非线性系统示例

# 自动控制系统的数学模型 用微分方程描述的数学模型

- 1 简介
- ② 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

非线性系统示例

# Topic

- 1 简介
- 2 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

# 数学模型分类

- 数学模型:描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类
  - 。 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
  - 。 复域 (s):传递函数、结构图
  - 频域 (w): 频率特性

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达式
- 数学模型种类
  - 。 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域(s):传递函数、结构图
  - 频域 (w): 频率特性

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达 式
- 数学模型种类:

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达 式
- 数学模型种类:
  - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达 式
- 数学模型种类:
  - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域 (s): 传递函数、结构图

- 数学模型: 描述系统内部物理量/变量之间关系的数学表达 式
- 数学模型种类:
  - 时域 (t): 微分方程、差分方程、状态方程
  - 复域 (s): 传递函数、结构图
  - 频域 (w): 频率特性

# 建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量,得到仅有输入/输出变量的微分方程

非线性系统示例

# 建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量,得到仅有输入/输出变量的微分方程

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量,得到仅有输入/输出变量的微分方程

### 建模步骤

- ① 列出系统的输入变量、输出变量
- ② 列写系统的原始方程
- ③ 对原始方程进行线性化
- ④ 消去中间变量,得到仅有输入/输出变量的微分方程

- y = f(x) 在  $x_0$  处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$  在  $(x_{10}, x_{20})$  处展升
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$   $y = y_0 + K_1(x x_{10}) + K_2(x x_{20})$
- 增量化方程
  - $\circ$   $dY = v v_0$
  - $\circ$   $dX = x x_0$
  - $\circ$  dY = KdX

- y = f(x) 在  $x_0$  处展开
  - $y = t(x_0) + t'(x_0)(x x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$  在  $(x_{10}, x_{20})$  处展升
  - $y = t(x_{10}, x_{20}) + t_{x1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + t_{x2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$  $y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$
- 增量化方程
  - $\circ$   $dY = v v_0$
  - $\circ$   $dX = x x_0$
  - $\circ$  dY = KdX

- y = f(x) 在  $x_0$  处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$  在  $(x_{10}, x_{20})$  处展升
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x_1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + f_{x_2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$   $y = y_0 + K_1(x x_{10}) + K_2(x x_{20})$
- 增量化方程
  - $\circ$   $dY = v v_0$
  - $\circ$   $dX = x x_0$
  - $\circ$  dY = KdX

• 
$$y = f(x)$$
 在  $x_0$  处展开

• 
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$$

$$y \approx y_0 + k(x - x_0)$$

• 
$$y = f(x_1, x_2)$$
 在  $(x_{10}, x_{20})$  处展开

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$$

$$y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$$

$$\circ$$
  $dY = v - v_0$ 

$$\circ$$
  $dX = x - x_0$ 

$$\circ$$
  $dY = KdX$ 

• 
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$$

$$y \approx y_0 + k(x - x_0)$$

• 
$$y = f(x_1, x_2)$$
 在  $(x_{10}, x_{20})$  处展开

• 
$$y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$$

$$y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$$

- 增量化方程
  - $\circ$   $dY = v v_0$
  - $\circ$  dX = x x
  - $\circ$  dY = KdX

- v = f(x) 在 x₀ 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$  在  $(x_{10}, x_{20})$  处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x x_{10}) + K_2(x x_{20})$
- 增量化方程
  - $\circ$   $dY = y y_0$
  - $\circ$   $dX = x x_0$
  - $\circ$  dY = KdX

- v = f(x) 在 x₀ 处展开
  - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x x_0) + \cdots$
  - $y \approx y_0 + k(x x_0)$
- $y = f(x_1, x_2)$  在  $(x_{10}, x_{20})$  处展开
  - $y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x x_{20}) + \cdots$
  - $y = y_0 + K_1(x x_{10}) + K_2(x x_{20})$
- 增量化方程
  - $dY = y y_0$
  - $dX = x x_0$
  - $\circ$  dY = KdX

• 
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots$$

$$y \approx y_0 + k(x - x_0)$$

• 
$$y = f(x_1, x_2)$$
 在  $(x_{10}, x_{20})$  处展开

• 
$$y = f(x_{10}, x_{20}) + f_{x1}(x_{10}, x_{20})(x - x_{10}) + f_{x2}(x_{10}, x_{20})(x - x_{20}) + \cdots$$

$$y = y_0 + K_1(x - x_{10}) + K_2(x - x_{20})$$

$$\bullet$$
  $dY = y - y_0$ 

• 
$$dX = x - x_0$$

$$\bullet$$
  $dY = KdX$ 

- 1 简介
- ② 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

# 线性微分方程的解

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 。 微分方程:  $a_0 x'(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
  - 特征方程:  $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根  $\lambda_1,...,\lambda_n$  时, 通解为  $v(t) = c_1e^{\lambda_1t} + ... + c_ne^{\lambda_nt}$
- 若有重根  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , 则  $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n}$

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程:  $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
  - 特征方程:  $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根  $\lambda_1,...,\lambda_n$  时, 通解为  $v(t) c_1 \alpha^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \alpha^{\lambda_n t}$
- 若有重根  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , 则  $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n}$

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程:  $a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$
  - 特征方程:  $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根  $\lambda_1,...,\lambda_n$  时, 通解为  $v(t) = c_1e^{\lambda_1t} + ... + c_ne^{\lambda_nt}$
- 若有重根  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , 则  $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程:  $a_0x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = b$
  - 特征方程:  $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根  $\lambda_1,...,\lambda_n$  时, 通解为  $v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$
- 若有重根  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , 则  $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n}$

- 通解由微分方程的特征根决定
  - 微分方程:  $a_0 X'(t) + a_1 X(t) + a_2 X(t) = b$
  - 特征方程:  $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$
- n 阶方程有 n 个互异特征根  $\lambda_1, ..., \lambda_n$  时, 通解为  $v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$
- 若有重根  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , 则  $y(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} + ... + c_n e^{\lambda_n t}$

非线性系统示例

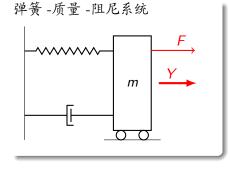
- 条件:
  - 可加性:  $r_1(t) > c_1(t), r_2(t) > c_2(t)$  则:  $r_1(t) + r_2(t) > c_1(t) + c_2(t)$
  - 齐次性:  $r_1(t) > c_1(t)$  则:  $ar_1(t) > ac_1(t)$
- 微积分特性:  $r_1(t) \to c_1(t)$  则  $\int r_1(t) \to \int c_1(t), r_1(t)' \to c_1(t)'$

- 条件:
  - 可加性: 若  $r_1(t) > c_1(t)$ ,  $r_2(t) > c_2(t)$  则:
    - $r_1(t) + r_2(t) > c_1(t) + c_2(t)$
  - 齐次性:  $r_1(t) > c_1(t)$  则:  $ar_1(t) > ac_1(t)$
- 微积分特性: r₁(t) → c₁(t) 则  $\int r_1(t) \rightarrow \int c_1(t), r_1(t)' \rightarrow c_1(t)'$

# Topic

- 1 简介
  - 2 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例

# 机械系统示例.



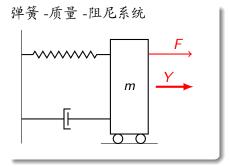
- 输入: F(t), 输出: Y(t)
- 原始为程:F kY(t) fv = ma
- 消去中间变量:

$$\circ \ \ v = Y'(t)$$

• 
$$mY'' + fY' + kY = F$$

### 机械系统示例 1

简介



- 輸入: F(t),輸出: Y(t)
- 原始方程:F kY(t) fv = ma

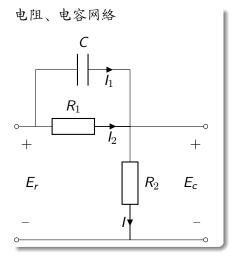
$$v = Y'(t)$$

$$mY'' + fY' + kY = F$$

非线性系统示例

# Topic

- 1 简介
- 2 线性微分方程与线性系统
- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 4 电气系统示例
- 5 非线性系统示例



- 输入: E<sub>r</sub>, 输出 E<sub>c</sub>
- 原始方程

$$I = I_1 + I_2$$

$$E_c = R_2 I$$

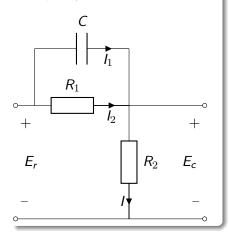
$$E_r = R_1 I_2 + E_c$$

$$C(E_r - E_c)' = I_1$$

$$R_1 CE'_c + \frac{R_1 + R_2}{R_2} E_c = R_1 CE'_r + E_r$$

#### 电阻、电容网络

简介



- 输入: Er, 输出 Ec
- 原始方程:

• 
$$I = I_1 + I_2$$

$$\bullet \ E_c = R_2 I$$

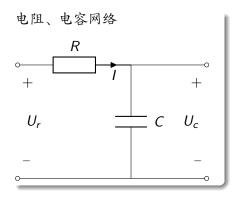
$$\bullet E_r = R_1 I_2 + E_c$$

• 
$$C(E_r - E_c)' = I_1$$

• 
$$R_1 CE'_c + \frac{R_1 + R_2}{R_2} E_c = R_1 CE'_r + E_r$$

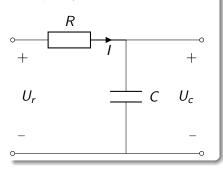
非线性系统示例

# 电气及机电系统示例 2



- 输入: U<sub>r</sub>, 输出: U<sub>c</sub>
- $U_r = RI + U_c , CU'_c =$
- 消去 I, RCU'<sub>c</sub> + U<sub>c</sub> = U

#### 电阻、电容网络



- 输入: U<sub>r</sub>, 输出: U<sub>c</sub>
- $U_r = RI + U_c , CU'_c = I$
- 消去 I, RCU'<sub>c</sub> + U<sub>c</sub> = U<sub>r</sub>

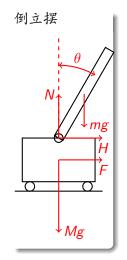
非线性系统示例

# Topic

- ③ 机械系统示例 (因果关系: 力与位移的关系)
- 5 非线性系统示例

非线性系统示例

# 倒立摆系统线性化模型



• 
$$(M+m)r'' + ml\cos(\theta)\theta'' - ml\sin(\theta)(\theta')^2 = R$$

• 
$$ml\cos(\theta)r'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\sin(\theta)$$

线性化 (
$$\theta \to 0$$
,  $\sin(\theta) \approx \theta$ ,  $\cos(\theta) \approx 1$ )

$$(M+m)r'' + ml\theta'' = F$$

• 
$$mlr'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\theta$$

# 倒立摆 mg

- 輸入 F. 輸出 θ, r
- 原始方程:
  - 小车水平方向: Mr" = F − H
  - 杆水平方向:  $m(r + lsin(\theta))'' = H$
  - 杆竖直方向:  $m(lcos(\theta))'' = N mg$
  - 杆转动:  $J\theta'' = NIsin(\theta) HIcos(\theta)$
- 整理后:

• 
$$(M+m)r'' + ml\cos(\theta)\theta'' - ml\sin(\theta)(\theta')^2 = F$$

• 
$$ml\cos(\theta)r'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\sin(\theta)$$

• 线性化 (
$$\theta \to 0$$
,  $\sin(\theta) \approx \theta$ ,  $\cos(\theta) \approx 1$ )

$$(M+m)r'' + ml\theta'' = F$$

• 
$$mlr'' + (J + ml^2)\theta'' = mgl\theta$$