Note on Randomized Response Technique，RRT

BY XING CHAO

xingnix@live.com

对敏感性问题的调查方案，为了能保护个人秘密,使被调查者愿意做出真实回答，产生了相应的统计分析方法——随机化回答技术，包括：

- Warner model
- Simmons model

1 Warner model

由美国统计学家Warner提出,针对要调查的敏感性问题，列出正反两个问题。如：调查考试作弊问题时，出示两个问题：

A：你考试作弊？

B：你考试没有作弊？

然后由被调查者按照给定的概率随机选择一个问题，与自己情况一致则回答"是"，否则回答"否"。 调查者不知道被调查者在回答哪个问题，保证了被调查者个人秘密不被泄露。需要注意的是：选择问题A的概率是确定的。

理论分析如下：

设：

$P(A)$:选择问题A的概率,

$P(B)$:选择问题B的概率,

则有：

$$P(A)+P(B) = 1$$

设：

$P(T)$:回答”是”的概率，

$P(T|A)$:选择问题A并回答”是”的概率,

$P(T|B)$:选择问题B并回答”是”的概率,

$$P(T|A)+P(T|B) = 1$$

如果对n个人进行调查，调查结果中有m个人回答"是"，有$n-m$个人回答"否"，可得：

$$\begin{aligned}
P(T|A)P(A)+P(T|B)P(B) &= P(T)\\
P(T|A)P(A)+(1-P(T|A))(1-P(A)) &= P(T)\\
P(T|A) &= \frac{P(T)+P(A)-1}{2P(A)-1}\\
\hat{P}(T|A) &= \frac{\hat{P}(T)+P(A)-1}{2P(A)-1}\\
&= \frac{\frac{m}{n}+P(A)-1}{2P(A)-1}
\end{aligned}$$

根据二项分布性质可得：

期望

$$\begin{aligned}
E[\hat{P}(T)] &= P(T)\\
E[\hat{P}(T|A)] &= P(T|A)
\end{aligned}$$

方差

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\hat{P}(T)] &= \frac{P(T)(1-P(T))}{n}\\ \mathrm{Var}[\hat{P}(T|A)] &= \frac{P(T)(1-P(T))}{n(2P(A)-1)^2}\end{aligned}$$

2 Simmons model

Warner的方法中回答A的人数比例不能为$\frac{1}{2}$。1967年Simmons对Warner模型进行了改进。调查人员提出两个不相关的问题，其中一个为敏感性问题A,另一个为非敏感性问题B。如：调查考试作弊问题时，出示两个问题：

A：你考试作弊？

B：在心里想一个数字，它是否是奇数？

然后由被调查者按照给定的概率随机选择一个问题。

理论分析如下：

设：

$P(A)$:选择问题A的概率,

$P(B)$:选择问题B的概率,

得：

$$P(A)+P(B) = 1$$

设：

$P(T)$:回答"是"的概率，

$P(T|A)$:选择问题A并回答"是"的概率,

$P(T|B)$:选择问题B并回答"是"的概率,

得：

$$\begin{aligned}P(T|A)P(A)+P(T|B)P(B) &= P(T)\\ P(T|A)P(A)+P(T|B)(1-P(A)) &= P(T)\\ P(T|A) &= \frac{P(T)-P(T|B)(1-P(A))}{P(A)}\\ \hat{P}(T|A|) &= \frac{\hat{P}(T)-P(T|B)(1-P(A))}{P(A)}\end{aligned}$$

根据二项分布性质可得：

期望

$$E[\hat{P}(T|A|)] = P(T|A)$$

方差

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\hat{P}(T)] &= \frac{P(T)(1-P(T))}{n}\\ \mathrm{Var}[\hat{P}(T|A|)] &= \frac{P(T)(1-P(T))}{n(P(A))^2}\end{aligned}$$