

线性离散系统分析

信号采样与保持

Outline

- ① 信号的采样
- ② 采样函数 Laplace 变换性质
- ③ 信号的保持

Topic

① 信号的采样

② 采样函数 Laplace 变换性质

③ 信号的保持

采样信号

- 若采样开关为理想采样开关, 则有:

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

其中 $\delta_T(t)$ 为理想单位脉冲序列:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 得:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

采样信号

- 若采样开关为理想采样开关, 则有:

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

其中 $\delta_T(t)$ 为理想单位脉冲序列:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 得:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

采样信号

- 若采样开关为理想采样开关, 则有:

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

其中 $\delta_T(t)$ 为理想单位脉冲序列:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 得:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

采样信号的 Laplace 变换

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^*(t)) &= \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\mathcal{L}(\delta(t - nT)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs}\end{aligned}$$

采样信号的频谱分析

- 将 $\delta_T(t)$ 以 Fourier 级数表示, 得:

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \\ \omega_s &= \frac{2\pi}{T}\end{aligned}$$

采样信号的频谱分析

- 将 $\delta_T(t)$ 以 Fourier 级数表示, 得:

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \\ \omega_s &= \frac{2\pi}{T}\end{aligned}$$

采样信号的频谱分析 (续)

- 采样

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$$

$$e^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t) e^{jn\omega_s t}$$

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s)$$

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega + n\omega_s))$$

- $e^*(t)$ 的频谱为以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和。
- 设 $e(t)$ 带宽有限, 最高角频率为 ω_h , 则当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时, $e^*(t)$ 频谱的各部分不会相互重叠。

采样信号的频谱分析 (续)

- 采样

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$$

$$e^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t) e^{jn\omega_s t}$$

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s)$$

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega + n\omega_s))$$

- $e^*(t)$ 的频谱为以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和.
- 设 $e(t)$ 带宽有限, 最高角频率为 ω_h , 则当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时, $e^*(t)$ 频谱的各部分不会相互重叠.

采样信号的频谱分析 (续)

- 采样

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}$$

$$e^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t) e^{jn\omega_s t}$$

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s)$$

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega + n\omega_s))$$

- $e^*(t)$ 的频谱为以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和.
- 设 $e(t)$ 带宽有限, 最高角频率为 ω_h , 则当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时, $e^*(t)$ 频谱的各部分不会相互重叠.

Nyquist-Shannon sampling theorem

- 若采样器的输入信号 $e(t)$ 只有有限带宽, 且其最高频率分量为 ω_h ,
- 当采样周期满足

$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

则信号 $e(t)$ 可以完全从 $e^*(t)$ 中恢复出来.

Nyquist-Shannon sampling theorem

- 若采样器的输入信号 $e(t)$ 只有有限带宽, 且其最高频率分量为 ω_h ,
- 当采样周期满足

$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

则信号 $e(t)$ 可以完全从 $e^*(t)$ 中恢复出来.

Nyquist-Shannon sampling theorem

- 若采样器的输入信号 $e(t)$ 只有有限带宽, 且其最高频率分量为 ω_h ,
- 当采样周期满足

$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

则信号 $e(t)$ 可以完全从 $e^*(t)$ 中恢复出来.

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
 - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
 - 按 t_n, t_s 选取, $T = \frac{T_n}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
 - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
 - 按 t_n, t_s 选取, $T = \frac{T_s}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
 - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
 - 按 t_n, t_s 选取, $T = \frac{T_s}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
 - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
 - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

工程中 T 的选取

- T 过小, 增加计算量
- T 过大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验公式:
 - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
 - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

Topic

① 信号的采样

② 采样函数 Laplace 变换性质

③ 信号的保持

采样函数 Laplace 变换性质: $G^*(s) = G^*(s + jk\omega_s)$

● 证明:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\ G^*(s + jk\omega_s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + j(n + k)\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\ &= G^*(s) \end{aligned}$$

采样函数 Laplace 变换性质: $G^*(s) = G^*(s + jk\omega_s)$

● 证明:

$$\begin{aligned} G^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\ G^*(s + jk\omega_s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + j(n + k)\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\ &= G^*(s) \end{aligned}$$

采样函数 Laplace 变换性质: $[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$

● 证明

$$\begin{aligned}[G(s)E^*(s)]^* &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(s + jn\omega_s)E^*(s + jn\omega_s)] \\&= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(s + jn\omega_s)E^*(s)] \\&= \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)\right)E^*(s) \\&= G^*(s)E^*(s)\end{aligned}$$

采样函数 Laplace 变换性质: $[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$

● 证明

$$\begin{aligned}[G(s)E^*(s)]^* &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(s + jn\omega_s)E^*(s + jn\omega_s)] \\&= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(s + jn\omega_s)E^*(s)] \\&= \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)\right)E^*(s) \\&= G^*(s)E^*(s)\end{aligned}$$

Topic

① 信号的采样

② 采样函数 Laplace 变换性质

③ 信号的保持

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t + a_2 (\Delta t)^2 + \cdots + a_m (\Delta t)^m$$

式中 a_0, \cdots, a_m 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0, \cdots, m)$ 惟一确定.

- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t + a_2 (\Delta t)^2 + \cdots + a_m (\Delta t)^m$$

式中 a_0, \cdots, a_m 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0, \cdots, m)$ 惟一确定.

- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t + a_2 (\Delta t)^2 + \cdots + a_m (\Delta t)^m$$

式中 a_0, \cdots, a_m 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0, \cdots, m)$ 惟一确定.

- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t + a_2 (\Delta t)^2 + \cdots + a_m (\Delta t)^m$$

式中 a_0, \cdots, a_m 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0, \cdots, m)$ 惟一确定.

- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.
- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t + a_2 (\Delta t)^2 + \cdots + a_m (\Delta t)^m$$

式中 a_0, \cdots, a_m 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i=0, \cdots, m)$ 惟一确定.

- $m=0$ 时称为零阶保持器,
- $m=1$ 时称为一阶保持器.

零阶保持器

- $e(nT + \Delta t) = a_0$, 当 $\Delta t = 0$ 时, 有 $e(nT) = a_0$, 即: 按常值外推, $e(t) = e(nT), t \in [nT, (n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为 $r^*(t) = \delta(t)$, 则输出为 $e(t) = 1, t \in [nT, (n+1)T)$ 因此

$$\mathcal{L}(r^*) = 1$$

$$\mathcal{L}(e) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}$$

$$G_h(s) = \frac{E(s)}{R^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-jT\omega}}{j\omega} = \frac{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-j\omega T/2}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\omega} e^{-j\pi\omega/\omega_s}$$

零阶保持器

- $e(nT + \Delta t) = a_0$, 当 $\Delta t = 0$ 时, 有 $e(nT) = a_0$, 即: 按常值外推, $e(t) = e(nT), t \in [nT, (n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为 $r^*(t) = \delta(t)$, 则输出为 $e(t) = 1, t \in [nT, (n+1)T)$ 因此

$$\mathcal{L}(r^*) = 1$$

$$\mathcal{L}(e) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}$$

$$G_h(s) = \frac{E(s)}{R^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-jT\omega}}{j\omega} = \frac{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-j\omega T/2}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\omega} e^{-j\pi\omega/\omega_s}$$

零阶保持器

- $e(nT + \Delta t) = a_0$, 当 $\Delta t = 0$ 时, 有 $e(nT) = a_0$, 即: 按常值外推, $e(t) = e(nT), t \in [nT, (n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为 $r^*(t) = \delta(t)$, 则输出为 $e(t) = 1, t \in [nT, (n+1)T)$ 因此

$$\mathcal{L}(r^*) = 1$$

$$\mathcal{L}(e) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}$$

$$G_h(s) = \frac{E(s)}{R^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

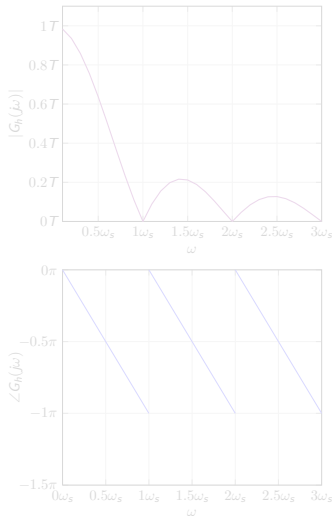
$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-jT\omega}}{j\omega} = \frac{e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-j\omega T/2}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\omega} e^{-j\pi\omega/\omega_s}$$

零阶保持器频率特性

Bode 图

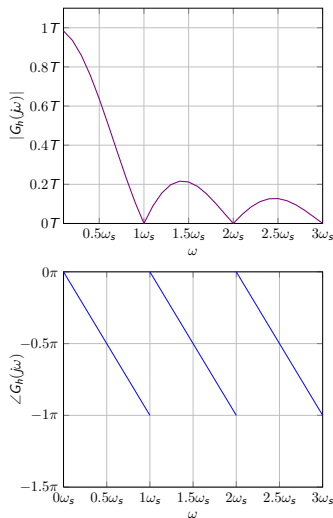


零阶保持器特性

- 低通滤波
- 相角迟后
- 时间延迟

零阶保持器频率特性

Bode 图

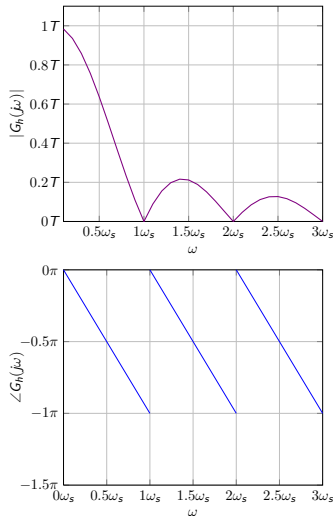


零阶保持器特性

- 低通滤波
- 相角迟后
- 时间延迟

零阶保持器频率特性

Bode 图



零阶保持器特性

- 低通滤波
- 相角迟后
- 时间延迟

一阶保持器

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t, \quad (0 \leq \Delta t < T)$$

$$a_0 = e(nT)$$

$$a_1 = \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T}$$

$$G_h(s) = T(1+s) \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right)^2$$

$$G_h(j\omega) = \sqrt{1 + (\omega T)^2} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 e^{-j(\omega T - \arctan \omega T)}$$

- 高频噪声增大
- 因此一般只用零阶保持器。

一阶保持器

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t, \quad (0 \leq \Delta t < T)$$

$$a_0 = e(nT)$$

$$a_1 = \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T}$$

$$G_h(s) = T(1+s) \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right)^2$$

$$G_h(j\omega) = \sqrt{1 + (\omega T)^2} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 e^{-j(\omega T - \arctan \omega T)}$$

- 高频噪声增大
- 因此一般只用零阶保持器。

一阶保持器

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t, \quad (0 \leq \Delta t < T)$$

$$a_0 = e(nT)$$

$$a_1 = \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T}$$

$$G_h(s) = T(1+s) \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right)^2$$

$$G_h(j\omega) = \sqrt{1 + (\omega T)^2} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 e^{-j(\omega T - \arctan \omega T)}$$

- 高频噪声增大
- 因此一般只用零阶保持器。