t_s &= 11.7s \end{aligned}$$

$T_d\neq 0$

$$\begin{aligned} \xi_d &= 0.5 \\ T_d &= \frac{2(\xi_d-\xi)}{\omega_n} \\ t_p &= 1.63s \\ \sigma\% &= 22\% \\ t_s &= 3.49s \end{aligned}$$

Topic

比例 -积分控制分析



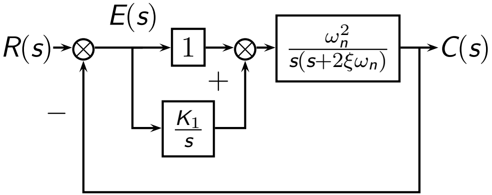
$$E_n(s) = -\frac{K_2 T_i s}{T_i T_2 s^3 + T_i s^2 + K_1 K_2 T_i s + K_1 K_2} N(s)$$

系统稳定时：

$$e_{ssn} = \lim_{s\to 0} sE_n(s) = 0 \qquad (N(s) = \frac{n_0}{s})$$

$$e_{ssn} = \lim_{s\to 0} sE_n(s) = -\frac{n_1 T_i}{K_1} \qquad (N(s) = \frac{n_1}{s^2})$$

比例 -积分控制示例



已知参数 $\xi = 0.2, \omega_n = 86.6$ 求：

- 使闭环系统稳定的 K_1 范围
- 使闭环系统极点实部全部小于 -1 的 K_1 范围

解：

$$\Phi = \frac{\omega_n(s+K_1)}{s^3+2\xi\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K_1\omega_n^2}$$

$$D(s) = s^3+2\xi\omega_n s^2+\omega_n^2 s+K_1\omega_n^2 = 0$$

$$D(s) = s^3+34.6s^2+7500s+7500K_1 = 0$$

比例 -积分控制示例 (稳定性)

Routh 表：

$$
\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 7500 \\
s^2 & 34.6 & 7500K_1 \\
s^1 & \frac{34.6\times7500-7500K_1}{34.6} & 0 \\
s^0 & 7500K_1 &
\end{array}
$$

得：

$$0 < K_1 < 34.6$$

比例 -积分控制示例 (相对稳定性)

设：$s = s_1 - 1$

$$(s_1 - 1)^3 + 34.6(s_1 - 1)^2 + 7500(s_1 - 1) + 7500K_1 = 0$$
$$s_1^3 + 31.6s_1^2 + 7433.8s_1 + (7500K_1 - 7466.4) = 0$$

Routh 表：

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & 7433.8 \\
s^2 & 31.6 & 7500K_1 - 7466.4 \\
s^1 & \frac{31.6 \times 7433.8 - (7500K_1 - 7466.4)}{31.6} & 0 \\
s^0 & 7500K_1 - 7466.4 &
\end{array}$$

得：

$$1 < K_1 < 32.3$$