自动控制原理 2014



线性系统的根轨迹 法

邢超

线性系统的根轨迹法

根轨迹绘制基本法则

邢超

西北工业大学航天学院

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴的交点

根轨迹分支数、对称性和连续性



线性系统的根轨迹 法

邢超

- 根轨迹分支数等于开环零点数与开环极点数中的较大者,即 max(m,n)
- 根轨迹关于实轴对称
- 根轨迹是连续的

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与分离角

根轨迹与虚轴的交点

开环零极点数相等时



$$\mathcal{K}^* \frac{\prod\limits_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod\limits_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$
 (1)

 $\prod (s - p_i) + K^* \prod (s - z_j) = 0$

 $\frac{1}{K^*} \prod_{i=1}^{n} (s - p_i) + \prod_{i=1}^{m} (s - z_j) = 0$

线性系统的根轨迹 法 邢超

根轨迹分支数、对

称性和连续性 根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

(2)

(3)

根轨迹在实轴上 的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点

根之和 (n-1 > m)

• 起点: 开环极点

• 终点: 开环零点

3/18

开环极点数大于零点数



线性系统的根轨迹 法

邢超

$$\mathcal{K}^* = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} |s - p_i|}{\prod\limits_{j=1}^{m} |s - z_j|}$$

$$\mathcal{K}^* = \frac{|s|^{n-m} \prod\limits_{i=1}^{n} |1 - \frac{p_i}{s}|}{\prod\limits_{i=1}^{m} |1 - \frac{z_j}{s}|}$$

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

(5) 根轨迹的起始角与 终止角

> 根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点



邢超

$$K^* \frac{1}{(s-c)^{n-m}} \approx -1 \tag{6}$$

$$K^* \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (1 - \frac{z_j}{s})}{s^{n-m} \prod\limits_{j=1}^{n} (1 - \frac{\varrho_j}{s})} \approx \frac{K^*}{s^{n-m} (1 - \frac{c}{s})^{n-m}} \qquad (7)$$

$$(1-\frac{c}{s})^{n-m}\prod_{j=1}^{m}(1-\frac{z_j}{s}) \approx \prod_{i=1}^{n}(1-\frac{p_i}{s})$$

根轨迹的起点 和终点 根轨迹的渐近线

根轨迹分支数、对称性和连续性

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与终止角

於正用 根轨迹的分离点与

分离角 根轨迹与虚轴

根轨迹与虚轴 的交点

(8)

根轨迹的渐近线



线性系统的根轨迹 法

邢超

$$(1 - \frac{c}{s})^{n-m} =$$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{p_i}{s}) =$$

林性和连续性根轨迹的起点

(9)

和终点

根轨迹分支数、对

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上 的分布

(11) 根轨迹的起始角与 终止角

> 根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴的交点



邢超

$$(1-\frac{c}{s})^{n-m} = 1-\frac{(n-m)c}{s}+\cdots$$
 (9)

$$\prod_{i=1}^{m} (1 - \frac{z_i}{s}) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{p_i}{s}) =$$

 根轨迹分支数、对 称性和连续性

(10)

根轨迹的起点和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

(11) 根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与分离角

根轨迹与虚轴 的交点



邢超

$$(1 - \frac{c}{s})^{n-m} = \tag{9}$$

$$\prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{z_j}{s}\right) = 1 - \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} z_j}{s} + \cdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{p_i}{s}) =$$

根轨迹的起点 和终点

根轨迹分支数、对称性和连续性

根轨迹的渐近线根轨迹在实轴上

(10)

(11)

的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴的交点

根轨迹的渐近线



线性系统的根轨迹 法

邢超

$$(1 - \frac{c}{s})^{n-m} =$$

$$\prod_{j=1}^{m} (1 - \frac{z_j}{s}) =$$

(11)

$\prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{p_i}{s}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{s} + \cdots$

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上 的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与分离角

根轨迹与虚轴



邢超

$$(1-\frac{c}{s})^{n-m} = 1-\frac{(n-m)c}{s}+\cdots$$
 (9)

根轨迹分支数、对 称性和连续性

$$\prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{z_j}{s}\right) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{j} z_j}{s} + \cdots$$

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上

的分布

根轨迹的起始角与 终止角

(11)根轨迹的分离点与 分离角

(10)

根轨迹与虚轴 的交点

根之和

(n-1 > m)



邢超

$$1 - \frac{(n-m)c}{s} - \frac{\sum_{j=1}^{m} z_j}{s} + \cdots \approx 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}}{s} + \cdots$$
$$-(n-m)c - \sum_{i=1}^{m} z_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$$
(12)

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i} - \sum_{j=1}^{m} z_{j}}{n - m}$$
 (13)

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上 的分布

根轨迹的起始角与终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点

根轨迹在实轴上的分布 $s \in R($ 开环零极点全为实数)



$$\mathcal{K}^* \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (s - z_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (s - p_i)} = -1$$
 (14)

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

(15)

(16)

根轨迹在实轴上

根轨迹的起始角与

终止角

根轨迹的分离点与

分离角

根轨迹与虚轴 的交点

根之和

(n-1 > m)

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{m} A_i} = -1$$

$$K^* \frac{\prod_{i=1}^{m} |\rho_i|}{\prod_{i=1}^{n} |A_i|} \frac{j = 1(-1)^q}{(-1)^r} = -1$$

实轴上某区域,若其右边开环实数零、极点个数之和为奇 数,则该区域必是根轨迹。

根轨迹在实轴上的分布 $s \in R($ 开环零极点存在共轭复数)



线性系统的根轨迹 法

邢超

$$K^*G_q(s)(s-z_q)(s-\bar{z}_q) = -1$$
 (17)
 $K^*G_i(s)(s-a-jb_q)(s-a+jb_q) = -1$ (18)

 $K^*G_i(s)((s-a)^2+b_q^2) = -1$ (19)

实轴上某区域,若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数,则该区域必是根轨迹。

根轨迹分支数、对称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与分离角

根轨迹与虚轴 的交点



线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

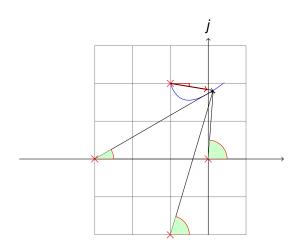
根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点





线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

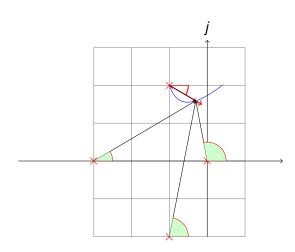
根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上 的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点





线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

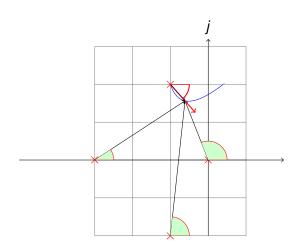
根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点





线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

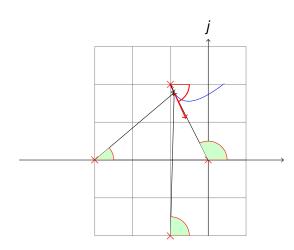
根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与分离角

根轨迹与虚轴 的交点





线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

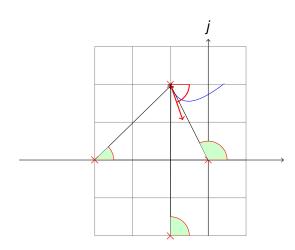
根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点



起始角

$$\sum_{l=1}^{m} \angle(\mathbf{s} - \mathbf{z}_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(\mathbf{s} - \mathbf{p}_i) = (2k+1)\pi$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{p}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta}$$

$$\sum_{l=1}^{m} \angle(\mathbf{p}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta} - \mathbf{z}_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(\mathbf{p}_q + \delta r \mathbf{e}^{i\theta} - \mathbf{p}_i) = (2k+1)\pi$$

$$\lim_{\delta r \to 0} \sum_{l=1}^{m} \angle(\mathbf{p}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta} - \mathbf{z}_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(\mathbf{p}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta} - \mathbf{p}_i) = (2k+1)\pi$$

$$\sum_{l=1}^{m} \angle(\mathbf{p}_q - \mathbf{z}_l) - \sum_{p_q = p_i} \theta - \sum_{p_q \neq p_i} \angle(\mathbf{p}_q - \mathbf{p}_i) = (2k+1)\pi$$

终止角

$$\sum_{l=1}^{m} \angle(\mathbf{s} - \mathbf{z}_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(\mathbf{s} - \mathbf{p}_i) = (2\mathbf{k} + 1)\pi$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{z}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta}$$

$$\sum_{l=1}^{m} \angle(\mathbf{z}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta} - \mathbf{z}_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(\mathbf{z}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta} - \mathbf{p}_i) = (2\mathbf{k} + 1)\pi$$

$$\lim_{\delta r \to 0} \sum_{l=1}^{m} \angle(\mathbf{z}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta} - \mathbf{z}_l) - \sum_{i=1}^{n} \angle(\mathbf{z}_q + \delta r \mathbf{e}^{j\theta} - \mathbf{p}_i) = (2\mathbf{k} + 1)\pi$$

$$\sum_{\mathbf{z}_q \neq \mathbf{z}_l} \angle(\mathbf{z}_q - \mathbf{z}_l) + \sum_{\mathbf{z}_q = \mathbf{z}_l} \theta - \sum_{i=1}^{n} \angle(\mathbf{z}_q - \mathbf{p}_i) = (2\mathbf{k} + 1)\pi$$

分离点与分离角



线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点

分离点与分离角



线性系统的根轨迹 法

邢超

分离点:两条或两条以上根轨迹分支在 S 平面上相交后又分开的点称为根轨迹的分离点。

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上 的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与分离角

根轨迹与虚轴的交点

分离点与分离角



线性系统的根轨迹 法

邢超

- 分离点:两条或两条以上根轨迹分支在 S 平面上相交后又分开的点称为根轨迹的分离点。
- 分离角:根轨迹进入分离点的切线方向与离开分离点的切线方向之间的夹角

根轨迹分支数、对称性和连续性

根轨迹的起点和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与分离角

根轨迹与虚轴 的交点



$$G(s) = \frac{K^*M(s)}{N(s)}$$

$$D(s) = N(s) + K^*M(s)$$

$$N(s) = -K^*M(s) \qquad D(s) = 0$$

$$N'(s) = -K^*M'(s) \qquad D'(s) = 0$$

$$\frac{N'(s)}{N(s)} = \frac{M'(s)}{M(s)}$$

$$\frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}{\prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - z_j}$$

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上 的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与

根轨迹与虚轴 的交点

分离角计算:

设 $K^* = K_0$ 时有重极点。可将原特征方程变换

$$D(s) = N(s) + K^*M(S)$$

$$D(s) = N(s) + (K' + K_0)M(S)$$

$$D(s) = N(s) + K_0M(S) + K'M(s)$$

$$D'(s) = N'(s) + K'M(s)$$

- 原系统的分离点等于新系统的起始点
- 分离角等于 180° 根轨迹与 0 度根轨迹起始角之差
 - 180° 根轨迹起始角: θ₁
 - 0 度根轨迹起始角: θ_2
 - 其它零(极)点到分离点的辐角之和(差): θ_2

$$L\theta_1 = \theta_0 + (2k_1 + 1)\pi$$

$$L\theta_2 = \theta_0 + 2k_2\pi$$

$$L\Delta\theta = (2(k_1 - k_2) + 1)\pi$$

$$\Delta\theta = \frac{(2k + 1)\pi}{I}$$



线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上 的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点

根轨迹与虚轴的交点



线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与分离角

根轨迹与虚轴 的交点

根之和 (n-1 > m)

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$s = j\omega$$

$$1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

根之和 (n-1 > m)



线性系统的根轨迹 法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点和终点

根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上 的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与

分离角 根轨迹与虚轴

的交点 根之和

根之和
$$(n-1>m)$$

$$\prod_{i=1}^{n} (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^{m} (s - z_j) = 0$$

$$\prod_{i=1}^{n} (s - p_i) = s^n + \sum_{i=1}^{n} (-p_i) s^{n-1} + \cdots$$

$$\prod_{j=1}^{m} (s - z_j) = s^m + \sum_{j=1}^{m} (-z_j) s^{m-1} + \cdots$$

$$\prod_{j=1}^{n} (s - p_j) + K^* \prod_{j=1}^{m} (s - z_j) = s^n + \sum_{j=1}^{n} (-p_j) s^{n-1} + \cdots$$

根之和 (n-1 > m)



$$\prod_{i=1}^{n} (s - s_i) = s^n + \sum_{i=1}^{n} (-s_i) s^{n-1} + \cdots$$
 $\sum_{i=1}^{n} (-p_i) s^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-s_i) s^{n-1}$
 $\sum_{i=1}^{n} (-p_i) = \sum_{i=1}^{n} (-s_i)$
 $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} s_i$

 $\prod (s - p_i) + K^* \prod (s - z_i) = \prod (s - s_i)$

 $\prod_{i=1} (s-p_i) + \mathcal{K}^* \prod_{i=1} (s-z_i) = s^n + \sum_{i=1}^n (-p_i) s^{n-1} + \cdots$ 线性系统的根轨迹法

邢超

根轨迹分支数、对 称性和连续性

根轨迹的起点 和终点 根轨迹的渐近线

根轨迹在实轴上

的分布

根轨迹的起始角与 终止角

根轨迹的分离点与 分离角

根轨迹与虚轴 的交点 根之和

(n-1>m)